Verallgemeinerte Morrey-Folgenräume

grundlegende Eigenschaften, Einbettungen und Beispiele

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Science (B.Sc.)

im Studiengang Mathematik

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von Rahel Mara Koch

geb. am 20.09.2000 in Ilmenau

Betreuerin: Prof. Dr. D. D. Haroske

Jena, 02.03.2023

Zusammenfassung

In dieser Arbeit soll es um die verallgemeinerten Morrey-Folgenräume gehen. Als Grundlage dazu dienen die klassischen Morrey-Folgenräume $m_{u,p}$, welche genau die Folgen enthalten, deren Norm

$$\|\cdot|m_{u,p}\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |\cdot|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 0 < p \leq u < \infty$$

endlich ist.

Die elementaren Eigenschaften von $m_{u,p}$ werden hier im ersten Kapitel thematisiert. Wir werden feststellen, dass diese Räume (Quasi-) Banachräume sind, aber nicht die Eigenschaft der Separabilität besitzen. Außerdem stimmen sie für bestimmte Parameter u und p mit den ℓ_p-Räumen überein und charakterisieren deshalb eine Verallgemeinerung dieser. Zudem sind sie immer in ℓ_∞ eingebettet, doch auch zwischen verschiedenen Morrey-Folgenräumen lassen sich Aussagen über die Teilmengenbeziehungen treffen.

Im zweiten Kapitel definieren wir dann die Verallgemeinerung dieser Räume, indem der Parameter u durch eine geeignete Funktion φ ersetzt wird. Somit ergibt sich die neue Norm

$$\left\|\cdot|m_p^\varphi\right\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(\ell(Q_{-j,m})) \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |\cdot|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Diese verallgemeinerten Morrey-Folgenräume m_p^φ weisen viele Ähnlichkeiten zu den klassischen Morrey-Folgenräumen auf. Denn auch diese sind (Quasi-) Banachräume und verallgemeinern die ℓ_p-, aber auch unter bestimmten Bedingungen die $m_{u,p}$-Räume. Außerdem lassen sich wieder Eigenschaften im Zusammenhang mit der Einbettung bestimmen, jedoch hier mithilfe der Funktionenklasse $\mathcal{G}_p$. Diese bietet hilfreiche Voraussetzungen, weshalb wir φ oftmals aus dieser Klasse wählen werden.

Zuletzt wollen wir konkrete Beispiele für φ und den zugehörigen Räumen betrachten.

Inhaltsverzeichnis

1 Morrey-Folgenräume

1.1 Definitionen

Bevor wir uns den Morrey-Folgenräumen widmen, führen wir zuvor ein paar wichtige Definitionen ein.
Als Grundlage unserer späteren Überlegungen dienen die bekannten L_p- bzw. ℓ_p-Räume.

Definition 1 L_p-Raum
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar. Für $0 < p < \infty$ wird

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \textit{ ist } \lambda_d\textit{-messbar}, \|f|\mathcal{L}_p\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \textit{ ist } \lambda_d\textit{-messbar},\\ \|f|\mathcal{L}_\infty\| = \inf\{c > 0 : \lambda_d\left(\{x \in \Omega : |f(x)| > c\}\right) = 0\} < \infty\}\end{aligned}$$

definiert, wobei λ_d das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.
Damit $\|\cdot|\mathcal{L}_p\|$ für $0 < p \leq \infty$ eine Norm darstellt, werden die Äquivalenzklasssen

$$\begin{aligned}L_p(\Omega) = \mathcal{L}_p/\mathcal{N} = \{[f] = f + \mathcal{N} : f \in \mathcal{L}_p(\Omega)\} \textit{ mit}\\ \mathcal{N} = \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \ \lambda_d\textit{-messbar}, f = 0 \ \lambda_d\textit{-fast-überall auf } \Omega\},\end{aligned}$$

die sogenannten Lebesgue-Räume, definiert.

Definition 2 ℓ_p-Folgenraum [4]
Für $0 < p < \infty$ *werden*

$$\ell_p(\mathbb{Z}^d) = \{a = \{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C} : \|a|\ell_p\| = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

$$\ell_\infty(\mathbb{Z}^d) = \{a = \{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C} : \|a|\ell_\infty\| = \sup_{j\in\mathbb{Z}^d} |a_j| < \infty\} \text{ und}$$

$$\ell_{u,\infty}(\mathbb{Z}^d) = \{a = \{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C} : \|a|\ell_{u,\infty}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} n^{\frac{1}{u}} a_n^* < \infty\},$$

definiert, falls $\{a_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ *die monoton fallende Umordnung einer Folge* $a = \{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$, $a \in \ell_u(\mathbb{Z}^d)$, *für* $0 < u < \infty$, *ist.*

Des Weiteren wird der Morrey-(Funktionen-)Raum mit Hilfe des Raums der lokal-p-integrierbaren Funktionen L_p^{loc} bestimmt.

Definition 3 Morrey-Raum $\mathcal{M}_{u,p}$ [9]
Sei $0 < p \leq u < \infty$. *Dann ist der Morrey-Raum definiert als*

$$\mathcal{M}_{u,p}(\mathbb{R}^d) = \{f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^d) : \|f|\mathcal{M}_{u,p}(\mathbb{R}^d)\| < \infty\}$$

mit

$$\|f|\mathcal{M}_{u,p}(\mathbb{R}^d)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d, R>0} R^{\frac{d}{u}-\frac{d}{p}} \left(\int_{B(x,R)} |f(y)|^p dy\right)^{1/p}$$

und

$$L_p^{loc} = \left\{f \text{ messbar } : \int_K |f(x)|^p dx < \infty \text{ für alle kompakten } K \subset \mathbb{R}^d\right\}.$$

$B(x,R)$ *ist hier die Kugel um* x *mit Radius* R.

Bemerkung 4
Der Morrey-Raum $\mathcal{M}_{u,p}$ stellt eine Verallgemeinerung des Lebesgue-Raums L_p dar. Dazu wurde bereits in [9, Theorem 16] gezeigt, dass

$$\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R}^d) = L_p(\mathbb{R}^d)$$

gilt. Auch dass $\mathcal{M}_{u,p}(\mathbb{R}^d) = \{0\}$ ist, falls $u < p$, wurde in [9, Proposition 15], festgestellt.

Eine sehr wichtige Definition ist die des dyadischen Würfels. Anhand dieser können wir später den Morrey-Folgenraum definieren.

Definition 5 Dyadischer Würfel $Q_{j,m}$
Ein dyadischer Würfel ist für $j \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z}^d$ definiert durch

$$Q_{j,m} = 2^{-j}(m + [0,1)^d).$$

Seine Seitenlänge beträgt 2^{-j}.

Für $j \in \mathbb{N}$ ist die Seitenlänge dieser Würfel kleiner als 1, weshalb man sie als „kleine Würfel“ bezeichnet. Dementsprechend sind alle Würfel $Q_{j,m}$ mit $-j \in \mathbb{N}$ „große Würfel“. $Q_{0,m}$ ist der um m verschobene Einheitswürfel.

In Analogie zu Bemerkung 4 lässt sich ℓ_p ebenfalls zum Morrey-Folgenraum $m_{u,p}$ erweitern, welcher in [4] wie folgt definiert wurde.

Definition 6 Morrey-Folgenraum $m_{u,p}$
Sei $0 < p \leq u < \infty$. Dann wird der Morrey-Folgenraum $m_{u,p}$ durch

$$m_{u,p} = m_{u,p}(\mathbb{Z}^d) = \{\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C} : \|\lambda|m_{u,p}\| < \infty\}$$

für

$$\|\lambda|m_{u,p}\| = \sup_{j \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k: Q_{0,k} \subset Q_{-j,m}} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

definiert, wobei $Q_{-j,m}$ einen dyadischen Würfel bezeichnet.

Beispiel
Ein Beispiel eines dyadischen Würfels ist $Q_{-1,(0,0)} = 2 \cdot ((0,0) + [0,1)^2) \subset \mathbb{R}^2$ (siehe Abb. 1.1), welcher ein Quadrat mit Seitenlänge 2 beschreibt, dessen linke untere Ecke auf dem Koordinatenursprung liegt. Dabei sind die Ränder der rechten und oberen Kante nicht inbegriffen. Für den Fall $m \neq (0,0)$ befindet sich die entsprechende Ecke im Punkt $2^{-j} \cdot m$.

Innerhalb der Definition der Norm in $m_{u,p}$ trifft man auf die Menge $\{k \in \mathbb{Z}^d : Q_{0,k} \subset Q_{-j,m}\}$ für $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$. Diese besteht aus allen Punkten k, für die der Einheitswürfel mit linker unterer Ecke auf k vollständig im Würfel $Q_{-j,m}$ enthalten ist. In dem obigen Beispiel wäre dies also die Menge $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ (in Abb. 1.1 durch rote Kreuze visualisiert).

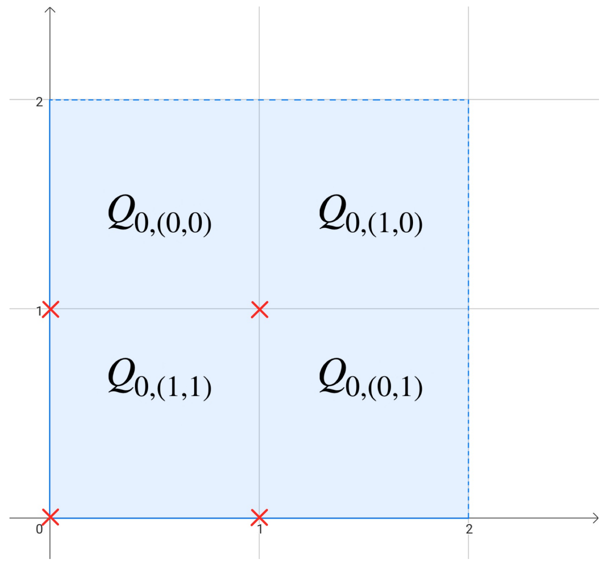

Abbildung 1.1: Der Würfel $Q_{-1,(0,0)}$ (in blau) mit den vier enthaltenen Würfeln $Q_{0,k}$. $k \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ als (rote) Kreuze dargestellt.

Bemerkung 7

Eine weitere wichtige Anmerkung ist die Relation

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d;R>0} R^{\frac{d}{u}-\frac{d}{p}} \left(\int_{B(x,R)} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} \sim \sup_{x\in\mathbb{R}^d;R>0} |B(x,R)|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,R)} |f(y)|^p dy\right)^{1/p}$$
$$\sim \sup_{m\in\mathbb{Z}^d;j\in\mathbb{Z}} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{-j,m}} |f(y)|^p dy\right)^{1/p}$$

im Sinne äquivalenter Normen in $\mathcal{M}_{u,p}$. Die Idee des Beweises dazu ist, jeweils die Variablen R, j und m so zu wählen, dass beispielsweise die Kugel $B(x,R)$ in einem Würfel $Q_{-j,m}$ enthalten ist, aber gleichzeitig auch selbst einen kleineren dyadischen Würfel enthält. Man verlangt also, dass

$$2^j \geq 2R \text{ und } 2^{j-n} \leq 2R, \text{ für ein } n = 0,\ldots,j.$$

Abb. 1.2 zeigt diesen Zusammenhang für das Beispiel $j = R = 3$ und $n = 2$. Mithilfe dessen lässt sich die Kugel zu einem Würfel vergrößern und der Betrag $|B(x,R)|$ gleichzeitig nach unten durch den Betrag eines kleineren Würfels abschätzen. Dieser ist proportional zum Betrag des größeren Würfels.
Dieselbe Vorgehensweise lässt sich auch auf $Q_{-j,m}$ übertragen, indem dieser von zwei entsprechenden Kugeln eingeschachtelt wird.

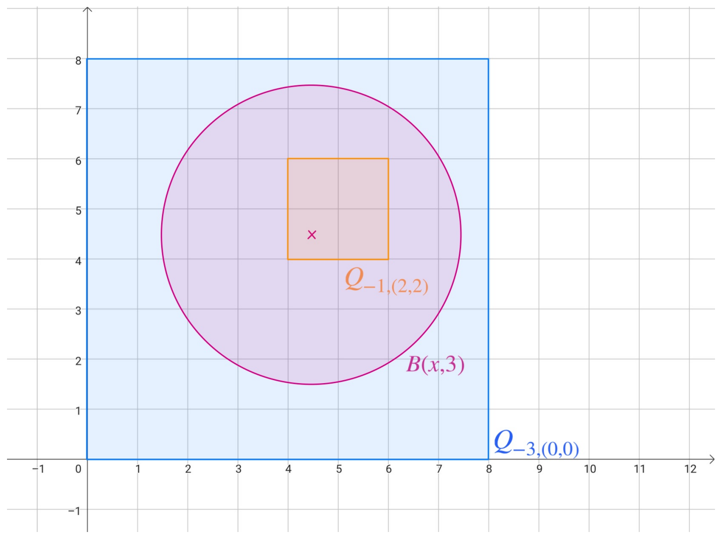

Abbildung 1.2: Die dyadischen Würfel $Q_{-3,(0,0)}$ (blau) und $Q_{-1,(2,2)}$ (orange) schachteln die Kugel $B(x,3)$ (rosa) ein.

Bemerkung 8

Aus der Forderung $p \leq u$ resultiert, dass $\frac{1}{u} \leq \frac{1}{p}$ ist und demnach

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{p} \leq 0. \tag{1.1}$$

Daraus folgt, dass $|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} = 2^{jd(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})}$ monoton fallend ist für wachsende $j \in \mathbb{N}_0$.

Die vorige Definition 6 lässt sich folgendermaßen durch den Fall $u = \infty$ ergänzen.

Definition 9 Morrey-Folgenraum $m_{\infty,p}$

Für $0 < p \leq u = \infty$ definiert man

$$\begin{aligned} m_{\infty,p}(\mathbb{Z}^d) =& \{\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C} : \\ & \|\lambda|m_{\infty,p}\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}. \end{aligned}$$

Im Fall $p = u = \infty$ wird die Summe durch $\sup_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |\lambda_k|$ ersetzt.

1.2 Elementare Eigenschaften von $m_{u,p}(\mathbb{Z}^d)$

Die folgenden Eigenschaften und Beweise sind, wenn nicht anders gekennzeichnet, aus [4] entnommen.

Die aufgestellte Behauptung, $m_{u,p}$ sei eine Verallgemeinerung von ℓ_p, basiert auf folgendem Satz.

Satz 10
Sei $0 < p < \infty$. *Dann ist* $m_{p,p} = \ell_p$.

`Beweis:`
Sei $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$. Dann gilt

$$\|\lambda|m_{p,p}\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \underbrace{|\lambda_k|^p}_{\geq 0}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\lambda|\ell_p\|.$$

Dies zeigt, dass die Normen übereinstimmen. □

Bemerkung 11
Doch $m_{u,p}$ steht nicht nur in Beziehung zu ℓ_p, sondern ebenfalls zum Funktionenraum $\mathcal{M}_{u,p}$. Betrachten wir dazu eine Folge $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ aus $m_{u,p}$ und die zugehörige Funktion $f_\lambda := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_k \chi_{Q_{0,k}}$ (χ_A bezeichnet hier die charakteristische Funktion einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$).
Für die Norm von f_λ folgt durch Bemerkung 7

$$\|f_\lambda|\mathcal{M}_{u,p}\| \sim \sup_{j\in\mathbb{Z};m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{-j,m}} |f_\lambda(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Funktion in $\mathcal{M}_{u,p}$ liegt. Dazu müssen zwei Fälle unterschieden werden.
1. Fall: $j \geq 0$
Da hier die großen Würfel betrachtet werden, kann $Q_{-j,m}$ in die Einheitswürfel $Q_{0,\ell}$ für $\ell \in \mathbb{Z}^d$

zerlegt werden. Dadurch folgt

$$\int_{Q_{-j,m}} |f_\lambda(y)|^p dy = \sum_{\ell:Q_{0,\ell}\subset Q_{-j,m}} \underbrace{\int_{Q_{0,\ell}} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_k \chi_{Q_{0,k}}(y)\Big|^p dy}_{=\begin{cases} |\lambda_k|^p, & k=\ell \\ 0, & k\neq\ell \end{cases}} = \sum_{\ell:Q_{0,\ell}\subset Q_{-j,m}} |\lambda_\ell|^p$$

und somit auch

$$\begin{aligned} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{-j,m}} |f_\lambda(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} &= |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\ell:Q_{0,\ell}\subset Q_{-j,m}} |\lambda_\ell|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\ell:Q_{0,\ell}\subset Q_{-j,m}} |\lambda_\ell|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\lambda|m_{u,p}\| < \infty. \end{aligned}$$

Da $j \geq 0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$ auf der linken Seite beliebig gewählt sind, gilt die Ungleichung auch für das Supremum über alle j und m. Also folgt

$$\sup_{j\geq 0;m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{-j,m}} |f_\lambda(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

<u>2. Fall: $j < 0$</u>

$Q_{-j,m}$ hat in diesem Fall eine kleinere Seitenlänge als der Einheitswürfel, ist also in einem bestimmten Würfel Q_{0,k_0} enthalten (siehe Abb. 1.3). Deshalb folgt

$$\int_{Q_{-j,m}} |f_\lambda(y)|^p dy = \int_{Q_{-j,m}} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_k \chi_{Q_{0,k}}(y)\Big|^p dy = |\lambda_{k_0}|^p \int_{Q_{-j,m}} 1\ dy = |\lambda_{k_0}|^p \underbrace{|Q_{-j,m}|}_{=2^{jd}}.$$

Nun lässt sich diese Gleichung durch die $\frac{1}{p}$-te Potenz und Multiplikation mit $|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}}$ umformen und erhält, dass

$$|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{-j,m}} |f_\lambda(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda_{k_0}|\, 2^{\frac{jd}{p}+jd(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})} \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} |\lambda_k| \underbrace{2^{\frac{jd}{u}}}_{\substack{\leq 1, \\ \text{da } j<0}} \leq \|\lambda|\ell_\infty\|.$$

Nach linksseitiger Supremumsbildung gilt dann

$$\sup_{j<0;m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{-j,m}} |f_\lambda(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\lambda|\ell_\infty\|.$$

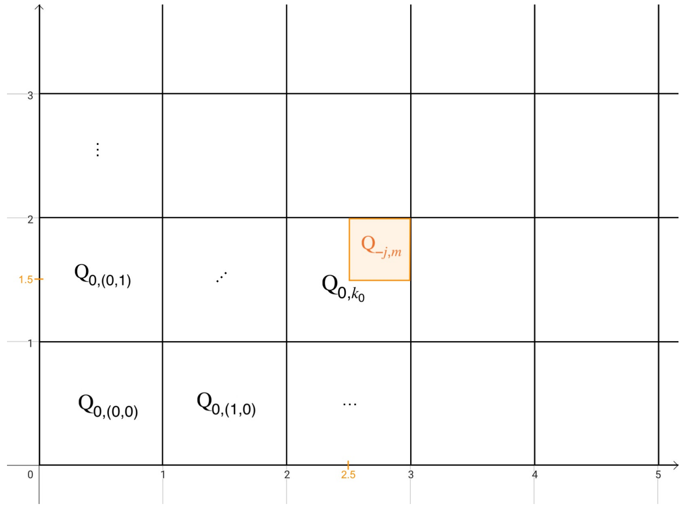

Abbildung 1.3: Beispiel eines kleinen Würfels $Q_{-j,m}, j < 0$ (orange), welcher in Q_{0,k_0} enthalten ist. In diesem Fall ist die Dimension $d = 2$, $j = -1$ und $m = (5,3)$, sodass $Q_{-j,m} = Q_{1,(5,3)} = 2^{-1}((5,3) + [0,1)^2) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) + [0, \frac{1}{2})^2$ in $Q_{0,k_0} = Q_{0,(2,1)}$ liegt.

Später in Satz 13 *ii*) wird außerdem bewiesen, dass immer $\|\lambda|\ell_\infty\| \le \|\lambda|m_{u,p}\|$ gilt.
Aus diesen beiden Fällen folgt somit

$$\sup_{j\in\mathbb{Z};m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{-j,m}} |f_\lambda(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \le \|\lambda|m_{u,p}\| < \infty,$$

also ist f_λ in $\mathcal{M}_{u,p}$.
Umgekehrt gilt: ist ein f_0 in $\mathcal{M}_{u,p}$, dann folgt für $\lambda^0 = \{\lambda_k^0\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ mit $\lambda_k^0 := \left(\int_{Q_{0,k}} |f_0(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, dass $\|\lambda^0|m_{u,p}\| \le c \cdot \|f_0|\mathcal{M}_{u,p}\| < \infty$ für ein $c > 0$. Denn

$$\begin{aligned}
\left\|\lambda^0|m_{u,p}\right\| &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \left|\left(\int_{Q_{0,k}} |f_0(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{-j,m}} |f_0(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{j\in\mathbb{Z};m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{-j,m}} |f_0(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{Bem. 7}}{\le} c \cdot \sup_{R>0;x\in\mathbb{R}^d} R^{\frac{d}{u}-\frac{d}{p}} \left(\int_{B(x,R)} |f_0(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = c \cdot \|f_0|\mathcal{M}_{u,p}\| < \infty.
\end{aligned}$$

Also ist λ_0 in $m_{u,p}$. Aufgrund dieser Überlegungen stellt $m_{u,p}$ das diskrete Gegenstück zu $\mathcal{M}_{u,p}$ dar.

Weitere elementare Eigenschaften von $m_{u,p}$ werden in den folgenden Sätzen erläutert.

Satz 12
Sei $0 < p \leq u < \infty$. Dann ist $m_{u,p}$ ein (Quasi-) Banachraum.

`Beweis:`
Sei $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ und $0 < p \leq u < \infty$.

Als Erstes ist zu zeigen, dass $\|x|m_{u,p}\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ eine (Quasi-) Norm definiert.
Durch die Absolutbeträge ist leicht zu erkennen, dass $\|x|m_{u,p}\| \geq 0$ ist. Zudem folgt aus $\|x|m_{u,p}\| = 0$ die Gleichheit $x = 0$ (und umgekehrt). Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\|a \cdot x|m_{u,p}\| &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |ax_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |a|^{p\frac{1}{p}} \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |a| \cdot \|x|m_{u,p}\|.
\end{aligned}$$

Somit ist die absolute Homogenität gezeigt. Als Letztes muss die Dreiecksungleichung für die Fälle $1 \leq p < \infty$ und $0 < p < 1$ getrennt betrachtet werden.

<u>1. Fall: $1 \leq p < \infty$</u>
Seien $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$ beliebig und $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{Minkowski}}{\leq} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} \left(|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= \|x|m_{u,p}\| + \|y|m_{u,p}\| .
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die bekannte Minkowski-Ungleichung verwendet (auch zu finden in [11, Lemma

2, S. 26]). Da j und m beliebig sind, gilt die Ungleichung auch für das Supremum über diese. Dementsprechend erhält man die gewünschte Ungleichung $\|x+y|m_{u,p}\| \leq \|x|m_{u,p}\|+\|y|m_{u,p}\|$. Also ist gezeigt, dass $\|\cdot|m_{u,p}\|$ für $1 \leq p < \infty$ eine Norm definiert. Ähnlich weist man für den zweiten Fall nach, dass $\|\cdot|m_{u,p}\|$ eine Quasinorm darstellt.

2. Fall: $0 < p < 1$

Anhand von [11, Remark 1.2.2/1, S. 26] folgt

$$\begin{aligned} &|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad \leq |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{p}+1} \left(\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\qquad \leq 2^{\frac{1}{p}+1} \left(\|x|m_{u,p}\| + \|y|m_{u,p}\|\right) \end{aligned}$$

Bildet man hier ebenfalls das Supremum auf der linken Seite, erhält man den Ausdruck $\|x+y|m_{u,p}\| \leq \underbrace{2^{\frac{1}{p}+1}}_{=:c} (\|x|m_{u,p}\| + \|y|m_{u,p}\|)$.

Nun fehlt noch zu zeigen, dass der Raum $(m_{u,p}, \|\cdot|m_{u,p}\|)$ auch vollständig ist. Dazu wurde der Beweis von [2, Proposition 2.2] für mehrdimensionale Folgen angepasst.

Sei diese Folge von Folgen $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^d}, \left\{x_k^{(2)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^d}, \dots\right)$ eine Cauchy-Folge in $m_{u,p}$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $h, i \in \mathbb{N},\ h, i \geq N$, gilt, dass

$$\left\|x^{(h)} - x^{(i)}|m_{u,p}\right\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \left|x_k^{(h)} - x_k^{(i)}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Daraus folgt direkt

$$|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \left|x_k^{(h)} - x_k^{(i)}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{1.3}$$

für jedes beliebige $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$. Betrachtet man nun den konkreten Fall $j = 0$, ergibt sich $\{k : Q_{0,k} \subset Q_{0,m}\} = \{m\}$. Dann folgt aus (1.3), dass

$$\underbrace{|Q_{0,m}|}_{=2^0=1}^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left|x_m^{(h)} - x_m^{(i)}\right| = \left|x_m^{(h)} - x_m^{(i)}\right| < \varepsilon,\ \text{für alle } m \in \mathbb{Z}^d \text{ und } h, i \geq N.$$

Dies zeigt, dass die Folge $\left\{x_m^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für ein festes, aber beliebiges m ist.

Somit lässt sich eine neue Folge $x := \{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}^d}$ durch $x_m := \lim\limits_{n\to\infty} x_m^{(n)}$, also bestehend aus allen Grenzwerten dieser Cauchy-Folgen, definieren. Gleichung (1.2) liefert dann für $i \to \infty$, dass

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \left| x_k^{(h)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \text{ für } h \geq N. \tag{1.4}$$

Daher ist $\left\| x^{(h)} - x | m_{u,p} \right\| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und $h \geq N$, wodurch gezeigt ist, dass $x^{(h)} \longrightarrow x$ für $h \to \infty$. Nun bleibt nur noch die Frage offen, ob x auch in $m_{u,p}$ enthalten ist. Wir wissen $x = x^{(h)} - \left(x^{(h)} - x\right)$, weshalb folgt, dass

$$\|x|m_{u,p}\| = \left\| x^{(h)} - \left(x^{(h)} - x\right) |m_{u,p} \right\| \leq c \cdot \Bigg(\underbrace{\left\| x^{(h)} |m_{u,p} \right\|}_{<\infty, \text{ da } \in m_{u,p}} + \underbrace{\left\| (x^{(h)} - x) |m_{u,p} \right\|}_{<\infty (1.4)} \Bigg) < \infty,$$

für ein $c \geq 1$. □

Satz 13

Sei $0 < p \leq u < \infty$.

i) Ist $u < p$, *dann ist* $m_{u,p} = \{0\}$. *Ist* $p_1 \leq p_2 \leq u$, *dann gilt* $m_{u,p_2} \hookrightarrow m_{u,p_1}$.

ii) Für alle p *und* u *gilt,* $m_{u,p} \hookrightarrow \ell_\infty$.

iii) Ist $p < u$, *dann ist* $\ell_{u,\infty} \hookrightarrow m_{u,p}$.

`Beweis:`

Zu *i)*

Sei $x \neq 0$ und $u < p$. Dann ist, ähnlich zu (1.1) aus Bemerkung 8, $\frac{1}{u} - \frac{1}{p} > 0$. Daraus folgt

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \underbrace{|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}}}_{\to\infty \text{ für } j\to\infty} \underbrace{\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{>0} = \infty.$$

Ist $x = 0$, gilt offensichtlich $\|x|m_{u,p}\| = 0 < \infty$.

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass $m_{u,p_2} \hookrightarrow m_{u,p_1}$, also dass ein $c > 0$ existiert, sodass $\|x|m_{u,p_1}\| \leq c \cdot \|x|m_{u,p_2}\|$ gilt.

Um dies nachzuweisen, wird die Hölder-Ungleichung [11, Lemma 2, S. 26] für $p := \frac{p_2}{p_1} \geq 1$ und

$\frac{1}{p'} = 1 - \frac{p_1}{p_2}$ genutzt und es folgt so

$$\begin{aligned} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1} \cdot 1 &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1 \cdot \frac{p_2}{p_1}} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \Bigg(\underbrace{\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} 1}_{=:c} \Bigg)^{1-\frac{p_1}{p_2}} \\ &= \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot c^{1-\frac{p_1}{p_2}} = c \cdot \left(\frac{1}{c} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Nach Definition 6 ist $Q_{-j,m}$ ein großer Würfel mit Seitenlänge 2^j. Dieser Würfel ist demzufolge als disjunkte Vereinigung von Einheitswürfeln darstellbar. Für den Betrag des Würfels gilt dann

$$|Q_{-j,m}| = \left| \bigcup_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} Q_{0,k} \right| = \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |Q_{0,k}| = \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} 1 = c. \tag{1.6}$$

Diese Gleichung, eingesetzt in (1.5), ergibt

$$\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1} \leq \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}}$$

und demnach auch

$$\left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}}. \tag{1.7}$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit $|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}}$ und Abschätzen der rechten Seite mithilfe des Supremums folgt somit

$$|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \|x|m_{u,p_2}\|$$

Nun lässt sich auch auf der linken Seite das Supremum bilden, da die Ungleichung wieder für beliebige $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$ gültig ist. Damit resultiert der gewünschten Ausdruck $\|x|m_{u,p_1}\| \leq \|x|m_{u,p_2}\|$.

Zu *ii)*

Sei $m \in \mathbb{Z}^d$ beliebig. Dann gilt

$$|x_m| = \underbrace{|Q_{0,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}}}_{=1} \Bigg(\underbrace{\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{0,m}}}_{\text{ein Index: } k=m} |x_k|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{j\in\mathbb{N}_0} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \Bigg(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Also folgt auch $\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}^d} |x_m| \leq \|x|m_{u,p}\|$ und somit $m_{u,p} \hookrightarrow \ell_\infty$.

Zu *iii)*

Sei $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Umordnung von $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$. Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$, dass

$$\begin{aligned} \Bigg(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} &\leq \Bigg(\sum_{n=1}^{2^{jd}} |x_n^*|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} = \Bigg(\sum_{n=1}^{2^{jd}} |x_n^*|^p n^{\frac{p}{u}} n^{-\frac{p}{u}} \Bigg)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Bigg(\sum_{n=1}^{2^{jd}} \sup_{r\in\mathbb{N}} |x_r^*|^p r^{\frac{p}{u}} n^{-\frac{p}{u}} \Bigg)^{\frac{1}{p}} = \sup_{r\in\mathbb{N}} \underbrace{x_r^*}_{\geq 0} r^{\frac{1}{u}} \Bigg(\sum_{n=1}^{2^{jd}} n^{-\frac{p}{u}} \Bigg)^{\frac{1}{p}} = \|x|\ell_{u,\infty}\| \Bigg(\sum_{n=1}^{2^{jd}} n^{-\frac{p}{u}} \Bigg)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Mithilfe des Integralkriteriums und der aus $p < u$ folgenden Ungleichung $1 < \frac{1}{1-\frac{p}{u}}$ lässt sich die Summe folgendermaßen weiter abschätzen (siehe auch Abb. 1.4):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2^{jd}} n^{-\frac{p}{u}} &\leq 1 + \int_1^{2^{jd}} x^{-\frac{p}{u}} dx = 1 + \left[\frac{1}{1-\frac{p}{u}} x^{1-\frac{p}{u}} \right]_1^{2^{jd}} = 1 + \frac{1}{1-\frac{p}{u}} 2^{jd(1-\frac{p}{u})} - \frac{1}{1-\frac{p}{u}} \\ &< \frac{1}{1-\frac{p}{u}} + \frac{1}{1-\frac{p}{u}} 2^{jd(1-\frac{p}{u})} - \frac{1}{1-\frac{p}{u}} = \frac{1}{1-\frac{p}{u}} 2^{jd(1-\frac{p}{u})} = c^p |Q_{-j,m}|^{1-\frac{p}{u}}. \end{aligned}$$

Durch Wiedereinsetzen in (1.8) zeigt sich abschließend

$$\begin{aligned} \Bigg(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} &\leq \|x|\ell_{u,\infty}\| \Big(c^p |Q_{-j,m}|^{1-\frac{p}{u}} \Big)^{\frac{1}{p}} \\ |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \Bigg(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} &\leq c \cdot \|x|\ell_{u,\infty}\| \\ \|x|m_{u,p}\| &\leq c \cdot \|x|\ell_{u,\infty}\|. \end{aligned}$$

□

Nachdem diese Eigenschaften für alle $0 < p \leq u < \infty$ untersucht wurden, betrachten wir nun

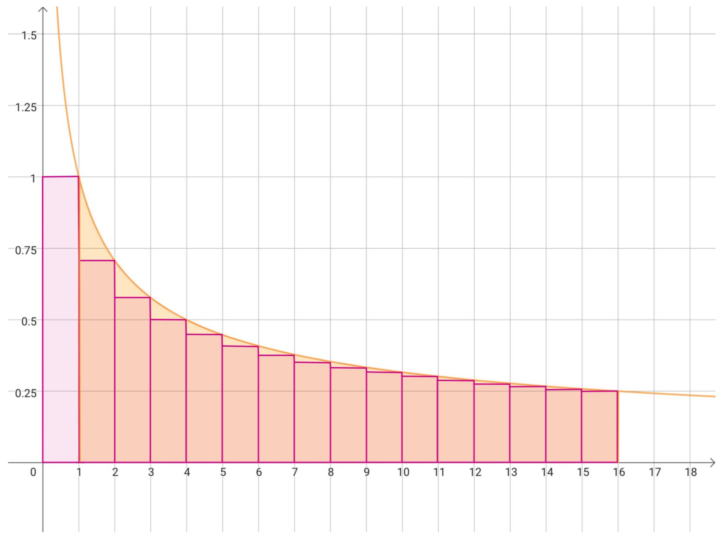

Abbildung 1.4: Darstellung der Ungleichung $\sum_{n=1}^{2^{jd}} n^{-\frac{p}{u}} \leq 1 + \int_1^{2^{jd}} x^{-\frac{p}{u}} dx$ mit den Werten $d = 2,\ j = 2$ und $\frac{p}{u} = \frac{1}{2}$. Die rosa Fläche hat den Wert der Summe, die Orangene den Wert des Integrals $\int_1^{2^{jd}} x^{-\frac{p}{u}} dx$.

kurz den Fall $u = \infty$. Satz 10 kann dann durch den folgenden Satz vervollständigt werden.

Satz 14
Sei $0 < p \leq \infty$. Dann ist auch $m_{\infty,p} = \ell_\infty$.

`Beweis:`

<u>1. Fall: $p = \infty$</u>

Sei $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$.

Dann ist $\|x|m_{\infty,\infty}\| = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{-0} \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} |x_k| = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} |x_k| = \|x|\ell_\infty\|$.

<u>2. Fall: $p < \infty$</u>

In Satz 13 wurde bereits gezeigt, dass $m_{u,p} \hookrightarrow \ell_\infty$ für beliebige u und p. Es bleibt also zu zeigen, dass auch $\ell_\infty \hookrightarrow m_{\infty,p}$. Für $x \in \ell_\infty$ gilt

$$\begin{aligned} |Q_{-j,m}|^{0-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq |Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}} \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}^d} |x_k|^p \overbrace{\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} 1}^{\overset{(1.6)}{=}|Q_{-j,m}|} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}} \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} |x_k| |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{p}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} |x_k| \end{aligned}$$

für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$ und somit auch für das Supremum. Daraus folgt die Behauptung $\|x|m_{u,p}\| \leq \|x|\ell_\infty\|$. □

Satz 15
Q sei jetzt ein beliebiger abgeschlossener Würfel im $\mathbb{R}^d$ mit $|Q| \geq 1$. Außerdem sei

$$\|x|m_{u,p}\|_{(1)} = \sup_{Q:|Q|\geq 1} |Q|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{und}$$

$$\|x|m_{u,p}\|_{(2)} = \sup_{Q:|Q|\geq 1} |Q|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\cap Q\neq\emptyset} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dann sind $\|x|m_{u,p}\|_{(1)}$ und $\|x|m_{u,p}\|_{(2)}$ äquivalente Normen in $m_{u,p}$.

`Beweis:`
Es ist leicht nachvollziehbar, dass $\|x|m_{u,p}\| \leq \|x|m_{u,p}\|_{(1)}$, da $Q_{-j,m} \in \{Q : |Q| \geq 1\}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$, nachdem $|Q_{-j,m}| = 2^{jd} \geq 1$.
Außerdem ist $\|x|m_{u,p}\|_{(1)} \leq \|x|m_{u,p}\|_{(2)}$, da $\{k : Q_{0,k} \subset Q\} \subset \{k : Q_{0,k} \cap Q \neq \emptyset\}$.
Also gilt $\|x|m_{u,p}\| \leq \|x|m_{u,p}\|_{(1)} \leq \|x|m_{u,p}\|_{(2)}$. Noch zu zeigen ist demnach

$$\|x|m_{u,p}\|_{(2)} \overset{(i)}{\leq} c \cdot \|x|m_{u,p}\|_{(1)} \overset{(ii)}{\leq} C \cdot \|x|m_{u,p}\|.$$

<u>Zu (i)</u>
Seien Q und $\tilde{Q}$ Würfel mit Mittelpunkten in $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und Seitenlängen $r \geq 1$, bzw. $r+2$. Dann folgt

$$\{k : Q_{0,k} \subset \tilde{Q}\} \supseteq \{k : Q_{0,k} \cap Q \neq \emptyset\}. \tag{1.9}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} &|Q| = r^d \quad \text{und} \\ &|\tilde{Q}| = (r+2)^d = \left(r \left(1 + \frac{2}{r} \right) \right)^d = r^d \left(1 + \frac{2}{r} \right)^d \leq |Q| 3^d, \text{ da } r \geq 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Infolgedessen ist

$$\begin{aligned} |Q|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\cap Q\neq\emptyset} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\overset{(1.9)}{\leq} |Q|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset\tilde{Q}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{(1.10),(1.1)}{\leq} \left(3^{-d} |\tilde{Q}| \right)^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset\tilde{Q}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 3^{-d(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})} \sup_{\tilde{Q}:|\tilde{Q}|\geq 1} |\tilde{Q}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset\tilde{Q}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= c \cdot \|x|m_{u,p}\|_{(1)}. \end{aligned}$$

Nach Bilden des Supremums über alle $|Q| \geq 1$ resultiert die gewünschte Ungleichung.

Zu (ii)
Sei Q wieder ein Würfel mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und Seitenlänge $r \geq 1$. $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$ werden so gewählt, dass $\overline{Q}_{-j,m} \supseteq Q$ und $\overline{Q}_{-(j-1),m} \subset Q$. Durch die Seitenlängen ergibt sich dann $2^{j-1} < r \leq 2^j$. Daraus lässt sich

$$|Q| = r^d > \left(2^{j-1}\right)^d = \left(2^{-1} \cdot 2^j\right)^d = 2^{-d}|Q_{-j,m}| \tag{1.11}$$

und

$$\begin{aligned}
|Q|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k} \subset Q} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq |Q|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k} \subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(1.11),(1.1)}{\leq} \left(2^{-d}|Q_{-j,m}|\right)^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k} \subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{-d(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})} \sup_{j \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k} \subset Q_{-j,m}} |x|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \tilde{c} \cdot \|x|m_{u,p}\|
\end{aligned}$$

schließen, weshalb wieder durch Supremumsbildung $\|x|m_{u,p}\|_{(1)} \leq \tilde{c} \cdot \|x|m_{u,p}\|$ folgt.

$\square$

Satz 16
Sei $0 < p < u \leq \infty$. Dann ist $m_{u,p}$ nicht separabel.

`Beweis:`

Ist $u = \infty$, so folgt aus Satz 14, dass $m_{u,p} = \ell_\infty$. ℓ_∞ ist nicht separabel, wie man beispielsweise in [12, S. 31, Beispiel c)] nachvollziehen kann.

Sei also $0 < p < u < \infty$. Angenommen, $m_{u,p}$ ist separabel. Dann existiert eine abzählbare Menge $M \subseteq m_{u,p}$, die dicht in $m_{u,p}$ ist. Nach der Definition der Dichtheit folgt für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$m_{u,p} = \bigcup_{y \in M} B(\varepsilon, y) \tag{1.12}$$

für eine Kugel $B(\varepsilon, y)$ um $y \in M$ mit Radius ε. Außerdem sei $N \subseteq m_{u,p}$ eine überabzählbare

Menge, für die $\left\|x^{(1)} - x^{(2)}|m_{u,p}\right\| \geq 1$ für alle $x^{(1)}, x^{(2)} \in N,\ x^{(1)} \neq x^{(2)}$ gilt.
Aus (1.12) folgt sofort, dass $N \subseteq \bigcup\limits_{y \in M} B(\varepsilon, y)$. Da M abzählbar und N überabzählbar ist, muss es mindestens ein $y_0 \in M$ und Folgen $x^{(1)}, x^{(2)} \in N$ geben, sodass beide Folgen in $B(\varepsilon, y_0)$ liegen. Dann sind $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ höchstens 2ε entfernt ($\varepsilon > 0$ beliebig). Doch dies steht im Widerspruch zur Feststellung, dass $\left\|x^{(1)} - x^{(2)}|m_{u,p}\right\| \geq 1$. Existiert also solch eine Menge N, ist $m_{u,p}$ nicht separabel.
Als nächstes wollen wir genau diese Menge N konstruieren.

Sei $E \subset \mathbb{N}$ und $x^{(E)}$ eine Folge mit

$$x_k^{(E)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } k = (2^r, 0, \dots, 0), r \in E, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt, $\left\|x^{(E)}|m_{u,p}\right\| \leq \left\|x^{(\mathbb{N})}|m_{u,p}\right\|$. Ist also $x^{(\mathbb{N})} \in m_{u,p}$, ist auch $x^{(E)} \in m_{u,p}$ für beliebige $E \subset \mathbb{N}$.
Um zu zeigen, dass $x^{(\mathbb{N})}$ in $m_{u,p}$ liegt, betrachten wir zunächst beliebige $j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^d$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k: Q_{0,k} \subset Q_{-j,m}} |x_k^{(\mathbb{N})}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \underbrace{|Q_{-j,0}|}_{=2^{jd}}{}^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k: Q_{0,k} \subset Q_{-j,0}} |x_k^{(\mathbb{N})}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{jd(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})} j^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{jd(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})} j^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Die letzte Summe hat genau den Wert j, da $x_k^{(\mathbb{N})} = 1$ für die Indizes $k \in \{(2^i, 0, \dots, 0)$ mit $i = 0, \dots, j-1$. Dies sind genau j Elemente. Aus dieser Abschätzung folgt

$$\left\|x^{(\mathbb{N})}|m_{u,p}\right\| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{jd(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})} j^{\frac{1}{p}} = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} (2^{jdp(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})} j)^{\frac{1}{p}} = \left(\sup_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{j}{\left(\underbrace{2^{pd(\frac{1}{p}-\frac{1}{u})}}_{>1} \right)^j} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Der Nenner ist immer größer als 1, da $\frac{1}{p} - \frac{1}{u} > 0$. Des Weiteren ist dieser Ausdruck endlich, da immer ein $J \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass $j < a^j$ für alle $j > J$ und $a > 1$. In diesem Fall ist $a = 2^{pd(\frac{1}{p}-\frac{1}{u})}$. Also enthält $m_{u,p}$ die Folge $x^{(E)}$ aufgrund der endlichen Norm, weshalb wir $N := \{x^{(E)} : E \subset \mathbb{N}\} \subseteq m_{u,p}$ definieren können. Außerdem besitzt N die gleiche Mächtigkeit wie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ist also überabzählbar.
Es bleibt noch zu zeigen, dass der Abstand zweier unterschiedlicher Elemente $x^{(E)}, x^{(F)}$ aus

N größer als 1 ist. Es gilt

$$\left\|x^{(E)} - x^{(F)}|m_{u,p}\right\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \left|x_k^{(E)} - x_k^{(F)}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Die Summe ist minimal für den Fall $E = F \cup \{n_0\}, n_0 \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $|x_k^{(E)} - x_k^{(F)}| = 1$ für $k = k_0 = (2^{n_0}, 0, \ldots, 0)$ und sonst 0. m soll so gewählt werden, dass $Q_{0,k_0} \subset Q_{-j,m}$, für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Dies gilt für $m = k_0$. Also folgt

$$\left\|x^{(E)} - x^{(F)}|m_{u,p}\right\| \geq \sup_{j\in\mathbb{N}_0,m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p}} \cdot 1^{\frac{1}{p}} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{jd(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})} = 2^{0\cdot d(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})} = 1.$$

Damit existiert die gesuchte Menge N und $m_{u,p}$ ist nicht separabel. □

1.3 Einbettung

Im Folgenden wird das Hauptresultat für die Einbettung verschiedener Morrey-Folgenräume und die daraus folgenden Zusammenhänge erläutert.

Auch in diesem Abschnitt stammen alle Ergebnisse aus [4].

Satz 17 Hauptresultat Einbettung
Sei $0 < p_1 \leq u_1 < \infty$ *und* $0 < p_2 \leq u_2 < \infty$. *Dann ist die Einbettung*

$$m_{u_1,p_1} \hookrightarrow m_{u_2,p_2}$$

genau dann stetig, wenn

$$u_1 \leq u_2 \text{ und } \frac{p_2}{u_2} \leq \frac{p_1}{u_1}. \tag{1.13}$$

`Beweis:`
Wir betrachten jede Richtung getrennt.
$\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$
Wir wollen zeigen, dass $\|x|m_{u_2,p_2}\| \leq c \cdot \|x|m_{u_1,p_1}\|$ für alle $x \in m_{u_1,p_1}$ und ein $c > 0$.

<u>1. Fall: $u = u_1 = u_2$</u>
Aus (1.13) folgt nach beidseitigem Multiplizieren der Ungleichung mit $u > 0$, dass $p_2 \leq p_1$. Nun können wir, ähnlich wie in (1.5), die Hölder'sche Ungleichung für $p := \frac{p_1}{p_2} \geq 1$ anwenden.

Damit resultiert

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_2}\cdot 1\right)^{\frac{1}{p_2}} &\leq \left(\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \left||x_k|^{p_2}\right|^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{p_2}{p_1}} \cdot \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} 1\right)^{1-\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \Bigg(\underbrace{\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} 1}_{=|Q_{-j,m}| \text{ nach (1.6)}}\Bigg)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}} \\ &= \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}},\end{aligned}$$

für $x \in m_{u_1,p_1}$ und beliebige $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$. Multipliziert man nun beide Seiten mit $|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p_2}}$, folgt

$$|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \|x|m_{u,p_1}\|,$$

für alle j und m und demzufolge auch für das Supremum über diese, also

$$\|x|m_{u_2,p_2}\| \leq \|x|m_{u_1,p_1}\|.$$

2. Fall: $u_1 < u_2$ und $\frac{p_1}{u_1} = \frac{p_2}{u_2}$

Diese Bedingungen impliziert

$$\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{p_2}\right)\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{u_2}\cdot\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{p_1}{u_1}\cdot\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{p_1} \tag{1.14}$$

und

$$p_2 = \frac{p_2}{u_2}u_2 = \frac{p_1}{u_1}u_2 > \frac{p_1}{u_2}u_2 = p_1 \;\Leftrightarrow\; \frac{p_1}{p_2} < 1. \tag{1.15}$$

Deshalb folgt durch die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\left(\underbrace{|Q_{-j,m}|}_{=2^{jd}}^{\frac{1}{u_2}-\frac{1}{p_2}}\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}|x_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}\right)^{\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{p_1}{p_2}}\\
\overset{(1.14)}{=}&\left(2^{jd(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{p_1})}\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}|x_k|^{p_2-p_1+p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\\
\leq&\left(2^{jd(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{p_1})}\left(\sup_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}|x_k|^{p_2-p_1}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}|x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\\
=&\sup_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}|x_k|^{(p_2-p_1)\frac{1}{p_1}\frac{p_1}{p_2}}\left(2^{jd(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{p_1})}\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}|x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\\
=&\sup_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}|x_k|^{1-\frac{p_1}{p_2}}\left(|Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u_1}-\frac{1}{p_1}}\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}|x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}},
\end{aligned}
$$

dass

$$
\begin{aligned}
\|x|m_{u_2,p_2}\| &\leq \|x|\ell_\infty\|^{1-\frac{p_1}{p_2}}\cdot\|x|m_{u_1,p_1}\|^{\frac{p_1}{p_2}}\\
&\overset{13\ (ii),\ (1.15)}{\leq} \|x|m_{u_1,p_1}\|^{1-\frac{p_1}{p_2}}\cdot\|x|m_{u_1,p_1}\|^{\frac{p_1}{p_2}} = \|x|m_{u_1,p_1}\|
\end{aligned}
$$

gilt.

<u>3. Fall: $u_1 < u_2$ und $\frac{p_2}{u_2} < \frac{p_1}{u_1}$</u>

Sei $\tilde{p_1} := u_1\dfrac{p_2}{u_2}$ definiert. Mithilfe dessen lässt sich dieser Fall wieder auf den Zweiten zurückführen, da

$$
\frac{\tilde{p_1}}{u_1} = \frac{u_1}{u_1}\frac{p_2}{u_2} = \frac{p_2}{u_2},
$$

und deshalb auch $\|x|m_{u_2,p_2}\| \leq \|x|m_{u_1,\tilde{p_1}}\|$, gilt. Aufgrund der Ungleichung $\tilde{p_1} = u_1\dfrac{p_2}{u_2} < u_1\dfrac{p_1}{u_1} = p_1$ folgt außerdem aus Satz 13 (i), dass $\|x|m_{u_1,\tilde{p_1}}\| \leq \|x|m_{u_1,p_1}\|$. Folglich gilt auch für diesen Fall

$$
\|x|m_{u_2,p_2}\| \leq \|x|m_{u_1,\tilde{p_1}}\| \leq \|x|m_{u_1,p_1}\|.
$$

Damit ist diese Richtung gezeigt.

$\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$

Wir wollen zeigen, dass aus $m_{u_1,p_1} \hookrightarrow m_{u_2,p_2}$ folgt, dass $u_1 \le u_2$ und $\frac{p_2}{u_2} \le \frac{p_1}{u_1}$. Dies erfolgt anhand von zwei Widerspruchsbeweisen.

Annahme 1: $u_2 < u_1$

Zunächst betrachten wir eine konkrete Folge x, welche mit $m_j = \left(2^{2j}, 0, \ldots, 0\right) \in \mathbb{Z}^d,\ j \in \mathbb{N}$ durch

$$x_k = \begin{cases} |Q_{-j,m_j}|^{-\frac{1}{u_1}}, & \text{falls } Q_{0,k} \subset Q_{-j,m_j} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert wird. Mittels Berechnung der Norm von x lässt sich feststellen, dass x in m_{u_1,p_1} liegt, da

$$\begin{aligned}
\|x|m_{u_1,p_1}\| &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u_1}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \sup_{j\in\mathbb{N}_0} |Q_{-j,m_j}|^{\frac{1}{u_1}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m_j}} |Q_{-j,m_j}|^{-\frac{p_1}{u_1}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{jd(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{p_1})} \left(2^{jd}\cdot 2^{-jd\frac{p_1}{u_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{jd(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{u_1})} \\
&= 2^0 = 1
\end{aligned}$$

endlich ist. x ist aber nicht in m_{u_2,p_2} enthalten, da

$$\begin{aligned}
\|x|m_{u_2,p_2}\| &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0} |Q_{-j,m_j}|^{\frac{1}{u_2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m_j}} |Q_{-j,m_j}|^{-\frac{p_2}{u_1}} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&= \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{jd(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{u_1})} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{jd(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_1})} = \infty,
\end{aligned}$$

weil $u_2 < u_1$, also $0 < \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}$.

Somit ist diese Folge in m_{u_1,p_1}, aber nicht in m_{u_2,p_2}, was jedoch der Annahme $m_{u_1,p_2} \hookrightarrow m_{u_2,p_2}$ widerspricht.

Demzufolge muss also $u_1 \le u_2$ gelten und es fehlt nur noch zu zeigen, dass $\frac{p_2}{u_2} \le \frac{p_1}{u_1}$.

Annahme 2: $u_1 \le u_2$ und $\frac{p_1}{u_1} < \frac{p_2}{u_2}$, insbesondere $\frac{p_1}{u_1} < 1$

Wir wollen jetzt, für beliebige $j \in \mathbb{N}$, eine Folge $x^{(j)}$ konstruieren. Dazu sei

$$k_j = \left\lfloor 2^{dj(1-\frac{p_1}{u_1})} \right\rfloor = \max\left\{ l \in \mathbb{Z} : l \leq 2^{dj(1-\frac{p_1}{u_1})} \right\}.$$

Durch die Annahme ergibt sich $0 < 1 - \underbrace{\frac{p_1}{u_1}}_{>0} < 1$ und damit auch $k_0 = 1 \leq k_\nu < 2^{d\nu}$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} k_j &= \left\lfloor 2^{d(j-j\frac{p_1}{u_1})} \right\rfloor \leq \left\lfloor 2^{d(j-\nu\frac{p_1}{u_1})} \right\rfloor = \left\lfloor 2^{d(j+\nu(-1+1-\frac{p_1}{u_1}))} \right\rfloor = \left\lfloor \underbrace{2^{d(j-\nu)}}_{>1} \cdot 2^{d\nu(1-\frac{p_1}{u_1})} \right\rfloor \\ &\leq c \cdot 2^{d(j-\nu)} \left\lfloor 2^{d\nu(1-\frac{p_1}{u_1})} \right\rfloor = c \cdot 2^{d(j-\nu)} k_\nu, \end{aligned} \tag{1.16}$$

für ein $c > 0$, falls $1 \leq \nu < j$.
Wir betrachten jetzt zur Vereinfachung $c = 1$. Falls $c \neq 1$, müssen die nächsten Schritte nur entsprechend angepasst werden.
Nach beidseitigem Multiplizieren von (1.16) mit 2^{-jd} resultiert das Verhältnis

$$\frac{k_j}{2^{dj}} \leq \frac{k_\nu}{2^{d\nu}}, \quad \text{also} \quad \frac{k_j}{|Q_{-j,0}|} \leq \frac{k_\nu}{|Q_{-\nu,\ell}|}. \tag{1.17}$$

Die Folge $x^{(j)} = \{x_k^{(j)}\}_k$, für ein $j \in \mathbb{N}$, soll nun so definiert sein, dass genau k_j Elemente der Folge gleich 1 und die restlichen Folgenglieder gleich 0 sind. Zudem sollen sich die Indizes aller Elemente mit dem Wert 1 im Würfel $Q_{-j,0}$ befinden. Somit muss $x_k^{(j)} = 0$ sein, wenn $Q_{0,k} \not\subseteq Q_{-j,0}$. Hat man außerdem noch einen in $Q_{-j,0}$ enthaltenen Würfel $Q_{-\nu,\ell}$, welcher als Vereinigung

$$Q_{-\nu,\ell} = \bigcup_{i=1}^{2^{d\nu}} Q_{0,m_i} \subseteq Q_{-j,0}, \qquad \nu < j,$$

dargestellt werden kann, dann sollen aufgrund von (1.17) maximal k_ν Folgenelemente $x_{0,k_i}^{(j)}$, für die $Q_{0,k_i} \subset Q_{-\nu,\ell}$ gilt, gleich 1 sein.
Abb. 1.5 zeigt dazu ein zwei-dimensionales Beispiel für $\frac{p_1}{u_1} = \frac{1}{2}$, $k_{j=3} = 8$ und $k_{\nu=2} = 4$. Die Indizes der Folgenglieder mit Wert 1 werden dort durch Kreuze verbildlicht.

Daraus folgt direkt

$$\sum_{k: Q_{0,k} \subset Q_{-\nu,\ell}} \left| x_{0,k}^{(j)} \right|^{p_1} \leq k_\nu \leq 2^{d\nu(1-\frac{p_1}{u_1})} = |Q_{-\nu,\ell}|^{1-\frac{p_1}{u_1}}, \quad \text{für } Q_{-\nu,\ell} \subseteq Q_{-j,0}. \tag{1.18}$$

Betrachten wir den Fall $\nu = j$, muss $\ell = 0$ sein, damit $Q_{-j,\ell} \subseteq Q_{-j,0}$.
$Q_{-j,0}$ enthält genau k_j Folgenglieder, die 1 sind, weshalb die Summe in (1.18) in diesem Fall

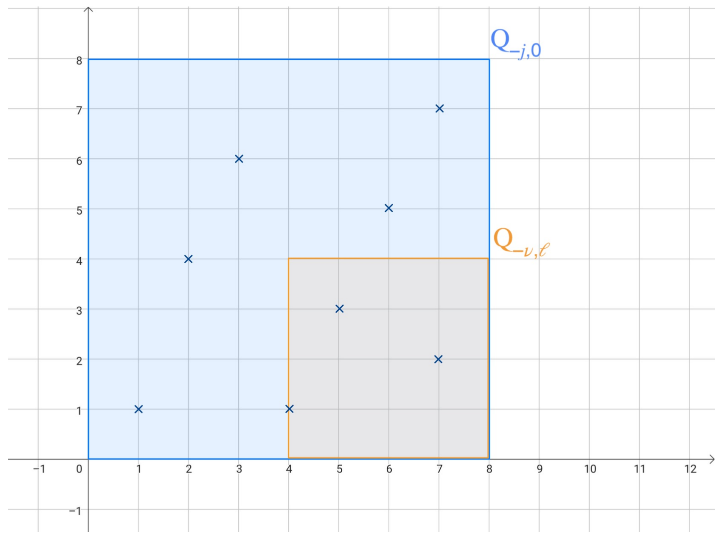

Abbildung 1.5: Darstellung der dyadischen Würfel $Q_{j,0} = Q_{-3,(0,0)}$ (blau) und $Q_{-\nu,\ell} = Q_{-2,(1,0)}$ (orange). Die Kreuze veranschaulichen die Indizes aller Folgenglieder einer Folge $x^{(j=3)}$, die den Wert 1 haben.

gleich $k_j = k_\nu$ sein muss. Um jetzt eine Abschätzung der Norm von $x^{(j)}$ zu bekommen, benutzt man die Ungleichung (1.18). Zunächst teilt man durch die rechte Seite, bildet die $\frac{1}{p_1}$-te Potenz und erhält so

$$\left(|Q_{-\nu,\ell}|^{\frac{p_1}{u_1}-1} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-\nu,\ell}} \left|x_{0,k}^{(j)}\right|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} = |Q_{-\nu,\ell}|^{\frac{1}{u_1}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-\nu,\ell}} \left|x_{0,k}^{(j)}\right|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq 1.$$

Da die Ungleichung für beliebige $\nu \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \mathbb{Z}^d$ gültig ist, gilt auch

$$\left\| x^{(j)} | m_{u_1,p_1} \right\| \leq 1. \tag{1.19}$$

Im nächsten Schritt des Beweises wollen wir diese Norm auf andere Weise abschätzen. Aus der Annahme $0 < \frac{p_1}{u_1} < \frac{p_2}{u_2} \leq 1$ folgt

$$\left\lfloor 2^{dj(1-\frac{p_1}{u_1})} \right\rfloor > 2^{dj(1-\frac{p_2}{u_2})}, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\left\lfloor 2^{dj(1-\frac{p_1}{u_1})} \right\rfloor}{2^{dj(1-\frac{p_2}{u_2})}} \longrightarrow \infty \text{ für } j \to \infty.$$

Nach Konstruktion existiert demzufolge für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $j_N \in \mathbb{N}$, sodass

$$N 2^{dj_N(1-\frac{p_2}{u_2})} \leq \left\lfloor 2^{dj_N(1-\frac{p_1}{u_1})} \right\rfloor = k_{j_N} = \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j_N,0}} \left|x_{0,k}^{(j_N)}\right|^{p_2}.$$

Dies impliziert, dass

$$N \leq 2^{dj_N(\frac{p_2}{u_2}-1)} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j_N,0}} |x_{0,k}^{(j_N)}|^{p_2}.$$

Durch Bilden der $\frac{1}{p_2}$-ten Potenz folgt dann

$$N^{\frac{1}{p_2}} \leq |Q_{-j_N,m}|^{\frac{1}{u_2}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j_N,0}} |x_{0,k}^{(j_N)}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left\| x^{(j_N)} | m_{u_2,p_2} \right\|. \tag{1.20}$$

Aufgrund der Einbettung $m_{u_1,p_1} \hookrightarrow m_{u_2,p_2}$ muss jedoch ein $c > 0$ existieren, sodass

$$\left\| x^{(j)} | m_{u_2,p_2} \right\| \leq c \cdot \left\| x^{(j)} | m_{u_1,p_1} \right\|, \tag{1.21}$$

für ein beliebiges $x^{(j)} \in m_{u_1,p_1}$. Daraus resultiert allerdings

$$N^{\frac{1}{p_2}} \overset{(1.20)}{\leq} \left\| x^{(j_N)} | m_{u_2,p_2} \right\| \overset{(1.21)}{\leq} c \cdot \underbrace{\left\| x^{(j_N)} | m_{u_1,p_1} \right\|}_{\leq 1 \text{ nach } (1.19)} \leq c,$$

für konstantes c, was ein Widerspruch für große N darstellt. □

Satz 18
Sei, wie zuvor, $0 < p_1 \leq u_1 < \infty$ *und* $0 < p_2 \leq u_2 < \infty$*. Dann ist die Einbettung*

$$m_{u_1,p_1} \hookrightarrow m_{u_2,p_2} \tag{1.22}$$

niemals kompakt.

`Beweis:`
Wäre die Einbettung kompakt, würde mit Satz 10 und Satz 13 folgen, dass

$$\ell_{u_1} = m_{u_1,u_1} \hookrightarrow m_{u_1,p_1} \hookrightarrow m_{u_2,p_2} \hookrightarrow \ell_\infty,$$

weil $p_1 \leq u_1$. Dann wäre auch die Einbettung $\ell_{u_1} \hookrightarrow \ell_\infty$ kompakt und daher nach Definition jede in ℓ_{u_1} beschränkte Menge in ℓ_∞ präkompakt. Betrachtet man aber die Folge $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$, dann können wir zeigen, dass die Menge $M = \{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ in ℓ_{u_1} beschränkt, aber nicht präkompakt in ℓ_∞ ist. Die Beschränktheit wird dadurch deutlich, dass alle Elemente von M in einer abgeschlossenen Kugel mit Radius 1 um $x^0 = \{0\}_{k\in\mathbb{N}}$ liegen, da $\|x^{(n)} - x^0|\ell_{u_1}\| = \|x^{(n)}|\ell_{u_1}\| = 1$. Die Folge $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt aber keine konvergente Teilfolge in ℓ_∞, da der Abstand zweier unterschiedlicher Folgenglieder stets

$$\left\| x^{(n)} - x^{(m)} | \ell_\infty \right\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right| = 1$$

ist. Dementsprechend kann $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge sein und deshalb nicht konvergieren, da ℓ_∞ ein Banachraum ist (siehe [12, S. 3-4, Beispiel (b)]). □

Aus dem Hauptresultat der Einbettung (Satz 17) lassen sich folgende Folgerungen ableiten.

Folgerung 19
Sei $0 < p_1 \le u_1 < \infty$ *und* $0 < p_2 \le u_2 < \infty$. *Dann ist*

$$m_{u_1,p_1} = m_{u_2,p_2} \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = u_2 \text{ und } p_1 = p_2,$$

im Sinne äquivalenter Normen.

`Beweis:`
Die Gleichheit $m_{u_1,p_1} = m_{u_2,p_2}$ ist genau dann erfüllt, wenn $m_{u_1,p_1} \hookrightarrow m_{u_2,p_2}$ und $m_{u_2,p_2} \hookrightarrow m_{u_1,p_1}$. Nach Satz 17 ist dies äquivalent zu

$$u_1 \le u_2 \text{ und } \frac{p_2}{u_2} \le \frac{p_1}{u_1} \qquad \text{und} \qquad u_2 \le u_1 \text{ und } \frac{p_1}{u_1} \le \frac{p_2}{u_2}.$$

Demzufolge muss $u_1 = u_2$ und $p_1 = p_2$ gelten. □

Folgerung 20
Sei wieder $0 < p_1 \le u_1 < \infty$ *und* $0 < p_2 \le u_2 < \infty$.

i) Dann gilt $m_{u_1,p_1} \hookrightarrow \ell_{u_2} \Leftrightarrow u_1 \le u_2$ *und* $p_1 = u_1 \Leftrightarrow m_{u_1,p_1} = \ell_{u_1}$ *und* $\ell_{u_1} \hookrightarrow \ell_{u_2}$

ii) und $\ell_{u_1} \hookrightarrow m_{u_2,p_2} \Leftrightarrow u_1 \le u_2 \Leftrightarrow \ell_{u_1} \hookrightarrow \ell_{u_2}$.

`Beweis:`
Zu *i)*
Mithilfe von Satz 10 und Satz 17 wissen wir, dass m_{u_1,p_1} genau dann in $\ell_{u_2} = m_{u_2,u_2}$ eingebettet ist, wenn $u_1 \le u_2$ und $\frac{u_2}{u_2} \le \frac{p_1}{u_1}$. Die zweite Ungleichung ist äquivalent zu $u_1 \le p_1$.

Zusätzlich besteht die Voraussetzung $p_1 \leq u_1$, wodurch $p_1 = u_1$ gelten muss. Damit ist die erste Äquivalenz gezeigt.
Nach Folgerung 19 wissen wir, dass die Gleichheit $m_{u_1,p_1} = \ell_{u_1} = m_{u_1,u_1}$ äquivalent ist zu den Gleichungen $u_1 = u_1$ und $p_1 = u_1$. Des Weiteren ist $\ell_{u_1} = m_{u_1,u_1}$ genau dann in $m_{u_2,u_2} = \ell_{u_2}$ eingebettet, wenn $u_1 \leq u_2$ und $\dfrac{u_2}{u_2} \leq \dfrac{u_1}{u_1}$ gilt. Sollen nun $m_{u_1,p_1} = \ell_{u_1}$ und $\ell_{u_1} \hookrightarrow \ell_{u_2}$ zusammen gelten, resultiert die Äquivalenz mit $p_1 = u_1$ und $u_1 \leq u_2$.

Zu *ii)*
Es gilt nach Satz 17, dass

$$\ell_{u_1} = m_{u_1,u_1} \hookrightarrow m_{u_2,p_2} \quad \Leftrightarrow \quad u_1 \leq u_2 \text{ und } \frac{p_2}{u_2} \leq 1.$$

Die zweite Bedingung ist bereits durch die Voraussetzung $p_2 \leq u_2$ erfüllt. Des Weiteren wurde bereits zuvor gezeigt, dass $\ell_{u_1} \hookrightarrow \ell_{u_2}$ äquivalent ist zu $u_1 \leq u_2$. $\square$

2 Verallgemeinerte Morrey-Folgenräume

Wir wollen jetzt den Raum der Morrey-Folgenräume erweitern. Für die Morrey-Funktionenräume wurde diese Erweiterung bereits ausführlich betrachtet, beispielsweise in [6] oder [1].
Die verallgemeinerten Morrey-Folgenräume jedoch wurden bisher nur für eindimensionale Folgen in [2] kurz betrachtet. Aus diesem Grund wollen wir jetzt genau diese Verallgemeinerung der Morrey-Folgenräume für mehrdimensionale Folgen näher untersuchen.

2.1 Definition von $m_p^\varphi(\mathbb{Z}^d)$

Zunächst benötigen wir eine Definition des verallgemeinerten Morrey-Folgenraums. Diese soll sich an der des verallgemeinerten Funktionenraums aus [6] und an [2] orientieren.

Im vorigen Kapitel bestimmten die Parameter u und p den Raum. Jetzt soll eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ die Variable u folgendermaßen ablösen.
Sei Q ein Würfel und $\ell(Q)$ seine Seitenlänge. Außerdem sei $Q_{-j,m}$ ein dyadischer Würfel, wie er in Definition 5 näher beschrieben wird. Dann lässt sich die Norm des Morrey-Folgenraums $m_{u,p}$ auch in Abhängigkeit von $\ell(Q_{-j,m})$ darstellen, denn

$$\begin{aligned} \|\lambda|m_{u,p}\| &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{u}} \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \ell(Q_{-j,m})^{\frac{d}{u}} \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Seitenlänge wird also durch die $\frac{d}{u}$-te Potenz modifiziert. Diese Modifikation soll nun durch die Funktion φ verallgemeinert werden.

Definition 21 Verallgemeinerter Morrey-Folgenraum m_p^φ
Sei $0 < p < \infty$ *und* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. *Dann bezeichnen wir*

$$m_p^\varphi = m_p^\varphi(\mathbb{Z}^d) = \left\{\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C} : \left\|\lambda|m_p^\varphi\right\| < \infty\right\},$$

für

$$\left\|\lambda|m_p^\varphi\right\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} \varphi\left(\ell(Q_{-j,m})\right) \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

als verallgemeinerten Morrey-Folgenraum.
Dabei ist, für $j \in \mathbb{Z}$ *und* $m \in \mathbb{Z}^d$, $\ell(Q_{-j,m}) = 2^j$ *die Seitenlänge eines dyadischen Würfels* $Q_{j,m} = 2^{-j}(m + [0,1)^d)$.

Bemerkung 22
Da φ im Wesentlichen nur an den Stellen 2^j für $j \in \mathbb{N}_0$ ausgewertet wird, reicht es deshalb auch aus, φ nur für Werte aus den natürlichen Zahlen zu betrachten. Trotzdem werden wir im Folgenden oft von einem positiven reellen Definitionsbereich ausgehen.

Die Konstruktion von m_p^φ aus $m_{u,p}$ soll noch in diesem Satz festgehalten werden.

Satz 23
Sei $0 < p < \infty$ *und* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *eine Funktion mit* $\varphi(t) = t^{\frac{d}{u}}$, *für* $0 < u \leq \infty$. *Dann ist*

$$m_p^\varphi(\mathbb{Z}^d) = m_{u,p}(\mathbb{Z}^d).$$

`Beweis:` Dieser Zusammenhang folgt direkt aus (2.1). □

Der ℓ_p-Raum ist hier ebenfalls ein bestimmter verallgemeinerter Morrey-Folgenraum.

Folgerung 24
Sei $0 < p < \infty$ *und* $\varphi(t) = t^{\frac{d}{p}}$, *dann ist* $m_p^\varphi(\mathbb{Z}^d) = \ell_p(\mathbb{Z}^d)$.

`Beweis:`
Mit Satz 23 für $u = p$ und Satz 10 folgt $m_p^\varphi = m_{p,p} = \ell_p$. □
Der Raum m_p^φ soll ebenfalls für den Fall $p = \infty$ definiert sein.

Definition 25 Verallgemeinerter Morrey-Folgenraum m_∞^φ
Sei $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Dann definieren wir

$$m_\infty^\varphi = m_\infty^\varphi(\mathbb{Z}^d) = \{\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C} : \|\lambda|m_\infty^\varphi\| < \infty\},$$

für

$$\|\lambda|m_\infty^\varphi\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(\ell(Q_{-j,m})) \sup_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |\lambda_k|.$$

Die anfangs angesprochenen verallgemeinerten Folgenräume $\mathcal{M}_p^\varphi$ werden gleichermaßen formuliert.

Definition 26 Verallgemeinerter Morrey-Raum $\mathcal{M}_p^\varphi$ [5], bzw. [6]
Sei $0 < p < \infty$ und $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Dann wird der verallgemeinerte Morrey-Raum definiert durch

$$\mathcal{M}_p^\varphi(\mathbb{R}^d) := \left\{f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^d) : \|f|\mathcal{M}_p^\varphi\| < \infty\right\}$$

für

$$\|f|\mathcal{M}_p^\varphi\| := \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

und der Menge aller dyadischen Würfel $\mathcal{Q} := \left\{Q_{j,m} = 2^{-j}(m + [0,1)^d), j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^d\right\}$

Analog zu Definition 3 wird L_p^{loc} wieder definiert als

$$L_p^{loc} = \left\{f \text{ messbar } : \int_K |f(x)|^p dx < \infty \text{ für alle kompakten } K \subset \mathbb{R}^d\right\}.$$

Bemerkung 27
Genauso wie in Bemerkung 11 lässt sich auch hier zeigen, dass m_p^φ das diskrete Gegenstück zu $\mathcal{M}_p^\varphi$ darstellt. Hierbei wird aber benötigt, dass $\varphi(t) \leq c$, für alle $0 < t \leq 1$ und ein $c > 0$. Der Beweis aus Bemerkung 11 muss dazu nur entsprechend angepasst werden.

2.2 Elementare Eigenschaften von m_p^φ

Nun wollen wir die Eigenschaften dieses verallgemeinerten Raums untersuchen. Dazu orientieren wir uns an Abschnitt 1.2 und analysieren die Ähnlichkeiten zu $m_{u,p}$. Dazu wurden, wenn nicht anders angegeben, die Beweise aus Abschnitt 1.2 übernommen und an m_p^φ angepasst.

Satz 28
Sei $0 < p < \infty$ *und* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. *Dann ist* m_p^φ *auch ein (Quasi-) Banachraum.*

`Beweis:`
Sei $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$.

Zunächst zeigen wir, dass $\left\|x|m_p^\varphi\right\| = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(\ell(Q_{-j,m})) \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum\limits_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ eine Norm für $p \geq 1$ und eine Quasinorm für $0 < p < 1$ definiert.
Die Definitheit der Norm folgt aus der Positivität der Funktion φ. Die absolute Homogenität ist ebenfalls erfüllt, da für ein $a \in \mathbb{K}$ folgt, dass

$$\left\|a \cdot x|m_p^\varphi\right\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(\ell(Q_{-j,m})) \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |a \cdot x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |a| \left\|x|m_p^\varphi\right\|.$$

Für Dreiecksungleichung werden wieder zwei Fälle unterschieden.

<u>1. Fall: $1 \leq p < \infty$</u>
Sei $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\varphi(\ell(Q_{-j,m}))|Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{Minkowski}}{\leq} \varphi(\ell(Q_{-j,m}))|Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(\ell(Q_{-j,m}))|Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \left\|x|m_p^\varphi\right\| + \left\|y|m_p^\varphi\right\|,
\end{aligned}$$

für beliebige $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$, und demnach auch für das Supremum über diese. Die hier verwendete Minkowski-Ungleichung ist beispielsweise in [11, Lemma 2, S. 26] zu finden. Damit ist $\|x+y|m_p^\varphi\| \leq \|x|m_p^\varphi\| + \|y|m_p^\varphi\|$ gezeigt und wir betrachten jetzt den zweiten Fall.

2. Fall: $0 < p < 1$

Anhand [11, Remark 1.2.2/1, S. 26] folgt

$$\begin{aligned}
&\varphi(\ell(Q_{-j,m}))|Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varphi(\ell(Q_{-j,m}))|Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{p}+1} \left(\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right).
\end{aligned}$$

Durch dieselbe Vorgehensweise des ersten Falls ergibt sich $\|x+y|m_p^\varphi\| \leq 2^{\frac{1}{p}+1}(\|x|m_p^\varphi\| + \|y|m_p^\varphi\|)$. Damit stellt diese Norm eine Quasinorm für $0 < p < 1$ dar.

Um zu zeigen, dass $(m_p^\varphi, \|\cdot|m_p^\varphi\|)$ vollständig ist, wurde der Beweis aus [2] auf die verallgemeinerten Morrey-Folgenräume angepasst.

Sei $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\{x_k^{(1)}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}, \{x_k^{(2)}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}, \dots\right)$ eine Cauchy-Folge in m_p^φ. Nach Definition einer Cauchy-Folge existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $h, i \in \mathbb{N}, h, i \geq N$ gilt, dass

$$\left\|x^{(h)} - x^{(i)}|m_p^\varphi\right\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(\ell(Q_{-j,m})) \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \left|x_k^{(h)} - x_k^{(i)}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Durch das Supremum innerhalb der Ungleichung gilt auch für beliebige $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$, dass

$$\varphi(\ell(Q_{-j,m})) \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \left|x_k^{(h)} - x_k^{(i)}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Für $j = 0$ ist $\ell(Q_{0,m}) = |Q_{0,m}| = 1$ und so folgt nach (2.3)

$$\varphi(1) \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{Q_{0,m}}} \left|x_k^{(h)} - x_k^{(i)}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \varphi(1) \left|x_m^{(h)} - x_m^{(i)}\right| < \varepsilon.$$

Da φ nur endliche positive Werte annimmt, resultiert

$$\left|x_m^{(h)} - x_m^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon}{\varphi(1)}, \text{ für alle } m \in \mathbb{Z}^d \text{ und } h, i \geq N.$$

Damit ist $\{x_m^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für ein festes $m \in \mathbb{Z}^d$ und es lässt sich eine neue Folge $x := \{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}^d}$ konstruieren, welche die Grenzwerte dieser Cauchyfolgen enthält, also $x_m := \lim\limits_{n\to\infty} x_m^{(n)}$. Benutzt man nun wieder Gleichung (2.2) und betrachtet $i \to \infty$, dann ist

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(\ell(Q_{-j,m})) \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \left| x_k^{(h)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| x^{(h)} - x | m_p^{\varphi} \right\| < \varepsilon \quad (2.4)$$

für $h \geq N$. Infolgedessen ist x der Grenzwert der Folge $x^{(h)}$. Die Folge x ist ebenfalls in m_p^{φ} enthalten, da $x = x^{(h)} - \left(x^{(h)} - x\right)$ und

$$\left\| x | m_p^{\varphi} \right\| = \left\| x^{(h)} - \left(x^{(h)} - x \right) | m_p^{\varphi} \right\| \leq c \cdot \left(\underbrace{\left\| x^{(h)} | m_p^{\varphi} \right\|}_{<\infty} + \underbrace{\left\| x^{(h)} - x | m_p^{\varphi} \right\|}_{<\infty \ (2.4)} \right) < \infty,$$

für ein $c \geq 1$. □

Der folgende Satz stammt aus [6, Lemma 2.2] und wurde hier für den Folgenraum angepasst. Er gibt Auskunft darüber, wann der Raum nur aus der Folge $x \equiv 0$ besteht.

Satz 29
Sei $0 < p < \infty$ *und* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$m_p^{\varphi} \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^*(2^k) := \sup_{j\geq k} 2^{(k-j)\frac{d}{p}} \varphi(2^j) < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

`Beweis:`
Wir unterscheiden die zwei zu zeigenden Richtungen.

$\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$

Sei $\varphi^*(2^k)$ endlich für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir wollen anhand eines Beispiels zeigen, dass $m_p^{\varphi}\backslash\{0\}$ nicht leer ist. Seien $k_0 \in \mathbb{N}$ und $m_0 \in \mathbb{Z}^d$ fest aber beliebig. Dann definieren wir die Folge $x = \{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}^d}$ durch

$$x_m := \begin{cases} 1, & Q_{0,m} \subset Q_{-k_0,m_0} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

x ist in m_p^φ, wie durch die folgende Betrachtung der Norm dieser Folge deutlich wird. Es gilt

$$\begin{aligned}\left\|x|m_p^\varphi\right\| &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}\cap Q_{-k_0,m_0}} 1\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} \left|Q_{-j,m}\cap Q_{-k_0,m_0}\right|^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

<u>1. Fall: $j \geq k_0$</u>

Der Betrag des Schnitts der beiden Würfel ist hier maximal, wenn m so gewählt wird, dass der größere Würfel $Q_{-j,m}$ den Kleineren Q_{-k_0,m_0} vollständig enthält. Also gilt

$$\begin{aligned}\sup_{j\geq k_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} |Q_{-j,m}\cap Q_{-k_0,m_0}|^{\frac{1}{p}} &= \sup_{j\geq k_0} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} |Q_{-k_0,m_0}|^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{j\geq k_0} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} 2^{\frac{k_0 d}{p}} = \sup_{j\geq k_0} \varphi(2^j)2^{(k_0-j)\frac{d}{p}} = \varphi^*(2^{k_0}) < \infty,\end{aligned}$$

nach der Voraussetzung für φ^*.

<u>2. Fall: $j < k_0$</u>

In diesem Fall ist der Betrag maximal, wenn $Q_{-j,m}$ im größeren Q_{-k_0,m_0} enthalten ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\sup_{j<k_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} |Q_{-j,m}\cap Q_{-k_0,m_0}|^{\frac{1}{p}} &= \sup_{j<k_0} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} |Q_{-j,m}|^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{j<k_0} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} 2^{\frac{jd}{p}} = \sup_{j<k_0} \varphi(2^j) < \infty\end{aligned}$$

da die Menge $\{\varphi(2^j) : 0 \leq j < k_0\}$ endlich ist und φ nur Werte in $(0,\infty)$ annimmt. Anhand dieser beiden Ergebnisse folgt, dass $x \in m_p^\varphi$ und somit $m_p^\varphi \neq \{0\}$.

$\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$

Sei jetzt $m_p^\varphi \neq \{0\}$. Angenommen, es existiert doch ein $k_* \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\varphi^*(2^{k_*}) = \infty$. Infolge der Voraussetzung $m_p^\varphi \neq \{0\}$, gibt es ein $x \in m_p^\varphi\backslash\{0\}$ und ein $m_x \in \mathbb{Z}^d$, sodass

$$\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-k_*,m_x}} |x_k|^p > 0. \tag{2.5}$$

Außerdem existiert für alle $\ell \in \mathbb{N}$ ein $j_\ell \geq k_*$, sodass

$$2^{(k_*-j_\ell)\frac{d}{p}}\varphi(2^{j_\ell}) > 2^\ell, \tag{2.6}$$

da $\varphi^*(2^{k_*}) = \sup\limits_{j \geq k_*} 2^{(k_*-j)\frac{d}{p}}\varphi(2^j) = \infty$.

Anhand dessen lässt sich dann aber feststellen, dass x nicht in m_p^φ sein kann, denn

$$\begin{aligned}
\left\|x|m_p^\varphi\right\| &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \varphi(2^j)2^{-\frac{jd}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-k_*,m_x}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \varphi(2^{j_\ell})2^{-\frac{j_\ell d}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-k_*,m_x}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{d}{p}(-j_\ell+k_*-k_*)}\varphi(2^{j_\ell}) \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-k_*,m_x}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{(k_*-j_\ell)\frac{d}{p}}\varphi(2^{j_\ell})2^{-k_*\frac{d}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-k_*,m_x}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(2.6)}{\geq} 2^\ell \underbrace{2^{-k_*\frac{d}{p}} \left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-k_*,m_x}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{>0,\ (2.5)}.
\end{aligned}$$

Für $\ell \to \infty$ geht diese Norm gegen unendlich und es folgt $x \notin m_p^\varphi$, also ein Widerspruch zur Annahme $x \in m_p^\varphi\backslash\{0\}$. □

Wie auch für $m_{u,p}$, gelten folgende Eigenschaft für m_p^φ.

Satz 30
Sei $0 < p < \infty$ *und* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

i) Ist $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, *dann ist* $m_{p_2}^\varphi \hookrightarrow m_{p_1}^\varphi$.

ii) Ist $\varphi(t) \geq a > 0$ *für alle* $t > 0$, *dann ist* $m_p^\varphi \hookrightarrow \ell_\infty$.

`Beweis:`

Sei $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in m_{p_2}^\varphi$.

<u>Zu *i)*</u>

<u>1. Fall: $p_2 < \infty$</u>

Wie auch im Beweis von Satz 13 *i)*, wenden wir hier wieder die Hölder-Ungleichung auf $\sum\limits_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k| \cdot 1$ mit $p = \frac{p_2}{p_1}$ an und bekommen

$$\left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

für beliebige $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$ (siehe Gleichung (1.5) und (1.7)). Durch Multiplikation mit $\varphi(\ell(Q_{-j,m})) > 0$ folgt

$$\begin{aligned}&\varphi(\ell(Q_{-j,m}))\left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ &\leq \varphi(\ell(Q_{-j,m}))\left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \|x|m_{p_2}^\varphi\|\end{aligned}$$

und nach linksseitiger Supremumsbildung auch $\|x|m_{p_1}^\varphi\| \leq \|x|m_{p_2}^\varphi\|$.

<u>2. Fall: $p_2 = \infty$</u>

Für beliebige $j \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^d$ gilt

$$\begin{aligned}&\varphi(\ell(Q_{-j,m}))|Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ \leq&\varphi(\ell(Q_{-j,m}))|Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} \sup_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ \overset{(1.6)}{=}&\varphi(\ell(Q_{-j,m}))|Q_{-j,m}|^{-\frac{1}{p}}\sup_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k||Q_{-j,m}|^{\frac{1}{p}}\\ =&\varphi(\ell(Q_{-j,m}))\sup_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|\\ \leq&\|x|m_\infty^\varphi\|\end{aligned}$$

und mithilfe des Supremums $\|x|m_p^\varphi\| \leq \|x|m_\infty^\varphi\|$.

Zu *ii)*
Für $\varphi : \mathbb{R}_+ \to [a,\infty), a > 0$ und ein beliebiges $m \in \mathbb{Z}^d$ zeigt sich

$$|x_m| = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{|Q_{0,m}|}}_{=1} \underbrace{\sum_{k:Q_{0,k} \subset Q_{0,m}} |x_k|^p}_{=|x_m|^p} \Bigg)^{\frac{1}{p}} \le \frac{a}{a} \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \Bigg(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{1}{a} \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \underbrace{\varphi(2^j)}_{\ge a} \Bigg(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} \le \underbrace{\frac{1}{a}}_{>0} \left\| x | m_p^{\varphi} \right\|$$

und demnach auch, mithilfe des Supremums über $m \in \mathbb{Z}^d$, $\|x|\ell_\infty\| = \sup\limits_{m\in\mathbb{Z}^d} |x_m| \le c \cdot \left\| x | m_p^{\varphi} \right\|$.

□

Satz 31
Sei $0 < p \le \infty$. Ist φ nach oben beschränkt, ist $\ell_\infty \hookrightarrow m_p^{\varphi}$.

`Beweis:`
Sei $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$. Da φ nach oben beschränkt ist, existiert ein $M > 0$, sodass $\varphi(t) \le M$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

1. Fall: $p = \infty$
Es gilt

$$\|x|m_\infty^{\varphi}\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(2^j) \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} |x_k| \le M \|x|\ell_\infty\|,$$

also ist $\ell_\infty \hookrightarrow m_\infty^{\varphi}$.

2. Fall: $p < \infty$
Anhand des 1. Falls und dem Ergebnis $m_\infty^{\varphi} \hookrightarrow m_p^{\varphi}$ aus Satz 30 *i)* folgt

$$\ell_\infty \hookrightarrow m_\infty^{\varphi} \hookrightarrow m_p^{\varphi}.$$

□

Folgerung 32
Sei $0 < p < \infty$. Existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass

$$c_1 \leq \varphi(2^k) \leq c_2$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

i) $m_p^\varphi = \ell_\infty$ *und*

ii) m_p^φ *ist nicht separabel.*

Beweis:
Durch Kombination von Satz 31 und Satz 30 *ii)* folgt Aussage *i)*. Da ℓ_∞ nicht separabel ist, folgt die zweite Aussage direkt aus der Ersten. □

Bemerkung 33
Für den Raum $m_{\infty,p}$ aus Definition 9 ist φ nach Satz 23 bestimmt als $\varphi(t) \equiv 1$. Diese Funktion erfüllt offensichtlich die Voraussetzung der Folgerung 32 und es gilt $m_{\infty,p} = \ell_\infty$. Zu diesem Ergebnis sind wir auch schon in Satz 14 gekommen.

2.3 Eigenschaften von m_p^φ mithilfe von $\mathcal{G}_p$

Für die weiteren Resultate ,vor allem die der Einbettung, wird eine spezielle Funktionenklasse $\mathcal{G}_p$ benötigt. Diese wird in [10], wie auch etwas abgewandelt in [2], wie folgt definiert.

Definition 34 $\mathcal{G}_p$
Sei $0 < p < \infty$. Dann ist

$$\mathcal{G}_p := \left\{ \varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ nicht-fallend} : t^{-\frac{d}{p}} \varphi(t) \geq s^{-\frac{d}{p}} \varphi(s) \text{ für alle } 0 < t \leq s < \infty \right\}.$$

Für $p = \infty$ ist

$$\mathcal{G}_\infty := \left\{ \varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : \varphi(t) = k,\ k \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

die Menge der nicht-negativen konstanten Funktionen.

Bemerkung 35
In anderen Worten enthält diese Klasse $\mathcal{G}_p$ alle nicht-fallenden Funktionen $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, für

die aber $\Phi(t) := t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t)$ nicht-steigend ist. Dadurch lässt sich die m_p^φ-Norm auch durch

$$\left\|x|m_p^\varphi\right\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0; m\in\mathbb{Z}^d} \Phi(2^j)\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ausdrücken. Die Monotonie der Funktion Φ ist hier wesentlich, da sonst der Raum m_p^φ für ein steigendes Φ nur aus der Folge $x \equiv 0$ bestehen würde.
Im Fall $m_p^\varphi = m_{u,p}$ ist φ bestimmt als $\varphi(t) = t^{\frac{d}{u}}$, welche nicht-fallend ist für $0 < p \leq u \leq \infty$ und $\Phi(t) = t^{d(\frac{1}{u}-\frac{1}{p})}$ nicht-steigend ist, da $\frac{1}{u} - \frac{1}{p} \leq 0$.

Wir wollen jetzt den Raum-Parameter φ genau aus dieser Klasse $\mathcal{G}_p$ wählen und mithilfe dessen auf weitere Eigenschaften des verallgemeinerten Morrey-Folgenraums schließen.

Satz 36
Sei $0 < p \leq u \leq \infty$ und $\varphi \in \mathcal{G}_u$. Dann ist $m_{u,p} \hookrightarrow m_p^\varphi$.

`Beweis:`
1. Fall: $u < \infty$
Sei $x \in m_{u,p}$. Es reicht zu zeigen, dass ein $c > 0$ existiert, sodass für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $\varphi(2^j) \leq c \cdot 2^{\frac{jd}{u}}$, da dann folgt

$$\varphi(2^j)\left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot 2^{\frac{jd}{u}}\left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \|x|m_{u,p}\|$$

und durch Supremumsbildung $\|x|m_p^\varphi\| \leq c \cdot \|x|m_{u,p}\|$. Da φ in $\mathcal{G}_u$ liegt, besitzt die Funktion die Eigenschaft $t^{-\frac{d}{u}}\varphi(t) \geq s^{-\frac{d}{u}}\varphi(s)$ für alle $0 < t \leq s < \infty$. Wir wählen $t = 1$ und $s = 2^j$ und erhalten

$$\varphi(1) = 1^{-\frac{d}{u}}\varphi(1) \geq \left(2^j\right)^{-\frac{d}{u}}\varphi(2^j) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\varphi(1)}_{=:c}\left(2^j\right)^{\frac{d}{u}} \geq \varphi(2^j).$$

Diese Ungleichung ist für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gültig, da stets $1 \leq 2^j$ erfüllt ist. Außerdem ist $0 < c = \varphi(1) < \infty$, da φ nur nach $(0,\infty)$ abbildet.

2. Fall: $u = \infty$
In diesem Fall ist φ aus $\mathcal{G}_\infty$, weshalb eine Konstante $k \in \mathbb{R}_+$ existiert, sodass $\varphi(t) = k$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Damit folgt für $0 < p < \infty$, dass

$$\begin{aligned}\left\|x|m_p^\varphi\right\| &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(2^j)\left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= k\cdot \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d}\left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = k\cdot\|x|m_{\infty,p}\|\end{aligned}$$

und für $p=\infty$

$$\|x|m_\infty^\varphi\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\varphi(2^j)\sup_{k\in\mathbb{Z}^d}|x_k| = k\cdot\sup_{k\in\mathbb{Z}^d}|x_k| = k\cdot\|x|m_{\infty,\infty}\|.$$

□

Folgerung 37

Für $0<p<u<\infty$ und $\varphi\in\mathcal{G}_u$ ist $\ell_{u,\infty}\hookrightarrow m_p^\varphi$.

`Beweis:`

Nach Satz 13 *iii)* und Satz 36 ist $\ell_{u,\infty}\hookrightarrow m_{u,p}\hookrightarrow m_p^\varphi$. □

Als Nächstes benötigen wir folgenden Hilfssatz. Dieser stammt aus [2, Lemma 4.2] und wurde hier für mehrdimensionale Folgen und unsere Definitionen angepasst.

Satz 38

Sei $0<p<\infty$ und $\varphi\in\mathcal{G}_p$. Außerdem sei die charakteristische Folge ξ^{m_0,j_0} für $m_0\in\mathbb{Z}^d$ und $j_0\in\mathbb{N}_0$ gegeben durch

$$\xi_k^{m_0,j_0} := \begin{cases} 1, & \textit{falls } Q_{0,k}\subset Q_{-j_0,m_0}\\ 0, & \textit{sonst.}\end{cases}$$

Dann gilt

$$\left\|\xi^{m_0,j_0}|m_p^\varphi\right\| = \varphi(\ell(Q_{-j_0,m_0})).$$

`Beweis:`

Seien m_0 und j_0 fest. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
\left\|\xi^{m_0,j_0}|m_p^\varphi\right\| &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0;m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(\ell(Q_{-j,m}))\left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}\left|\xi_k^{m_0,j_0}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \varphi(\ell(Q_{-j_0,m_0}))\left(\frac{1}{|Q_{-j_0,m_0}|}\underbrace{\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j_0,m_0}} 1}_{=|Q_{-j_0,m_0}|}\right)^{\frac{1}{p}} = \varphi(\ell(Q_{-j_0,m_0})).
\end{aligned}
$$

Um zu zeigen, dass auch $\left\|\xi^{m_0,j_0}|m_p^\varphi\right\| \leq \varphi(\ell(Q_{-j_0,m_0}))$, betrachten wir beliebige $m\in\mathbb{Z}^d$ und $j\in\mathbb{N}_0$.

<u>1. Fall: $j\leq j_0$</u>
Da φ nicht fällt und $Q_{-j,m_0}\subseteq Q_{-j_0,m_0}$ ist, gilt

$$
\begin{aligned}
&\varphi(2^j)\left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}|\xi_k^{m_0,j_0}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varphi(2^{j_0})\left(\frac{1}{|Q_{-j,m_0}|}\underbrace{\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m_0}} 1}_{=|Q_{-j,m_0}|}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \varphi(\ell(Q_{-j_0,m_0})).
\end{aligned}
$$

<u>2. Fall: $j\geq j_0$</u>
Da φ in $\mathcal{G}_p$ liegt, gilt $s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s)\leq t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t)$ für alle $0<t\leq s$. Dies können wir für $t=2^{j_0}$ und $s=2^j$ anwenden und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\varphi(2^j)\left(\frac{1}{\underbrace{|Q_{-j,m}|}_{2^{jd}}}\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j,m}}|\xi_k^{m_0,j_0}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(2^j\right)^{-\frac{d}{p}}\varphi(2^j)\left(\sum_{k:Q_{0,k}\subset Q_{-j_0,m_0}} 1\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(2^{j_0}\right)^{-\frac{d}{p}}\varphi(2^{j_0})\underbrace{|Q_{-j_0,m_0}|}_{=2^{dj_0}}^{\frac{1}{p}} = \varphi(\ell(Q_{-j_0,m_0})).
\end{aligned}
$$

Durch das Supremum über alle $m\in\mathbb{Z}^d$ und $j\in\mathbb{N}_0$ in beiden Fällen, geht die gewünschte Aussage hervor.

□

Falls φ aus $\mathcal{G}_p$ ist, können wir Folgerung 32 zu einer Äquivalenz verschärfen. Dieses Ergebnis wurde für die Funktionenräume in [10, Corollary 29] bewiesen und hier entsprechend angepasst.

Satz 39
Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $\varphi \in \mathcal{G}_p$ und $0 < p < \infty$. Dann ist genau dann $m_p^\varphi = \ell_\infty$, wenn $0 < \inf_{t\in\mathbb{N}} \varphi(t) \leq \sup_{t\in\mathbb{N}} \varphi(t) < \infty$.

`Beweis:`
Folgerung 32 besagt bereits, dass $m_p^\varphi = \ell_\infty$, falls $0 < c_1 := \inf_{t>0} \varphi(t) \leq \sup_{t>0} \varphi(t) =: c_2 < \infty$. Nun bleibt also noch die andere Richtung zu zeigen.
Sei $m_p^\varphi = \ell_\infty$. Dann existieren für ein $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ Konstanten $d_1, d_2 > 0$, sodass

$$\|x|\ell_\infty\| \leq d_1 \left\|x|m_p^\varphi\right\| \quad \text{und} \quad \left\|x|m_p^\varphi\right\| \leq d_2 \|x|\ell_\infty\| .$$

Seien jetzt $j_0 \in \mathbb{N}_0,\ m_0 \in \mathbb{Z}^d$ beliebig und ξ^{m_0,j_0} die charakteristische Folge aus Satz 38. Nach diesem Satz ist $\left\|\xi^{m_0,j_0}|m_p^\varphi\right\| = \varphi(\ell(Q_{-j_0,m_0}))$ und es folgt zum Einen

$$1 = \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} |\xi_k^{m_0,j_0}| = \left\|\xi^{m_0,j_0}|\ell_\infty\right\| \leq d_1 \left\|\xi^{m_0,j_0}|m_p^\varphi\right\| = d_1\varphi(\ell(Q_{-j_0,m_0}))$$

also $\tilde{d}_1 := \frac{1}{d_1} \leq \varphi(2^{j_0})$, und zum Anderen

$$\varphi(\ell(Q_{-j_0,m_0})) = \left\|\xi^{m_0,j_0}|m_p^\varphi\right\| \leq d_2 \left\|\xi^{m_0,j_0}|\ell_\infty\right\| = d_2 \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} \left|\xi_k^{m_0,j_0}\right| = d_2,$$

also $\varphi(2^{j_0}) \leq d_2$. Da j_0 beliebig und φ nicht-fallend ist, ist die Funktion für alle $t \in \mathbb{N}$ nach oben durch $d_2 > 0$ und nach unten durch $\tilde{d}_1 > 0$ beschränkt. □

2.4 Einbettung

Auch die Einbettung soll für den neuen Raum beleuchtet werden. Den folgenden wichtigen Satz dazu entnahmen wir [2, Theorem 4.3] und passten ihn auf unsere Situation an.

Satz 40 Hauptresultat der Einbettung für verallgemeinerte Morrey-Folgenräume
Sei $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\varphi_1 \in \mathcal{G}_{p_1}$ und $\varphi_2 \in \mathcal{G}_{p_2}$. Dann sind

i) $\varphi_1(2^j) \leq C \cdot \varphi_2(2^j)$ *für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und ein $C > 0$*

ii) $m_{p_2}^{\varphi_2} \hookrightarrow m_{p_1}^{\varphi_1}$

iii) $m_{p_2}^{\varphi_2} \subseteq m_{p_1}^{\varphi_1}$

äquivalente Aussagen.

`Beweis:`
Der Beweis erfolgt in zwei Teilen.

$\boxed{i) \ \Leftrightarrow ii)}$
Angenommen, φ_1 und φ_2 erfüllen die Eigenschaft *i)*. Sei $x \in m_{p_2}^{\varphi_2}$ und seien $m \in \mathbb{Z}^d$ und $j \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann erhält man durch

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\ell(Q_{-j,m})) \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k} \subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq C \cdot \varphi_2(\ell(Q_{-j,m})) \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k} \subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\overset{(1.7)}{\leq} C \cdot \varphi_2(\ell(Q_{-j,m})) \left(\frac{1}{|Q_{-j,m}|} \sum_{k:Q_{0,k} \subset Q_{-j,m}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq C \cdot \left\| x | m_{p_2}^{\varphi_2} \right\|
\end{aligned}$$

und anschließender Supremumsbildung, dass $\|x|m_{p_1}^{\varphi_1}\| \leq C \cdot \|x|m_{p_2}^{\varphi_2}\|$. Dabei wurde das Zwischenergebnis (1.7) aus dem Kapitel 1 genutzt und es folgt $m_{p_2}^{\varphi_2} \hookrightarrow m_{p_1}^{\varphi_1}$.
Nehmen wir jetzt an, *ii)* gilt. Sei dann $m_0 \in \mathbb{Z}^d$, $j_0 \in \mathbb{N}_0$ und ξ^{m_0,j_0} die charakteristische Folge aus Satz 38. Die Annahme $m_{p_2}^{\varphi_2} \hookrightarrow m_{p_1}^{\varphi_1}$ angewandt auf ξ^{m_0,j_0} ergibt

$$\left\| \xi^{m_0,j_0} | m_{p_1}^{\varphi_1} \right\| \leq C \cdot \left\| \xi^{m_0,j_0} | m_{p_2}^{\varphi_2} \right\|$$

für ein $C > 0$. Außerdem folgt durch den bereits bewiesenen Hilfssatz Satz 38, dass

$$\varphi_1(\ell(Q_{-j_0,m_0})) = \left\| \xi^{m_0,j_0} | m_{p_1}^{\varphi_1} \right\| \qquad \text{und} \qquad \left\| \xi^{m_0,j_0} | m_{p_2}^{\varphi_2} \right\| = \varphi_2(\ell(Q_{-j_0,m_0})).$$

Durch Kombination dieser beiden Ergebnisse, resultiert

$$\varphi_1(\ell(Q_{-j_0,m_0})) = \left\| \xi^{m_0,j_0} | m_{p_1}^{\varphi_1} \right\| \leq C \cdot \left\| \xi^{m_0,j_0} | m_{p_2}^{\varphi_2} \right\| = C \cdot \varphi_2(\ell(Q_{-j_0,m_0}))$$

und damit $\varphi_1(2^{j_0}) \leq C \cdot \varphi_2(2^{j_0})$ für beliebige $j_0 \in \mathbb{N}_0$.

$\boxed{ii) \ \Leftrightarrow iii)}$

Aus Aussage *ii)* folgt direkt *iii)*, da für alle Folgen $x \in m_{p_2}^{\varphi_2}$ gilt, dass $\|x|m_{p_1}^{\varphi_1}\| \overset{ii)}{\leq} C \cdot \|x|m_{p_2}^{\varphi_2}\| < \infty$. Damit liegt x auch in $m_{p_1}^{\varphi_1}$. Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass *ii)* auch aus *iii)* folgt.
Sei also $m_{p_2}^{\varphi_2} \subseteq m_{p_1}^{\varphi_1}$. Für ein $x \in m_{p_2}^{\varphi_2}$ ist $\|x|m_{p_2}^{\varphi_2}\| < \infty$ und damit auch durch die Teilmen-

genbeziehung $\|x|m_{p_1}^{\varphi_1}\| < \infty$. Dann können wir eine neue Norm für jedes $x \in m_{p_2}^{\varphi_2}$ definieren:

$$|||x||| := \left\|x|m_{p_1}^{\varphi_1}\right\| + \left\|x|m_{p_2}^{\varphi_2}\right\| .$$

Wie in [7, Proposition 2.8] kann gezeigt werden, dass $\left(m_{p_2}^{\varphi_2}, |||\cdot|||\right)$ auch ein Banachraum ist. Zudem ist $\left(m_{p_2}^{\varphi_2}, |||\cdot|||\right)$, aufgrund von $\|x|m_{p_2}^{\varphi_2}\| \leq |||x|||$ und der Vollständigkeit des neuen Raums, ein abgeschlossener Unterraum von $\left(m_{p_2}^{\varphi_2}, \|\cdot|m_{p_2}^{\varphi_2}\|\right)$. Sei nun die Identitätsabbildung

$$I : \left(m_{p_2}^{\varphi_2}, |||\cdot|||\right) \to \left(m_{p_2}^{\varphi_2}, \left\|\cdot|m_{p_2}^{\varphi_2}\right\|\right)$$

definiert. Der Operator I ist stetig, denn für eine in $\left(m_{p_2}^{\varphi_2}, |||\cdot|||\right)$ konvergente Folge $x^{(n)} \to x$ konvergiert auch $Ix^{(n)}$ in $\left(m_{p_2}^{\varphi_2}, \|\cdot|m_{p_2}^{\varphi_2}\|\right)$ gegen Ix, da

$$\left\|Ix^{(n)} - Ix|m_{p_2}^{\varphi_2}\right\| = \left\|x^{(n)} - x|m_{p_2}^{\varphi_2}\right\| \leq \left\|x^{(n)} - x|m_{p_2}^{\varphi_2}\right\| + \left\|x^{(n)} - x|m_{p_1}^{\varphi_1}\right\| = \left|\left|\left|x^{(n)} - x\right|\right|\right| < \varepsilon$$

für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Jeder stetige Operator zwischen normierten Vektorräumen ist auch beschränkt (vgl. [8, Proposition 2.1.2]). Außerdem ist die Identitätsabbildung bijektiv, weshalb wir [8, Korollar 2.2.5] (Satz vom stetigen Inversen) auf I anwenden können. Nach diesem Korollar ist die Inverse I^{-1} auch beschränkt, weshalb ein $C > 0$ existieren muss, sodass $\left|\left|\left|I^{-1}x\right|\right|\right| \leq C \cdot \|x|m_{p_2}^{\varphi_2}\|$. Also folgt

$$\left\|x|m_{p_1}^{\varphi_1}\right\| \leq |||x||| = \left|\left|\left|I^{-1}x\right|\right|\right| \leq C \cdot \left\|x|m_{p_2}^{\varphi_2}\right\| .$$

□

2.5 Beispiele für φ

Um zu zeigen, dass die Funktionenklasse $\mathcal{G}_p$ nicht leer ist, wollen wir konkrete Bespiele für Funktionen aus dieser Klasse betrachten. Das Folgende ist aus [10, Example 10, S. 23].

Satz 41
Sei $0 < p \leq \infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $\varphi(t) = t^\alpha$ genau dann in $\mathcal{G}_p$, wenn $0 \leq \alpha \leq \frac{d}{p}$.

`Beweis:`
$\varphi(t) = t^\alpha$ ist nur für $\alpha \geq 0$ nicht-fallend. Zudem ist für beliebige $0 < t \leq s < \infty$ die Ungleichung

$$t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = t^{-\frac{d}{p}+\alpha} \geq s^{-\frac{d}{p}+\alpha} = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s)$$

dann, und nur dann erfüllt, wenn der Exponent nicht positiv ist, da ja $t \leq s$. Also muss

$$-\frac{d}{p} + \alpha \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq \frac{d}{p}$$

gelten.
Auch für $p = \infty$ ist die Aussage des Satzes wahr, da $\varphi(t) = t^\alpha$ genau dann konstant (also in $\mathcal{G}_\infty$) ist, wenn $\alpha = 0$. □

Betrachtet man nun zwei dieser Funktionen, $\varphi_1(t) = t^{\alpha_1}$ und $\varphi_2(t) = t^{\alpha_2}$, lässt sich mithilfe von Satz 40 eine Bedingung für α_1 und α_2 bestimmen, anhand dieser $m_{p_2}^{\varphi_2}$ in $m_{p_1}^{\varphi_1}$ enthalten ist.

Satz 42
Sei $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $0 \leq \alpha_1 \leq \frac{d}{p_1}$ *und* $0 \leq \alpha_2 \leq \frac{d}{p_2}$. *Außerdem seien die Funktionen*

$$\varphi_1(t) = t^{\alpha_1} \text{ und } \varphi_2(t) = t^{\alpha_2}$$

für $t > 0$ *definiert. Dann gilt*

$$m_{p_2}^{\varphi_2} \hookrightarrow m_{p_1}^{\varphi_1} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 \leq \alpha_2.$$

`Beweis:`
Aus Satz 41 ist bekannt, dass durch $0 \leq \alpha_1 \leq \frac{d}{p_1}$ und $0 \leq \alpha_2 \leq \frac{d}{p_2}$ folgt, dass $\varphi_1 \in \mathcal{G}_{p_1}$ und $\varphi_2 \in \mathcal{G}_{p_2}$. Nach dem Hauptresultat der Einbettung, Satz 40, wissen wir, dass $m_{p_2}^{\varphi_2} \hookrightarrow m_{p_1}^{\varphi_1}$ äquivalent ist zu $\varphi_1(2^j) \leq C \cdot \varphi_2(2^j)$, für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und ein $C > 0$. Diese Ungleichung können wir umformen und erhalten

$$C \geq \varphi_1(2^j) \cdot \big(\varphi_2(2^j)\big)^{-1} = 2^{j\alpha_1} \cdot 2^{-j\alpha_2} = 2^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Da $2^{j(\alpha_1-\alpha_2)}$ also für alle $j \in \mathbb{N}_0$ durch C nach oben beschränkt sein soll, muss

$$\alpha_1 - \alpha_2 \leq 0, \quad \text{also} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2$$

gelten. □

Doch natürlich gibt es noch weitere Beispiele für Funktionen aus $\mathcal{G}_p$.

Satz 43
Sei $0 < p < \infty$ *und* $0 < t \leq s < \infty$.

i) *Die konstanten Funktionen* $\varphi(t) = c,\ c \geq 0$, *sind in* $\mathcal{G}_p$.

ii) *Seien* $u, v \in (0, \infty)$ *mit* $u \neq v$. *Dann ist* $\varphi(t) = \begin{cases} t^{\frac{d}{u}}, & t \leq 1 \\ t^{\frac{d}{v}}, & t > 1 \end{cases} \in \mathcal{G}_p$, *wenn* $p = \min(u, v)$.

iii) *Seien* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{G}_p$. *Dann folgt*

a) $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{G}_p$

b) $\max\{\varphi_1, \varphi_2\} \in \mathcal{G}_p$

c) $\min\{\varphi_1, \varphi_2\} \in \mathcal{G}_p$.

iv) *Es gilt* $\varphi(t) = \min(t^{\frac{d}{p}}, 1) \in \mathcal{G}_p$ *und* $\varphi(t) = \max(t^{\frac{d}{p}}, 1) \in \mathcal{G}_p$.

v) *Für ein* $a \leq 0$ *und* $L > e$ *ist* $\varphi(t) = t^{\frac{d}{p}} \cdot (\log(L + t))^a \in \mathcal{G}_p$.

Diese Beispiele wurden bereits in [1] zusammengefasst und entstammen ursprünglich [10, Example 10, S. 23] und [3, Example 2.5].

`Beweis:`
Für $0 < p < \infty$ und $0 < t \leq s < \infty$ sind alle genannten Funktionen nicht-negativ und nicht-fallend auf $(0, \infty)$. Nun bleibt also nur noch zu zeigen, dass $t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) \geq s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s)$ gilt.

i) Da $t^{-\frac{d}{p}} \geq s^{-\frac{d}{p}}$, aufgrund des negativen Exponenten, folgt direkt

$$t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = t^{-\frac{d}{p}}c \geq s^{-\frac{d}{p}}c = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s).$$

ii) Sei $u, v \in (0, \infty)$, $u \neq v$ und $p = \min(u, v)$ gegeben. Dann unterscheiden wir folgende Fälle:
1. Fall: $p = u < v$

Sei $0 < t \leq s \leq 1$.
Dann folgt $t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = t^{-\frac{d}{p}} \cdot t^{\frac{d}{p}} = 1 = s^{-\frac{d}{p}} \cdot s^{\frac{d}{p}} = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s)$.

Sei $0 < t \leq 1 < s < \infty$.
Dann folgt $t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = 1 > s^{\frac{d}{v} - \frac{d}{p}} = s^{-\frac{d}{p}} \cdot s^{\frac{d}{v}} = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s)$, da $\frac{1}{v} - \frac{1}{p} < 0$.

Sei $1 < t \leq s < \infty$.
Dann folgt $t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = t^{\frac{d}{v} - \frac{d}{p}} \geq s^{\frac{d}{v} - \frac{d}{p}} = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s)$.

2. Fall: $p = v < u$

Sei $0 < t \leq s \leq 1$.
Dann folgt $t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = t^{\frac{d}{u}-\frac{d}{p}} \geq s^{\frac{d}{u}-\frac{d}{p}} = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s)$.

Sei $0 < t \leq 1 < s < \infty$.
Dann folgt $t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = t^{\frac{d}{u}-\frac{d}{p}} \geq 1 = s^{-\frac{d}{p}} \cdot s^{\frac{d}{p}} = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s)$, da $\frac{1}{u} - \frac{1}{p} < 0$ und $0 < t \leq 1$.

Sei $1 < t \leq s < \infty$.
Dann folgt $t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = t^{-\frac{d}{p}} \cdot t^{\frac{d}{p}} = 1 = s^{-\frac{d}{p}} \cdot s^{\frac{d}{p}} = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s)$.

iii) Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{G}_p$.

a) Für $\varphi(t) := \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ gilt

$$t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = t^{-\frac{d}{p}}\varphi_1(t) + t^{-\frac{d}{p}}\varphi_2(t) \geq s^{-\frac{d}{p}}\varphi_1(s) + s^{-\frac{d}{p}}\varphi_2(s) = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(t).$$

b) Sei $\varphi(t) = \max\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$, für beliebige $t > 0$.
Außerdem seien $i, j \in \{1, 2\}$ mit $i \neq j$. Für $\max\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\} = \varphi_i(t)$ und $\max\{\varphi_1(s), \varphi_2(s)\} = \varphi_j(s)$ folgt

$$t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = t^{-\frac{d}{p}}\varphi_i(t) \geq t^{-\frac{d}{p}}\varphi_j(t) \geq s^{-\frac{d}{p}}\varphi_j(s) = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s).$$

Für $\max\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\} = \varphi_i(t)$ und $\max\{\varphi_1(s), \varphi_2(s)\} = \varphi_i(s)$ für $i = 1$ oder $i = 2$ ist die Ungleichung automatisch erfüllt, da $\varphi_i \in \mathcal{G}_p$.

c) Sei $\varphi(t) = \min\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$, für beliebige $t > 0$.
Außerdem seien $i, j \in \{1, 2\}$ mit $i \neq j$. Für $\min\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\} = \varphi_i(t)$ und $\min\{\varphi_1(s), \varphi_2(s)\} = \varphi_j(s)$ folgt

$$t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = t^{-\frac{d}{p}}\varphi_i(t) \geq s^{-\frac{d}{p}}\varphi_i(s) \geq s^{-\frac{d}{p}}\varphi_j(s) = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s).$$

Für $\min\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\} = \varphi_i(t)$ und $\min\{\varphi_1(s), \varphi_2(s)\} = \varphi_i(s)$ für $i = 1$ oder $i = 2$ ist die Ungleichung automatisch erfüllt, da $\varphi_i \in \mathcal{G}_p$.

iv) Diese Aussage folgt aus Satz 41, *i)* und *iii)*.

v) Aufgrund der Monotonie des Logarithmus gilt $\log(L + t) \leq \log(L + s)$ für $L > e$ und deshalb auch

$$\log(L + t)^a \geq \log(L + s)^a$$

für $a \leq 0$. Dann ist $t^{-\frac{d}{p}}\varphi(t) = \log(L + t)^a \geq \log(L + s)^a = s^{-\frac{d}{p}}\varphi(s)$.

□

Satz 44
Sei $0 < p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $a_i \geq 0$ *für* $i = 0, \dots, n$. *Dann ist das Polynom* $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ *für* $t > 0$ *in* $\mathcal{G}_p$ *enthalten, wenn* $n \leq \frac{d}{p}$.

`Beweis:`
Sei $\varphi_i(t) := a_i t^i$ für $i = 0, \dots, n$. Da $a_i \geq 0$, sind diese Funktionen nicht-fallend. Außerdem gilt $0 \leq i \leq n \leq \frac{d}{p}$ und deshalb, ähnlich zu Satz 41, $\varphi_i \in \mathcal{G}_p$. Nach Satz 43 *iii)* folgt dann

$$\sum_{i=1}^{n} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(t) \in \mathcal{G}_p.$$

Des Weiteren ist das Polynom nur dann konstant, wenn der Grad $n = 0$, also für $p = \infty$. $\square$

Satz 45
Sei $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ *und* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ *mit* $n_1 \leq \frac{d}{p_1}$ *und* $n_2 \leq \frac{d}{p_2}$. *Zudem seien die Polynome*

$$\varphi_1(t) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i t^i \text{ und } \varphi_2(t) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i t^i$$

für $t > 0$ *und* $a_i, b_i \geq 0, a_{n_1}, b_{n_2} \neq 0$ *definiert. Dann folgt für* $n_1 \leq n_2$, *dass*

$$m_{p_2}^{\varphi_2} \hookrightarrow m_{p_1}^{\varphi_1}. \tag{2.7}$$

`Beweis:`
Anhand der Voraussetzungen für n_1 und n_2 ist, infolge von Satz 44, φ_1 in $\mathcal{G}_{p_1}$ und φ_2 in $\mathcal{G}_{p_2}$. Um (2.7) zu beweisen, kann also Satz 40 verwendet werden. Demnach muss nur gezeigt werden, dass immer ein $C > 0$, sodass $\varphi_1(2^j) \leq C \cdot \varphi_2(2^j)$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ existiert, falls $n_1 \leq n_2$.
Wir wissen für alle $i = 0, \dots, n_1$, dass

$$i - n_2 \leq n_1 - n_2 \leq 0. \tag{2.8}$$

Daraus folgt

$$\frac{\varphi_1(2^j)}{\varphi_2(2^j)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_1} a_i 2^{ji}}{\sum_{i=0}^{n_2} b_i 2^{ji}} = \frac{2^{n_2 j} \sum_{i=0}^{n_1} a_i 2^{ji-n_2 j}}{2^{n_2 j} \sum_{i=0}^{n_2} b_i 2^{ji-n_2 j}} = \frac{\sum_{i=0}^{n_1} a_i 2^{j(i-n_2)}}{b_{n_2} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n_2-1} b_i 2^{j(i-n_2)}}_{\xrightarrow[j\to\infty]{} 0}} \overset{(2.8)}{\leq} \frac{\sum_{i=0}^{n_1} a_i}{b_{n_2}} =: C$$

und demzufolge $\varphi_1(2^j) \leq C \cdot \varphi_2(2^j)$. □

Als nächstes wollen wir die Funktion $\varphi(t) = b - e^{-t}$ (siehe Abb. 2.1) beleuchten. Der Gedanke hinter der Wahl dieser Funktion ist, eine sowohl nach oben, also auch nach unten (durch positive Werte) beschränkte Funktion zu betrachten, die aber trotzdem überall nicht monoton fällt. Ist dies erfüllt, muss, aufgrund von Folgerung 32, $m_p^\varphi = \ell_\infty$ sein. Dies lässt vermuten, dass dann natürlich immer $m_{p_2}^{\varphi_2} \hookrightarrow m_{p_1}^{\varphi_1}$, für beliebige φ_1, φ_2 der Form und mit den genannten Eigenschaften, gilt. Betrachten wir die Eigenschaften von φ also genauer.

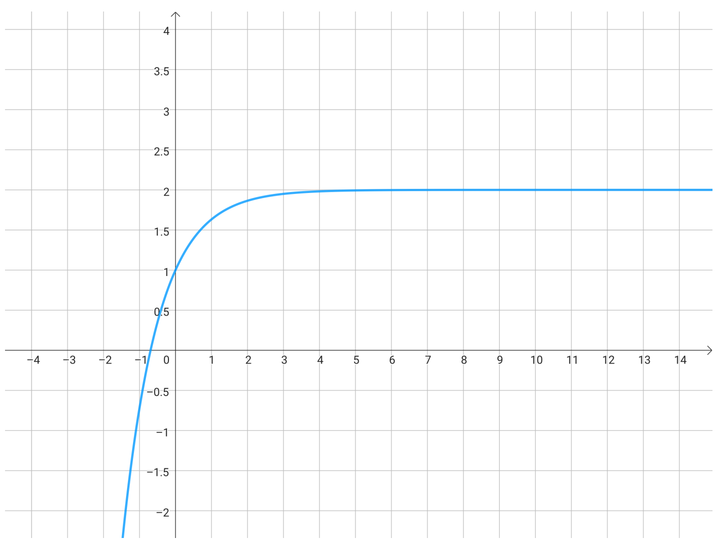

Abbildung 2.1: Funktion $\varphi(t) = 2 - e^{-t}$

Für alle $t > 0$ ist $\varphi(t) = b - e^{-t}$ monoton steigend und nach oben durch $b \in \mathbb{R}$ beschränkt. Nach unten ist sie infolge der Monotonie und $t > 0$ durch $\varphi(0) = b - 1$ beschränkt. Soll das Infimum also, wie in Folgerung 32 gefordert, größer als 0 sein, muss $b > 1$ gelten.

Folgerung 46
Sei $0 < p < \infty$ *und* $b > 1$. *Dann gilt*

$$m_p^\varphi = \ell_\infty \text{ für } \varphi(t) = b - e^{-t}.$$

`Beweis:`
Da φ für $t > 0$ nach unten durch $b - 1 > 0$ und nach oben durch $b > 1$ beschränkt ist, folgt nach Folgerung 32 die Aussage.

□

Danach wissen wir also, dass für beliebige $\varphi_1(t) = b_1 - e^{-t}$ und $\varphi_2(t) = b_2 - e^{-t}$ mit $b_1, b_2 > 1$ folgt, dass

$$m_{p_2}^{\varphi_2} = \ell_\infty \hookrightarrow \ell_\infty = m_{p_1}^{\varphi_1}.$$

Anhand dessen lässt sich jetzt überprüfen, wie streng die Voraussetzungen des Satz 40 sind, indem wir diese Einschränkungen mit denen des Satzes vergleichen.

Satz 47
Sei $0 < p < \infty$. *Dann ist* $\varphi(t) = b - e^{-t}$ *genau dann in* $\mathcal{G}_p$, *wenn* $b \geq \begin{cases} \frac{p}{d} e^{\frac{d}{p} - 1}, & p > d \\ 1, & p \leq d. \end{cases}$

`Beweis:`
Wir betrachten die Ableitung von $\Phi(t) = t^{-\frac{d}{p}} \varphi(t)$. Ist diese überall nicht-positiv, ist Φ monoton fallend und φ somit in $\mathcal{G}_p$. Die Ableitung wird bestimmt durch

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{d}{p}}\left(b - e^{-t}\right)\right) = -\frac{d}{p} t^{-\frac{d}{p}-1}\left(b - e^{-t}\right) + t^{-\frac{d}{p}} e^{-t} = t^{-\frac{d}{p}}\left(e^{-t}\left(1 + \frac{d}{p}\frac{1}{t}\right) - b\frac{d}{p}\frac{1}{t}\right) \overset{!}{\leq} 0.$$

Dieser Term ist genau dann kleiner oder gleich Null, wenn

$$e^{-t}\left(1 + \frac{d}{p}\frac{1}{t}\right) \leq b\frac{d}{p}\frac{1}{t} \quad \text{bzw.} \quad e^{-t}\left(t + \frac{d}{p}\right) \leq b\frac{d}{p}. \tag{2.9}$$

Da dies für alle $t > 0$ gelten soll, bestimmen wir das Maximum der Funktion $e^{-t}\left(t + \frac{d}{p}\right) =: g(t)$. Die Gleichung

$$g'(t) = e^{-t}\left(1 - \frac{d}{p} - t\right) \overset{!}{=} 0$$

ist genau dann erfüllt, wenn $t = 1 - \frac{d}{p}$ ist. Dabei handelt es sich bei dieser Stelle tatsächlich um ein Maximum, da

$$g''(t) = e^{-t}\left(\frac{d}{p} + t - 2\right) \quad \text{bzw.} \quad g''\left(1 - \frac{d}{p}\right) = -e^{-1+\frac{d}{p}} \leq 0.$$

Nun muss unterschieden werden, ob sich die Extremstelle vor, oder nach $t = 0$ befindet.

1. Fall: $1 - \frac{d}{p} > 0$

In diesem Fall liegt die Extremstelle innerhalb des zulässigen Bereichs von t und es gilt

$$\sup_{t>0} g(t) = g\left(1 - \frac{d}{p}\right) = e^{\frac{d}{p}-1}.$$

Dann folgt mit (2.9)

$$\sup_{t>0} e^{-t}\left(t + \frac{d}{p}\right) = e^{\frac{d}{p}-1} \leq b\frac{d}{p} \quad \text{also} \quad \frac{p}{d}e^{\frac{d}{p}-1} \leq b.$$

2. Fall: $1 - \frac{d}{p} \leq 0$

Da es sich bei dem Maximum um die einzige Extremstelle von g handelt, ist g für alle $t > 1-\frac{d}{p}$ monoton fallend. Das Supremum der Funktion ist dann der Randwert $g(0)$, also

$$\sup_{t>0} g(t) = g(0) = \frac{d}{p}.$$

Dann folgt, wieder anhand von (2.9),

$$\sup_{t>0} e^{-t}\left(t + \frac{d}{p}\right) = \frac{d}{p} \leq b\frac{d}{p} \quad \text{also} \quad 1 \leq b.$$

□

Betrachten wir jetzt die Einbettung dieser speziellen Räume.

Satz 48

Sei $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\varphi_1(t) = b_1 - e^{-t} \in \mathcal{G}_{p_1}$ und $\varphi_2(t) = b_2 - e^{-t} \in \mathcal{G}_{p_2}$ für $t > 0$. Dann gilt immer

$$m_{p_2}^{\varphi_2} \hookrightarrow m_{p_1}^{\varphi_1}.$$

`Beweis:`

Nach Satz 40 muss nur noch gezeigt werden, dass es ein $C > 0$ existiert, sodass $\varphi_1(2^j) \leq C \cdot \varphi_2(2^j)$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Durch die Abschätzung

$$\frac{\varphi_1(2^j)}{\varphi_2(2^j)} = \frac{b_1 - e^{-2^j}}{b_2 - e^{-2^j}} \leq \frac{b_1}{b_2 - e^{-2^j}} \leq \frac{b_1}{b_2 - e^{-1}} =: C$$

wird deutlich, dass dieses C immer definiert und größer als Null ist, da $b_1, b_2 \geq 1$.

□

Die einzige Einschränkung der Konstanten b_1 und b_2 ist also dadurch bestimmt, dass $\varphi_1 \in \mathcal{G}_{p_1}$ und $\varphi_2 \in \mathcal{G}_{p_2}$. Anhand von Satz 47 wissen wir, dass dann

$$b_i \geq \begin{cases} \frac{p_i}{d} e^{\frac{d}{p_i} - 1}, & p_i > d \\ 1, & p_i \leq d \end{cases}$$

für $i \in \{1, 2\}$ gelten muss. Für große Werte von p_i bedeutet dies aber auch eine große Einschränkung von b_i, im Gegensatz zur eigentlichen Forderung $b_i > 1$.

Literaturverzeichnis

[1] Maike Bauer. “Verallgemeinerte Morrey-Räume - Grundlagen, Eigenschaften und Beispiele”. Friedrich-Schiller-Universität Jena. Dez. 2021.

[2] Hendra Gunawan, Eder Kikianty und Christopher Schwanke. “Discrete Morrey spaces and their inclusion properties”. In: *Mathematische Nachrichten* 291 (2017), S. 1283–1296.

[3] Dorothee D. Haroske, Susana D. Moura und Leszek Skrzypczak. “Wavelet decomposition and embeddings of generalised Besov-Morrey spaces”. In: *Nonlinear Analysis* 214 (2022), S. 112590.

[4] Dorothee D. Haroske und Leszek Skrzypczak. “Morrey Sequence Spaces: Pitt‘s Theorem and Compact Embeddings”. In: *Constructive Approximation* 51 (2019), S. 505–535.

[5] Eiichi Nakai. “A characterization of pointwise multipliers on the morrey spaces”. In: *Scientiae Mathematicae* 3 (2000), S. 445–454.

[6] Shohei Nakamura, Takahiro Noi und Yoshihiro Sawano. “Generalized Morrey spaces and trace operator”. In: *Science China Mathematics* 59 (2015), S. 281–336.

[7] Alen Osançlıol. “Inclusions between weighted Orlicz spaces”. In: *Journal of Inequalities and Applications* 2014:390 (2014).

[8] Gert K. Pedersen. *Analysis Now*. Graduate Texts in Mathematics 118. Kopenhagen: Springer-Verlag, 1995.

[9] Yoshihiro Sawano, Giuseppe Fazio und Denny Ivanal Hakim. *Morrey spaces. Introduction and Applications to Integral Operators and PDE’s. Vol I*. Monographs and Research Notes in Mathematics. Boca Raton, FL: Chapman & Hall CRC Press, 2020.

[10] Yoshihiro Sawano, Giuseppe Fazio und Denny Ivanal Hakim. *Morrey spaces. Introduction and Applications to Integral Operators and PDE’s. Vol. II*. Monographs and Research Notes in Mathematics. Boca Raton, FL: Chapman & Hall CRC Press, 2020.

[11] Hans Triebel. *Higher Analysis*. Übers. von Bernahrdt Simon. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Leipzig; Berlin; Heidelberg: Barth: Johann Ambrosius Barth Verlag GmbH, 1992.

[12] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. 8. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer.

Abbildungsverzeichnis

Die in dieser Arbeit verwendeten Abbildungen wurden mit GeoGebra erstellt und eigens angepasst.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände die vorliegende Bachelorarbeit für die öffentliche Benutzung im Universitätsarchiv zur Verfügung zu stellen.

Ort, Datum	Unterschrift