Reihe „Objekt des Monats“, Website der ThULB Jena, begonnen Februar 2014

Objekt des Monats Januar 2018

Teresa Kilian

Von der Kürze des menschlichen Verstandes – oder: $|A|<|P(A)|$

Am 6. Januar 1918 starb der deutsche Mathematiker Georg Cantor (1845-1918).

Der Begründer der Mengenlehre befasste sich zunächst mit Zahlentheorie. Die Theorie der Fourierreihen wurde schließlich zum Ausgangspunkt für seine Beschäftigung mit der Mengenlehre, die er zunächst noch als Mannigfaltigkeitslehre bezeichnete.

Überzeugt, dass das Wesen der Mathematik in ihrer Freiheit liegt, mit der Verpflichtung, dass ihre Begriffe in sich widerspruchslos und durch feste Definitionen in geordneten Beziehungen stehen, war er einer der letzten Mathematiker, der sich bemühte, seine Wissenschaft philosophisch einzubetten, um so einer seiner Meinung nach überflüssigen Einengung des mathematischen Forschungstriebes vorzubeugen.

Aufbauend auf Überlegungen von Galileo Galilei (1564-1642) und Bernard Bolzano (1781-1848) sowie im Austausch mit Richard Dedekind (1831-1916) untersuchte Cantor die Frage, ob alle Mengen abzählbar sind. Die nachfolgenden Auszüge aus den Werken Galileis, Bolzanos und Cantors versuchen einen Einblick in das Verständnis von Mengen und Unendlichkeit zu geben.

> „*Simpl.* *[...] ein Unendliches grösser als das Unendliche, das scheint mir in keiner Weise begreifbar.*
> *Salv.* *Das sind die Schwierigkeiten, die dadurch entstehen, dass wir mit unserem endlichen Intellect das Unendliche discutiren, indem wir letzterem die Eigenschaften zusprechen, die wir an dem Endlichen, Begrenzten kennen, das geht aber nicht an, denn die Attribute des Grossseins, der Kleinheit und Gleichheit kommen dem Unendlichen nicht zu, daher man nicht von grösseren, kleineren oder gleichen Unendlichen sprechen kann. Ein Beispiel fällt mir ein, das ich in Fragen Herrn Simplicio vorlegen werde, da er die Discussion angeregt hat.*
> *Ich setze voraus, Ihr wisset, welche Zahlen Quadratzahlen sind, und welche nicht.*
> *Simpl.* *Mir ist sehr wohl bekannt, dass eine Quadratzahl aus der Multiplication einer beliebigen Zahl mit sich selbst entsteht, so sind 4, 9 Quadratzahlen, die aus 2 und 3 gebildet sind.*
> *Salv.* *Vortrefflich; Ihr erinnert Euch auch, dass ebenso wie die Producte Quadrate heissen, die Producenten, d. h. diejenigen Zahlen, welche mit sich selbst multiplicirt werden, Seiten oder Wurzeln genannt werden; die anderen Zahlen, welche nicht aus zwei gleichen Factoren bestehen, sind nicht Quadrate. Wenn ich nun sage, alle Zahlen, Quadrat- und Nichtquadratzahlen zusammen, sind mehr, als die Quadratzahlen allein, so ist das doch eine durchaus richtige Behauptung; nicht?*
> *Simpl.* *Dem kann man nicht widersprechen.*

Salv. Frage ich nun, wieviel Quadratzahlen es giebt so kann man in Wahrheit antworten, eben soviel als es Wurzeln giebt, denn jedes Quadrat hat eine Wurzel, jede Wurzel hat ihr Quadrat, kein Quadrat hat mehr als eine Wurzel, keine Wurzel mehr als ein Quadrat.
Simpl. Vollkommen richtig.
Salv. Wenn ich nun aber frage, wieviel Wurzeln giebt es, so kann man nicht leugnen, dass sie eben so zahlreich seien, wie die gesammte Zahlenreihe, denn es giebt keine Zahl, die nicht Wurzel eines Quadrates wäre. Steht diese fest, so muss man sagen, dass es ebensoviel Quadrate als Wurzeln gäbe, da sie an Zahl ebenso gross als ihre Wurzeln sind, und alle Zahlen sind Wurzeln; und doch sagten wir anfangs, alle Zahlen seien mehr als alle Quadrate, da der grössere Theil derselben Nichtquadrate sind. Und wirklich nimmt die Zahl der Quadrate immer mehr ab, je grösser die Zahlen werden ; denn bis 100 giebt es 10 Quadrate, d. h. der 10. Theil ist quadratisch; bis 10 000 ist der 100. Theil bloss quadratisch, bis 1 000 000 nur der 1000. Theil; und bis zu einer unendlich grossen Zahl, wenn wir sie erfassen könnten, müssten wir sagen, giebt es soviel Quadrate, wie alle Zahlen zusammen." (Galilei, S. 30f.)

„Ich betrachte es nun als genügend dargetan und verteidigt, daß es unendliche Mengen, wenigstens unter den Dingen, die keine Wirklichkeit haben, gäbe, daß namentlich die Menge aller Wahrheiten an sich eine unendliche sei. […] Wenn jede Zahl", dürfte man sagen, „ihrem Begriffe nach eine bloß endliche Menge ist, wie kann die Menge aller Zahlen eine unendliche sein? Wenn wir die Reihe der natürlichen Zahlen: 1, 2, 3, 4, ,5, 6, … betrachten: so werden wir gewahr, daß die Menge der Zahlen, die diese Reihe, anzufangen von der ersten (der Einheit) bis zu irgendeiner, z. B. der Zahl 6, enthält, immer durch diese letzte selbst ausgedrückt wird. Somit muß ja die Menge aller Zahlen genau so groß als die letzte derselben und somit selbst eine Zahl, also nicht unendlich sein. […]

Das Täuschende dieses Schlusses verschwindet auf der Stelle, sobald man sich nur erinnert, daß die Mengen aller Zahlen in der natürlichen Reihe derselben keine die letzten stehe; daß somit der Begriff einer letzten (höchsten) Zahl ein gegenstandloser, weil einen Widerspruch in sich schließender Begriff sei. Denn nach dem, in der Erklärung jener Reihe (§8) angegebenen Bildungsgesetzte derselben hat jedes ihrer Glieder wider ein folgendes. Dies Paradoxon wäre denn also durch diese einzige Bemerkung schon als gelöst zu betrachten. […]

Übergehen wir nun zur Betrachtung einer höchst merkwürdigen Eigenheit, die in dem Verhältnisse zweier Mengen, wenn beide unendlich sind, vorkommen kann, ja eigentlich immer vorkommt, die man aber bisher zum Nachteil für die Erkenntnis mancher wichtigen Wahrheiten der Metaphysik sowohl als Physik und Mathematik übersehen hat, und die man wohl auch jetzt, indem ich sie aussprechen werde, in einem solchen Grade paradox finden wird, daß es sehr nötig sein dürfte, bei Ihrer Betrachtung uns etwas länger zu verweilen. Ich behaupte nämlich: zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, daß es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, daß kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch andererseits möglich, daß die eine dieser Mengen die andere als einen bloßen Teil in sich faßt, so daß die Vielheiten, welche sie vorstellen, wenn wir die Dinge derselben alle als gleich, d. h. als Einheiten betrachten, die mannigfaltigsten Verhältnisse zueinander haben." (Bolzano, S. 20f. u. 27f.)

„Wenn die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten endliche, d. h. aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehende sind, so entspricht, wie leicht zu sehen, der Begriff der Mächtigkeit dem der Anzahl und folglich dem der ganzen positiven Zahl, da nämlich zweien solchen Mannigfaltigkeiten dann und nur dann gleiche Mächtigkeiten zukommt, wenn die Anzahl ihrer Elemente die gleiche ist. Ein Bestandteil einer endlichen Mannigfaltigkeit hat immer eine kleinere Mächtigkeit als die Mannigfaltigkeit selbst; dieses Verhältnis hört gänzlich auf bei den unendlichen, d. i. aus einer unendlichen Anzahl von Elementen bestehenden Mannigfaltigkeiten. Aus dem Umstande allein, daß eine unendliche Manngifaltigkeit M ein Bestandteil einer andern N ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, darf keineswegs geschlossen werden, daß ihre Mächtigkeit kleiner ist als die von N; dieser Schluß ist nur dann berechtigt, wenn man weiß, daß die Mächtigkeit von M nicht gleich ist derjenigen von N; ebensowenig darf der Umstand, daß N

ein Bestandteil von M ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, als ausreichend dafür betrachtet werden, daß die Mächtigkeit von M größer sei als die von N.“ (Cantor, Beitrag, S. 119)

„[...] So verschieden auch die Lehren dieser Schriftsteller sind, in der Beurteilung des Endlichen und Unendlichen stimmen sie an jenen Stellen im wesentlichen darin überein, daß zu dem Begriffe einer Zahl die Endlichkeit derselben gehöre, und daß andererseits das wahre Unendliche oder Absolute, welches in Gott ist, keinerlei Determination gestattet. Was den letzten Punkt anbetrifft, so stimme ich, wie es nicht anders sein kann, demselben völlig bei, denn der Satz: „omnis determinatio est negatio“ steht für mich ganz außer Frage; dagegen sehe ich im ersteren, wie ich schon oben bei der Erörterung der Aristotelischen Gründe gegen das „infitum actu“ gesagt habe, eine petitio principii, welche manche Widersprüche erklärlich macht, die sich bei allen diesen Autoren und namentlich bei Spinoza und Leibniz finden. […]

Was ich behaupte und durch diese Arbeit, wie auch durch meine früheren Versuche bewiesen zu haben glaube, ist, daß es nach dem Endlichen ein Transfinitum (welches man auch Suprafinitum nennen könnte), d. i. eine unbegrenzte Stufenleiter von bestimmen Modis gibt, die ihrer Natur nach durch bestimmte, wohldefinierte und voneinander unterscheidbare Zahlen determiniert werden können. Mit den endlichen Größen ist daher meiner Überzeugung nach der Bereich der definierbaren Größen nicht abgeschlossen, und die Grenzen unseres Erkennens lassen sich entsprechend weiter ausdehnen, ohne daß es dabei nötig wäre, unsere Natur irgendwelchen Zwang anzutun. An Stelle des in § 4 besprochenen Aristotelisch-scholastischen Satzes setze ich daher den andern:

Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt. Man führt so oft die Endlichkeit des menschlichen Verstandes als Grund an, warum nur endliche Zahlen denkbar sind; doch sehe ich in dieser Behauptung wieder den erwähnten Zirkelschluß. Stillschweigend wird nämlich bei der „Endlichkeit des Verstandes“ gemeint, daß sein Vermögen rücksichtlich der Zahlenbildung auf endliche Zahlen beschränkt sei. Zeigt es sich aber, daß der Verstand auch in bestimmtem Sinne unendliche, d. i. überendliche Zahlen definieren und voneinander unterscheiden kann, so muß entweder den Worten „endlicher Verstand“ eine erweiterte Bedeutung gegeben werden, wonach alsdann jener Schluß aus ihnen nicht mehr gezogenen werden kann; oder es muß auch dem menschlichen Verstand das Prädikat „unendlich“ in gewissen Rücksichten zugestanden werden, was meines Erachtens das einzig Richtige ist. Die Worte „endlicher Verstand“, welche man so vielfach zu hören bekommt, treffen, wie ich glaube, in keiner Weise zu: so beschränkt auch die menschliche Natur in Wahrheit ist, vom Unendlichen haftet ihr doch sehr vieles an, und ich meine sogar, daß wenn sie nicht in vielen Beziehungen selbst unendlich wäre, die feste Zuversicht und Gewißheit hinsichtlich des Seins des Absoluten, worin wir uns alle einig wissen, nicht erklären würde.“ (Cantor, Grundlagen, S. 175f.)

Literatur:

- Bolzano, Bernhard: Paradoxien des Unendlichen, Leipzig: Reclam, 1851.
- Cantor, Georg: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, in: Ders.: Gesammelte Abhandlungen, hrsg. v. Ernst Zermelo, Berlin: Springer, 1932.
- Cantor, Georg: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, in: Ders.: Gesammelte Abhandlungen, hrsg. v. Ernst Zermelo, Berlin: Springer, 1932.
- Galilei, Galileo: Unterredungen und mathematische Demonstrationen, Leipzig : Engelmann, 1890.

Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek Jena
Bibliotheksplatz 2
D-07743 Jena
https://www.thulb.uni-jena.de/

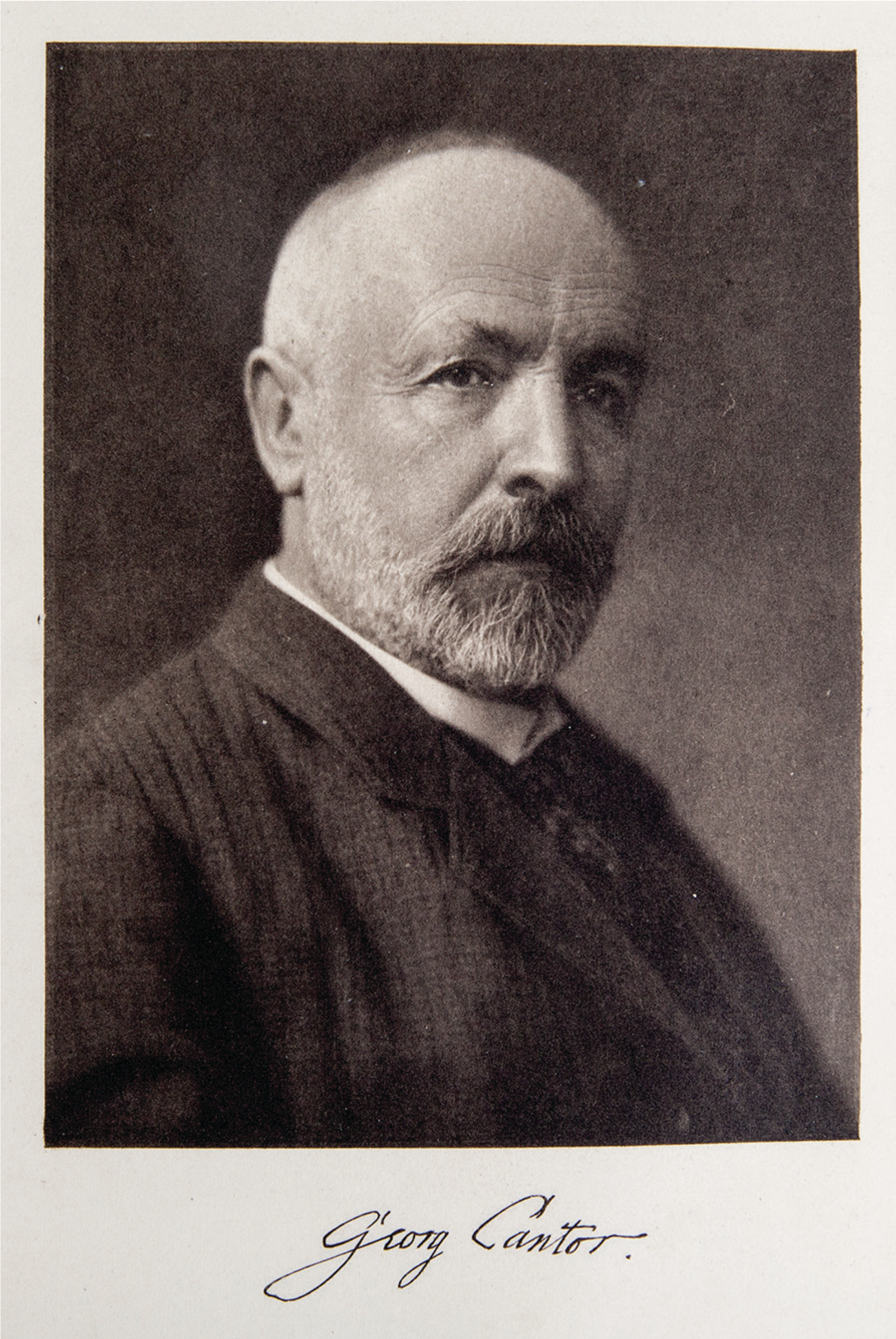

Abb. 1