

Robuste Lokalisierung magnetischer Quellen mithilfe integrierter 3D-Hall-Sensor-Anordnungen

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktoringenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt der
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der
Technischen Universität Ilmenau

von Herrn
Dipl.-Ing. Daniel Cichon
geboren am 21.02.1984 in Schweinfurt

Gutachter:

Herr Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Hannes Töpfer (Betreuer)

Technische Universität Ilmenau

Herr Univ.-Prof. Dr.-Ing. Giovanni Del Galdo

Technische Universität Ilmenau

Frau Dr.-Ing. Silvia Krug

Mid Sweden University Sundsvall, Schweden

Datum der Einreichung: 28.06.2019

Datum der wissenschaftlichen Aussprache: 27.07.2020

Zusammenfassung

Magnetfeldsensoren erlauben die indirekte, berührungslose Bestimmung der Position bewegter Objekte und finden daher millionenfach Anwendung im Industrie- und Automobilbereich. Positionsmesssysteme in diesen Anwendungsbereichen haben die Aufgabe einen linearen Weg oder den Winkel der Rotationsbewegung eines Permanentmagneten zu erfassen. In Labor-Anwendungen wurde bereits gezeigt, dass das Feld magnetischer Quellen genutzt werden kann alle sechs mechanischen Freiheitsgrade zu bestimmen. Unter schwierigen Umgebungsbedingungen sind Auswertungen mit nur einem einzigen Freiheitsgrad jedoch alternativlos. Gründe hierfür sind der rechentechnische Aufwand komplexer Auswertelgorithmen, aber auch zu erwartende magnetische und temperaturbedingte Störungen. Zudem gibt es kaum Anhaltspunkte für die Auslegung magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme, was den Einsatz erschwert. Ziel dieser Arbeit ist es daher, Methoden zu erarbeiten, die es ermöglichen die Vorteile integrierter Magnetfeldsensoren auch für schwierige Umgebungen nutzbar zu machen, und somit die Möglichkeiten der Technologie auszuschöpfen. Kompakte Hall-Sensor-Anordnungen, die am Fraunhofer Institut für Integrierte Schaltungen (IIS) entwickelt wurden, dienen als Ausgangspunkt. Sie ermöglichen es, den Magnetfeldvektor einer magnetischen Quelle an mehreren Stellen und auf engstem Raum zu messen. Um daraus die Position zu ermitteln, und somit das inverse Problem der Magnetostatik zu lösen, wird in dieser Arbeit ein analytisches Modell eines beispielhaften Messsystems entwickelt und verschiedene numerische Lösungsverfahren evaluiert. Das Unscented Kalman-Filter zeigt sich im Hinblick auf die Anforderungen industrieller Anwendungen als besonders geeignet. Von der stochastischen Modellierung des Systems ausgehend, werden Methoden und Richtlinien zum Entwurf magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme abgeleitet und ein Verfahren vorgestellt, das es ermöglicht Permanentmagneten zu charakterisieren, und somit die Eigenschaften der Lokalisierung zu verbessern. Algorithmische Anpassungen des Unscented-Kalman-Filters, deren Wirksamkeit anhand von Messungen und Simulationen belegt wird, reduzieren die Empfindlichkeit gegenüber Störungen in schwierigen Umgebungen.

Abstract

Magnetic sensors allow indirect, non-contact localization of moving objects and thus are used millions of times in industrial and automotive applications. Such position measurement systems have the task of determining the linear displacement or rotation of a permanent magnet. Laboratory applications already showed that the field of magnetic sources can be used to determine up to six mechanical degrees of freedom. Nevertheless, under harsh environmental conditions, evaluations with a single degree of freedom are without alternative. The reasons for this lie in the computational effort of complex localization algorithms, but also in the expected magnetic and temperature dependent distortions. Furthermore, there are hardly any guidelines for the design of magnet field based position measurement systems which complicates the use. Therefore, it is the objective of this work to provide methods that allow exploiting the technical capabilities of magnetic field sensors even in harsh environments. Compact Hall-Sensors arrangements that were developed at the Fraunhofer Institute for Integrated Circuits (IIS) are used, that allow the measurement of the magnetic field vector of a magnetic source. To measure the position, and thus solve the underlying inverse magnetostatic problem, an analytical model of an exemplary application is derived and different numerical approaches are investigated. The Unscented Kalman Filter turns out to meet the requirements of industrial applications. Starting from a stochastic system model, methods and guidelines for the design of magnet field based position sensing systems are derived and a method for the characterization of permanent magnets is proposed which improves the properties of the localization. Algorithmic modifications reduce the susceptibility to typical distortions in harsh environments. The methods are evaluated based on measurements and simulations.

Abkürzungen

CL	Charakteristische Länge
CMOS	Komplementärer Metall-Oxid-Halbleiter, engl. complementary metal-oxide-semiconductor
CRLB	Cramér-Rao-Schranke, engl. Cramér-Rao lower bound
DoF	Anzahl der Freiheitsgrade, engl. degrees of freedom
EKF	Extended Kalman-Filter
ENOB	Effektive Anzahl von Bits, engl. effective number of bits
FEM	Finite Elemente Methode
FOM	Vergleichsgröße, engl. figure of merit
IC	Integrierter Schaltkreis, engl. integrated circuit
KNN	Künstliche neuronale Netze
MC	Monte-Carlo (Simulation)
MR	Magnetoresistiv
pdf	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, engl. probability density function
Pixel	Sensorelement zur Messung des magnetischen Flussdichtevektors, engl. picture element
SQUID	Supraleitende Quanteninterferenzeinheit, engl. superconducting quantum interference device
UKF	Unscented Kalman-Filter

Nomenklatur

B	Magnetische Flussdichte
$E[\mathbf{x}]$	Erwartungswert von \mathbf{x}
H	Magnetische Feldstärke
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	Messfunktion
\mathcal{I}	Fisher Informationsmatrix
\mathcal{J}	Jacobi-Matrix
J	Stromdichte
K	Kalman-Verstärkung
L_x	Likelihood-Funktion
M	Magnetisierung
g	Zielfunktion einer Optimierung
m	Anzahl der Messwerte
\mathbf{m}_{dip}	Dipolmoment
μ_0	Magnetische Permeabilität im Vakuum
μ_r	Relative magnetische Permeabilität
(x_b, y_b, z_b)	Magnetabmessungen
n	Anzahl der Freiheitsgrade
\mathcal{O}	Beobachtbarkeitsmatrix
ϕ	Magnetisches Skalarpotential
Q	Kovarianzmatrix des Prozessrauschens
Q_{XY}	Empfindlichkeit auf orthogonale Felder
R	Kovarianzmatrix des Messrauschens
\mathbf{r}_{rel}	Relative Innovation
S_X	Empfindlichkeit des Sensors X
(x, y, z)	Variablen der translatorischen Freiheitsgrade
\mathbf{x}	Zustandsvektor
\mathbb{X}	Wertebereich des Zustandsvektors
\mathcal{X}	Sigmapunkte des Zustandsvektors
(α, β, φ)	Variablen der rotatorischen Freiheitsgrade
\mathbf{y}	Messvektor
\mathcal{Y}	Sigmapunkte des Messvektors
0.12	Dezimalzahl ¹

¹Entgegen der im deutschsprachigen Raum üblichen Norm, wird der Punkt anstelle des Kommas als Dezimaltrennzeichen verwendet. Ein Tausendertrennzeichen wird nicht verwendet.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	i
Abstract	ii
Abkürzungen	iii
Nomenklatur	iv
1. Einleitung	1
2. Grundlagen magnetfeldbasierter Positionssensorik	3
2.1. Magnetometer der Positionssensorik	3
2.2. Das inverse Problem der Lokalisierung magnetischer Quellen	5
2.3. Stand der Technik magnetfeldbasierter Positionssensorik	8
2.3.1. Anwendungen im Laborumfeld	8
2.3.2. Industrielle Anwendungen	10
3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme	15
3.1. Anwendungsfall eines sechs DoF Bedienelementes	15
3.1.1. Mechanischer Aufbau	16
3.1.2. Generischer Teststimulus	16
3.2. HallinOne-Sensoren	18
3.2.1. Empfindlichkeit	21
3.2.2. Offset	22
3.2.3. Elektronisches Rauschen	22
3.3. Testchip mit fünf Pixeln	24
3.4. HallinSight Kamera	26
3.5. Testaufbau für Positionsmesssysteme	27
3.6. Permanentmagnet	27
3.7. Modellierung des Messsystems	28
3.7.1. Grundgleichungen der Magnetostatik	28
3.7.2. Magnetfeld eines quaderförmigen Magneten	29
3.7.3. Modellierung weiterer Magnetformen	33
3.7.4. Jacobi-Matrix der magnetischen Flussdichte	35
3.8. Beschreibung der Bewegungstransformation	36
3.8.1. Euler-Winkel	36
3.8.2. Jacobi-Matrix der Transformation	38

3.9.	Numerische Lösungen des inversen Problems	38
3.9.1.	Betrachtung als Optimierungsproblem	39
3.9.2.	Nichtlineare optimale Schätzer	43
3.10.	Kenngrößen für den Entwurf von Sensor-Magnet-Anordnungen	51
3.10.1.	Fehlermaß zur Bewertung von Magnetmodellen	52
3.10.2.	Beobachtbarkeit magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme	52
3.10.3.	Bewertung von Schätzern mithilfe der Likelihood-Funktion	55
3.10.4.	Abschätzung der erreichbaren Genauigkeit	57
4.	Experimente zur Verifikation der Magnetmodellierung	61
4.1.	Vergleich der analytischen Lösung mit der FEM	61
4.2.	Vergleich des Modells mit Messergebnissen	61
5.	Analyse eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden	67
5.1.	Beobachtbarer Bereich	67
5.2.	Simulation der Genauigkeitsgrenzen	70
5.3.	Gegenüberstellung verschiedener Lokalisierungsverfahren	72
5.4.	Verifikation des sechs DoF Bedienelementes	77
5.4.1.	Simulation	77
5.4.2.	Messungen	80
6.	Entwurf eines optimierten Hall-Sensor-Positionsmesssystems	85
6.1.	Präzision der Dipolortung	85
6.2.	Optimierung der Sensoranordnung	88
6.3.	Optimierung der Magnetposition	89
6.4.	Messungen mit der optimierten Anordnung	91
7.	Erhöhung der Robustheit	95
7.1.	Sensitivitätsanalyse der Lokalisierungsgenauigkeit	95
7.2.	Charakterisierung von Permanentmagneten	99
7.2.1.	Systemmodell der Magnetcharakterisierung	99
7.2.2.	Messergebnisse	100
7.2.3.	Innovationsbasierte Defekterkennung	102
7.3.	Kompensation der Temperaturabhängigkeit	105
7.3.1.	Schätzung der Temperatur	106
7.3.2.	Temperaturkompensation durch Normierung	106
7.3.3.	Vergleich der Varianten zur Temperaturkompensation	108
7.3.4.	Messergebnisse	109
7.4.	Kompensation von Störfeldern	109
7.4.1.	Schätzung des Störfeldes	112
7.4.2.	Gradientenbasierte Schätzung	112
7.4.3.	Vergleich der Methoden	113
7.5.	Robustes Lokalisierungsverfahren	116

8. Schlussfolgerungen und Ausblick	121
A. Anhang	125
A.1. Verifikation des Modells magnetischer Flächenladungen	125
A.2. Funktionalmatrix der Dipolortung	127
Literaturverzeichnis	128

1. Einleitung

Die Bestimmung der Position beweglicher Objekte ist eine wichtige Aufgabe in vielen zukunftssträchtigen Technologien. Komponenten der Automatisierungstechnik, wie Roboter, Motoren und Linearaktoren benötigen eine sensorische Rückkopplung, beispielsweise um einen autonomen und damit effizienten Betrieb zu ermöglichen. Ist eine Interaktion mit einem Benutzer erforderlich, so bedarf moderne Elektronik einer ergonomischen Schnittstelle, um auch komplexe Steuerungsfunktionen ausführen zu können. Diese basiert meist ebenfalls auf der Lokalisierung eines Fingers oder Bauteils. Der Begriff Lokalisierung bezeichnet im Kontext dieser Arbeit die Orts- und Lagebestimmung eines Körpers in Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem. Eine vollständige Lokalisierung ist somit abhängig von sechs mechanischen Freiheitsgraden: drei translatorischen, entlang der Koordinatenachsen und drei Rotationsfreiheitsgraden. Entsprechend wird der Begriff Position zur Bezeichnung des Ortes und der Lage eines Objektes im Raum verwendet. Ziel der Positionssensorik ist es, diese Position vollständig oder teilweise zu bestimmen.

Gerade im industriellen Bereich oder in Anwendungen rund um das Automobil sind die Anforderungen an die Umgebungsbedingungen besonders hoch. Berührungslose robuste Messprinzipien sind daher erforderlich, und magnetfeldbasierte Sensorik ist weit verbreitet. So können bürstenlose Motoren beispielsweise mithilfe eines Winkelsensors und intelligenter Ansteuerlektronik die Lebensdauer von Antrieben um ein vielfaches erhöhen. Daneben haben Anwendungen in der Medizintechnik und der Geophysik bereits vielversprechende Möglichkeiten aufgezeigt, bis zu sechs Freiheitsgrade magnetfeldbasiert zu bestimmen. Diese Experimente konnten allerdings bislang nicht auf Bereiche außerhalb eines Labors, insbesondere ins industrielle Umfeld, übertragen werden. Die Gründe hierfür liegen in den folgenden Merkmalen:

- **Kosten:** In vielen Anwendungen sind die Kosten ein entscheidender Faktor. Der Aufbau muss mit möglichst wenigen einfachen Komponenten erfolgen. Außerdem ist der Entwicklungsaufwand zu berücksichtigen: Anwendungsentwickler müssen Positionsmesssysteme möglichst ohne zusätzliches Vorwissen einsetzen können.
- **Bauraum:** In industriellen Anwendungen ist der Bauraum oft sehr stark begrenzt. Intelligente Sensorik muss sich an den Abmessungen konventioneller Systeme orientieren.
- **Rechenlast und Laufzeit:** In medizinischen Laboranwendungen spielt der rechentechnische Aufwand der Lokisierungsalgorithmen eine untergeordnete Rolle. Die Rechenleistung ist aufgrund von leistungsfähigen Laborrechnern

1. Einleitung

sehr groß und die Bewegung der zu lokalisierenden Objekte ist vergleichsweise langsam. Im Gegensatz dazu muss in industriellen Anwendungen die Signalverarbeitung auf eingebetteter Hardware erfolgen, und dennoch in der Lage sein, auch schnellen Bewegungen zu folgen. Die Laufzeit muss hierbei vorhersagbar, das System also echtzeitfähig sein.

- **Robustheit:** Laboranwendungen nutzen zumeist hochempfindliche Sensoren. Jedoch wird dies durch magnetisch aktive Materialien erreicht. Diese geraten bereits bei relativ geringen Feldstärken in Sättigung, was zu einer Hysterese im Ausgangssignal führt [1]. Um den Sensor in den Ausgangszustand zu bringen, muss er neu kalibriert werden. In medizinischen Anwendungen ist dies oft möglich oder es lässt sich durch Abschirmung eine Übersteuerung vermeiden. In elektromagnetisch schwierigen Umgebungen müssen robustere Sensorprinzipien und Verfahren eingesetzt werden.

Ziel dieser Arbeit ist es daher, die Frage zu beantworten, wie Hall-Sensor Anordnungen zur Lokalisierung magnetischer Quellen im industriellen Umfeld eingesetzt und dabei die Möglichkeiten der Hall-Sensoren optimal ausgenutzt werden können. Dazu soll zunächst ein geeignetes algorithmisches Lokalisierungsverfahren gewählt werden, das es ermöglicht, auch auf eingebetteter Hardware alle sechs mechanischen Positionsfreiheitsgrade zu bestimmen. Des Weiteren soll eine Methodik erarbeitet werden, die einen Anhaltspunkt für den optimalen Entwurf von Hall-Sensor-Anordnungen liefert. Ein weiterer Kernpunkt ist es mögliche Störeinflüsse zu bewerten, und geeignete Maßnahmen zu definieren, um die Robustheit der Lokalisierung zu erhöhen.

Überblick der Arbeit

Der einleitende Teil der Arbeit (Kap. 1) verdeutlicht die Möglichkeiten und Probleme der magnetfeldbasierten Lokalisierung, und stellt aktuelle Lösungsansätze vor. Kap. 3 führt die verwendeten mathematischen und algorithmischen Verfahren sowie die genutzten Messmittel ein. Diese werden dann im Kap. 4 und 5 auf ein konkretes Beispiel, einem Bedienelement mit sechs Freiheitsgraden, angewandt. Die verschiedenen algorithmischen Lösungen werden anhand geeigneter Kriterien in diesem Abschnitt gegenübergestellt. Das darauffolgende Kap. 6 beschreibt die Ergebnisse einer Optimierung der Sensor-Magnet-Anordnung und der Abschätzung der möglichen Präzision. In Kap. 7 werden Einflussfaktoren auf das Lokalisierungssystem analysiert und geeignete Lösungen verglichen, die es ermöglichen diesen Einfluss möglichst gering zu halten. Im letzten Teil, in Kap. 8, werden die Ergebnisse zusammengefasst und Vorschläge für weiterführende Arbeiten gemacht.

2. Grundlagen magnetfeldbasierter Positionssensorik

Ziel der magnetfeldbasierten Positionssensorik ist es aus einem Magnetfeld, das an einer oder mehreren Stellen im Raum gemessen wird, die Position einer Magnetfeldquelle zu bestimmen. In Kontext dieser Arbeit ist diese Quelle künstlich, was eine Abgrenzung zu verwandten Messdisziplinen wie der Orientierungsbestimmung im Erdmagnetfeld oder der Auswertung von Hirnströmen in der medizinischen Diagnostik ermöglicht. Im folgenden Abschnitt werden zunächst die Komponenten der magnetfeldbasierten Positionssensorik gemäß dem aktuellen Stand der Technik beschrieben und im Anschluss auf gängige Verfahren zur Lokalisierung eingegangen.

2.1. Magnetometer der Positionssensorik

Magnetfeldsensoren messen die magnetische Flussdichte oder deren zeitliche Ableitung. Unterschiedliche Messprinzipien erlauben einen sehr breiten Einsatzbereich von wenigen Femtotesla bis zu mehreren Tesla (s. Abb. 2.1). Am unteren Bereich liegen SQUIDs (engl. superconducting quantum interference devices), die ein supraleitendes Material dazu verwenden sehr hohe Empfindlichkeit auf Änderung des Magnetfeldes zu erreichen. Das Prinzip ermöglicht eine Messung des Flussdichtevektors, allerdings unter einem vergleichsweise großem technischen Aufwand. Typische Anwendungen finden SQUIDs in der Biomedizin aber auch der zerstörungsfreien Materialprüfung. Ein einfacheres Messprinzip zur Messung von Magnetfeldänderungen verwendet Induktionsspulen in denen gemäß dem Faraday'schen Induktionsgesetz eine Spannung induziert wird. Abhängig von der Signalfrequenz und ob zusätzlich ein ferromagnetischer Kern in der Spule eingesetzt wird, können so Feldamplituden von unter 1 pT bis zu mehreren Millitesla gemessen werden. Auch können drei zueinander orthogonale Elemente zu einer Einheit kombiniert werden, um den Feldvektor zu bestimmen. Aufgrund der Abhängigkeit des Signals von der Spulenfläche lassen sich solche Sensoren allerdings nicht beliebig kompakt realisieren. Flux-Gate-Magnetometer nutzen einen hochpermeablen Kern, der in Sättigung gebracht wird. Aufgrund des nichtlinearen aber symmetrischen Verhaltens des Materials können Störungen durch ein externes Magnetfeld sehr präzise bestimmt werden. Somit können Sensoren dieser Art in einem Bereich von 10 pT bis 1 μ T eingesetzt werden. In einer ähnlichen Region arbeiten Sensoren basierend auf magnetoresistiven Effekten. Diese beruhen auf der Widerstandsabhängigkeit bestimmter Materialien vom Magnetfeld. Um hohe Empfindlichkeiten auch bei Raumtemperatur zu erreichen, werden hier ebenfalls ferromagnetische Werkstoffe eingesetzt. Solche Sensoren lassen sich sehr gut integrieren

2. Grundlagen magnetfeldbasierter Positionssensorik

und damit zur Messung des Magnetfeldvektors nutzen. Allerdings zeigen hierbei die einzelnen Sensor-Elemente eine starke Abhängigkeit von der orthogonalen Magnetfeldkomponente [2]. Dieser störende Einfluss ist zudem nichtlinear und vom Betrag der zu messenden Komponente abhängig. Sowohl bei den MR als auch bei Flux-Gate-Sensoren sorgt die Hysterese des eingesetzten ferromagnetischen Materials für zusätzliche Nichtlinearitäten [3]. Die Statistik der Messsignale wird ebenfalls von den ferromagnetischen Eigenschaften beeinflusst [4].

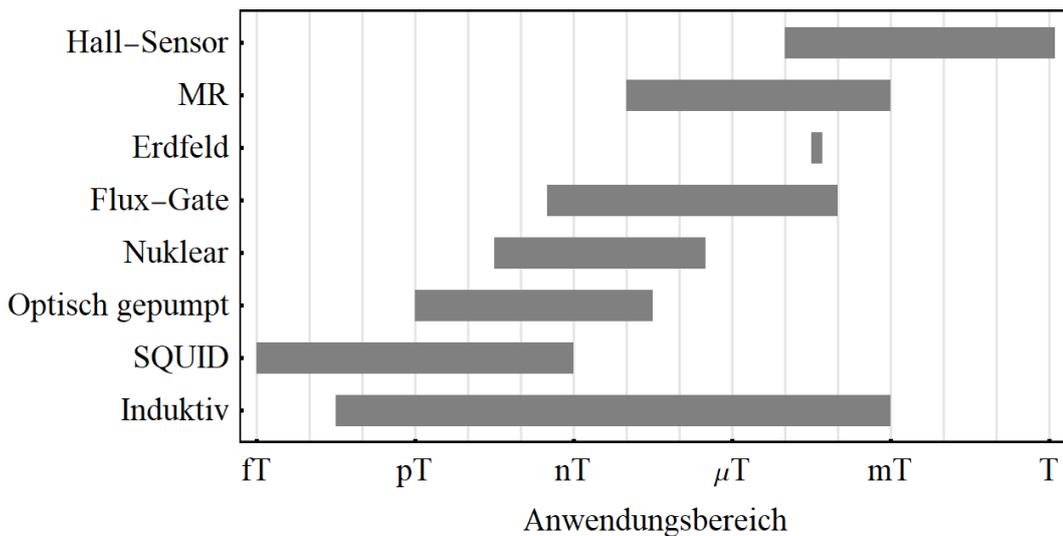


Abbildung 2.1.: Messbereich unterschiedlicher Magnetfeldsensor-Technologien (nach [5])

Hall-Sensoren basieren auf dem von Edwin Hall 1879 entdeckten Hall-Effekt [6]. Der Effekt beschreibt das Auftreten einer elektrischen Spannung im stromdurchflossenen Leiter, der sich in einem Magnetfeld befindet. Hall-Sensoren arbeiten dabei typischerweise in einem Bereich von ca. 0.1 mT bis zu mehreren Tesla und stehen damit am oberen Ende des Einsatzbereiches von Magnetfeldsensoren (s. Abb. 2.1). Die Bandbreite ist nach unten durch die geringe Empfindlichkeit verglichen mit dem Eigenrauschen der Sensoren begrenzt. Dennoch sind Hall-Sensoren die am häufigsten eingesetzten Magnetfeldsensoren weltweit, seltener zur Bestimmung des magnetischen Feldes, sondern meist zur indirekten Strom- oder Positionsmessung. Gründe hierfür sind zum einen der einfache Aufbau und Fertigungsprozess, zum anderen aber auch die für viele Anwendungen sehr günstigen charakteristischen Eigenschaften, die in Kap. 3.2 genauer dargelegt werden.

2.2. Das inverse Problem der Lokalisierung magnetischer Quellen

Die Lokalisierung magnetischer Objekte mithilfe von Magnetfeldmesswerten ist in der mathematischen Terminologie ein inverses Problem. Ziel ist es anhand einer Wirkung auf eine unbekannte Ursache rückzuschließen. Im Falle des magnetostatischen inversen Problems ist die Ursache eine konstante Stromdichteverteilung im Raum \mathbf{J} und die Wirkung das magnetische Feld $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$. Die Bestimmung der Flussdichte aus einem gegebenen Systemmodell (z.B. Permanentmagnet mit linearer Bewegung) und einem bekannten Systemzustand, beispielsweise der Position, wird als direktes Problem bezeichnet. Die Identifikation des Systemzustandes aus gemessenen Flussdichtewerten hingegen als inverses Problem. Inverse Probleme sind in vielen Fällen schwieriger auszuwerten als direkte, ermöglichen aber unter der Verwendung eines theoretischen Modells Rückschlüsse auf Größen, die nicht direkt messbar sind. Weitere anschauliche Beispiele für inverse Fragestellungen sind Wettervorhersagen oder Wärmeleitungsprobleme. Inverse Probleme führen häufig zu sogenannten schlecht gestellten Problemen, da zumindest eine der Voraussetzungen nach Jacques Hadamard [7] nicht erfüllt ist. Diese drei Voraussetzungen lauten:

- Existenz einer Lösung
- Eindeutigkeit der Lösung
- stetige Abhängigkeit der Lösung von den Eingangsdaten

Um ein inverses Problem zu lösen, besteht eine wichtige Aufgabe darin, das schlecht gestellte Problem in ein gut gestelltes zu überführen. Dieses Vorgehen wird als Regularisierung bezeichnet. Inverse Probleme haben nicht zwingend eine Lösung zu jedem Datensatz. Insbesondere bei Messungenauigkeiten (Fehlern, Rauschen) ist ggf. kein zugehöriger Parametersatz des Modells bestimmbar, der die Messdaten exakt abbildet. Durch eine geeignete Wahl des Lösungsverfahrens lässt sich dieses Problem oft umgehen. Eine eindeutige Lösung gibt es nur, wenn ausreichend Information über die Ursache vorhanden ist. Sind dagegen nicht genügend unabhängige Messwerte verfügbar, ist das System nicht beobachtbar. Um zu einer eindeutigen Lösung zu gelangen, müssen häufig weitere Messungen vorgenommen oder der Lösungsbereich eingeschränkt werden. Die stetige Abhängigkeit bzw. die Stabilität der Lösung des inversen Problems ist ebenfalls kritisch: Oft hat in der Physik das direkte Problem die Charakteristik eines Tiefpasses, also ein integrierendes Verhalten. Die inverse Lösung zeigt hingegen häufig ein differenzierendes. Geringe Messfehler können dadurch schon zu erheblichen Fehlern in der inversen Lösung führen. Dieses Verhalten kann mithilfe der Konditionszahl der Systemmatrix untersucht werden.

Inverse Probleme werden in der Literatur nach dem Abstraktionsgrad klassifiziert [8]: Das inverse Identifikationsproblem bezeichnet die Fragestellung zu einem bestimmten Messwertdatensatz die Parameter eines Modells zu identifizieren. Hingegen gilt es bei der Klasse der Rekonstruktionsprobleme zusätzlich das Systemmodell

2. Grundlagen magnetfeldbasierter Positionssensorik

zu einem Datensatz zu bestimmen. Die Lokalisierung im Rahmen der magnetfeldbasierten Positionssensorik ist im Allgemeinen ein inverses Identifikationsproblem, wenngleich in speziellen Anwendungen keine scharfe Trennung der beiden Kategorien vorgenommen werden kann. Weitere wichtige Eigenschaften zur Beschreibung des Systems ergeben sich aus dem direkten Problem: Im Fall der magnetfeldbasierten Positionssensorik handelt es sich um eine wertekontinuierliche und nichtlineare Funktion. Dies ist entscheidend für die Wahl der Lösungsmethode des inversen Problems. Als Beispiel sei die Lokalisierung eines magnetischen Dipols mit unbekanntem Ortsvektor \mathbf{r} angeführt: Der Vektor der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} des magnetischen Dipols [9] mit dem Dipolmoment \mathbf{m} berechnet sich am Ort \mathbf{r} mit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^3}. \quad (2.1)$$

Aus Gl. (2.1) folgt, dass das Feld des Dipols symmetrisch zum Ursprung ist: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(-\mathbf{r})$. Zu jedem Flussdichtevektor \mathbf{B} gibt es also mindestens zwei Lösungen: \mathbf{x} und $-\mathbf{x}$. Dieses einfache Beispiel zeigt bereits, dass die Eindeutigkeit bei der Lokalisierung magnetischer Objekte nicht grundsätzlich gegeben sein kann. Mithilfe zusätzlicher (a priori) Information kann aber für spezifische Probleme die Eindeutigkeit der Lösung erreicht werden. Im einfachsten Fall kann hierzu der Lösungsraum beschränkt werden, beispielsweise auf einen Halbraum (nur positive z -Werte) und einen beschränkten Winkel (Rotation um maximal $\pi/2$). Die dritte Bedingung nach Hadamard [7] betrifft die Stabilität. Die Betrachtung anhand einer analytischen Lösung zur Dipollokalisierung kann hier herangezogen werden, um die grundlegenden Eigenschaften zu veranschaulichen. Für den magnetischen Dipol ist die analytische Lösung des inversen Problems $\mathbf{r}_{\text{Dip}}(\mathbf{y})$ mithilfe der partiellen Ableitungen der magnetischen Flussdichte nach dem Ort bestimmbar [10]. Damit kann ein magnetisches Gradiometer in Verbindung mit einem Magnetometer zur Lokalisierung verwendet werden. Der analytische Zusammenhang ergibt sich aus der Inversion der Vorwärtlösung für einen magnetischen Dipol und dessen Gradienten und lautet:

$$\mathbf{r} = 3 \begin{pmatrix} \partial_x B_x & \partial_y B_x & \partial_z B_x \\ \partial_x B_y & \partial_y B_y & \partial_z B_y \\ \partial_x B_z & \partial_y B_z & \partial_z B_z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Hierbei sind die Ortsableitungen der magnetischen Flussdichte mit $\partial_j B_i = \frac{\partial B_i}{\partial j}$ bezeichnet. Mit $\text{div}\mathbf{B} = 0$ und $\text{rot}\mathbf{H} = 0$ können die Ableitungen in z -Richtung ersetzt werden sodass

$$\mathbf{r} = 3 \begin{pmatrix} \partial_x B_x & \partial_y B_x & \partial_x B_z \\ \partial_x B_y & \partial_y B_y & \partial_y B_z \\ \partial_x B_z & \partial_y B_z & -\partial_x B_x - \partial_y B_y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Die Inverse der 3×3 Matrix in Gl. (2.3) kann explizit angegeben werden. Damit

2.2. Das inverse Problem der Lokalisierung magnetischer Quellen

ist das inverse Problem als eine geschlossene Funktion dargestellt. Ein gut konditioniertes Problem hat an einem bestimmten Punkt $y \in \mathbb{Y}$ die Eigenschaft, dass kleine Störungen der Magnetfeldwerte \tilde{y} auch nur zu kleinen Abweichungen der Position \tilde{x} führen. Die Konditionszahl quantifiziert diese Eigenschaft. Sie kann absolut κ_{abs} oder relativ κ_{rel} angegeben werden [11]:

$$\kappa_{rel} = \limsup_{\tilde{y} \rightarrow y} \frac{\|f(\tilde{y}) - f(y)\|}{\|f(y)\|} \cdot \frac{\|y\|}{\|\tilde{y} - y\|} \quad (2.4)$$

Das Supremum $\limsup_{\tilde{y} \rightarrow y}$ in dieser Gleichung ist als Supremum über alle infinitesimalen Störungen \tilde{y} zu verstehen. Im Beispiel liefert die numerische Auswertung der Konditionszahl der Lokalisierungsfunktion Gl. (2.3) an der Stelle $\mathbf{x} = (0, 0, 20\text{mm})^T$ eine relative Konditionszahl von $\kappa_{rel} = 484$. Eine Störung von 1% in den Magnetfeldmesswerten führt also zu einer Positionsänderung von bis zu 484%. Der Algorithmus ist damit an dieser Position instabil und kann nur unter sehr eingeschränkten Voraussetzungen eingesetzt werden. Um allgemein die Kondition inverser Probleme zu verbessern, gibt es eine Reihe von Strategien zur Regularisierung, die in folgende Kategorien eingeteilt werden können [12] [13]:

- Datenfilterung
- Tikhonov Regularisierung
- Singulärwertzerlegung
- iterative Methoden

Eine geeignete Filterung der Messdaten reduziert den Rauschanteil im Messsignal und damit einen Einflussfaktor auf die Stabilität des Verfahrens. Frequenzanteile der Messung, die sich außerhalb der benötigten Bandbreite befinden, werden entfernt. Diese nahe liegende Maßnahme stellt eines der gebräuchlichsten Regularisierungsverfahren dar. Eine weitere Regularisierungsmethode ist die Tikhonov-Regularisierung. Hierbei wird zusätzliche Information über das Messsystem benutzt, um die Lösung zu stabilisieren. Beispielsweise wird bei der Methode der kleinsten Quadrate [14] eine geeignete Matrix \mathbf{R}_r zur Minimierungsfunktion $g(x)$ addiert, um damit eine bestimmte Lösung zu bevorzugen. Das resultierende Minimierungsproblem lautet:

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} (\|g(\mathbf{x})\|_2 + \|\alpha_r \mathbf{R}_r \mathbf{x}\|_2) \quad (2.5)$$

mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Der Term $\alpha \mathbf{R}_r \mathbf{x}$ stabilisiert die Lösung. Der Faktor α_r dient hierbei der Gewichtung und damit der Dämpfung der ursprünglichen Minimierungsfunktion und wird daher auch als Dämpfungsfaktor bezeichnet [13]. Die Regularisierungsmatrix \mathbf{R}_r bestimmt wie die Komponenten von \mathbf{x} zur Regularisierung miteinander kombiniert werden. Dieses Prinzip findet in vielen Ausprägungen Anwendung zur Stabilisierung schlecht konditionierter Probleme. Die Regularisierung mittels Singulärwertzerlegung kann genutzt werden, auch wenn keine weitere

2. Grundlagen magnetfeldbasierter Positionssensorik

Information über die Lösung verfügbar ist. Bei dieser rein mathematischen Methode werden die Eigenwerte des Systemmodells bestimmt, wobei Werte unter einer definierten Schwelle ignoriert werden (vgl. Pseudoinverse [15]). Bei iterativen Optimierungsmethoden die eine bestimmte Zielfunktion minimieren, ist ein Abbruchkriterium erforderlich, das definiert, ob die Iterationen fortgesetzt werden:

$$\|g(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2 < \delta. \quad (2.6)$$

Entspricht die Schwelle δ den zu erwartenden Messfehlern so führt das Abbruchkriterium dazu, dass Fehler in den Messwerten toleriert werden und das Ergebnis nicht instabil werden lassen (Diskrepanzprinzip [16]). Die Abbruchschwelle regularisiert somit das Problem. Diese grundlegenden Prinzipien erlauben eine Lösung des inversen Lokalisierungsproblems magnetischer Quellen und finden Anwendung in den Methoden in Kap. 3.9.

2.3. Stand der Technik magnetfeldbasierter Positionssensorik

Hinsichtlich des aktuellen Standes der Technik im Bereich der magnetfeldbasierten Positionssensorik kann zwischen zwei Haupt-Anwendungsbereichen unterschieden werden: Komplexe Lokalisierung magnetischer Marker im Laborumfeld und klassische Lokalisierung mit maximal zwei Freiheitsgraden in der breiten Anwendung. Die folgenden Abschnitte zeigen die Entwicklung der Technologie und der damit zusammenhängenden Lösungen des inversen magnetostatischen Problems. Daraus ergibt sich eine Abgrenzung der Weiterentwicklungen im anschließenden Teil der Arbeit.

2.3.1. Anwendungen im Laborumfeld

Mit der Verfügbarkeit hochgenauer magnetischer Sensoren auf Basis von Supraleitern (SQUIDS), wurden bereits Ende der siebziger Jahre erste Anwendungsszenarien zur magnetfeldbasierten Lokalisierung skizziert. Vor allem die Suche nach Personen und Fahrzeugen stand im Fokus dieser Arbeiten. So wurde die Verwendung eines hochgenauen Gradiometers vorgeschlagen, um die Position einer magnetischen Quelle zu bestimmen [17]. Mithilfe der fünf unabhängigen Gradienten des Magnetfeldes und einer vektoriellen Absolutfeldmessung konnte eine Quelle im Bereich von bis zu 100m experimentell lokalisiert werden. Eine analytische Lösung diente hierbei der Bestimmung der Position. Die Ausrichtung der einzelnen Sensoren wurde als entscheidende Störgröße identifiziert und ein entsprechendes Kalibrierverfahren vorgeschlagen. Die Autoren wiesen außerdem auf das Hintergrundrauschen hin, welches einen signifikanten Einfluss auf die Genauigkeit des Messsystems zu haben schien. Eine erweiterte Anordnung wurde zur Bestimmung der Kopfhaltung eines Piloten vorgestellt [18]. Anstatt hochempfindlicher SQUID-Sensoren wurden einfachere Luftspulen verwendet - als magnetische Quelle, sowie als Sensor. Drei Spulen wurden

2.3. Stand der Technik magnetfeldbasierter Positionssensorik

senkrecht zueinander angeordnet um sowohl alle drei Komponenten des Magnetfeldes messen als auch steuern zu können. Zur Erregung wurden Wechselströme mit geringer Frequenz verwendet. Mit diesem Messprinzip zeigten die Autoren, dass alle sechs mechanischen Freiheitsgrade des Kopfes bzw. Helmes bestimmt werden können.

Anfang der 1990er Jahre wurde erstmals die Anwendung magnetfeldbasierter Lokalisierung zur Untersuchung des Magen-Darm-Traktes vorgeschlagen [19]. Eine Anordnung von sieben SQUID-Sensoren diente der Lokalisierung eines mit Magnetit beschichteten Markers. Experimente in einer abgeschirmten Kammer belegten die grundsätzliche Machbarkeit. Ein weiterer wichtiger Entwicklungsschritt wurde 2001 durch den Einsatz kompakter Sensoren Hall-Sensoren erreicht. Somit konnte eine Hall-Sensor Anordnung mit Elementen genutzt werden, die auf der Oberfläche einer Leiterplatte montiert werden, um zwei Richtungskomponenten des Magnetfeldes zu messen [20]. Die Silizium-Sensoren wurden mit einem Flusskonzentrator kombiniert, was zu einer hohen Empfindlichkeit führte. Zudem wurde eine Lösung des Lokalisierungsproblems vorgestellt: Die Autoren verwendeten das Modell des magnetischen Dipols (s. Gl. (2.1)), um Messwerte für eine definierte Position vorherzusagen. Diese Vorwärtslösung wird vom Levenberg-Marquardt-Algorithmus [21] genutzt, um die gesuchte Position iterativ anzunähern. Das Dipolmodell liefert eine gute Näherung für eine Reihe von magnetischen Quellen [22], wenn der Abstand zum Sensor in Relation zur Größe des Magneten sehr groß ist. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Modells ist die Methode aber auf fünf Freiheitsgrade beschränkt.

Um diese Beschränkung zu vermeiden, arbeiteten andere Veröffentlichungen mit komplexeren Magnetanordnungen. Eine 2D-Anordnung von hochempfindlichen magnetoresistiven Sensoren wurde somit beispielsweise genutzt, um die Position einer magnetischen Kapsel im Verdauungstrakt eines Menschen (med. gastrintestinal) zu bestimmen [23]. Die Autoren verwendeten ein Partikel-Schwarm-Optimierungsverfahren in Kombination mit dem Modell eines quaderförmigen Magneten. Mit Hilfe von Simulationen wurde die grundsätzliche Machbarkeit gezeigt, jedoch wurde darauf hingewiesen, dass für reale Anwendungen unter Berücksichtigung von Messrauschen das System verbessert werden müsse. Deshalb bezogen sich darauf aufbauende Veröffentlichungen [24] auf modifizierte magnetische Quellen. Um die Orientierungsbestimmung zu verbessern, wurde eine Anordnung aus zwei Magneten mit gegensätzlicher Magnetisierung vorgeschlagen (s. Abb. 2.2). Mithilfe dieser Verbesserung konnten Experimente erfolgreich durchgeführt werden. Eine mittlere Genauigkeit von 3.5 mm bzw. 1.9° in einem xy -Bereich von $\pm 50\text{mm}$ und $80\text{ mm} < z < 100\text{mm}$ konnte erreicht werden. Eine weitere Lösung mithilfe von rotierenden Magneten wurde vorgestellt [25]. Hierbei wurden die Sensoren im Inneren der zur lokalisierenden Kapsel untergebracht und ein externes magnetisches Wechselfeld appliziert. Das Feld wurde durch einen kugelförmigen Permanentmagneten erzeugt, der durch omnidirektionale Räder, die senkrecht zueinander standen, rotiert. Diese vergleichsweise aufwendige Konstruktion erlaubte eine Lokalisierung mit einer mittleren Genauigkeit von 4.7 mm und 3.3° im xy -Bereich von $\pm 30\text{mm}$ und $180\text{ mm} < z < 200\text{mm}$.

2. Grundlagen magnetfeldbasierter Positionssensorik

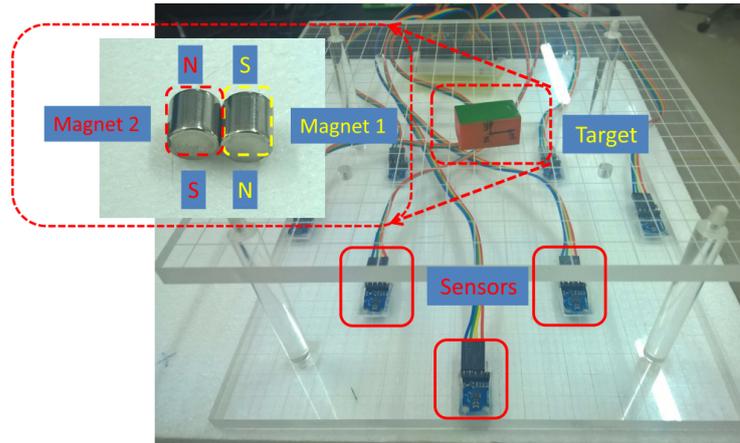


Abbildung 2.2.: Experimentelle Anordnung mit mehreren Magneten zur Nachbildung der Lokalisierung innerhalb des menschlichen Darmtraktes [24]

2.3.2. Industrielle Anwendungen

Neben diesen technisch sehr interessanten Anwendungen ergaben sich durch die günstigen Eigenschaften der siliziumbasierten Hall-Sensor-Technologie (s. Kap. 3.2) Einsatzmöglichkeiten im industriellen Umfeld. Hierbei kann zwischen relativ und absolut messenden Positionssensoren unterschieden werden. Während bei der relativen Messung ein magnetisch codierter Geber genutzt wird, um eine hohe Präzision über einen großen Bewegungsbereich zu erzielen, verwendet ein absoluter Positionssensor eine Quelle die eine eindeutige Lösung für die Position ermöglicht. Damit ist auch ohne Speicher die Position direkt nach dem Einschalten des Systems verfügbar. Einfache lineare Hall-Sensoren wurden in relativ messender Positionssensorik beispielsweise zur Wegmessung innerhalb von Hydraulikzylindern eingesetzt [26]. Weitere Konzepte wurden vorgestellt, die vertikale Hall-Sensor Elemente verwenden, um einen Winkelsensor zu realisieren [27]. Alle drei Raumrichtungen des Feldes eines zylinderförmigen Gebermagneten konnten somit erfasst werden. Bei geeigneter Magnet- und Sensoranordnung konnte bei Drehung des Magneten ein sinusförmiger Signalverlauf in den vertikalen Komponenten des Magnetfeldes gemessen werden. Die x und y -Komponente sind hierbei um 90° versetzt. Die Komponenten wurden miteinander derart verrechnet, sodass ein nahezu lineares Ausgangssignal entstand, das die beiden Messwerte auf den gesuchten Winkel abbildet. Die dritte Komponente des Magnetfeldes wurde dazu genutzt die Einflüsse von mechanischen Toleranzen zu reduzieren. Auf diesem Grundprinzip baut bis heute der Stand der Technik der absoluten magnetfeldbasierten Lokalisierung im breiten Anwendungsbereich auf. So werden derartige Sensoren in Millionenzahlen im Automobil, zur Bestimmung der Zahnradposition im Getriebe, zur Überwachung des Fahrwerkzustandes, der Fußpedalstellung, der Kurbelwellenposition oder für Komfortfunktionen wie der Sitzverstellung eingesetzt [28]. Der auf die Stückzahl bezogen zweitgrößte Einsatzbe-

reich von magnetfeldbasierten Positionssensoren ist in industriellen Anwendungen zu finden [29]. Hier dient die Technologie unter anderem der Überwachung von Elektromotoren beispielsweise in Robotikanwendungen. In den bevorzugten Anwendungsgebieten zeichnet sich das Messprinzip durch die berührungslose Messung bei besonders hoher Robustheit und Langlebigkeit aus und bietet daher Vorteile gegenüber Alternativen wie der optischen oder auf Schleifkontakten basierenden Sensorik.

Ein anderer Ansatz nutzte einen Ring von zehn Magneten, um den Winkel eines Rotors zu bestimmen [30]. Durch geeignete Differenzenbildung mehrerer Sensoren konnten Zwischengrößen berechnet werden, die wiederum einen nahezu sinusförmigen Zusammenhang mit der zu bestimmenden Position aufweisen. Mithilfe der Arkustangensfunktion und dem Quotienten zweier in einer 90° Phasenbeziehung stehender Kenngrößen kann die lineare Position somit näherungsweise bestimmt werden.

Andere Veröffentlichungen zeigten Möglichkeiten auf, anhand von Messungen des Feldvektors mit Hall-Sensoren eine Joystick-Anwendung zu realisieren [31]. Hierbei wurden CMOS-Sensoren mit ferromagnetischen Konzentratoren eingesetzt sowie ein zylinderförmiger Permanentmagnet. Dieser bewegte sich auf einer Halbkugel um den Sensor, sodass die Magnetisierungsachse immer in dessen Richtung zeigte. Um die Magnetfeldwerte in die entsprechenden Aussteuerungswinkel des Joysticks (α , β) umzusetzen, wurden aus den drei Komponenten des Messvektors (B_x , B_y und B_z) die Winkel mit:

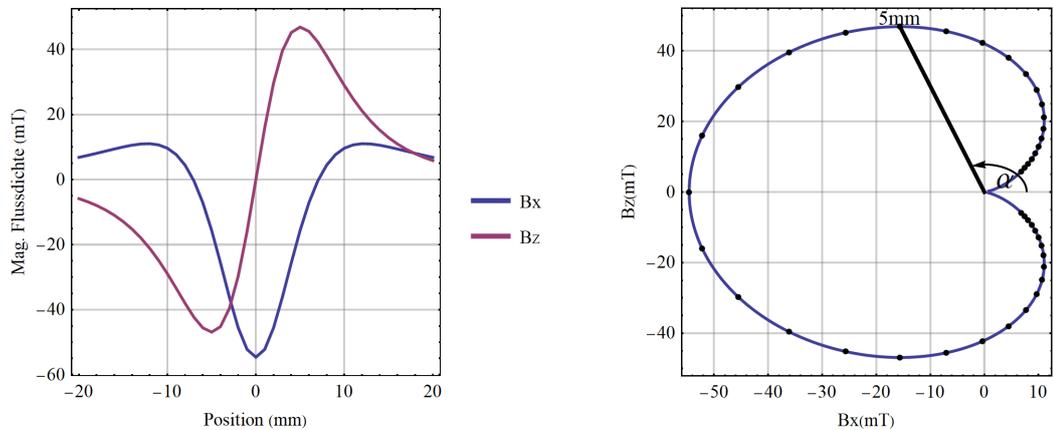
$$\alpha = \arctan\left(\frac{B_x}{B_z}\right) \quad (2.7)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{B_y}{B_z}\right) \quad (2.8)$$

berechnet. α und β beschreiben somit die Richtung des gemessenen Magnetfeldvektors. Die Gl. (2.7)-(2.8) verwenden die Verhältnisse von Magnetfeldkomponenten. Dies machte die Auswertung robust gegenüber dem Abstand zwischen Sensor und Magnet sowie Temperatureinflüssen. Eine Änderung würde sich proportional auf die x/y- und z-Komponente auswirken (s. Kap. 3.2.1). Dieser Einflussfaktor wurde durch die Division eliminiert. Die Art der Auswertung ermöglichte damit kompakte und robuste Bedienelemente mit bis zu zwei Freiheitsgraden. Der rechentechnische Aufwand war dabei minimal. Jedoch war die Methode auf eine spezielle Anordnung zugeschnitten, d. h. die empfindliche Fläche des Sensors musste sich exakt im Rotationszentrum des Magneten befinden. Komplexere Bewegungen waren nicht erfassbar. In anderen Veröffentlichungen zu Steuerungsanwendungen dienten Hall-Sensoren der Bestimmung linearer Positionen [32] oder des Winkels der Welle eines Motors [30]. Abb. 2.3a - 2.3b zeigen die Messgrößen einer solchen linearen Wegmessung. Die Ortskurve stellt die Abhängigkeit des Winkels α von den gemessenen Magnetfeldwerten dar. Daraus ist ersichtlich, dass zu jedem Paar von Messwerten B_x und B_z ein eindeutiger Winkel α bestimmt werden kann. Es ist also ein eindeutiger Zusammenhang zum Messwertvektor hergestellt. In einem letzten Schritt

2. Grundlagen magnetfeldbasierter Positionssensorik

muss lediglich der Winkel α noch auf die Position x übertragen werden. Hierzu wird typischerweise eine Tabelle verwendet, die auch als Linearisierungstabelle bezeichnet wird.



(a) Komponenten der mag. Flussdichte abhängig von der Position (b) Ortskurve der B_x und B_z -Komponente

Abbildung 2.3.: Magnetische Flussdichte bei einer linearen Bewegung in x-Richtung

Diese empirische Herangehensweise ermöglichte somit eine Lösung des inversen Problems für einen weiteren Spezialfall. Auch hier blieb der Rechenaufwand minimal. Jedoch ist aufgrund der begrenzten Auflösung der Linearisierungstabelle mit einem inhärenten Fehler zu rechnen, selbst wenn die Anordnung sonst Ideal angenommen wird.

Auch Ansätze mit künstlichen neuronalen Netzen (KNN) wurden beschrieben, um einen Permanentmagneten mit zwei mechanischen Freiheitsgraden zu lokalisieren [33]. KNN sind in der Lage nahezu beliebige mathematische Funktionen nachzubilden. Durch die Verknüpfung einfacher Aktivierungsfunktionen können stark nichtlineare Zusammenhänge abgebildet werden. Damit kann auch die Lösung des inversen Lokalisierungsproblems, also eine Zuordnung zwischen Magnetfeldwerten und Position mithilfe dieses Ansatzes gelöst werden. Dazu werden in einem sog. Training die Parameter des Netzes an umfangreiche Datensätze aus bekannter Position und zugehörigem Magnetfeld angepasst. Diese Methode wurde auf ein System mit einem einzelnen vektoruell messenden Hall-Sensor angewandt. Eine Netzstruktur aus vier Ebenen (Eingang, zwei versteckte Schichten und Ausgang) und insgesamt 14 Knoten (Neuronen) ermöglichte die zwei Winkel des Joysticks bis auf ca. 0.7° genau zu bestimmen. Um das bereits trainierte Netz auf einen Messwert anzuwenden, sind nur verhältnismäßig wenige Multiplikationen (7×7) und die Auswertung einfacher Aktivierungsfunktionen nötig. Der Rechenaufwand kann weitestgehend in die Anlernphase verlagert werden, die typischerweise auf Hochleistungsrechnern stattfindet. Die Zuordnung zwischen Messwert und Position ist im Vergleich zu einer analytischen Modellierung stark vereinfacht, was gleichzeitig zu einer Regularisierung führt.

2.3. *Stand der Technik magnetfeldbasierter Positionssensorik*

Weitere Regularisierungsmaßnahmen beim Anlernprozess dienen der Stabilisierung des trainierten Modells [13]. KNN können ohne Vorwissen über das physikalische Problem allein auf Basis von Beobachtungen/Messungen verwendet werden und eignen sich damit besonders für Probleme die analytisch nicht erfasst werden können. Anders als bei Verfahren, die auf einem analytischen Modell der Magnetanordnung basieren, erfüllt das künstliche Netz aber dadurch auch nicht zwingend die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten, also die Maxwell'schen Gleichungen. Der Entwicklungsprozess eines KNN ist mangels einer allgemeingültigen Handlungsanweisung experimentell und muss für das entsprechende Problem angepasst werden, um zu einer möglichst effizienten Lösung zu kommen.

Im Falle der magnetfeldbasierten Lokalisierung ist die grundlegenden physikalischen Effekte sehr exakt beschreibbar. Es ist also davon auszugehen, dass modellbasierte Verfahren, wie sie in Anwendungen aus dem Laborumfeld bereits vorgestellt wurden (Kap. 2.3.1), zu besseren Lokalisierungsergebnissen führen. In dieser Arbeit sollen daher Verfahren basierend auf einem analytischen Modell im Fokus stehen, die aber in Kombination mit der kompakten und robusten Hall-Sensorik auch unter schwierigen Umgebungsbedingungen eingesetzt werden können.

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Dieses Kapitel widmet sich der Beschreibung der mathematischen Werkzeuge und Methoden, um das magnetfeldbasierte Lokalisierungsproblem zu lösen. Im ersten Teil werden die in dieser Arbeit verwendeten Hardware-Komponenten beschrieben und Methoden zur Modellierung eines Messsystems aufgezeigt. Im Zweiten werden geeignete Verfahren zur Lösung des inversen Problems behandelt und Kenngrößen erarbeitet, die es erlauben das Messsystem genauer zu analysieren. Hierbei steht zunächst die Frage im Vordergrund, ob ein Hall-Sensor basiertes Positionsmesssystem die Bestimmung der Freiheitsgrade anhand der Messdaten ermöglicht und das Konzept der nichtlinearen Beobachtbarkeit vorgestellt. Der darauffolgende Abschnitt stellt ein Verfahren zur Abschätzung der erreichbaren Genauigkeit vor.

3.1. Anwendungsfall eines sechs DoF Bedienelementes

Zur Beschreibung und Evaluierung der in dieser Arbeit verwendeten Verfahren gilt es einen einheitlichen Anwendungsfall zu definieren. Ein typisches Anwendungsgebiet für Hall-Sensor basierte Positionssensorik sind Bedienelemente (s. Kap. 2.3.2). In diesen können die Vorteile der Sensortechnologie besonders gut ausgenutzt werden. Durch das berührungslose Messprinzip sind sehr hohe Standzeiten mit bis zu 10 Millionen Bewegungszyklen möglich [34]. Gleichzeitig sind Hall-Sensor basierte Bedienelemente extrem robust gegenüber Einflüssen wie Staub und Feuchtigkeit. Daher werden bereits seit 1973 Winkel-Encoder für zweiachsige Joysticks in der Luftfahrt aber auch in Bau- und Landmaschinen eingesetzt [35]. Parallel dazu trieb die Unterhaltungsindustrie die Entwicklung voran: Einfache Eingabegeräte, die auf Schaltern basierten, wurden durch analoge Bedienelemente ersetzt, bei denen die Verschiebung eines Steuerelementes erfasst wurde.

Für den Referenzanwendungsfall dieser Arbeit lässt sich der „klassische“ Joystick um vier Freiheitsgrade erweitern. Damit entsteht ein Bedienelement mit bis zu sechs möglichen Freiheitsgraden. Neben den herkömmlichen zwei Winkeln α und β ermöglicht es das System auch translatorische Bewegungen des Bedienhebels (x,y,z) und zusätzlich eine Verdrehung der Joystickachse φ zu erfassen.

Der Bewegungsbereich für eine solche Anwendung ist beschränkt. Eine Verschiebung von wenigen Millimetern reicht aus, um Bedienfunktionen zu realisieren. Damit ergibt sich auch für den maximalen Abstand zwischen Sensor und Magnet eine

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Größenordnung, in der der Hall-Sensor noch ein Signal-Rauschverhältnis größer einbietet. Die Anwendung erscheint also grundsätzlich geeignet, um die Möglichkeiten der Technologie exemplarisch aufzuzeigen.

3.1.1. Mechanischer Aufbau

Um mit möglichst wenig konstruktivem Aufwand eine Mechanik mit den gewünschten Eigenschaften zu erzeugen, wurde ein 3D-Druck-Verfahren eingesetzt, um ein solches Bedienelement zu fertigen. Abb. 3.1 zeigt die Konstruktionszeichnung. Hiermit ist es möglich, sowohl starre als auch plastisch verformbare Komponenten in nahezu beliebiger Anordnung herzustellen. Über eine Konstruktion aus Federn mit mechanischen Anschlägen ist der so entstandene Joystick in sechs Freiheitsgraden beweglich.

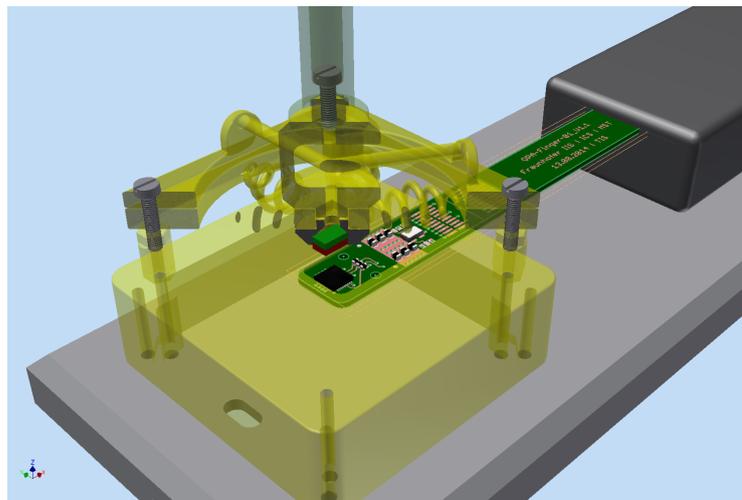


Abbildung 3.1.: CAD-Entwurf des 6DoF-Joysticks

3.1.2. Generischer Teststimulus

Testfälle sollen dazu dienen, die Leistungsfähigkeit und Genauigkeit des Messsystems zu analysieren. Hierzu wäre es idealerweise erforderlich, alle Zustände im sechsdimensionalen Lösungsraum kontinuierlich abzurastern. Bei zehn Rasterpunkten in jedem Freiheitsgrad wären in der Simulation bzw. in der Messung 10^6 Punkte auszuwerten. Zudem muss durch eine geeignete Aneinanderreihung der Punkte dafür gesorgt werden, dass die Trajektorie in jedem Freiheitsgrad stetig ist. Um diesen Aufwand zu reduzieren und um einen systematischen Ansatz für eine beliebige Anzahl von Freiheitsgraden zu definieren, wurde ein Stimulus aus periodischen Kurven unterschiedlicher Frequenz ω_i verwendet. Im Falle einer sinusförmigen Kurve entstehen so mehrdimensionale Lissajous-Figuren. Mit der Frequenz lässt sich dabei die Dichte des Rasters einstellen. Als Funktion $f_{i,stim}$ können aber auch ungerade Vielfache der Sinusfunktion gewählt werden, um eine stärkere Wölbung (Kurtosis)

3.1. Anwendungsfall eines sechs DoF Bedienelementes

zu erreichen:

$$f_{i,stim}(k) = A_i \sin(\omega_i k)^{2p+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.1)$$

Für $p = 0, 1, 2, 3$ ergibt sich eine Kurtosis von 1.5, 2.31, 2.91, 3.41. A_i ist die jeweilige

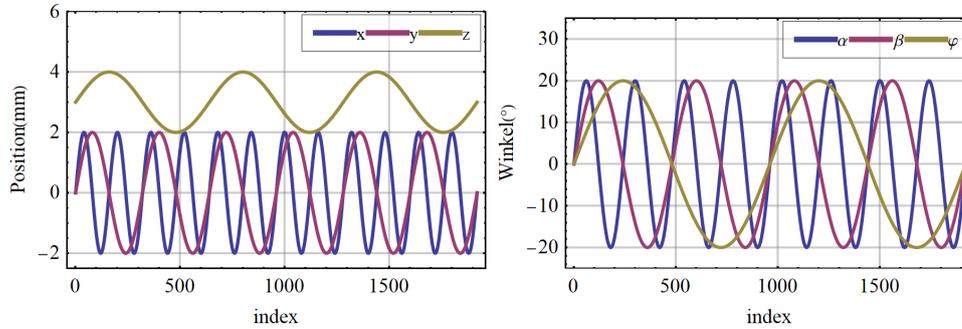


Abbildung 3.2.: Beispiel eines Stimulus zur Simulation einer Bewegung mit sechs Freiheitsgraden

Amplitude des Zustandes. Ein Beispiel eines solchen Teststimulus ist in Abb. 3.2 zu sehen. Die sinusförmige Trajektorie dient als Ausgangspunkt für die Simulationen und Messungen dieser Arbeit.

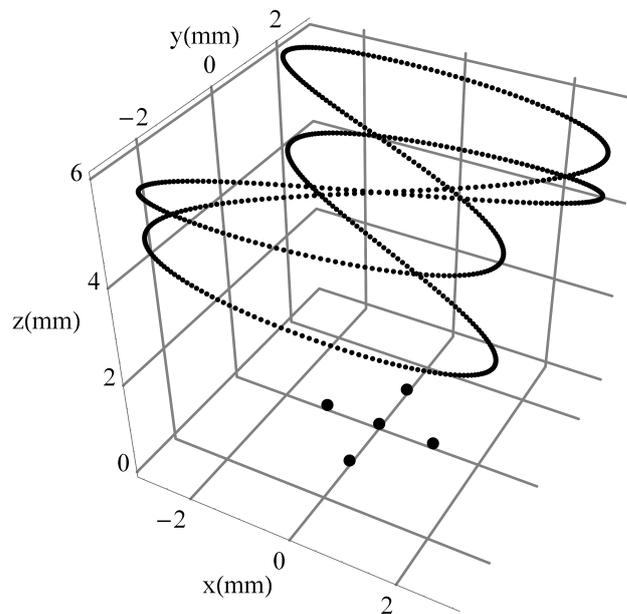


Abbildung 3.3.: Sensor-Anordnung und Trajektorie eines Magneten basierend auf Sinus-Kurven

Abb. 3.3 zeigt den Verlauf der translatorischen Positionsfreiheitsgrade eines gemäß

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Gl. 3.2 erzeugten Kurvenverlaufs (kleine Punkte) über einer schematisch dargestellten Pixelanordnung (große Punkte).

3.2. HallinOne-Sensoren

Integrierte Hall-Sensoren lassen sich mit etablierten und sehr gut charakterisierten Halbleitertechnologien umsetzen. Hierfür sind keine speziellen Prozessierungsschritte erforderlich. Der in dieser Arbeit verwendete Sensor-IC (integrierter Schaltkreis) wurde am Fraunhofer Institut für Integrierte Schaltungen (IIS) entwickelt, auf einem siliziumbasierten CMOS-Prozess (Complementary metal-oxide-semiconductor) mit einer Strukturgröße von 350 nm gefertigt, und unter der Bezeichnung HallinOne vermarktet. Die Integration ermöglicht digitale Signalvorverarbeitung direkt auf dem Chip, was den Hall-Sensor zu einem integrierten Mikrosystem erweitert, das bereits eine temperaturabhängige Empfindlichkeits- und Offsetkorrektur sowie eine digitale Schnittstelle beinhaltet. Silizium zeichnet sich außerdem durch eine besonders gute Langzeitstabilität aus. Eine Empfindlichkeitsänderung von weniger als 0.01 % innerhalb von 10 Jahren wurde bereits belegt [36]. Die Standard-CMOS Technologie erlaubt zudem eine kostengünstige Produktion der HallinOne-ICs. Diese Vorteile wiegen die Nachteile der Silizium Technologie gegenüber III-V-Halbleitern, die eine höhere Sensorempfindlichkeit ermöglichen, bei Weitem auf. Um die Empfindlichkeit der Magnetometer zu erhöhen, verwenden einige Hersteller integrierte Flusskonzentratoren, welche die Flussdichte an der Stelle des Sensors erhöhen, aber auch die Richtung der Empfindlichkeit ändern [37].

Die in dieser Arbeit betrachteten HallinOne-Sensoren ohne magnetisch aktive Materialien beeinflussen das zu messende Magnetfeld dahingegen kaum. Der Einfluss des Versorgungsstromes wurde durch geeignete Leitungsführung auf dem integrierten Schaltkreis minimiert [38]. Das Erdmagnetfeld ist im typischen Arbeitsbereich ($> 1\text{mT}$) oft vernachlässigbar, was wiederum eine sehr exakte Modellierung des Messsystems ermöglicht. Die Sensoren eignen sich somit aufgrund der Linearität, Stabilität, Robustheit und hervorragenden Integrierbarkeit im besonderen Maße zur modellbasierten Lokalisierung, sofern als magnetische Quelle ein Permanentmagnet eingesetzt wird.

Abb. 3.4 dient der Erläuterung des Hall-Effekts in einem dünnen Plättchen. Dieses besteht aus leitfähigem Material der Dicke t , der Länge l und der Breite w . Ein Versorgungsstrom I wird über die zwei Versorgungskontakte $C1$ und $C2$ in das Hall-Element eingespeist. Ein senkrecht zum Plättchen gerichtetes Magnetfeld B_{\perp} führt dazu, dass aufgrund der Lorentz-Kraft an zwei dazu senkrecht angebrachten Sensorkontakten, $S1$ und $S2$, eine Spannung gemessen werden kann. Diese wird als Hall-Spannung U_H bezeichnet. Für einen spannungsgesteuerten Betrieb ist [39]

$$U_H = \mu_H G_H \frac{w}{l} B_{\perp} U_0 = S B_{\perp}. \quad (3.2)$$

Neben einem Geometriefaktor G_H hat die Hall-Beweglichkeit der Majoritätsladungs-

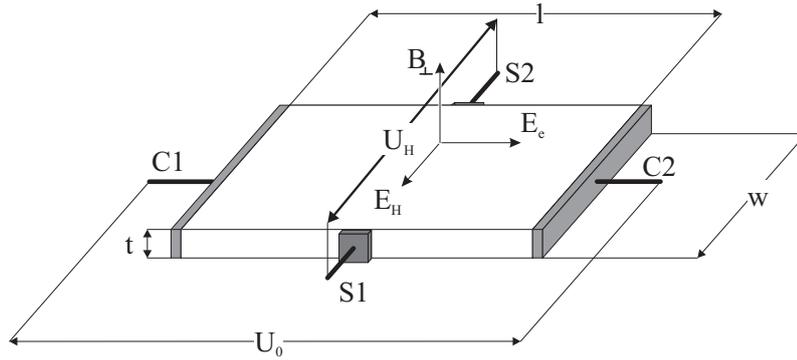


Abbildung 3.4.: Hall-Effekt in einer dünnen Platte (nach [37])

träger μ_H Einfluss auf die Empfindlichkeit S_Z des Sensors. Die Hall-Beweglichkeit berücksichtigt das Vorzeichen der Ladungsträger und entspricht betragsmäßig der Ladungsträgerbeweglichkeit [37]. Halbleiterelemente wie Silizium besitzen ausreichend niedrige Ladungsträgerkonzentrationen, um Hall-Elemente zu realisieren. Durch Dotierung wird im Silizium ein Hall-Element mit definierten Majoritätsladungsträgern erzeugt. Aufgrund der höheren Beweglichkeit von Elektronen ermöglichen n-dotierte Hall-Elemente größere Empfindlichkeiten als p-dotierte, deren Majoritätsladungsträger Löcher (Defektelektronen) sind.

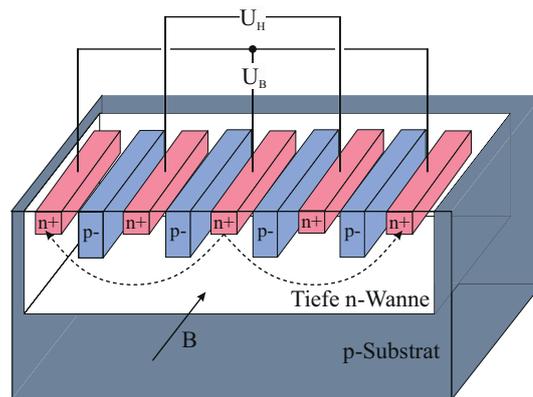


Abbildung 3.5.: Entwurf eines vertikalen Hall-Elements in CMOS

Eine wie in Abb. 3.4 gezeigte Anordnung der Kontakte erlaubt es, Felder senkrecht zur Chipoberfläche zu messen (B_z). Um auch die beiden parallelen Komponenten (B_x und B_y) bestimmen zu können, wurde ein vertikales Hall-Element vorgeschlagen [40]. Damit alle Anschlüsse des Hall-Elementes auf der Chipoberfläche zugänglich werden, wird hierbei eine Anordnung aus fünf Kontakten gewählt (s. Abb. 3.5). Die Versorgungsspannung verursacht einen Strom, der sich gleichmäßig auf die beiden äußersten Kontakte verteilt. Ist ein Magnetfeld vorhanden, so verschieben sich die Strompfade aufgrund der Lorentzkraft und es entsteht eine Spannungsdifferenz zwi-

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

schen den Hall-Kontakten. Um den Stromfluss möglichst von der Chipoberfläche fernzuhalten, werden zwischen den Kontakten weitere schwach dotierte Gebiete eingefügt. Dies erhöht die Empfindlichkeit und verbessert das Rauschverhalten des Sensors [41].

Um den Nullpunktsfehler (Offset) des Sensors zu verbessern, werden mehrere einzelne Sensor-Elemente parallelgeschaltet. Diese Maßnahme kann sowohl bei den lateralen, als auch bei den horizontalen Elementen angewandt werden. Im HallinOne-Sensor werden somit jeweils vier Einzelemente für jede Magnetfeldkomponente verbunden. Die Anordnung (s. Abb. 3.6) wird aufgrund der Analogie zur Bildsensorik auch als Pixel bezeichnet.

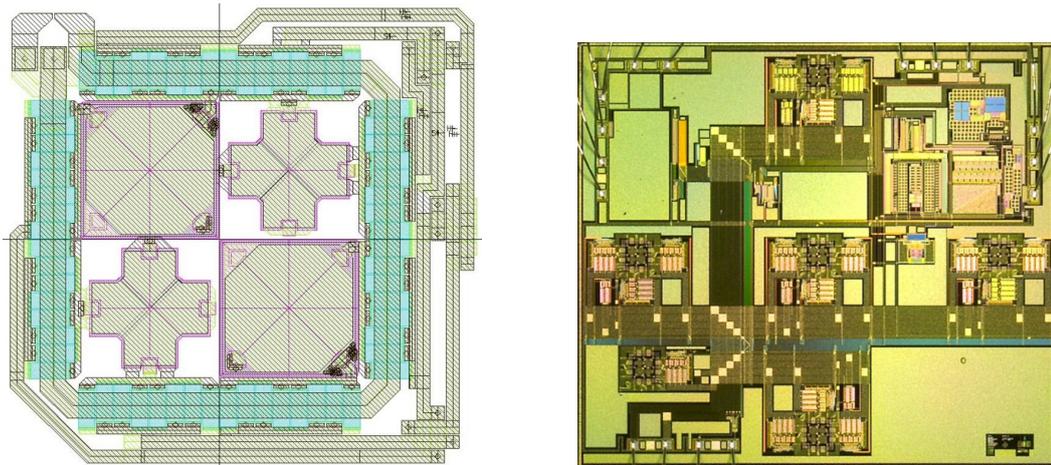


Abbildung 3.6.: Layout eines Pixels zur Messung des Magnetfeldvektors und Mikroskopaufnahme eines HallinOne ICs mit fünf Pixeln

Ein Pixel ermöglicht es auf einer Fläche von $100\mu\text{m} \times 100\mu\text{m}$ alle drei Komponenten der magnetischen Flussdichte B_x , B_y und B_z zu bestimmen. Aufgrund dieser kompakten Abmessungen ist es auch möglich mehrere Pixel auf einem Chip zu integrieren, die sich einen Signalverarbeitungspfad teilen. Ein solcher Chip wird auch als 3D-Hall-Sensor bezeichnet. Die zur Charakterisierung von 3D-Hall-Sensoren wichtigsten Eigenschaften sind [42]:

- temperaturabhängige Empfindlichkeit
- Querempfindlichkeit auf orthogonale Felder
- temperaturabhängiger Offset
- Linearität
- temperaturabhängiger Eingangs- und Ausgangswiderstand

- elektronisches¹ Rauschen

Diese sollen im Folgenden im Hinblick auf mögliche Einflüsse auf die Positionsbestimmung genauer analysiert werden.

3.2.1. Empfindlichkeit

Die Hallbeweglichkeit μ_H beschreibt die effektive Beweglichkeit der Ladungsträger unter dem Einfluss magnetischer Kräfte ([43]). Für stark dotierte Halbleiter entspricht sie der Ladungsträgerbeweglichkeit μ . Für schwach dotiertes Silizium ist die Hallbeweglichkeit abhängig von der magnetischen Flussdichte. Für sehr schwach dotiertes n-Silizium kommt der Hauptanteil der Elektronenmobilität von der Streuung am Gitter und kann mithilfe der Theorie der Streuung an akustischen Phononen bestimmt werden: $\mu_n \propto T^{-3/2}$. Bei zunehmender Dotierung des Halbleiters wird die Streuung an Fehlstellen maßgeblich. Eine Reihe von theoretischen und empirischen Modellen wurden hierzu entwickelt (z.B. [44]). Eigene Vermessung des in dieser Arbeit verwendeten Sensors lieferte eine Abhängigkeit, die am besten durch eine Exponentialfunktion angenähert werden kann. Das empirische Modell lautet:

$$\mu_H = a + \mu_{H0} b e^{-c/(kT)}. \quad (3.3)$$

a , b und c sind über eine Kurvenanpassung zu bestimmende Parameter und k ist die Boltzmannkonstante. Die Abbildungen 3.7 zeigen die Anpassungen an unterschiedliche Modelle.

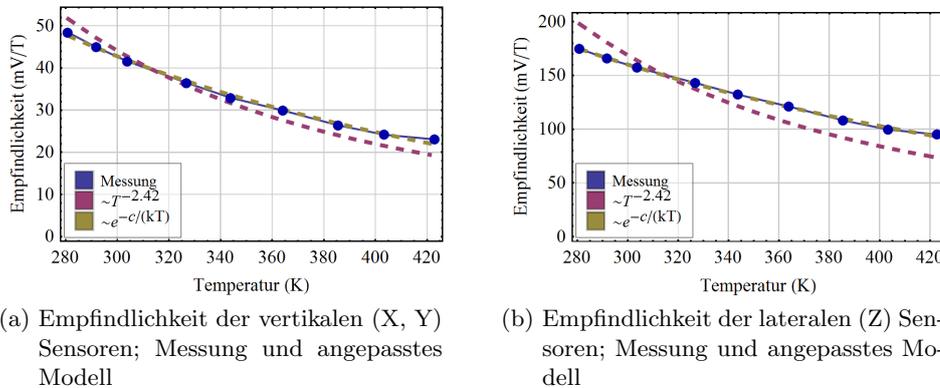


Abbildung 3.7.: Sensor Empfindlichkeit über der Temperatur

Die Exponentialfunktion beschreibt die Empfindlichkeit der Hall-Sensor-Elemente am besten und ermöglicht es die diese über dem gesamten Temperaturbereich auf ein Prozent genau anzunähern. Prozessvariationen und mechanische Toleranzen bei

¹Magnetisches (Barkhausen-) Rauschen [4] ist in den betrachteten Hall-Sensoren aufgrund der verwendeten Materialien vernachlässigbar.

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

der Fertigung des Sensor-ICs und beim Packaging führen zu einer Querempfindlichkeit der einzelnen Sensoren-Elemente auf Felder, die orthogonal zur Hauptempfindlichkeitsachse liegen [45]. Dieser Fehler sorgt dafür, dass sich beim realen Sensor alle drei Richtungskomponenten auf das Ausgangssignal auswirken. Besonders die vertikalen Hall-Elemente zeigen eine deutliche Abhängigkeit vom Messwert des z -Sensors. Über eine Anordnung von orthogonalen Helmholtzspulen [46] können diese Querempfindlichkeiten im Labor oder Endtest auf Modulebene bestimmt und somit im Zuge einer Signalvorverarbeitung reduziert werden.

3.2.2. Offset

Der Offset eines Hall-Sensors bezeichnet das Ausgangssignal ohne Vorhandensein eines Magnetfeldes. Er kann bei einem statischen Magnetfeld nicht vom Nutzsignal des Sensors unterschieden werden und stellt deshalb eine der wesentlichen Einflussgrößen auf die erreichbare Genauigkeit des Magnetfeldsensors bzw. des Positionsmesssystems dar. Die Hauptursachen für Nullpunktfehler im Hall-Element sind: Geometrieabweichungen bei der Prozessierung, mechanischer Stress und Fehlstellen in der spannungsabhängigen Raumladungszone des Hall-Elements [43]. Wird der Offset als äquivalente magnetische Flussdichte B_{Off} angegeben, ergibt sich der Zusammenhang mit der Empfindlichkeit $B_{Off} = U_{Off}/S_A$. Typischerweise beträgt der Offset ohne Korrektur bis zu 1 mT und liegt damit im Bereich des Nutzsignals. Maßnahmen zur Kompensation sind deshalb zwingend erforderlich. Im Spinning-Current Betrieb wird das Hall-Element in unterschiedlichen Richtungen betrieben [43]. Darüber hinaus ist eine Kalibrierung mithilfe einer abgespeicherten Kennlinie ein wirksames Mittel, um den Offset über der Temperatur zu korrigieren. Der Nullpunktfehler kann durch Messung in einer Null-Gauss-Kammer, die der magnetischen Abschirmung des Erdmagnetfeldes dient, bestimmt werden. Eine Offsetkorrektur mithilfe einer linearen Kennlinie der Form:

$$B_{Off}(T) = B_{Off0} + TC_{Off}(T - 300 \text{ K}) \quad (3.4)$$

mit dem Temperaturkoeffizienten TC_{Off} und dem Offset B_{Off0} bei Raumtemperatur führt zu einem Restoffset von typischerweise $3 \mu\text{T}$ für die lateralen Hall-Elemente (B_z) und $100 \mu\text{T}$ für die vertikalen Hall-Elemente (B_x, B_y). In den meisten Anwendungen können keine Maßnahmen getroffen werden, um das störende Erdmagnetfeld ($\approx 50 \mu\text{T}$) zu kompensieren. Dies ist bei mobilen Geräten und meist auch im industriellen Umfeld der Fall, da der Aufwand einer Kalibrierung am Einsatzort unverhältnismäßig groß ist. Daher muss in Summe mit einem Restoffset von ca. $60 \mu\text{T}$ bzw. $150 \mu\text{T}$ gerechnet werden.

3.2.3. Elektronisches Rauschen

Neben dem Ausgangssignal des Hall-Sensors, das Information über das zu messende Magnetfeld enthält, ist dem Spannungssignal u_s ein nicht deterministischer

Rauschanteil u_n überlagert. Das zeitabhängige Ausgangssignal kann mit

$$u(t) = u_s(t) + u_n(t) \quad (3.5)$$

beschrieben werden. Während die Rauschspannung als mittelwertfrei angenommen werden kann, trifft dies auf den quadrierten Wert (Rauschleistung) nicht zu. Die Rauschspannung u_n ist von der Frequenz abhängig und wird deshalb durch die spektrale Rauschspannungsdichte $S_{NV}(f)$ charakterisiert. Die Wurzel des quadrierten Mittelwertes berechnet sich damit zu

$$u_{n,eff} = \sqrt{\left(\int_{f_1}^{f_2} S_{NV}(f) df\right)}. \quad (3.6)$$

Bei niedrigen Frequenzen nimmt die spektrale Rauschspannungsdichte mit zunehmender Frequenz ab: $S_{NV} \propto 1/f^\gamma$. Mit $\gamma = 1.0 \pm 0.1$. Die Gründe für dieses Verhalten sind vielfältig [47]. Die Rauschspannungsdichte bei hohen Frequenzen ist nicht mehr von der Frequenz abhängig und wird als weiß bezeichnet. Physikalisch kann diese Art des Rauschens mit der Wärmebewegung von Ladungsträgern beschrieben werden. Sie wird daher auch als thermisches Rauschen bezeichnet:

$$S_{NV} = 4kTR. \quad (3.7)$$

Das thermische Rauschen S_{NV} hängt von der Temperatur T , sowie der Boltzmannkonstante k und dem Widerstand der Rauschquelle R ab. Erst bei hohen Frequenzen nimmt die Rauschspannungsdichte wieder ab. Grund dafür sind die im System vorhandenen (parasitären) Kapazitäten C_p . Die effektive Rauschspannung beträgt in diesem Grenzfall [48]:

$$u_{n,eff} = \sqrt{\frac{kT}{C_p}}. \quad (3.8)$$

Für das Rauschen der Sensoren selbst und der darauf folgenden analogen Signalverarbeitung lässt sich die äquivalente magnetische Flussdichte folgendermaßen angeben:

$$\langle B_N^2 \rangle = \int_{f_1}^{f_2} S_{NV}(f) df / S_A^2. \quad (3.9)$$

Dabei ist $\langle B_N^2 \rangle$ der mittlere quadrierte Wert der äquivalenten magnetischen Flussdichte, $S_{NV}(f)$ die spektrale Rauschspannungsdichte. Die Empfindlichkeit S_A ist über einen weiten Bereich frequenzunabhängig und stellt somit einen konstanten Faktor in der Integration in Gl. (3.9) dar. Abb. 3.8 zeigt die spektrale Rauschleistungsdichte (PSD) eines lateralen Hall-Sensors auf CMOS-Basis. Ohne besondere Maßnahmen ist bis zu 600 Hz eine deutliche Frequenzabhängigkeit zu erkennen. Hall-Sensoren werden jedoch getaktet betrieben (vgl. Spinning-Current Kap. 3.2.2).

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Hierbei werden die Funktionen der Kontakte des Hall-Elements zyklisch gewechselt. Der Versorgungsstrom fließt somit in unterschiedlichen Richtungen durch den Hall-Sensor. Dieses Prinzip verschiebt das Nutzsignal in einen höheren Frequenzbereich und eine anschließende Filterung reduziert schließlich das $1/f$ -Rauschen im Ausgangssignal. Bei Hall-Sensoren ist dadurch das thermische Rauschen der Sensoren

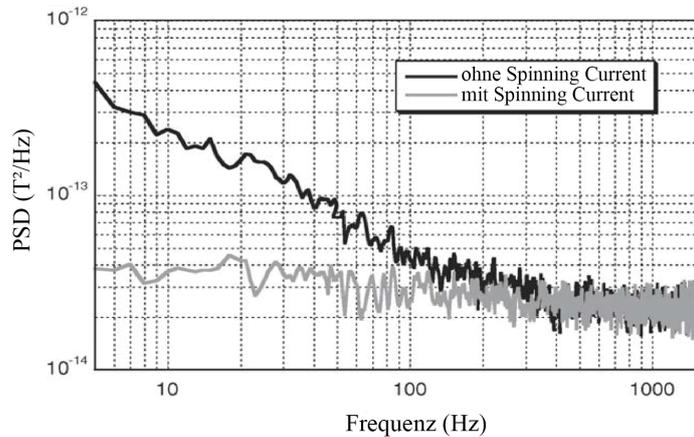


Abbildung 3.8.: Spektrale Rauschleistungsdichte (PSD) eines Hall-Sensors mit und ohne Anwendung des Spinning Current Prinzips (übersetzt aus [49])

maßgeblich für das Gesamtrauschen, das damit als weiß angenommen werden kann. Abb. 3.9 zeigt die Verteilung der Flussdichtemessung für ein Pixel eines Hall-Sensors bei der Frequenz $f = 250$ Hz. An diese wurde eine Normalverteilung angenähert. Die so erhaltene Standardabweichung beträgt ca. $20 \mu\text{T}$ für die vertikalen Hall-Elemente und $11 \mu\text{T}$ für die lateralen Elemente. Um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit der die gemessenen Werte aus einer Normalverteilung stammen, wurde der sog. Jarque-Bera-Test [50] durchgeführt. Dieser vergleicht die standardisierten Momente, Schiefe und Kurtosis, der Messwerte mit der Normalverteilung. Als Ergebnis steht die Wahrscheinlichkeit γ fest, mit der die Stichprobe aus einer Normalverteilung stammt². Mit Werten von γ durchwegs über 39% kann bei einem typischen Signifikanzniveau die Hypothese, dass es sich um eine normalverteilte Größe handelt beibehalten werden. Von dieser Hypothese wird in dieser Arbeit daher ausgegangen.

3.3. Testchip mit fünf Pixeln

Die HallinOne-Technologie ermöglicht es, mehrere Magnetfeldsensoren zur Bestimmung des Flussdichte-Vektors (Pixel) auf einer Chipfläche von wenigen Millimetern zu integrieren. So wurden fünf dieser Pixel auf einem Chip mit den Abmessungen $3 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$ realisiert. Dieser am Fraunhofer Institut für integrierte Schaltungen

²Andere typische statistische Tests wie der Kolmogorow-Smirnow-Test sind weniger geeignet, da dieser von einer kontinuierlichen Verteilung ausgeht

3.3. Testchip mit fünf Pixeln

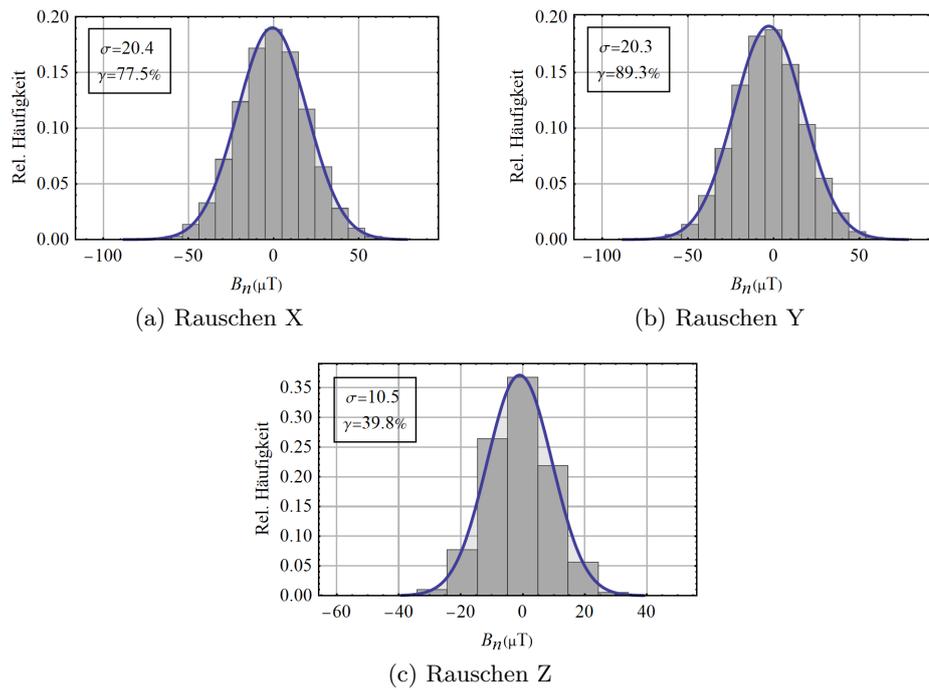


Abbildung 3.9.: Äquivalente magnetische Flussdichte des Sensorrauschens bei $f = 250$ Hz

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

entwickelte Testchip dient als Ausgangspunkt für Untersuchungen zu magnetfeldbasierter Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden, da durch die Vielzahl der Messstellen von einem ausreichenden Informationsgehalt ausgegangen wird. Er wird in einem flachen, nichtmagnetischen Gehäuse (QFP) auf eine Platine aufgebracht und wird über einen Controller (Cortex-M4 mit 120 MHz) angesteuert. Dieser ist in der Lage eine Signalverarbeitung durchzuführen und die Messergebnisse über eine Schnittstelle an einen PC weiterzugeben.

3.4. HallinSight Kamera

Für weiterführende Untersuchungen, insbesondere zur Optimierung der Sensoranordnung, wird eine magnetische Kamera genutzt. Diese besteht aus einer Anordnung von 128 Sensor-ICs, die jeweils wiederum zwei Pixel enthalten. Damit ergibt sich ein Feld von $16 \times 16 = 256$ Pixeln, die im Raster von 2.5 mm angeordnet sind (s. Abb. 3.10). Die magnetische Kamera verfügt über eine USB-Schnittstelle

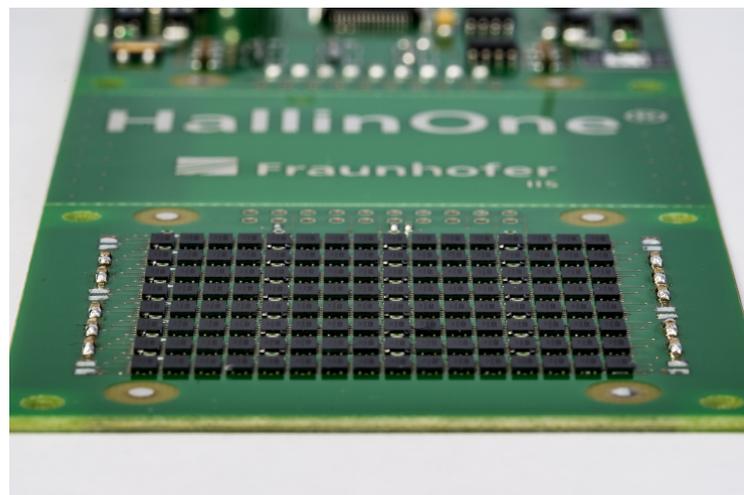
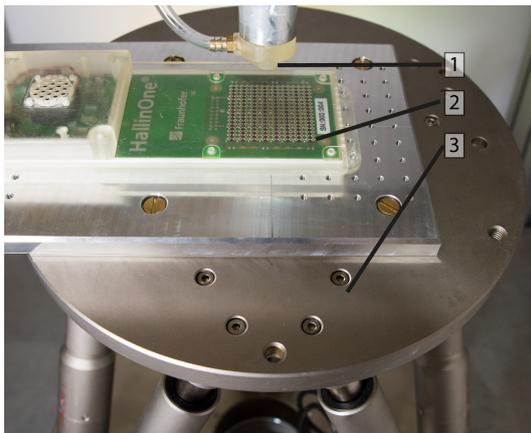


Abbildung 3.10.: HallinSight-Kamera auf Basis der HallinOne-Technologie mit 16×16 Pixeln

(Universal Serial Bus), die es ermöglicht, die Messdaten in wenigen Millisekunden an einen angeschlossenen PC zu übertragen. Somit können Abtastraten von über 50 Hz erreicht werden. Die einzelnen ICs sind in einem Chip-Size-Package (Gehäuse in der Größenordnung des Siliziums) untergebracht und auf der Platine im sogenannten Flip-Chip-Verfahren (Wende-Montage) montiert. Dadurch kann die Oberfläche eines zu vermessenden Objektes bis auf 0.5 mm an den Messpunkt des Sensors herangeführt werden. Die einzelnen Pixel werden in Bezug auf Orthogonalität und Nullpunktsfehler kalibriert (s. Kap. 3.2.1-3.2.2).

3.5. Testaufbau für Positionsmesssysteme

Zur Verifikation der Lokalisierungsmethoden wird eine Stewart-Plattform (Hexapod) verwendet, die es ermöglicht, alle sechs mechanischen Freiheitsgrade eines Testobjektes zu bewegen. Der verwendete Hexapod (PI H-840 [51]) erlaubt eine Wiederholgenauigkeit von $\pm 2.0\mu\text{m}$ und $20\mu\text{rad}$ bei einem Stellweg von bis zu $\pm 50\text{mm}$ und $\pm 15^\circ$. Die Aussteuergrenzen sind abhängig von der Position, sodass bei einer in dieser Arbeit genutzten Trajektorie die Orientierung nur um $\pm 9^\circ$ ausgelenkt werden kann. Die Sollposition des Hexapods wird über optische Absolutencoder geregelt. Diese können ausgelesen werden und dienen als Referenzwert für die betrachteten Lokalisierungsmethoden. Abb. 3.11 zeigt den Hexapod, auf die eine HallinSight-



(a) Foto des Aufbaus



(b) Schematische Darstellung

Abbildung 3.11.: Testaufbau bestehend aus einer Anordnung von 3D Hall-Sensoren (2), die auf einer Stewart-Plattform (3) befestigt sind, und einer Vakuums-Halterung für den Magneten (1)

Kamera angebracht wurde. Ein Magnet kann auf einer starren Achse mittels eines Vakuums-Halters fixiert werden. Anders als in praktischen Anwendungsfällen wird also die Sensoranordnung und nicht der Magnet bewegt, was eine Transformation der Stellgrößen notwendig macht.

3.6. Permanentmagnet

Die Quelle des magnetischen Flusses wird von einem Permanentmagneten gebildet. Dieser kommt im Gegensatz zu Spulenanordnungen ohne eine zusätzliche Stromversorgung aus und ermöglicht größere Feldstärken. Ein zur robusten Positionssensorik geeigneter Magnet muss eine hohe Koerzitivfeldstärke aufweisen, um eine Entmagnetisierung während des Betriebes zu vermeiden. Außerdem sollte die Remanenzflussdichte ebenfalls möglichst groß sein, um an der Position des Magnetfeldsensors einen signifikanten Signal-Rauschabstand zu erreichen. Zudem muss bei der Wahl des Ma-

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

terials auch die Wirtschaftlichkeit eines Positionsmesssystems mit in Betracht gezogen werden. Daher kommen in dieser Arbeit Seltenerd-magneten aus Neodym-Eisen-Bor (NdFeB) zum Einsatz. Die verwendeten Magnete werden durch die Güte N45 gekennzeichnet und zeigen entsprechend eine Koerzitivfeldstärke $H_{B0} = 923 \text{ kA m}^{-1}$ bei einem Energieprodukt von $BH = 350 \text{ kJ m}^{-3}$ [52]. Die Magneten werden in einem Sinterprozess hergestellt und mit einer Nickel-Kupfer-Nickel-Schicht überzogen, um die mechanische Stabilität des spröden Sintermaterials zu erhöhen. Die Form des Magneten wurde so gewählt, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Aufbau mit einem einzelnen Permanentmagneten
- keine Rotationssymmetrie
- magnetische Flussdichte geschlossen analytisch bestimmbar

Als Ausgangspunkt wurde daher ein quaderförmiger Magnet mit den Abmessungen $x_b = 8 \text{ mm}$, $y_b = 4 \text{ mm}$ und $z_b = 3 \text{ mm}$ gewählt. Dieser weist im Gegensatz zu Zylinder- oder Ring- oder Kugelmagneten keine Rotationssymmetrie auf. Eine Magnetform mit ungleichen Kantenlängen sorgt zudem dafür, dass erst bei einer Drehung um 180° Symmetrie auftritt. Daher scheint diese Geometrie grundsätzlich zur Lokalisierung geeignet. Die Magnetisierungsachse wird so gewählt, dass sie in Richtung der Sensoranordnung zeigt. Der Betrag der Flussdichte ist hier doppelt so groß wie bei einer Anordnung, in der die Achse parallel zur Sensorebene verläuft ([53]).

3.7. Modellierung des Messsystems

Um das magnetfeldbasierte Positionsmesssystem mathematisch abzubilden, ist zunächst das Magnetfeld des zu lokalisierenden Magneten zu beschreiben. Dies führt zu einer Funktion welche jedem Punkt (x,y,z) im Raum eine magnetische Flussdichte \mathbf{B} zuordnet. Mithilfe dieser noch zu ermittelnden Funktion lässt sich der Magnetfeldmesswert im Koordinatensystem des Magneten bestimmen. Im zweiten Schritt führt eine geeignete Transformation zur Beschreibung der möglichen Bewegungen des Magneten.

3.7.1. Grundgleichungen der Magnetostatik

Grundlage zur Berechnung des Feldes einer magnetischen Quelle bilden die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.10)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.11)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.13)$$

Hierbei ist \mathbf{D} die elektrische Flussdichte, \mathbf{E} die elektrische Feldstärke, \mathbf{B} die magnetische Flussdichte, \mathbf{H} die magnetische Feldstärke, \mathbf{J} die Stromdichte und ρ die Ladungsdichte. Im Falle nur geringer zeitlicher Änderungen lässt sich in praktischen Anwendungen die Verschiebungsstromdichte $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ vernachlässigen. Dies führt zur quasistationären Näherung der Maxwell'schen Gleichungen. Hiermit lassen sich zwar keine Wellenausbreitungen beschreiben, aber Effekte wie Wirbelströme und damit eine begrenzte Eindringtiefe der Felder ins Material. Treten keine zeitlich veränderlichen Größen auf, so ist ebenfalls $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ und man erhält die Grundgleichungen der Magnetostatik. Die vier voneinander abhängigen Maxwell'schen Gleichungen teilen sich in zwei elektrostatische und zwei magnetostatische auf [53]. Die Grundgleichungen der Magnetostatik lauten:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.15)$$

Die Magnetostatik ermöglicht es, Felder von Permanentmagneten und stromdurchflossenen Leitern zu beschreiben, sofern diese Leiter von einem stationären (zeitlich unveränderlichen) Strom durchflossen werden.

3.7.2. Magnetfeld eines quaderförmigen Magneten

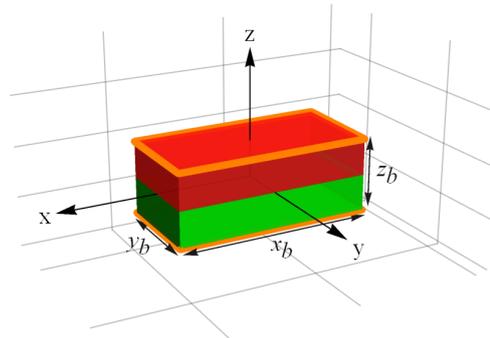


Abbildung 3.12.: Definition des magnetbezogenen Koordinatensystems und Parameter des Quadermagneten

Die Gleichungen der Magnetostatik können genutzt werden, um die Flussdichte des in Abb. 3.12 dargestellten quaderförmigen Permanentmagneten zu berechnen. Der Quader befindet sich im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems und hat die Abmessungen x_b , y_b und z_b .

Sind keine freien Ströme (frei bewegliche Ladungsträger) vorhanden, gilt $\mathbf{J} = 0$ und es folgt

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Es handelt sich also um ein reines Quellenfeld. In solchen wirbelfreien Feldern kann der Feldvektor durch den Gradienten eines Skalarpotentials Φ ersetzt werden, denn es gilt $\text{rot grad } \Phi = 0$. Hieraus folgt die Definition

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi. \quad (3.17)$$

Des Weiteren gilt mit der Magnetisierung \mathbf{M} die Materialgleichung

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (3.18)$$

Aus (3.12) folgt deshalb:

$$\text{div } \mathbf{H} = -\text{div } \mathbf{M} \quad (3.19)$$

$$\text{div } (-\text{grad } \Phi) = -\text{div } \mathbf{M} \quad (3.20)$$

$$\Delta \Phi = \text{div } \mathbf{M} \quad (3.21)$$

Der skalare Wert $-\text{div } \mathbf{M}$ kann auch als Volumenladungsdichte magnetischer Ladungen interpretiert werden [54] (vgl. Kap. 3.7.3). Die Poisson'sche Differenzialgleichung (3.21) kann mit dem Ansatz:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div } \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (3.22)$$

gelöst werden [55].

Mit dem Gauss'schen Integralsatz [55] lässt sich die Gleichung (3.22) durch ein Oberflächenintegral

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (3.23)$$

ersetzen, wobei S die Oberfläche des Magneten und \mathbf{n} den Normalenvektor der Oberfläche kennzeichnet.

Um das Potenzial für einen quaderförmigen Magneten mit homogener Magnetisierung in z -Richtung (s. Abb. 3.12) zu berechnen, wird $\mathbf{M} = M_z \mathbf{e}_z$ gesetzt.

Damit liefern nur die Flächen bei $z_i = z_b/2$ und $z_i = -z_b/2$ Beiträge zum Integral und es folgt:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{M_z}{4\pi} \int_{-\frac{x_b}{2}}^{\frac{x_b}{2}} \int_{-\frac{y_b}{2}}^{\frac{y_b}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_b)^2}} - \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z + z_b)^2}} dx_i dy_i. \quad (3.25)$$

Dieses Integral lässt sich analytisch geschlossen lösen und man erhält mit den Definitionen:

$$x_k := x + (-1)^k x_b/2 \quad (3.26)$$

$$y_l := y + (-1)^l y_b/2 \quad (3.27)$$

$$z_m := z + (-1)^m z_b/2 \quad (3.28)$$

die Komponenten der magnetischen Feldstärke [56]

$$H_x(x, y, z) = -\frac{M_z}{4\pi} \sum_{k,l,m=1}^2 (-1)^{k+l+m} \ln \left(y_l + \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2} \right) \quad (3.29)$$

$$= -\frac{M_z}{4\pi} \ln \left[\prod_{k,l,m=1}^2 \left(y_l + \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2} \right)^{(-1)^{(k+l+m)}} \right] \quad (3.30)$$

$$H_y(x, y, z) = -\frac{M_z}{4\pi} \sum_{k,l,m=1}^2 (-1)^{k+l+m} \ln \left(x_k + \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2} \right) \quad (3.31)$$

$$= -\frac{M_z}{4\pi} \ln \left[\prod_{k,l,m=1}^2 \left(x_k + \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2} \right)^{(-1)^{(k+l+m)}} \right] \quad (3.32)$$

$$H_z(x, y, z) =$$

$$\frac{M_z}{4\pi} \sum_{k,l,m=1}^2 (-1)^{k+l+m} \operatorname{sgn}(y_l z_m) \arctan \left[\frac{|y_l| x_k}{|z_m| \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}} \right], \quad \text{für } z_m \neq 0 \quad (3.33)$$

Die Umformungen in Gl. (3.30) und Gl. (3.32) führen zu einer effizienteren Berechnung, da die Logarithmusfunktion nur einmal ausgeführt werden muss. Für echtzeitfähige Anwendungen mit begrenzter Rechenleistung sind sie daher der äquivalenten Form in Gl. (3.29) und (3.31) vorzuziehen. Die dargestellte Lösung der magnetischen Feldstärke weist einige Definitionslücken auf. Das Argument der Arkustangensfunktion in Gl. (3.33) strebt für $z_m = 0$ gegen einen unendlichen Wert. Diese Definitionslücke lässt sich mit

$$H_z(x, y, z) = \frac{M_z}{4\pi} \sum_{k,l,m=1}^2 (-1)^{k+l+m} \operatorname{sgn}(y_l x_k) \frac{\pi}{2}, \quad \text{für } z_m = 0 \quad (3.34)$$

heben. Die Gl. (3.30) zeigt für $x_k = z_m = 0 \wedge y_l < 0$ und Gl. (3.32) für $y_l = z_m = 0 \wedge x_k < 0$ eine Singularität. An den Kanten des Quaders, die senkrecht zur Magnetisierungsrichtung verlaufen, sowie deren Verlängerung in negative x bzw. y

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Richtung strebt die Feldstärke gegen einen unendlichen Wert, da

$$\ln \left(y_l + \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2} \right) \Big|_{x_k=0, z_m=0} = \ln \left(y_l + \sqrt{y_l^2} \right) \quad (3.35)$$

$$\ln \left(x_k + \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2} \right) \Big|_{y_l=0, z_m=0} = \ln \left(x_k + \sqrt{x_k^2} \right). \quad (3.36)$$

Da dies außerhalb des Magneten nur für negative y bzw. negative x zutrifft, lässt sich diese Singularität mithilfe der Symmetrie des Magneten stellenweise beheben. Hierzu wird das Magnetfeld für den Betrag von x -, y - und z bestimmt und anschließend gemäß dem Zusammenhang:

$$H_x(x, y, z) = -H_x(-x, y, z) = -H_x(x, y, -z) = \operatorname{sgn}(xz)H_x(|x|, |y|, |z|) \quad (3.37)$$

$$H_y(x, y, z) = -H_y(x, -y, z) = -H_y(x, y, -z) = \operatorname{sgn}(yz)H_y(|x|, |y|, |z|) \quad (3.38)$$

gespiegelt. Somit reduziert sich die Definitionslücke auf den Bereich der Kanten des Quaders, die senkrecht zur Magnetisierungsrichtung stehen (siehe orange Markierung in Abb. 3.12). Zur Modellierung einer realen Messung sind die Kanten des Magneten nicht relevant, da aufgrund der Sensorabmessungen ein Mindestabstand gegeben ist. Um die numerische Stabilität der Lokalisierungsverfahren zu gewährleisten, wird die Singularität dennoch behoben. Mithilfe einer Fallunterscheidung wird der minimale Abstand zu den kritischen Kanten des Magneten auf einen Wert ϵ festgelegt.

Für Berechnungen mit 32Bit Gleitkommagenauigkeit wird $\epsilon = 1 \mu\text{m}$ gesetzt. Der durch diese Verschiebung resultierende Positionsfehler ist damit gegenüber sonstigen Einflussfaktoren (z.B. Sensorfehler, Magnetfehler) vernachlässigbar, die numerische Stabilität ist aber gewährleistet. Die magnetische Flussdichte \mathbf{B} ergibt sich aus der Materialgleichung Gl. (3.18).

Die Gl. (3.30)-(3.33) liefern die magnetische Feldstärke für einen konstant in z -Richtung magnetisierten Magneten. Um das Modell für eine beliebige Magnetisierungsrichtung \mathbf{M} zu erweitern, werden die Lösungen für drei zueinander orthogonale Elementarmagnete, B_{Mx} , B_{My} und B_{Mz} überlagert, sodass

$$\mathbf{B}_{ges}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_{Mx}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{My}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{Mz}(\mathbf{x}). \quad (3.39)$$

Durch diese Superposition ergibt sich ein quaderförmiges Magnetvolumen mit beliebiger Magnetisierungsrichtung (s. Abb. 3.13). Voraussetzung ist auch hier, dass der Magnet durch eine homogene Magnetisierung beschrieben werden kann. Die messtechnische Verifikation dieses Modells ist in Kap. 4.1 erläutert.

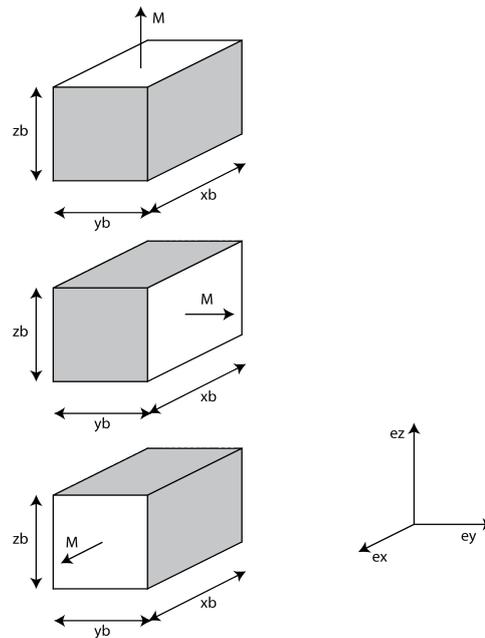


Abbildung 3.13.: Superposition dreier orthogonaler Magnete

3.7.3. Modellierung weiterer Magnetformen

Analytische Lösungen für das Feld von Permanentmagneten, teilweise in geschlossener Form, sind für eine Reihe weiterer geometrischer Formen bekannt.

- **Kreisstrom bzw. magnetischer Dipol:** [53],[54]
- **Zylinder:** [57], [58], Ein Ansatz in Zylinderkoordinaten führt zu elliptischen Integralen, die besonders effizient numerisch lösbar sind.
- **Schnittmengen:** Über das Superpositionsprinzip, das für hartmagnetische Werkstoffe gilt, lassen sich Kombinationen aus magnetisierten Volumina berechnen. Hierdurch kann das Feld von Schnittmengen bekannter Magnetgeometrien berechnet werden. Ein ringförmiger Magnet kann auf diese Weise durch Überlagerung zweier Zylindermagneten mit unterschiedlichen Radien und entgegengesetzter Magnetisierung erzeugt werden.

Um die Verfahren auch für beliebige Magnetformen nutzen zu können, gibt es eine Reihe von Näherungsverfahren. Einige Methoden basieren beispielsweise auf der Multipolentwicklung [59]. Ein ähnliches Verfahren auf der Basis des mathematischen Modells der magnetischen Ladungen soll hier zur Vollständigkeit kurz vorgestellt werden. Zur Herleitung wird äquivalent zum elektrischen Feld eine fiktive Volumenladungsdichte $\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ bzw. eine Oberflächenladungsdichte $\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ als Quelle des magnetischen Flusses angenommen (vgl. Gl. (3.21)). Die magnetische

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Flussdichte \mathbf{B} ist damit:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (3.40)$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_A \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da'. \quad (3.41)$$

Mit dem Punkt der Auswertung \mathbf{r} und der Quellen \mathbf{r}' . Für eine bekannte homogene Magnetisierung ist die Divergenz der Magnetisierung null, also $\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$. Das Feld kann also rein mithilfe von Oberflächenladungen modelliert werden. Wird auf der Fläche A zusätzlich die Oberflächenladungsdichte als konstant angenommen, so vereinfacht sich das Integral zu:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma_m(\mathbf{r}') \Delta A(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (3.42)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_m(\mathbf{r}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (3.43)$$

Mit der Ladung Q_m . Auf diese Weise lassen sich Felder beliebiger Magnetformen mit konstanter homogener Magnetisierung im freien Raum berechnen. Um eine näherungsweise homogene Flächenladungsdichte auf der jeweils betrachteten Fläche voraussetzen zu können, wird die Gesamtfläche in viele kleine Teilflächen zerlegt. Die Aufteilung der Fläche kann beispielsweise mithilfe von Dreiecken erfolgen.

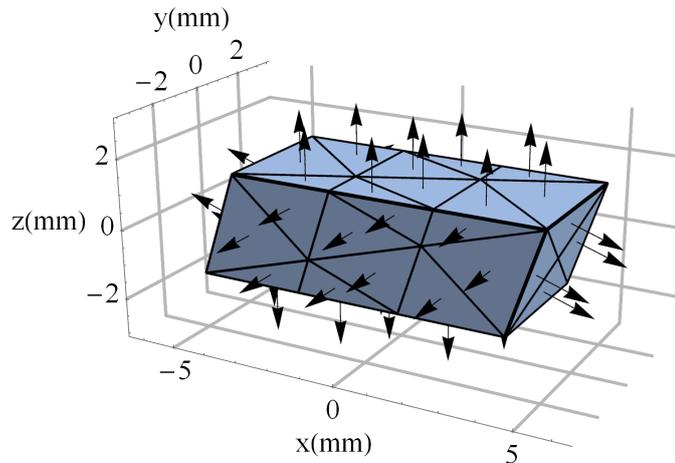


Abbildung 3.14.: Zerlegung eines Hexaeders mit nicht-rechtwinkligen Seitenflächen in Flächenelemente

Abb. 3.14 zeigt einen Hexaeder dessen Seitenflächen nicht rechtwinklig zueinander stehen. Eine derartige geometrische Form kann beispielsweise durch Toleranzen beim Fertigungsprozess von Permanentmagneten entstehen (siehe auch Kap. 7.2). Zur Berechnung des Magnetfeldes wird die Oberfläche des Magneten in Dreiecke

eingeteilt. Für jedes dieser Dreiecke wird anhand des Normalenvektors \mathbf{n} und der Magnetisierung, die Ladung Q_m berechnet. Anschließend werden die Beiträge der einzelnen Flächenelemente bestimmt und aufsummiert. Hierdurch ergibt sich die Näherungslösung:

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=0}^N \frac{Q_m(\mathbf{r}'_i)(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3}. \quad (3.44)$$

Eine messtechnische Verifikation dieses Ansatzes und eine Untersuchung zur Genauigkeit der Näherung in Abhängigkeit vom Abstand zwischen Sensor und Magnet ist im Anhang Kap. A.1 gezeigt.

3.7.4. Jacobi-Matrix der magnetischen Flussdichte

Für Genauigkeitsbetrachtungen in den folgenden Kapiteln ist die Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix) der magnetischen Flussdichte von entscheidender Bedeutung. Sie beschreibt die partiellen Ableitungen erster Ordnung bezüglich aller Freiheitsgrade und damit die Änderung der Magnetfeldmessungen bei Bewegung des zu lokalisierenden Magneten. Im Falle kartesischer Koordinaten im magnetbezogenen Koordinatensystem sind dies x , y und z . Die Funktionalmatrix ergibt sich aus den Gleichungen (3.30)-(3.33) und (3.18) mit

$$\mathcal{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Da keine freien Ströme vorhanden sind, gilt $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. Daraus folgt, dass die Jacobi-Matrix symmetrisch ist. Außerdem folgt aus $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$. Die Spur der Matrix muss also den Nullvektor ergeben. Im Außenraum des Magneten sind die Gleichungen (3.30)-(3.33) differenzierbar und die Komponenten der

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Jacobimatrix im magnetbezogenen Koordinatensystem $\mathcal{J}_{i,j}$ lauten:

$$\mathcal{J}_{1,1} = \frac{\mu_0 M_x}{4\pi} \sum_{k,l,m=1}^2 \frac{(-1)^{k+l+m} y_l z_m (2x_k^2 + y_l^2 + z_m^2)}{(x_k^2 + y_l^2) (x_k^2 + z_m^2) \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}} \quad (3.46)$$

$$\mathcal{J}_{1,2} = \mathcal{J}_{2,1} = -\frac{\mu_0 M_x}{4\pi} \sum_{k,l,m=1}^2 \frac{(-1)^{k+l+m} x_k z_m}{(x_k^2 + y_l^2) \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}} \quad (3.47)$$

$$\mathcal{J}_{1,3} = \mathcal{J}_{3,1} = -\frac{\mu_0 M_x}{4\pi} \sum_{k,l,m=1}^2 \frac{(-1)^{k+l+m} x_k y_l}{(x_k^2 + z_m^2) \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}} \quad (3.48)$$

$$\mathcal{J}_{2,2} = \frac{\mu_0 M_x}{4\pi} \sum_{k,l,m=1}^2 \frac{(-1)^{k+l+m} y_l}{(z_m + \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}) \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}} \quad (3.49)$$

$$\mathcal{J}_{2,3} = \mathcal{J}_{3,2} = \frac{\mu_0 M_x}{4\pi} \sum_{k,l,m=1}^2 \frac{(-1)^{k+l+m}}{\sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}} \quad (3.50)$$

$$\mathcal{J}_{3,3} = \frac{\mu_0 M_x}{4\pi} \sum_{k,l,m=1}^2 \frac{(-1)^{k+l+m} z_m}{(y_l + \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}) \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}}. \quad (3.51)$$

3.8. Beschreibung der Bewegungstransformation

In Kap. 3.7.2 wurde das Magnetfeld eines quaderförmigen Magneten beliebiger Abmessungen und Magnetisierungsrichtung beschrieben. Um daraus die zu erwartende magnetische Flussdichte an der Stelle der Sensoren, und damit das Systemmodell, zu bestimmen, ist eine Transformation in das Sensorkoordinatensystem erforderlich (s. Abb 3.15). Während für eine translatorische Verschiebung einfache Additionen ausreichen, ist für Rotationen im Raum mit Matrizenoperationen zu rechnen. Diese sind nicht kommutativ, weshalb verschiedene Konventionen existieren. Die Rotationsmatrix ist definiert als eine Matrix, die einen Vektor im lokalen (magnetbezogenen) Koordinatensystem \mathbf{x}_m in das globale System (\mathbf{x}) mithilfe des Matrix-Vektor-Produktes in der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}_m \quad (3.52)$$

abbildet.

3.8.1. Euler-Winkel

Um Punkte und Vektoren in einem kartesischen Koordinatensystem zu drehen, werden diese mit einer Reihe von Rotationsmatrizen multipliziert. Jede dieser Matrizen beschreibt eine Rotation um eine der drei Achsen. Allgemein werden diese drei Winkel in der Literatur häufig als Euler-Winkel bezeichnet [60]. Für den Sonderfall

3.8. Beschreibung der Bewegungstransformation

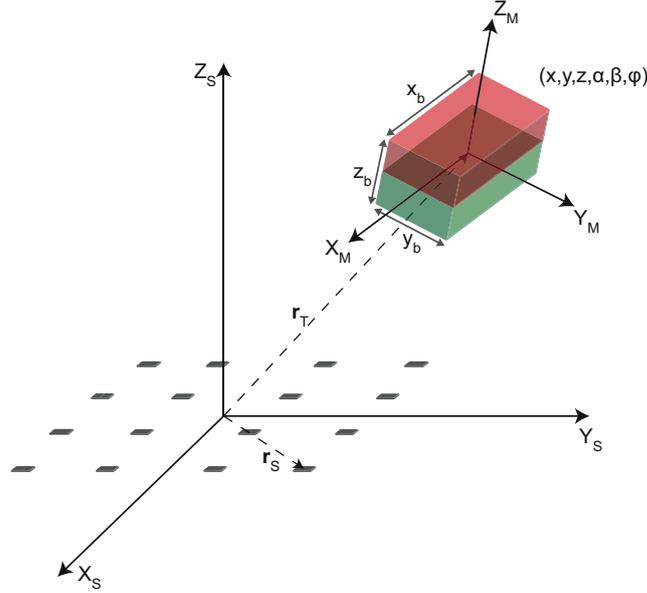


Abbildung 3.15.: Koordinatensysteme einer Hall-Sensoranordnung zur Lokalisierung eines quaderförmigen Magneten

dreier hintereinander folgender Rotationen um unterschiedliche Achsen ergeben sich sechs mögliche Kombinationen. Die dabei verwendeten Drehwinkel werden auch als Kardan-Winkel bezeichnet. Eine in der Fahrzeugtechnik gebräuchliche Konvention sind die xyz-Kardan-Winkel [60]. Die Bezeichnung xyz beschreibt die Drehungsfolge bezogen auf die mitgedrehten Achsen. Um vom körperfesten (magnetbezogenen) Koordinatensystem in das globale (sensorbezogene) Koordinatensystem zu transformieren, lautet die Rotationsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\alpha\beta\varphi} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\alpha) & -s(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) & c(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\beta) & 0 & s(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(\beta) & 0 & c(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\varphi) & -s(\varphi) & 0 \\ s(\varphi) & c(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.53) \\ &= \begin{pmatrix} c(\beta)c(\varphi) & -c(\beta)s(\varphi) & s(\beta) \\ c(\varphi)s(\alpha)s(\beta) + c(\alpha)s(\varphi) & c(\alpha)c(\varphi) - s(\alpha)s(\beta)s(\varphi) & -c(\beta)s(\alpha) \\ s(\alpha)s(\varphi) - c(\alpha)c(\varphi)s(\beta) & c(\varphi)s(\alpha) + c(\alpha)s(\beta)s(\varphi) & c(\alpha)c(\beta) \end{pmatrix}. \quad (3.54) \end{aligned}$$

Hierbei steht $s(\cdot)$ und $c(\cdot)$ für die Sinus- bzw. Kosinusfunktion. Ein zu transformierender Vektor im magnetbezogenen Koordinatensystem \mathbf{r}_M wird mit $\mathbf{R}_{\alpha\beta\varphi}\mathbf{r}_M$ zunächst um die x -Achse des Ausgangskordinatensystem gedreht. Anschließend wird er um die y' -Achse des bereits gedrehten Koordinatensystems rotiert und anschließend wiederum um die so erhaltene z'' -Achse (intrinsische Darstellung). Bezogen auf das globale Koordinatensystem (extrinsische Darstellung) ist die Reihenfolge entgegengesetzt, also Drehung um z dann y und danach x .

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Vorteil eines solchen Verfahrens ist die Anschaulichkeit: Rotationen im Raum können relativ leicht nachvollzogen werden. Sie hängen direkt mit der Ausgabe von Potenziometerwerten auf den Achsen einer kardanischen Aufhängung zusammen. Damit eignet sich die Parametrisierung für Bedienelemente, da hier die Ergonomie eine wichtige Rolle spielt. Die Steuerungsfunktion muss möglichst intuitiv sein, so dass kein aufwendiger Lernvorgang notwendig ist.

Ein Problem einer Parametrisierung mit Eulerwinkeln stellt jedoch die Mehrdeutigkeit bestimmter Parameterkombinationen dar [61]. Die Lage der einzelnen Drehachsen ist abhängig von den jeweils anderen beiden. Fallen mehrere Rotationsachsen zusammen, kommt es zu einer kardanischen Blockade (engl. Gimbal-Lock). Die Winkel α und φ lassen sich etwa bei $\beta = \frac{\pi}{2}$ nicht mehr unterscheiden. Es geht also ein Freiheitsgrad verloren. Dieser Punkt muss in einem Lokalisierungsverfahren vermieden werden, da keine eindeutige Lösung gefunden werden kann. Hierzu ist der Lösungsraum auf Winkel $\beta < \frac{\pi}{2}$ zu beschränken.

Eine alternative Möglichkeit, die das Problem der kardanischen Blockade löst, besteht darin, Rotationen mithilfe von Quaternionen darzustellen. Eine Quaternion wird aus vier Komponenten gebildet und beschreibt eine Rotation im Raum ebenfalls vollständig. Anders als bei Euler-Winkeln sind hier vier Parameter zu verwenden und damit auch bei der Lösung des inversen Problems zu berücksichtigen, was wiederum den Rechenaufwand erhöht. Zudem sind Quaternionen weniger intuitiv nachvollziehbar und daher aufwendiger auf eine Steuerungsfunktion eines Bedienelementes zu übertragen. Die Zielgrößen der Lokalisierung werden daher in Euler-Winkeln in der beschriebenen xyz-Konvention angegeben.

3.8.2. Jacobi-Matrix der Transformation

Für die Funktionalmatrix einer Kombination mehrerer differenzierbarer Abbildungen $g(f(x))$ gilt [62]:

$$\mathcal{J}_{g \circ f}(x) = \mathcal{J}_g(\mathbf{f}(x)) \cdot \mathcal{J}_f(x). \quad (3.55)$$

Hierbei muss gelten: $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^l$ für beliebige m, n und l . Wird diese Kettenregel auf die Abbildungen für die Rotation und Translation angewandt, lässt sich die Jacobi-Matrix der magnetischen Flussdichte in Sensorkoordinaten, und damit die Jacobi-Matrix des Systems, analytisch berechnen.

3.9. Numerische Lösungen des inversen Problems

Wie bereits in Kap. 2.2 erläutert, gibt es für dedizierte Problemstellungen der magnetfeldbasierten Lokalisierung analytische bzw. quasianalytische Lösungen. Diese können jedoch in realen Anwendungen aufgrund der schlechten Kondition zu Stabilitätsproblemen führen. Zudem sind sie nicht universell einsetzbar und auch nicht auf das in dieser Arbeit betrachtete Problem eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden anwendbar. Daher liegt der Fokus dieses Abschnitts auf numerischen

Lösungen des inversen Problems.

Aus der Literatur sind eine Fülle von numerischen Verfahren bekannt, die es ermöglichen, vielfältige Optimierungs- und Schätz-Probleme zu lösen. Betrachtet man die Grundgesamtheit aller Problemstellungen, so gibt es kein Verfahren, das einem anderen gegenüber Vorteile bietet [63]. Diese als “No-Free-Lunch“ Theorem bekannte Aussage von David Wolpert zeigt auf eine plakative Weise das Grundproblem bei der Suche nach einem geeigneten Verfahren: solche, die in einem Teilbereich oder bei bestimmten Parametern Vorteile bieten, scheitern dafür bei anderen Problemen. Daher ist es notwendig, neben dem Problem auch die geforderten Eigenschaften des Verfahrens möglichst genau zu definieren. Es gilt also für das betrachtete inverse magnetostatische Problem das geeignetste Verfahren zu finden. In einem industriellen Umfeld sind außerdem Speicherbedarf und Rechenzeit beschränkt. Das heißt, der Programmablauf darf eine bestimmte Anzahl an Rechenoperationen pro Zeiteinheit nicht überschreiten. In Datenblättern wird dies mit der Kenngröße Millionen Instruktionen pro Sekunde (MIPS) angegeben. Daneben spielt der Speicherbedarf selbst bei modernen Controllern eine Rolle, auch wenn hier zunächst weniger Einschränkungen als bei der Rechenleistung zu erwarten sind. Mittels dieser Vorüberlegungen soll im Folgenden eine Vorauswahl an Methoden vorgestellt werden, die im experimentellen Teil dieser Arbeit (Kap. 5.3) schließlich auf das konkrete Problem angewandt und analysiert werden.

3.9.1. Betrachtung als Optimierungsproblem

Um das inverse Problem der magnetfeldbasierten Lokalisierung zu lösen, muss der Zustandsvektor \mathbf{x} gefunden werden, bei dem eine Zielfunktion $g(\mathbf{x})$ minimal wird. Es muss also das Minimierungsproblem

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} g(\mathbf{x}) \quad (3.56)$$

gelöst werden. Die nichtlineare skalare Zielfunktion $g(\mathbf{x})$ ist im Falle der magnetfeldbasierten Positionssensorik die euklidische Norm der Differenz zwischen dem Modell der Messdaten und dem tatsächlichen Messwert, also $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|_2$. Der Lösungsraum \mathbb{X} ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^n . In praktischen Anwendungen ist der Lösungsraum meist beschränkt, sodass zusätzlich Ungleichungsnebenbedingungen der Form:

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} | \mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max}\} \quad (3.57)$$

zu erfüllen sind. Es handelt sich also um ein restringiertes nichtlineares Optimierungsproblem mit mehreren Variablen. Verfahren zur Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen lassen sich anhand der folgenden Eigenschaften klassifizieren:

- **Ableitungsfrei/gradientenbasiert:** Einige Verfahren nutzen die Jacobi-Matrix des Systemmodells, um so schneller zu konvergieren.

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

- **Global/Lokal:** Globale Verfahren finden auch bei Zielfunktionen mit mehreren lokalen Minima die beste Lösung.
- **Deterministisch/Heuristisch:** Bei heuristischen Verfahren, werden gezielt Zufallsvariablen bei der Suche nach dem Minimum eingesetzt.

Im Folgenden werden exemplarisch einige Verfahren der unterschiedlichen Klassen vorgestellt und im Bezug auf eine Verwendung zur Lokalisierung magnetischer Quellen diskutiert.

Levenberg-Marquardt-Algorithmus

Der Levenberg-Marquardt-Algorithmus [21] basiert auf dem Gauss-Newton-Verfahren zur Minimierung nichtlinearer Kleinste-Quadrate-Probleme und gehört zur Kategorie der gradientenbasierten Methoden. Bei diesem Verfahren wird die Zielfunktion $g = \|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|_2$ durch ihre Taylorreihe in einem Punkt \mathbf{x}_k angenähert, und so das Problem linearisiert. In einem iterativen Verfahren wird in jedem Schritt das linearisierte Minimierungsproblem gelöst und so das Minimum der nichtlinearen Funktion angenähert. Zu Beginn der Iteration muss ein Startwert \mathbf{x}_0 vorgegeben werden. Davon ausgehend ist dann in jedem Schritt k die Funktion

$$\mathbf{g}_{\text{approx}}(\delta\mathbf{x}_k) = \|\mathbf{y} - \mathbf{h}_k + \mathcal{J}_k\delta\mathbf{x}_k\|_2 \quad (3.58)$$

$$= (\mathbf{y} - \mathbf{h}_k + \mathcal{J}_k\delta\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{y} - \mathbf{h}_k + \mathcal{J}_k\delta\mathbf{x}_k) \quad (3.59)$$

$$= (\mathbf{y} - \mathbf{h}_k)^T (\mathbf{y} - \mathbf{h}_k) + 2(\mathbf{y} - \mathbf{h}_k)^T \mathcal{J}_k\delta\mathbf{x}_k + \delta\mathbf{x}_k^T (\mathcal{J}_k^T \mathcal{J}_k)\delta\mathbf{x}_k \quad (3.60)$$

zu minimieren. Hierbei bezeichnet \mathcal{J}_k die Jacobi-Matrix, sowie \mathbf{h}_k die Messfunktion des Systems am Punkt \mathbf{x}_k . Der Ausdruck $\|\cdot\|_2$ steht für die euklidische Norm. Gesucht ist die Schrittweite $\delta\mathbf{x}$, welche die Zielfunktion minimiert. Die erste notwendige Bedingung für ein solches lokales Minimum lautet:

$$\nabla g_{\text{approx}}(\delta\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}. \quad (3.61)$$

Die Ableitung nach $\delta\mathbf{x}$ muss also null werden und damit gelten:

$$(\mathcal{J}_k^T \mathcal{J}_k)(\delta\mathbf{x}_k) = \mathcal{J}_k^T [\mathbf{y} - \mathbf{h}_k]. \quad (3.62)$$

Daraus ergibt sich

$$\delta\mathbf{x}_k = (\mathcal{J}_k^T \mathcal{J}_k)^{-1} \mathcal{J}_k^T (\mathbf{y} - \mathbf{h}_k). \quad (3.63)$$

Dieses Kleinste-Quadrate-Problem kann über eine QR-Zerlegung gelöst werden [15]. Dieses Gauss-Newton-Verfahren hat gegenüber Quasi-Newton-Verfahren [64] den Vorteil, dass zur Bestimmung des Minimums nur die Matrix der ersten Ableitungen genutzt wird. Die Matrix der zweiten Ableitungen (Hesse-Matrix) muss nicht berechnet werden. Trotzdem zeigt das Verfahren eine schnelle Konvergenz und führt bei linearen Problemen in einem einzigen Schritt zur gesuchten Lösung. Allerdings

offenbart die Methode bei stark nichtlinearen Problemen Schwächen und eine Konvergenz ist in diesen Fällen nicht unbedingt gegeben [15]. Um diese Probleme zu vermeiden, wurde von Levenberg [21] ein gedämpftes Verfahren vorgeschlagen. Hierbei wird mit der Minimierungsfunktion

$$g = \|\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathcal{J}_h(\mathbf{x}_k)(\delta\mathbf{x})\|_2 + \|\mu_k(\delta\mathbf{x})\|_2 \quad (3.64)$$

über mehrere Iterationen k das Minimum der Funktion angenähert. Im Gegensatz zum Gauss-Newton-Verfahren wird beim Levenberg-Marquardt-Algorithmus eine Dämpfung des Inkrements $\delta\mathbf{x}$ eingeführt, um damit sicherzustellen, dass die Minimierung der approximierten Zielfunktion auch zu einer Minimierung der exakten Zielfunktion führt. Diese Dämpfung ist über den Gewichtungparameter μ_k einstellbar und führt dazu, dass der Levenberg-Marquardt-Algorithmus deutlich robuster arbeitet als das Gauss-Newton-Verfahren. Besonders trifft dies für schlechte Startwerte zu. Man bezeichnet diese Methode auch als iterativ regularisiertes Gauss-Newton-Verfahren. Es kann gezeigt werden, dass die Eigenschaften denen einer Tikhonov-Regularisierung entsprechen [65]. Der Rechenaufwand des Levenberg-Marquardt-Algorithmus ist von der Anzahl der nötigen Iterationen und der bei jeder Iteration zu berechnenden Jacobi-Matrix bestimmt. Abhängig vom Gradienten der Zielfunktion variiert die Konvergenzgeschwindigkeit und eine unterschiedliche Anzahl von Schritten ist notwendig, um eine gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Dennoch erweist sich das Verfahren für die Lokalisierung magnetischer Quellen aufgrund seiner Robustheit als geeignet, wie durch zahlreiche Veröffentlichungen belegt wurde [20][66][67].

Nelder-Mead-Simplex-Verfahren

Das Nelder-Mead-Simplex-Verfahren [68], in der Literatur auch als Downhill-Simplex Verfahren bezeichnet, durchsucht den Suchraum iterativ und systematisch nach dem Minimum mithilfe eines heuristisch motivierten Ansatzes [69]. Es verwendet dabei keine Ableitungen und konvergiert daher langsamer als beispielsweise das Levenberg-Marquardt-Verfahren. Dafür ist jedoch der Rechenaufwand pro Iteration geringer und die Zielfunktion muss nicht differenzierbar sein. Bei diesem Verfahren wird mit $n+1$ Punkten im n -dimensionalen Lösungsraum gearbeitet, an denen die Zielfunktion ausgewertet wird. Diese Punkte werden als Simplex bezeichnet. Er wird zunächst mit zufälligen Punkten initialisiert und anschließend iterativ modifiziert, um somit dem Minimum der Zielfunktion näher zu kommen. Hierbei wird der Punkt mit dem maximalen Funktionswert \mathbf{x}_{max} mithilfe der restlichen Punkte, der Facette, angepasst. Bei dieser Anpassung werden geometrische Operationen (Reflexion, Expansion und Kontraktion) durchgeführt, die den schlechtesten Punkt im Simplex immer weiter verbessern. Die Schritte im Einzelnen sind:

- Reflexion: Der Punkt mit der schlechtesten Kostenfunktion wird am Schwerpunkt der Facette reflektiert.

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

- Expansion/Kontraktion: Ist der neue Punkt ein neues Minimum aller Punkte, wird durch einmalige Expansion versucht, den Punkt noch weiter dem Minimum anzugleichen, indem er weiter vom Schwerpunkt weg verschoben wird. Ist der Punkt ein Maximum, so wird er näher an den Schwerpunkt herangeführt (Kontraktion). Liegt er zwischen Maximal- und Minimalwert, so findet weder Kontraktion noch Expansion statt.

Anschließend beginnt ein neuer Iterationsschritt mit der Reflexion. Dies wird bis zum Erreichen einer Abbruchbedingung, beispielsweise dem Unterschreiten einer unteren Schwelle für die Ausdehnung des Simplex, wiederholt. Die Konvergenz des Verfahrens ist nicht garantiert, weshalb meist noch eine zweite Abbruchbedingung die Anzahl der Iterationen beschränkt. Im Vergleich zu trivialen Koordinatensuchverfahren [70] werden durch die systematische Vorgehensweise weniger Iterationen benötigt. Das Simplex-Verfahren ist eines der effizientesten ableitungsfreien Verfahren. Es kann demnach auch dann eingesetzt werden, wenn die Zielfunktion nicht differenzierbar ist. Ein Beispiel für eine Anwendung zur Magnetlokalisierung findet sich in [71].

Heuristische Verfahren

Zeigt die zu optimierende Funktion mehrere lokale Minima, besteht die Gefahr, dass die bisher genannten Methoden zu falschen Ergebnissen führen. Um dieses Problem zu umgehen, sind in der Literatur [72] eine Fülle von globalen Optimierungsverfahren bekannt. Diese arbeiten meist mit Heuristiken, um so die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, lokale Minima zu verlassen und das globale Minimum zu finden. Der Rechenaufwand nimmt dadurch entsprechend zu. Einige Vertreter dieser Kategorie, die in den folgenden Kapiteln relevant sind, werden hier kurz genannt. Mehrstufige Algorithmen, wie beispielsweise das Multi-Level Single Linkage Verfahren [73] führen eine Reihe von lokalen Optimierungen durch, um so das globale Optimum zu finden. Hierzu wird der Lösungsraum in Teilbereiche eingeteilt. Dies kann entweder rein heuristisch oder mit Hilfe der sogenannten Niedrig-Diskrepanz-Folge geschehen (Low-Discrepancy-Sequence, LDS). Evolutionäre Verfahren sind meist von Vorgängen in der Natur inspiriert, und arbeiten mit einer als Population bezeichneten Menge aus möglichen Lösungspunkten, an denen die Zielfunktion ausgewertet wird. Bei der Selektion werden bestimmte Teilmengen dieser Populationen miteinander kombiniert und mittels Mutation modifiziert. Beim Simulated Annealing [74] wird versucht, den Abkühlungsprozess eines Metalls nachzuahmen. Durch langsames Abkühlen eines Metalls können sich die Atome im Kristallgitter so anordnen, dass der energieärmste Zustand erreicht wird. Mit abnehmender Temperatur wird auch die Wahrscheinlichkeit geringer, dass ein aktuelles Optimum verlassen wird. Übertragen auf ein allgemeines Optimierungsproblem ist die Vorgehensweise die folgende: Zunächst wird eine zufällige Startlösung bestehend aus einem einzelnen Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ im Lösungsraum möglicher Positionen generiert. Außerdem wird eine monoton fallende skalare Funktion T_i festgelegt, welche die Temperatur beim Abkühlprozess nachbildet. In jedem Iterationsschritt wird ein zufälliger Punkt \mathbf{x}' in einer Umgebung

von \mathbf{x} gewählt. Ist $f(\mathbf{x}') < f(\mathbf{x})$ so wird $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}'$ gesetzt. Anderenfalls wird $\hat{\mathbf{x}}$ nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $p = \exp(-\frac{f(\mathbf{x}')-f(\hat{\mathbf{x}})}{T_i})$ aktualisiert. Abhängig von der fiktiven Temperatur T_i und der zu tolerierenden Verschlechterung der Zielfunktion $f(\mathbf{x}') - f(\hat{\mathbf{x}})$ sind somit auch steigende Zielfunktionswerte zulässig und es kann ein lokales Minimum verlassen werden.

3.9.2. Nichtlineare optimale Schätzer

Aufgrund der Tatsache, dass die Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme nicht sichergestellt ist, bieten sich Verfahren an, die zusätzliche (a priori) Information des Systems nutzen, um das Problem zu regularisieren. Hierzu unterscheiden sich Bayes'sche Schätzer gegenüber den bisher vorgestellten Methoden darin, dass die zu bestimmenden Parameter und Messwerte nicht als deterministische Größen, sondern als Zufallsvariablen interpretiert werden.

Allgemein wird unter einem Schätzer eine Anweisung verstanden, die jedem Vektor von beobachteten Daten einen bestimmten Zustand zuordnet. Daher wird auch die Bezeichnung Schätzfunktion synonym zum Schätzer verwendet. Zu jedem Problem gibt es beliebig viele Schätzfunktionen. Einfache Beispiele für Schätzer sind die Mittelwertbildung oder der Kleinste-Quadrate-Schätzer. Eine optimale Schätzung liefert den wahrscheinlichsten Wert einer unbekanntes Größe. Im Falle der Kleinsten-Quadrate-Schätzung entspricht dieser Wert dem Minimum des quadrierten Fehlers zwischen beobachteten und modellierten Daten, gewichtet mit einer Zahl, welche die Präzision der Messung angibt. Ein Optimierungsverfahren findet dagegen das Minimum einer Funktion. Die Schätztheorie beschäftigt sich mit der Frage nach den Eigenschaften und der Leistungsfähigkeit verschiedener Schätzer. Wichtige Eigenschaften sind die Erwartungstreue und die Effizienz. Ein Schätzer heißt erwartungstreu, wenn er im Mittel den tatsächlichen Parameter liefert. Es gibt also keine systematische Abweichung des Schätzwertes vom realen Wert. Der Schätzer ist darüber hinaus effizient, falls er aus allen erwartungstreuen Schätzfunktionen die minimale Varianz erreicht. Wie bei modellbasierten Optimierungsverfahren ist auch beim Schätzer der erste Schritt die Modellierung der Messdaten, allerdings im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie, also mithilfe von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Einige grundlegende nichtlineare optimale Schätzer werden im Folgenden behandelt.

Das linearisierte Kalman-Filter

Ein Kalman-Filter aktualisiert zeitlich fortwährend den Mittelwert \mathbf{x}_k und die Kovarianz \mathbf{P}_k eines Zustandes [75]. Dies geschieht in zwei Schritten: Prädiktion und Korrektur. Bei der Prädiktion wird das Bewegungs- und Messmodell des Systems genutzt, um Vorhersagen über die erwartete Veränderung des Zustandes zu treffen. Im Korrekturschritt verfeinern die Messdaten diese Vorhersage. Eine Schätzung für den realen Wert \mathbf{x} wird mit $\hat{\mathbf{x}}$ gekennzeichnet. Die berechneten Zwischenergebnisse der Schritte werden mit „a priori“ $\hat{\mathbf{x}}^-$ und „a posteriori“ Schätzung $\hat{\mathbf{x}}^+$ bezeichnet. In realen abgetasteten Systemen ist besonders der zeitdiskrete Fall von Bedeutung.

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Die Systemgleichungen lauten hierbei:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (3.66)$$

Der Zustand im Zeitschritt k berechnet sich aus dem Bewegungsmodell \mathbf{F} , dem vorherigen Zustand \mathbf{x}_{k-1} und einem unbekanntem Rauschanteil \mathbf{w}_{k-1} . Der Messvektor \mathbf{y}_k ergibt sich aus dem Messmodell \mathbf{H}_k und dem Messrauschen \mathbf{v}_k . Beim zeitdiskreten Kalman-Filter ist die folgende Nomenklatur gebräuchlich: mit „a priori“ wird das Zwischenergebnis ohne Berücksichtigung der Messwerte des Zeitschrittes k bezeichnet. Die „a posteriori“ Schätzung hingegen enthält bereits die Information über die aktuelle Messung. Die Bestimmungsgleichungen lauten für die Prädiktion:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (3.67)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (3.68)$$

Und für die Korrektur:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} = \mathbf{P}_k^+ \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (3.69)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (3.70)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-. \quad (3.71)$$

Hierbei ist $\mathbf{Q}_k = \mathbb{E}[(\mathbf{x} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])^T]$ die Kovarianzmatrix des Zustandes, das sogenannte Prozessrauschen und $\mathbf{R}_k = \mathbb{E}[(\mathbf{y} - \mathbb{E}[\mathbf{y}])(\mathbf{y} - \mathbb{E}[\mathbf{y}])^T]$ die Kovarianzmatrix des Messrauschens. Das Prozessrauschen beschreibt nichtdeterministische Anteile der Zustandsänderung, während das Messrauschen durch das Rauschen der Sensoren definiert ist. Sind die Größen stochastisch unabhängig, so handelt es sich bei beiden Matrizen um Diagonalmatrizen. Die wichtige Zwischengröße \mathbf{K} wird als Kalman-Verstärkung bezeichnet und bildet die Messwerte auf eine Zustandsänderung ab. \mathbf{I} ist die Einheitsmatrix. Die Gleichungen (3.67)-(3.71) werden fortwährend ausgewertet und der Schätzwert für den Zustand und dessen Verteilung somit aktualisiert. Die aktuelle Schätzung enthält nicht nur die Information über die aktuelle Messung, sondern auch aller bis dahin verwendeten Messdaten, ohne aber die komplette Sequenz in den Berechnungsschritt mit einfließen zu lassen. Diese rekursive Struktur macht das Kalman-Filter besonders effizient was den Rechenaufwand betrifft. Weitere Eigenschaften des linearen Filters sind [75]:

- Wenn \mathbf{w}_k und \mathbf{v}_k normalverteilt, mittelwertfrei, unkorreliert und weiß sind, minimiert das Kalman-Filter die gewichtete Varianz des Zustandes. Es stellt also das optimale Filter für das Minimierungsproblem $\min \left(\mathbb{E} \left[\hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{S}_k \hat{\mathbf{x}}_k^T \right] \right)$ dar. \mathbf{S}_k kennzeichnet hierbei die Gewichtungsmatrix.
- Auch wenn \mathbf{w}_k und \mathbf{v}_k nicht normalverteilt sind, ist das oben beschriebene Filter das optimale *lineare* Filter.

3.9. Numerische Lösungen des inversen Problems

Neben der korrekten Schätzung des Mittelwertes kann für bestimmte Problemstellungen auch gezeigt werden, dass gleichzeitig der minimale Fehler erreicht werden kann. Um das lineare Kalman-Filter auf nichtlineare Probleme (wie das in dieser Arbeit betrachtete) zu übertragen, sind eine Reihe von alternativen Formulierungen entwickelt worden, für welche die genannten grundlegenden Eigenschaften ebenso gelten. Im Folgenden werden zwei unterschiedliche nichtlineare Kalman-Filter vorgestellt.

Wie bereits anhand des Levenberg-Marquardt-Algorithmus gezeigt, kann eine nichtlineare Modellfunktion $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ durch eine Taylorreihen-Approximation linearisiert werden. Die Linearisierung erfolgt dynamisch um den Punkt $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ und lautet mit den Bezeichnungen des Kalman-Filters

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} \mathbf{v}_k. \quad (3.72)$$

Gleichermaßen gilt für eine Linearisierung der nichtlinearen Bewegungsfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} \mathbf{w}_{k-1} \quad (3.73)$$

Mit den Definitionen

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{L}_{k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{M}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (3.77)$$

können die Gleichungen für das lineare Kalman-Filter angepasst werden. Der Prädiktionsschritt lautet:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (3.78)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{L}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{L}_{k-1}^T. \quad (3.79)$$

Und die Korrektur:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{R}_k \mathbf{M}_k^T)^{-1} \quad (3.80)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-)) \quad (3.81)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-. \quad (3.82)$$

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Mit dieser Näherung erster Ordnung lässt sich das Kalman-Filter für nichtlineare Modell- und Bewegungsfunktionen einsetzen und wird auch als erweitertes Kalman-Filter (EKF, engl. Extended Kalman-Filter) bezeichnet. Die Anteile höherer Ordnung äußern sich in einem Linearisierungsfehler der sich durch wiederholte Ausführung des Korrekturschrittes mit gleichbleibenden Messwerten reduzieren lässt (siehe auch iteratives Kalman-Filter [75]), was aber den Rechenaufwand vervielfacht. Die Linearisierung setzt voraus, dass die Fehler der Zustandsschätzung klein sind und damit der prädizierte Mittelwert dem durch $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ korrigiertem entspricht, also dass gilt: $E[\mathbf{h}(\mathbf{x})] \approx \mathbf{h}(E[\mathbf{x}])$. Damit wird die tatsächliche Verteilung beim Korrekturschritt nicht berücksichtigt. Gleiches gilt für die Kovarianzmatrizen \mathbf{P}_k , die durch ein separates linearisiertes Modell aktualisiert werden. Eine weitere Schwierigkeit liegt in der für die Taylorreihen-Approximation benötigte Berechnung der Jacobi-Matrix. Je nach Anwendung kann dies mit hohem Implementierungsaufwand und Rechenaufwand zur Laufzeit verbunden sein. Um diese Probleme zu umgehen, wurde von [76] das Unscented Kalman-Filter vorgeschlagen.

Unscented Kalman Filter

Das Unscented Kalman-Filter (UKF) wurde von Jeffrey Uhlman [76] entwickelt, um die Probleme des Extended Kalman Filters (EKF) zu lösen. Der etwas absurde Name „Unscented“ (was frei übersetzt so viel wie „geruchslos“ bedeutet) wurde gewählt, um auf die Verbesserungen des UKF gegenüber dem EKF hinzuweisen [77]. Auch beim UKF müssen Zufallsgrößen mit nichtlinearen Funktionen transformiert werden. Es muss also die Frage beantwortet werden, wie sich Mittelwert und Kovarianz verhalten, wenn sie durch eine nichtlineare Funktion abgebildet werden. Statt wie beim EKF eine Linearisierung um einen einzigen Punkt, den Mittelwert der Verteilung, durchzuführen, wird beim UKF die Unscented Transformation durchgeführt. Hierbei wird die Transformation anhand einer Auswahl an Punkten im Lösungsraum, der Sigma-Punkte, vorgenommen. Der Ansatz ähnelt dem einer Monte-Carlo Simulation, allerdings werden die Testpunkte nach einem bestimmten Muster gewählt und gewichtet (s. Kap. 3.9.2). Mit zunehmender Anzahl der Sigma-Punkte wird die Annäherung an die tatsächliche Verteilung genauer. Abb. 3.16 zeigt die Unscented Transformation der Messfunktion $\mathbf{h}(x)$ für den Fall einer linearen Dipollokalisierung. Ein kugelförmiger in x -Richtung magnetisierter Magnet bewegt sich im Abstand $z = 8 \text{ mm}$ über dem Sensor. Die Position wurde zur Veranschaulichung mit einem Mittelwert von $100 \mu\text{m}$ und einer relativ großen Standardabweichung von $1000 \mu\text{m}$ angenommen. Es ist zu erkennen, dass der im Rahmen des EKF berechnete Mittelwert vom tatsächlichen Wert abweicht. Die nichtlineare Transformation verschiebt die Verteilung so, dass der tatsächliche Erwartungswert nach der Transformation nicht dem Erwartungswert $\mathbf{h}(E[\mathbf{x}])$ entspricht. Wie in Abb. 3.16a zu erkennen ist, wirkt sich dies besonders in der Magnetfeldkomponente B_x aus, da diese an dem zu transformierenden Punkt ein Minimum aufweist und somit die Verteilung in diesem Punkt nicht symmetrisch ist. Die Unscented Transformation nähert den Erwartungswert besser an, indem die Verteilung nach der Transformation über die Sigma-Punkte

3.9. Numerische Lösungen des inversen Problems

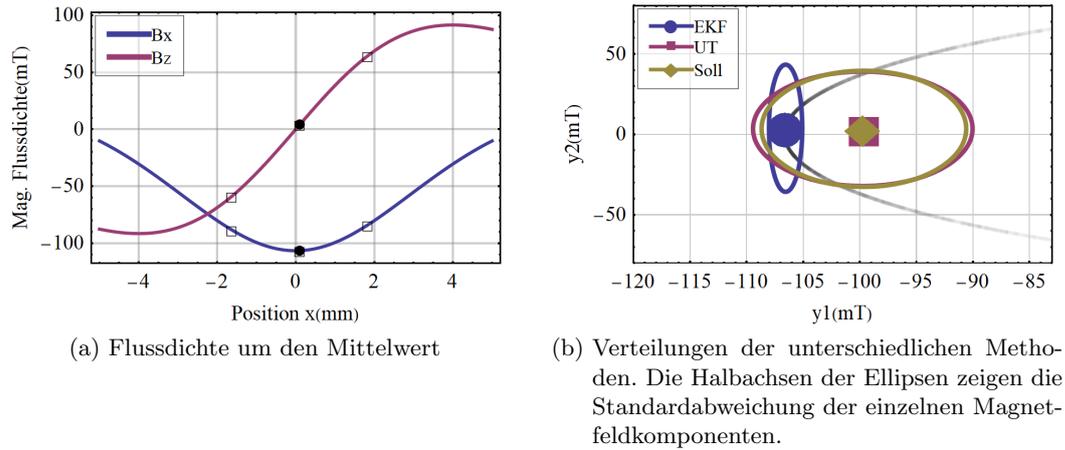


Abbildung 3.16.: Mittelwert und Standardabweichung für die Linearisierungsverfahren beim Extended Kalman Filter (EKF) bei der Unscented Transformation (UT) im Vergleich zur tatsächlichen Verteilung (Soll)

berücksichtigt wird. Diese sind, abhängig vom Prozessrauschen, um den zu transformierenden Punkt x verteilt (s. Quadrate in Abb. 3.16a). Der Abstand der Punkte ist abhängig vom Prozessrauschen und einem Skalierungsparameter. Die Veränderung von \mathbf{x} kann unter Verwendung der Bewegungsfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ als vektorielle Zufallsgröße mit dem Prozessrauschen \mathbf{w}_k :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k \quad (3.83)$$

beschrieben werden. In jedem Abtastschritt k schätzt das UKF den Zustandsvektor und dessen Kovarianz. Die grundlegenden Gleichungen des UKF werden im Folgenden erläutert: Im ersten Schritt wird der unbekannte Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ sowie die unbekannte Kovarianzmatrix \mathbf{P}_0^+ des Prozessrauschens mit einem Startwert \mathbf{x}_0 initialisiert. Je nach Anwendung kann anhand des Aufbaus ein sicherer Startwert angegeben werden, oder der Startwert mit einer großen Unsicherheit behaftet sein. Wird die initiale Kovarianzmatrix beispielsweise so gewählt, dass die Spur den quadrierten maximalen Auslenkungen des Systems entspricht, bedeutet dies, dass sich der initiale Zustand mit einer Wahrscheinlichkeit von 68.27% in diesem Bereich befindet.

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{x}_0 \quad (3.84)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] \quad (3.85)$$

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

$2n$ Sigma-Punkte $\mathcal{X}_{k-1}^{(i)}$ werden berechnet, die für die Transformation des nichtlinearen Problems nötig sind:

$$\mathcal{X}_{k-1}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.86)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \left(\sqrt{n\mathbf{P}_{k-1}^+} \right)_i^T, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.87)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = - \left(\sqrt{n\mathbf{P}_{k-1}^+} \right)_i^T, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.88)$$

n ist die Größe des Zustandsvektors. $\mathcal{Y}_k^{(i)}$ und $\mathcal{X}_k^{(i)}$ kennzeichnen die Sigma-Punkte. Die Kovarianz der Sigma-Punkte kann mithilfe der Dynamik des Messsystems $\mathbf{Q} = \mathbf{E}[\mathbf{w}\mathbf{w}^T]$ bestimmt werden. Die Kovarianz-Matrix \mathbf{Q} hängt von der maximal zulässigen Änderung von \mathbf{x} in jedem Ausführungszyklus des Algorithmus ab. Im Falle eines nicht deterministischen Bewegungsablaufs ($\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$) hat das Bewegungsmodell keinen Einfluss und der „a priori“ Mittelwert \hat{x}_k^- ist identisch mit dem „a posteriori“ Wert (\hat{x}_{k-1}^+) des letzten Durchlaufs (vgl. (3.83)):

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathcal{X}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (3.89)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\mathcal{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \left(\mathcal{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right)^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (3.90)$$

Das Messmodell $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ wird benutzt, um die Messwerte für jeden Sigma-Punkt vorherzusagen:

$$\mathcal{Y}_k^{(i)} = \mathbf{h} \left(\mathcal{X}_k^{(i)} \right). \quad (3.91)$$

Der Mittelwert $\hat{\mathbf{y}}_k$ und die Kovarianz \mathbf{P}_{yy}^- der vorhergesagten Messungen und die Kreuzkovarianz \mathbf{P}_{xy}^- werden berechnet mit:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathcal{Y}_k^{(i)} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{P}_{yy}^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\mathcal{Y}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k \right) \left(\mathcal{Y}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k \right)^T + \mathbf{R}_k \quad (3.93)$$

$$\mathbf{P}_{xy}^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\mathcal{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \left(\mathcal{Y}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k \right)^T. \quad (3.94)$$

\mathbf{R}_k ist die Kovarianz des Messrauschens $\mathbf{R}_k = \mathbb{E} [(\mathbf{y} - \mathbb{E}[\mathbf{y}])(\mathbf{y} - \mathbb{E}[\mathbf{y}])^T]$. Der a posteriori Schätzwert des Zustandes und der Kovarianz wird im Aktualisierungsschritt mit Hilfe der Sensormesswerte \mathbf{y}_k bestimmt:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \quad (3.95)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (3.96)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy} \mathbf{K}_k^T. \quad (3.97)$$

Der Term $(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k)$ wird als Innovation bezeichnet. Er kennzeichnet die Abweichung der aktuellen Schätzung vom Messwert und hat im statischen Zustand den Mittelwert null. Letztendlich ist somit mithilfe der Unscented Transformation und den nichtlinearen Modellfunktionen $(\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ eine aktualisierte Verteilung mit dem Mittelwert $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ und der Kovarianz \mathbf{P}_k^+ berechnet worden, welche die Information über den aktuellen Messwert \mathbf{y}_k enthält.

Beschränkung des Lösungsraums mittels Zustandsprojektion

In einem abschließenden Schritt wird der Zustand auf einen Bereich außerhalb des Magneten und innerhalb eines maximal erlaubten Bewegungsbereiches mit der unteren Grenze \mathbf{d}_{Min} und der oberen Grenze \mathbf{d}_{Max} beschränkt, sodass gilt:

$$\mathbf{d}_{\text{Min}} \leq \hat{\mathbf{x}}_k^+ \leq \mathbf{d}_{\text{Max}}. \quad (3.98)$$

Die Schätzwert-Projektion [78] überträgt den unbeschränkten Zustand $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ in den beschränkten Lösungsraum unter Beibehaltung der Erwartungstreue. Sie führt zu einem allgemeinen Kleinste-Quadrate-Problem:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^+ = \underset{x}{\operatorname{argmin}} (x - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^T \mathbf{W} (x - \hat{\mathbf{x}}_k^+) \quad (3.99)$$

mit den Einschränkungen:

$$\mathbf{d}_{\text{Min}} \leq \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}_{\text{Max}}. \quad (3.100)$$

Hierbei ist \mathbf{D} die $n \times n$ Diagonalmatrix und \mathbf{W} eine Gewichtungsmatrix. Die Konfiguration $\mathbf{W} = (\mathbf{P}_k^+)^{-1}$ führt zur Schätzung mit der höchsten Wahrscheinlichkeit. Im ersten Schritt werden die aktiven Nebenbedingungen bestimmt, also die Zustände, die außerhalb des zulässigen Bereichs liegen. Dies resultiert in der Diagonalmatrix $\hat{\mathbf{D}}$ und einem Vektor der aktiven Schranken $\hat{\mathbf{d}}$, sodass gilt $\hat{\mathbf{D}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{d}}$. Im nächsten Schritt wird mit der expliziten Formel:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{P}_k^+ \hat{\mathbf{D}}^T \left(\hat{\mathbf{D}} \mathbf{P}_k^+ \hat{\mathbf{D}}^T \right)^{-1} \left(\hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{x}}_k^+ - \hat{\mathbf{d}} \right) \quad (3.101)$$

das Minimierungsproblem gelöst. Somit ist letztendlich eine Schätzung $\tilde{\mathbf{x}}_k^+$ und \mathbf{P}_k^+ bestimmt worden. Für den nächsten Messwertsatz wird k inkrementiert und die

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Schleife des Schätzers startet wiederum mit Gl. (3.86).

Rechenaufwand des UKF

Der rechentechnische Aufwand des Algorithmus ist definiert durch die Messfunktion $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, die Berechnung der Matrix-Wurzel und der Inversen von \mathbf{P}_{yy} . Für eine Anwendung mit sechs Freiheitsgraden müssen $2n = 12$ Sigma-Punkte berechnet werden und für jeden dieser Punkte die Messfunktion aufgerufen werden. Die Berechnung der Matrixinversen kann mithilfe der grundlegenden Eigenschaften vereinfacht werden: Die Kovarianzmatrix \mathbf{P}_{yy} ist symmetrisch und positiv definit. Demzufolge existiert eine Cholesky-Zerlegung, sodass gilt

$$\mathbf{P}_{yy} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T, \quad (3.102)$$

mit einer unteren Dreiecksmatrix \mathbf{L} . Dieses Problem kann mittels effizienter Methoden, wie z.B. der Rücksubstitution [79], gelöst werden.

Parameter des UKF

Abschnitt 3.9.2 zeigt eine Variante der Berechnung der Sigma-Punkte. In diesem Fall werden alle Punkte gleichmäßig gewichtet. Die Wahl der Punkte sowie deren Gewichtung ist nicht festgelegt. Die Parameter können gemäß unterschiedlicher Strategien gewählt werden.

Ziel ist es dabei die Verteilung $pdf(\mathbf{x})$ einer Zufallsvariablen \mathbf{x} mit einer begrenzten Anzahl von gewichteten Sigma-Punkten zu vereinfachen. Der Mittelwert von \mathbf{x} wird mit $E[\mathbf{x}]$ und die Kovarianzmatrix mit \mathbf{P}_{xx} bezeichnet.

Nach [80] gilt es möglichst viele Momente einer Zufallsverteilung mit den Sigma-Punkten zu erfassen. Die Anzahl p_S der Sigma-Punkte ist ebenfalls nicht vorgegeben. Die Gewichte müssen sich zu eins summieren, damit die Transformation nicht zu einer Verschiebung des Mittelwertes der Schätzung führt. Die Wahl der Sigma-Punkte ist von der Verteilungsfunktion abhängig, die damit abgebildet werden soll. Um die ersten beiden zentralen Momente der Verteilung durch Sigma-Punkte darzustellen, muss gelten:

$$\mathbf{g}_S[\mathcal{S}, pdf(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{p_S-1} W^{(i)} = 1 \\ \sum_{i=0}^{p_S-1} W^{(i)} \mathcal{X}^{(i)} - E[\mathbf{x}] = 0 \\ \sum_{i=0}^{p_S-1} W^{(i)} (\mathcal{X}^{(i)} - E[\mathbf{x}])(\mathcal{X}^{(i)} - E[\mathbf{x}])^T = \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

Schon für ein Problem mit zwei Freiheitsgraden und der minimalen Anzahl an Sigma-Punkten $p_S = 3$ ergeben sich $1 + n + n(n + 1)/2 = 6$ Bestimmungsgleichungen \mathbf{g}_S (die Kovarianzmatrix ist symmetrisch) mit drei unbekanntem Gewichten und $n p_S = 6$ unbekanntem Sigma-Punkt-Koordinaten. Das Gleichungssystem ist also unterbestimmt. Verschiedenste Zusatzinformationen können daher in die Wahl der Sigma-Punkte und Gewichte mit berücksichtigt werden. So können beispielsweise

3.10. Kenngrößen für den Entwurf von Sensor-Magnet-Anordnungen

höhere Momente der Verteilung oder auch Bedingungen zur Optimierung der numerischen Stabilität mit einbezogen werden.

Eine Strategie besteht darin die Sigma-Punkte symmetrisch um den Mittelwert zu verteilen und somit das dritte zentrale Moment der Zufallsvariablen zu null werden zu lassen:

$$\sum_{i=0}^{p_S-1} W^{(i)} (\mathcal{X}^{(i)} - E[\mathbf{x}])^3 = 0 \quad (3.104)$$

Eine symmetrische Sigmapunktverteilung, die die ersten drei Momente einer symmetrischen Verteilung erfasst lautet [80]:

$$\mathcal{X}^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{x} & i = 0 \\ \mathbf{x} + (\sqrt{(n + \kappa_S)P_x})_{i-1} & i = 1 \dots (n + 1) \\ \mathbf{x} - (\sqrt{(n + \kappa_S)P_x})_{i-1-n} & i = (n + 2) \dots (2n + 1) \end{cases} \quad (3.105)$$

$$W_0 = \frac{\kappa}{n + \kappa_S} \quad (3.106)$$

$$W_i = \frac{1}{(2n + \kappa_S)} \quad i = 1 \dots (2n + 1), \quad (3.107)$$

mit der Anzahl der Freiheitsgrade n und einem im Bereich frei wählbarem Parameter κ_S . Dieser Parameter skaliert die Momente höherer Ordnung. Für eine Normalverteilung kann mit $\kappa_S = 3 - n$ das vierte Moment skaliert und damit an die tatsächliche Verteilung angepasst werden.

Für jeden der Sigmapunkte ist die Modellfunktion $\mathbf{h}(\mathcal{X}^{(i)})$ auszuwerten. Für eine komplexe Modellfunktion steigt somit der Rechenaufwand proportional zur Anzahl der Sigmapunkte. Um die Anzahl der Punkte zu reduzieren, kann $\kappa_S = 0$ gesetzt werden. Damit kann der Sigmapunkt \mathcal{X}^0 entfallen, höhere Momente der Verteilung können dann nicht mehr durch die Sigmapunkte dargestellt werden. Diese Variante mit $2n$ Sigmapunkten wurde in dieser Arbeit als Ausgangspunkt verwendet, da über die Verteilung des Prozessrauschens keine Aussage getroffen werden kann, der rechentechnische Aufwand aber gegenüber der Variante mit $2n + 1$ Sigmapunkten reduziert ist.

3.10. Kenngrößen für den Entwurf von Sensor-Magnet-Anordnungen

Wie in Kap. 2.3 erläutert, wurde eine Vielzahl von Anordnungen vorgeschlagen, um magnetische Quellen mithilfe von Magnetfeldsensoren zu lokalisieren. Meist erfolgte die Dimensionierung rein anhand konstruktionsbedingter Gesichtspunkte. Die Lösbarkeit sowie die erreichbare Genauigkeit wurde experimentell anhand von numerischen Lösungen des inversen Problems gezeigt. Kompakte Hall-Sensoren erlauben weitere Freiheiten bei der Auslegung magnetfeldbasierter Positionssysteme, sodass

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

eine systematische Vorgehensweise erforderlich ist, die es ermöglicht, die erreichbare Genauigkeit des Systems abzuschätzen und zu optimieren, möglichst ohne explizit das inverse Problem lösen zu müssen. Hierzu werden im Folgenden einige wichtige Kenngrößen vorgeschlagen, die im experimentellen Teil der Arbeit dazu dienen ein beispielhaftes System zu bewerten. Aufgrund der Nichtlinearität des zugrunde liegenden Problems sind diese Größen lokal gültig, das heißt auf einen Punkt im Lösungsraum beschränkt.

3.10.1. Fehlermaß zur Bewertung von Magnetmodellen

Um verschiedene Magnetfeldmodelle gegenüberstellen zu können, ist eine geeignete Metrik erforderlich, welche die Unterschiede möglichst gut beschreibt. Diese Metrik sollte so gewählt werden, dass damit auch eine qualitative Aussage zur erreichbaren Lokalisierungsgenauigkeit möglich ist und sich damit ähnlich verhalten wie der Lokalisierungsfehler. Eine einfache Metrik ist der maximale absolute RMS-Fehler $e_{abs,max}$, definiert als:

$$e_{abs,i} = \|\mathbf{B}_{ist}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{B}_{soll}(\mathbf{x}_i)\|_2 \quad (3.108)$$

$$e_{abs,max} = \max_i (e_{rms,i}). \quad (3.109)$$

Mit $\|\cdot\|_2$ ist hierbei die euklidische Norm, also der Betrag des Vektors gekennzeichnet. Der Sollwert der Flussdichte ist \mathbf{B}_{soll} und der tatsächliche entsprechend \mathbf{B}_{ist} . Aufgrund der Eigenschaften des Magnetfeldes ist dieser Fehler in der Nähe der magnetischen Quelle größer als im Randbereich. Der Lokalisierungsfehler muss aber nicht zwangsläufig ansteigen, entscheidend ist vielmehr das Verhältnis von Fehler zu Nutzsignal. Daher bietet sich eine relative Definition an, um die Modellunterschiede zu kennzeichnen. Der relative Fehler e_{rel} ist definiert als:

$$e_{rel,i} = \frac{|\mathbf{B}_{ist}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{B}_{soll}(\mathbf{x}_i)|}{|\mathbf{B}_{soll}(\mathbf{x}_i)|} \quad (3.110)$$

$$e_{rel,Q95} = Q_{i,95}(e_{rel,i}). \quad (3.111)$$

$Q_{i,95}$ ist hierbei das 95 %-Quantil über alle Punkte i . Für große Abstände zum Magneten geht der Sollwert \mathbf{B}_{soll} gegen null und damit e_{rel} wie auch der zu erwartende Lokalisierungsfehler gegen unendlich. Um verschiedene Modelle vergleichen zu können, muss also eine untere Schranke für $|\mathbf{B}_{soll}|$ definiert werden oder der für die Auswertung betrachtete Raum um den Magneten begrenzt werden. Aus der praktischen Anwendung wäre beispielsweise das Sensorrauschen eine sinnvolle Grenze.

3.10.2. Beobachtbarkeit magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Eine grundlegende Frage, die es für jegliche Sensor-Systeme zu beantworten gilt, ist, ob anhand der Messdaten der gesuchte Parameter bzw. Zustand des Messsystems bestimmt werden kann. Während dies für Systeme mit wenigen Freiheitsgraden

3.10. Kenngrößen für den Entwurf von Sensor-Magnet-Anordnungen

oft einfach sichergestellt werden kann, muss für komplexe nichtlineare Systeme mit sechs oder mehr Freiheitsgraden ein geeignetes mathematisches Werkzeug gefunden werden. Rudolf Kálmán führte hierzu das Konzept der Beobachtbarkeit ein [81]. Die Beobachtbarkeit ist Voraussetzung für eine Schätzung von Zuständen oder Parametern. Im Falle eines linearen Problems mit den Systemgleichungen für den Prozess \mathbf{F} und die Messfunktion \mathbf{H}

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (3.112)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (3.113)$$

lässt sich die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} für den kompletten Lösungsraum $x \in \mathbb{R}^n$ angeben [82]:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \mathbf{HF}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.114)$$

Mit der Zahl der Freiheitsgrade n . Entspricht der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$, so gilt das System als beobachtbar. Für lineare Systeme bedeutet das zudem, dass beliebige Zustände \mathbf{x}_0 und $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_0$ unterscheidbar sind. Um dieses Konzept auf nichtlineare Systeme zu übertragen wird der Begriff der lokalen Beobachtbarkeit eingeführt: Ein System heißt lokal beobachtbar an einem Punkt \mathbf{x}_0 , wenn in einer Umgebung U alle Zustände \mathbf{x} unterscheidbar sind. Die lokale Beobachtbarkeit für ein nichtlineares System mit den Systemgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.115)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (3.116)$$

wird mithilfe der Lie-Ableitung [82] definiert. Sie ist die Ableitung eines Vektorfeldes entlang einer Funktion \mathbf{f} . Die Lie-Ableitung einer Komponente i der Messfunktion $h_i(\mathbf{x})$ nach \mathbf{f} lautet demnach $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}h_i = \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x})$. Hierbei ist $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ der Gradient. Durch Verkettung der Lie-Ableitungen ergeben sich Ableitungen höherer Ordnung. Die Ableitung der Ordnung j des Messwertes i wird dabei mit ϕ_i^j gekennzeichnet. Die Lie-Ableitungen von h_i lauten damit

$$\phi_i^0 = h_i \quad (3.117)$$

$$\phi_i^j = \mathcal{L}_{\mathbf{f}}\phi_i^{j-1} = \frac{\partial \phi_i^{j-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}. \quad (3.118)$$

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Die Abbildung $\Phi_{\mathcal{O}}(x)$ für einen Messvektor $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1, \dots, h_m)^T$ ist definiert als:

$$\Phi_{\mathcal{O}}(x) = \left(h_1, \phi_1^1, \dots, \phi_1^{k_1-1}, \dots, h_m, \phi_m^1, \dots, \phi_m^{k_m-1} \right)^T \quad (3.119)$$

für beliebige k_i mit $\sum_{i=1}^m k_i = n$. Die Beobachtbarkeitsmatrix ist die Ableitung nach dem Zustandsvektor $\mathcal{O} = \frac{\partial \Phi_{\mathcal{O}}(x)}{\partial \mathbf{x}}$. Wie von Hermann und Krener [82] gezeigt, ist ein System im Punkt \mathbf{x}_0 beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} den Rang n besitzt, also wenn gilt:

$$\text{rank} \left(\frac{\partial \Phi_{\mathcal{O}}(x)}{\partial \mathbf{x}} \right) = n. \quad (3.120)$$

Für den Fall eines Systems ohne deterministische Bewegung ($\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{dt} = 0$) vereinfacht sich die Bedingung in Gl. (3.120) zu

$$\text{rank} \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = n \quad (3.121)$$

$$\text{rank}(\mathcal{J}) = n. \quad (3.122)$$

Rang der Beobachtbarkeitsmatrix

Um die lokale Beobachtbarkeit gemäß der Bedingung Gl. (3.122) auszuwerten, ist es notwendig den Rang der Jacobi-Matrix \mathcal{J} zu bestimmen. Dies kann numerisch, mithilfe der Eigenwerte, oder einer Singulärwertzerlegung erfolgen. Diese Methoden ergeben Matrizen aus Eigenwerten bzw. Singulärwerten. Die Anzahl der Elemente größer null gibt den Rang der Matrix an. Problematisch sind Störungen in der Matrix, deren Rang bestimmt werden soll. Numerische Toleranzen führen zu einer fehlerhaften Bestimmung des Ranges. Zudem ist für praktische Anwendungen eine Analyse der Beobachtbarkeit bei überlagertem Messrauschen interessant. Also soll auch der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix eine definierte Toleranz gegenüber additiven weißem Rauschen zeigen. Um diese Anforderungen zu erfüllen eignet sich die Anwendung einer Singulärwertzerlegung. Die Beobachtbarkeitsmatrix wird hierbei in drei Matrizen zerlegt:

$$\mathcal{O} = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}^T. \quad (3.123)$$

Die Matrix W ist eine Diagonalmatrix mit den Singulärwerten σ_i . Diese skalieren die Zerlegung. Die Matrizen U und V sind orthogonal und können daher als eine Kongruenzabbildung, also als eine Drehung und/oder Spiegelung aufgefasst werden. Werden sie mit einem Vektor multipliziert, so entspricht die Länge des resultierenden Vektors der des Ausgangsvektors. Für den Fall einer gestörten Matrix $\mathcal{O} + \delta\mathcal{O}$ mit den Singulärwerten $\tilde{\sigma}_i$ kann gezeigt werden [83], dass

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \|\delta\mathcal{O}\|_2. \quad (3.124)$$

Der Betrag der Änderung des Singulärwertes ist also kleiner oder gleich der Norm der Störung. Um eine Änderung des Ranges zu verursachen, ist mindestens eine Änderung um den kleinsten Singulärwert notwendig. Damit liefern die Singulärwerte nicht nur eine Aussage über den Rang, sondern auch darüber, wie weit entfernt sich die Matrix vom kleineren Rang befindet [83].

Entdimensionalisierung der Jacobi-Matrix

Die numerische Singulärwertzerlegung nach Gl. (3.123) führt zu physikalisch nicht interpretierbaren Singulärwerten [84]. Für eine kombinierte Orts- und Lagebestimmung durch einen Magnetfeldsensor sind die Spalten der Jacobi-Matrix in Tesla pro Meter (T m^{-1}) und Tesla pro Radiant (T rad^{-1}) gegeben. Um die Singulärwerte vergleichen zu können, ist daher eine Homogenisierung der Jacobi-Matrix erforderlich. Hierbei wird die Matrix mit einer charakteristischen Länge CL multipliziert [85] so dass die homogenisierte Jacobi-Matrix \mathcal{J}_h lautet:

$$\mathcal{J}_h = \mathcal{J} \text{diag} [CL_1, CL_2, CL_3, CL_4, CL_5, CL_6]. \quad (3.125)$$

Die charakteristischen Längen CL können auf verschiedenste Arten bestimmt werden [86]. Für die Analyse der Beobachtbarkeit wird die charakteristische Länge abhängig vom spezifizierten Bewegungsbereich gewählt:

$$CL_i = \kappa \cdot (\text{Max}(x_i) - \text{Min}(x_i)), \quad (3.126)$$

mit dem Faktor $\kappa < 1.0$. Hiermit beschreibt die homogenisierte Jacobi-Matrix \mathcal{J}_h die zu erwartende linearisierte Messwertänderung bei einer Aussteuerung um einen bestimmten Anteil des Maximalweges. Die Singulärwerte sind damit vergleichbar. Ein sinnvoller Wert für den Parameter κ leitet sich aus der für die Anwendung geforderten Auflösung ab: $\kappa = (2^{\text{ENOB}})^{-1}$. Wie in Kap. 3.2.3 gezeigt, unterscheidet sich das Sensorrauschen der vertikalen (B_x, B_y) Sensoren und der lateralen (B_z) stark. Um dies in der Beobachtbarkeitsmatrix zu berücksichtigen, wird die Jacobi-Matrix zusätzlich auf das jeweilige Sensorrauschen (beschrieben durch die Kovarianzmatrix \mathbf{R}_n) bezogen. Es ergibt sich die dimensionslose Jacobi-Matrix

$$\mathcal{J}_d = \text{diag} \left[\frac{1}{\mathbf{R}_n} \right] \mathcal{J}_h. \quad (3.127)$$

3.10.3. Bewertung von Schätzern mithilfe der Likelihood-Funktion

Wie bereits in Kap. 3.2.3 beschrieben, ist das Sensorrauschen dominiert durch das thermische Rauschen des Hall-Sensor-Elements. Die Messwerte sind demzufolge normalverteilt mit einem gleichverteilten Leistungsdichtespektrum. Die Energie des Rauschens ist bis hin zu hohen Frequenzen konstant. Das Rauschen der einzelnen

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

Messwerte \mathbf{v}_i ist unkorreliert. Das stochastische Rauschmodell lautet also:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (3.128)$$

$$\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}) \quad (3.129)$$

mit der Diagonalmatrix \mathbf{R} und der Messfunktion $\mathbf{h}(\mathbf{x})$. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (pdf) für einen Messwert i lautet folglich:

$$\text{pdf}_i(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_i^2} (y_i - h_i(\mathbf{x}))^2 \right]. \quad (3.130)$$

Die Notation $\text{pdf}_i(\mathbf{y}; \mathbf{x})$ kennzeichnet dabei die Funktion mit der Variablen \mathbf{y} und dem Parameter \mathbf{x} . Für die Wahrscheinlichkeitsdichte des gesamten Messvektors gilt:

$$\text{pdf}(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_i^2} (y_i - h_i(\mathbf{x}))^2 \right]. \quad (3.131)$$

m ist die Größe des Messvektors, also die Anzahl der Messwerte. Die pdf hat die Parameter σ_i und \mathbf{x} und als Variable den Messvektor \mathbf{y} . Wird nun diese Variable auf einen festen Wert $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ gesetzt und stattdessen \mathbf{x} als Variable interpretiert, so erhält man die Likelihood-Funktion [87]:

$$L_x(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_i^2} (y_i - h_i(\mathbf{x}))^2 \right]. \quad (3.132)$$

Die Funktion $L_x(\mathbf{x})$ unterscheidet sich in ihren Eigenschaften von einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Insbesondere ist das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$ nicht zwingend gleich eins. Die Likelihood-Funktion ist abhängig von der Messfunktion, also vom Magnet-

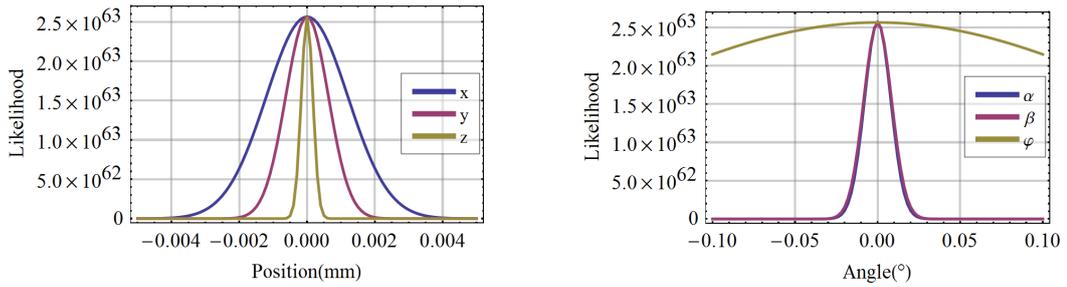


Abbildung 3.17.: Likelihood-Funktionen für eine Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden \mathbf{x} unter Variation jeweils einer einzelnen Variablen der translatorischen Verschiebung (links) bzw. der Rotation (rechts) im Punkt $(0, 0, 0.006 \text{ mm}, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)^T$

feld des zu lokalisierenden Magneten und dessen Bewegungstransformation. Abb. 3.17 zeigt die Likelihood-Funktion für eine Lokalisierung eines quaderförmigen Magneten bei einer Bewegung mit sechs Freiheitsgraden und 3-5 Magnetfeldmesswerten. Die Graphen stellen den Wert von $L_x(\mathbf{x})$ an einem Arbeitspunkt $\mathbf{x}_b = (x, y, z, \alpha, \beta, \varphi)^T = (0, 0, 0.006 \text{ mm}, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)^T$ unter Variation jeweils einer Komponente von \mathbf{x} dar. Die Gauss-Kurven unterscheiden sich deutlich in ihrer Breite: Das Messrauschen hat unterschiedlichen Einfluss auf die einzelnen Komponenten. Bei der translatorischen Verschiebung ist die Varianz der Komponente z kleiner als die von y und diese wiederum kleiner als die x -Varianz. Dies legt den Schluss nahe, dass sich die z -Komponente präziser bestimmen lässt als die anderen beiden. Noch deutlicher Unterschiede zeigen die Komponenten der Rotationen. Die φ -Drehung um die z -Achse ist ungenauer bestimmbar als die von α und β . Um diese Aussagen zu präzisieren, wird im folgenden Abschnitt die Likelihood-Funktion zur Abschätzung der erreichbaren Präzision eines Schätzers genutzt.

3.10.4. Abschätzung der erreichbaren Genauigkeit

Die Cramér-Rao Ungleichung (CRLB) liefert ein mathematisches Werkzeug, um die Frage zu beantworten, welchen minimalen Fehler ein Schätzer erreichen kann. Sie ermöglicht es, eine untere Schranke für die Fehlervarianz eines optimalen Schätzers, also eines Schätzers, der keine systematische Abweichung von zu schätzenden Parameter zeigt, anzugeben. Damit kann ein Vergleichswert für Simulationen angegeben und die physikalischen Grenzen eines Systems ausgelotet werden. Dies macht das Werkzeug sehr hilfreich für die Untersuchung von Machbarkeiten und die Optimierung magnetfeldbasierter Lokalisierungssysteme (s. Kap. 6). Um die grundlegende Idee hinter der Herleitung dieser wichtigen Schranke zu verstehen wird zunächst die Messung mit ihrer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion betrachtet. Unter der Annahme von normalverteiltem Rauschen ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der m Messungen mit den Erwartungswerten $E[\hat{y}_k]$:

$$f_x(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \prod_{k=0}^m \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(E[\hat{y}_k] - y_k)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.133)$$

$$= \prod_{k=0}^m \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(h_k(\mathbf{x}_0) - y_k)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.134)$$

Wie in Kap. 3.10.3 beschrieben gibt die Likelihood-Funktion an, wie wahrscheinlich ein bestimmter Zustand bei einem gegebenen Messvektor ist. Je stärker diese Funktion von einem Parameter bzw. Zustand beeinflusst wird, desto besser lässt sich dieser Zustand schätzen. Dies äußert sich in der Krümmung der Likelihood-Funktion an der Stelle des Maximums. Wird der natürliche Logarithmus \ln auf die Likelihood-Funktion angewandt, so erhält man die Log-Likelihood-Funktion. Aufgrund ihrer mathematischen Eigenschaften vereinfacht sie die Auswertung in Gl. (3.134). So kann beispielsweise das Produkt der einzelnen Dichtefunktionen als Summe darge-

3. Messmittel und Methoden magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

stellt werden. Das Cramér-Rao-Theorem besagt, dass die Varianz jedes Schätzers an eine untere Schranke gebunden ist. Diese hängt von der Fisher-Informationsmatrix \mathcal{I} ab, die folgendermaßen definiert ist:

$$[\mathcal{I}(\mathbf{x})]_{ij} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right] = -\int \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} p(\mathbf{y}; \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.135)$$

Hierbei ist \mathbb{E} der Erwartungswert der Klasse von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p(\mathbf{y}; \mathbf{x})$, wobei sich jede Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion durch \mathbf{x} unterscheidet. Die Ableitung wird an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ bestimmt, während der Erwartungswert über alle Messwerte \mathbf{y} ermittelt wird. Bei der Herleitung der Cramér-Rao-Schranke ist zusätzlich die Annahme getroffen, dass $p(\mathbf{y}; \mathbf{x})$ die Regularitätsbedingung erfüllt, d. h. $\mathbb{E} \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] = 0$ für alle \mathbf{x} . Für den Fall normalverteilter Messwerte mit

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[\mathbf{x}], \mathbf{C}(\mathbf{x})) \quad (3.136)$$

lässt sich Gl. (3.135) vereinfachen:

$$[\mathcal{I}(\mathbf{x})]_{ij} = \left[\frac{\partial \mathbb{E}[\mathbf{x}]}{\partial x_i} \right]^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \mathbb{E}[\mathbf{x}]}{\partial x_j} \right] \quad (3.137)$$

$$+ \frac{1}{2} \text{tr} \left[\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]. \quad (3.138)$$

$\mathbf{C}(\mathbf{x})$ beschreibt hier die Kovarianzmatrix abhängig vom Zustand \mathbf{x} . Im Falle eines rein weißen additiven gaußschen Rauschens, das unabhängig von \mathbf{x} ist, gilt $\mathbf{C}_{ji} = 0$ für $i \neq j$. Gl. (3.139) lässt dadurch weiter vereinfachen zu

$$[\mathcal{I}(\mathbf{x})]_{ij} = \left[\frac{\partial \mathbb{E}[\mathbf{x}]}{\partial \mathbf{x}_i} \right]^T \text{diag} \left[\frac{1}{\sigma^2} \right] \left[\frac{\partial \mathbb{E}[\mathbf{x}]}{\partial \mathbf{x}_j} \right]. \quad (3.139)$$

Setzt man den Erwartungswertvektor $\mathbb{E}[\mathbf{x}]$ gleich der Messfunktion $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, so erhält man

$$[\mathcal{I}(\mathbf{x})]_{ij} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_m} \frac{\partial h_m(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial h_m(\mathbf{x})}{\partial x_j}. \quad (3.140)$$

Es kann gezeigt werden, dass die Kovarianzmatrix \mathbf{P} eines erwartungstreuen Schätzers die Bedingung,

$$[\mathbf{P} - \mathcal{I}^{-1}(\mathbf{x})]_{ii} \geq 0, \quad (3.141)$$

und damit auch

$$[P]_{ii} \geq [\mathcal{I}^{-1}(\mathbf{x})]_{ii} \quad (3.142)$$

3.10. Kenngrößen für den Entwurf von Sensor-Magnet-Anordnungen

erfüllt [87]. Die Streuung der Zustandswerte P_{ii} kann also eine untere Schranke (definiert durch die Diagonalelemente der Inversen der Fisher-Informationsmatrix) nicht unterschreiten. Diese Schranke wird als Cramér-Rao-Schranke (engl. Cramér-Rao Lower Bound, CRLB) bezeichnet. Ein Schätzer mit minimaler Varianz, der für alle Werte von \mathbf{x} diese Schranke erreicht heißt effizient, da er die verfügbaren Daten effizient ausnutzt. Für N Messungen reduziert sich die CRLB auf $\frac{[\mathcal{I}^{-1}(\mathbf{x})]_{ii}}{N}$. Sie ist abhängig vom Zustand \mathbf{x} und kann damit ebenso wie die Beobachtbarkeitsbedingung nur lokal angegeben werden. Dennoch stellt sie, wie im experimentellen Teil dieser Arbeit gezeigt, ein hilfreiches Maß zur Dimensionierung von rauschbegrenzten Messsystemen dar.

4. Experimente zur Verifikation der Magnetmodellierung

Um die vorgestellten Modelle des quaderförmigen Magneten aus Kap. 3.7.1 zu verifizieren, wurden die theoretischen Ergebnisse zunächst einer Finite-Elemente-Simulation (FEM) gegenübergestellt. Hierzu wurde das Feld des Permanentmagneten (s. Kap. 3.6) mit den Abmessungen $(x_b, y_b, z_b)^T = (8 \text{ mm}, 4 \text{ mm}, 3 \text{ mm})^T$ mit unterschiedlichen Modellen berechnet und die Abweichung von den Ergebnissen der FEM anhand des in Kap. 3.10.1 definierten Fehlermaßes bestimmt. Im abschließenden Verifikationsschritt zeigte eine Messung, wie gut die Modelle einen realen Permanentmagneten beschreiben. Ein Vergleich des auf Flächenladungen basierenden Modells (Gl. (3.44)) ist in Anhang A.1 gezeigt.

4.1. Vergleich der analytischen Lösung mit der FEM

Zunächst wurde das analytische Modell (Gl. (3.30)-(3.33)) des quaderförmigen Permanentmagneten mit einer FEM-Simulation verglichen. Hierzu wurde im ersten Schritt von einem homogen, mit $\mathbf{M} = (1, 1, 1)^T M_0$ entlang der Raumdiagonalen magnetisierten Permanentmagneten ausgegangen. Der simulierte Magnet bestand aus einem idealen hartmagnetischen Material. Abb. 4.1 zeigt den Fehler zwischen analytischem Modell und FEM-Simulation $e_{rel,i}$ in der Ebene $y = 0$. Es sind Abweichungen von bis zu 0.8 % zu erkennen. Diese Abweichungen treten nicht-systematisch im gesamten betrachteten Volumen auf und sind abhängig von der Größe des FEM-Gitters. Sie lassen sich daher auf Simulationsfehler zurückzuführen. In der Simulation wurde das Gitter adaptiv anhand der simulierten Werte angepasst, um den Fehler klein zu halten. Dabei wurden zehn Durchläufe durchgeführt. Der maximale Fehler im gesamten Volumen ($30 \times 30 \times 30 \text{ mm}^3$) beträgt 1.01 %.

4.2. Vergleich des Modells mit Messergebnissen

Mithilfe der in Kap. 3.4 beschriebenen magnetischen Kamera wurde das Modell des quaderförmigen Magneten messtechnisch verifiziert. Hierzu wurde im ersten Schritt das gemessene Feld des Permanentmagneten dem analytischen Modell mit Magnetisierung in z -Richtung gegenübergestellt. Im zweiten Schritt wurden die Messungen dann mit dem erweiterten Modell mit beliebiger Magnetisierungsrichtung (s. Kap. 3.7.2) verglichen, um auch Abweichungen von der nominellen Magnetisierungsrichtung abbilden zu können. Abb. 4.2 zeigt schematisch die Anordnung zur Vermes-

4. Experimente zur Verifikation der Magnetmodellierung

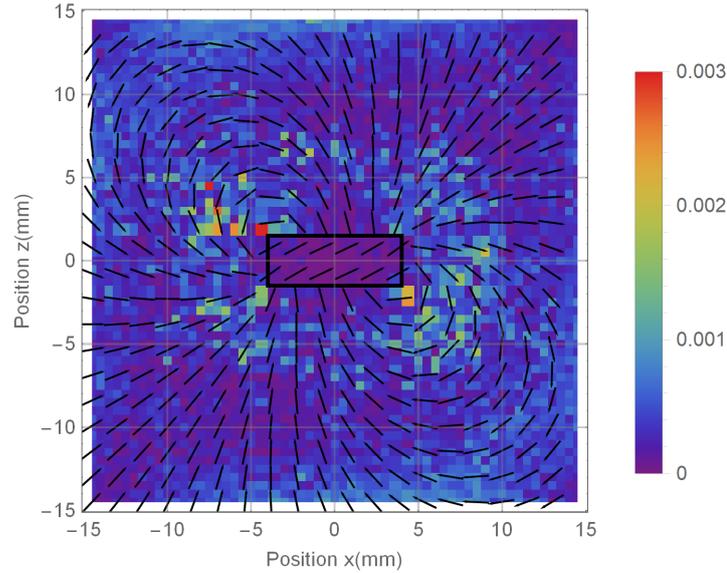


Abbildung 4.1.: Relativer Fehler $e_{rel,i}$ des Modells gegenüber der FEM Simulation für Punkte in der Ebene $y = 0$.

sung des Permanentmagneten. In unterschiedlichen Abständen z wurde die magnetische Flussdichte in der xy -Ebene vermessen. Die 256 Pixel der Kamera wurden hierzu auch in xy -Richtung definiert bewegt, um die Auflösung des entstehenden Schnittes durch das Magnetfeld zu erhöhen. Um dieses Magnetfeld einem Modell gegenüberstellen zu können, war es zudem nötig, die exakte Position des Magneten zu bestimmen. Hierfür wurde ein optisches Lichtschnitt-Messverfahren eingesetzt. Da sich der Magnet bei der Messung auf einem Tisch befindet, ließ sich auf diese Weise ein Halbraum des Magneten vermessen. Für den zweiten Halbraum wurde der Magnet um 180° um seine x -Achse gedreht und die magnetische sowie optische Messung wiederholt. Abschließen wurde die zweite Messung in das Koordinatensystem der Ersten transformiert.

Die Vektoren in Abb. 4.3 zeigen die Richtung (B_x, B_y) des gemessenen Feldes in unterschiedlichen Abständen z vom Magnetmittelpunkt. Der relative Fehler $e_{rel,i}$ für jeden Messpunkt der Ebene ist farblich gekennzeichnet. Nahe zum Magneten beträgt der Fehler deutlich über 5%. Besonders groß wird der Fehler in unmittelbarer Umgebung des Magneten aber auch für kleine x -Werte. Der Fehler ist nicht symmetrisch um den Mittelpunkt des Magneten verteilt. Tab. 4.1 listet die im gesamten Messvolumen auftretenden Fehler gemäß den Definitionen in Kap. 3.10.1 auf.

Ein Vergleich der Messwerte mit dem erweiterten Magnetmodell unter Berücksichtigung einer Schiefmagnetisierung gemäß Gl. (3.39) ist in Abb. 4.4 zu sehen. Der relative Fehler ist deutlich kleiner. Der maximale Fehler tritt über den Ecken des Magneten auf. In diesem Bereich beträgt die Abweichung des gemessenen Modells bis zu 15 mT.

4.2. Vergleich des Modells mit Messergebnissen

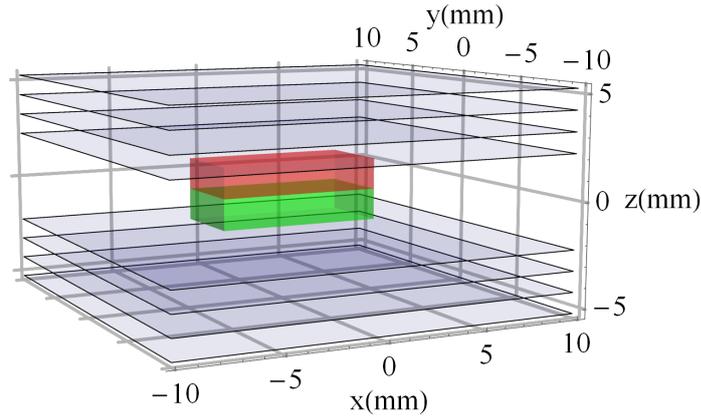


Abbildung 4.2.: Schematisch dargestellte Messanordnung zur Verifikation der Magnetmodelle

	Modell mit $\mathbf{M} = M_z \mathbf{e}_z$	Modell mit $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$
$e_{abs,max}$	31.4 mT	15.0 mT
$e_{rel,max}$	13.0 %	6.7 %
$e_{rel,Q95}$	4.8 %	2.3 %

Tabelle 4.1.: Fehler des Modells ohne und mit Schiefmagnetisierung

Grund für diese Abweichung ist die Überhöhung des Feldes an den Kanten des Magneten (siehe auch [88]). Schneiden sich mehrere Ebenen mit magnetischen Ladungen, so tritt das stärkste Feld an den Enden der Schnittlinie, also an den Ecken des Quaders, auf. Während dieser Effekt in optimierten Magnetanordnungen dazu genutzt wird starke Felder zu erzeugen (z.B. Halbach-Array [89]), führt er in einer Lokalisierungsanwendung mit nur einem Magneten zu einem lokal sehr stark begrenztem Maximum der Flussdichte. In der Praxis ist dieses Maximum jedoch weniger ausgeprägt, als es das theoretische Modell annehmen lässt. Grund hierfür ist die Kante des Permanentmagneten, die bei realen Magneten einen Radius größer null besitzt, und damit die Magnetfeldüberhöhung begrenzt. An der Schnittstelle zwischen drei Kanten vervielfacht sich der Effekt, und die Abweichung zum Modell ist somit am deutlichsten erkennbar. Um den realen Magneten genauer zu beschreiben, wäre eine Modellierung aus mehreren Quadern und Zylinder- bzw. Kugelsegmenten oder ein kombinierter Ansatz mit Flächenladungen (s. Kap. 3.7.3) möglich. Damit würde sich aber der Rechenaufwand für das Modell vervielfachen.

4. Experimente zur Verifikation der Magnetmodellierung

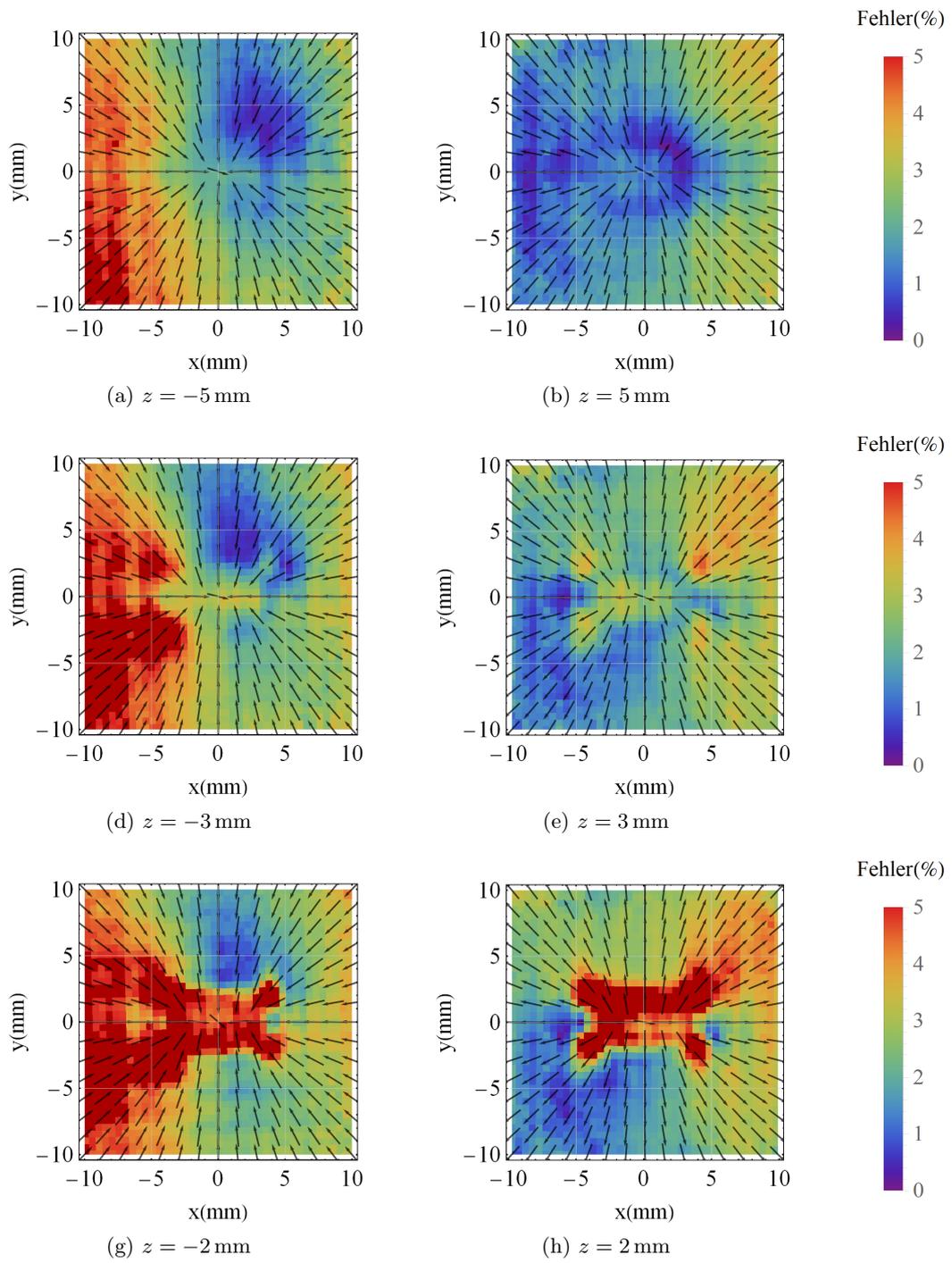


Abbildung 4.3.: Relativer Fehler $e_{rel,i}$ zwischen analytischem Messmodell (Magnetisierung in z -Richtung) und Messung in verschiedenen Abständen z

4.2. Vergleich des Modells mit Messergebnissen

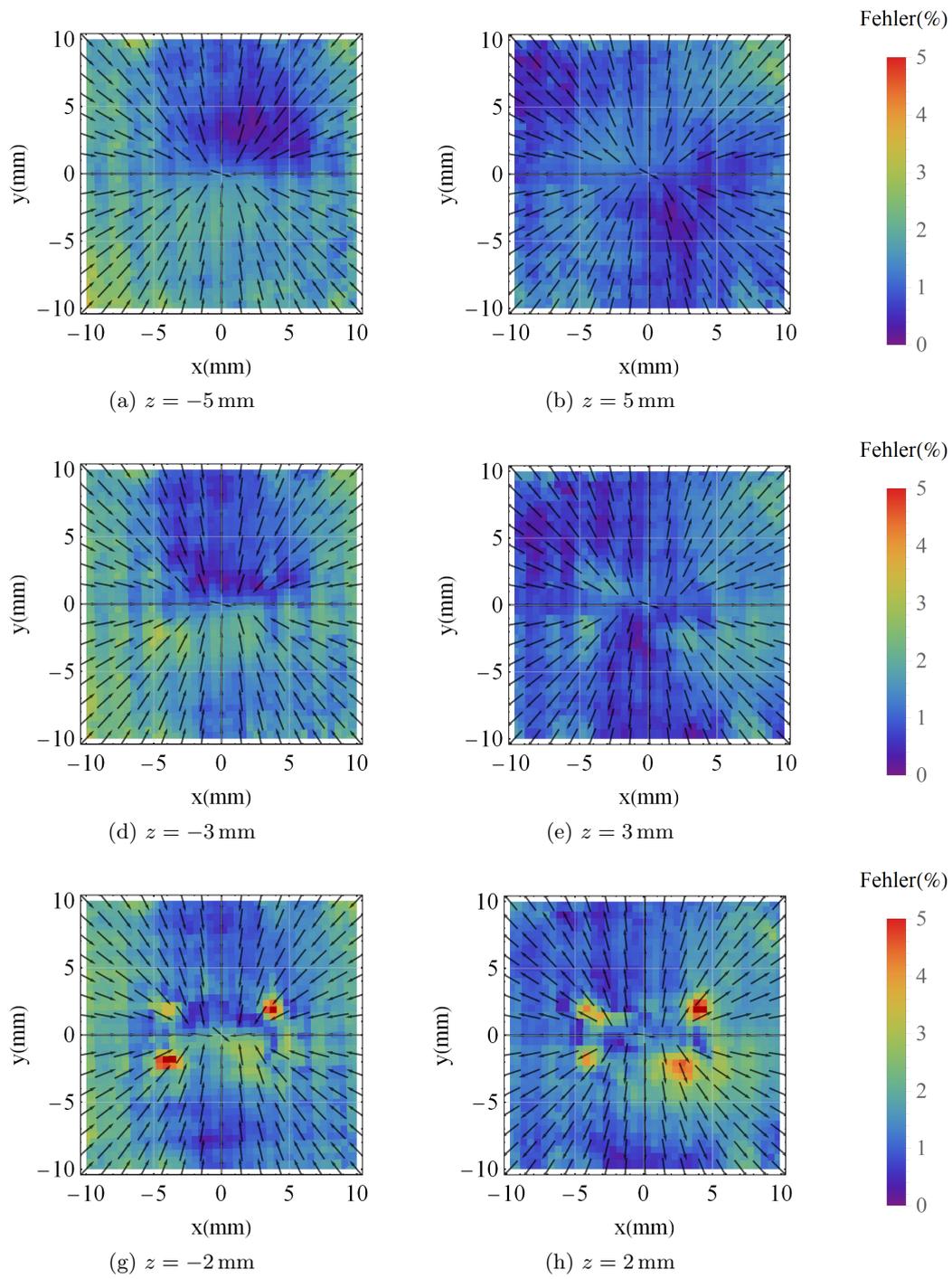


Abbildung 4.4.: Relativer Fehler $e_{rel,i}$ zwischen erweitertem Messmodell und Messung in verschiedenen Abständen z

5. Analyse eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden

Um die Lokalisierungsalgorithmen und Kenngrößen aus Kap. 3 anhand eines Beispiels zu evaluieren, wurden diese auf den in Kap. 3.1 beschriebenen Fall angewandt. Hinsichtlich der Sensorik wurde zunächst der in Kap. 3.3 beschriebene monolithischen Hall-Sensor IC mit fünf Pixeln zugrundegelegt. Von diesen Vorgaben ausgehend wurde das System analysiert und geeignete numerische Verfahren zur Lösung des inversen Problems untersucht. Im weiteren Verlauf wurde die Anordnung schrittweise weiterentwickelt und ein diskreter Aufbau aus mehreren Hall-Sensor ICs vorgeschlagen. Messungen mit dem Laboraufbau aus Kap. 3.4 und 3.5 verifizierten schließlich diese optimierte Anordnung.

5.1. Beobachtbarer Bereich

Der Zustand des untersuchten Bedienelementes ist mithilfe der Eulerwinkel durch sechs Freiheitsgrade beschrieben. Wie in Kap. 3.10.2 erläutert, ist eine Homogenisierung der Jacobi-Matrix notwendig, um die Singulärwerte miteinander vergleichen, und die unterschiedliche Rauschcharakteristik der vertikalen und lateralen Sensoren berücksichtigen zu können (vgl. Kap. 3.2.3). Die charakteristische Länge CL zur Berechnung der dimensionslosen Jacobi-Matrix [85] wurde abhängig vom geforderten Bewegungsbereich gewählt. Somit ist

$$CL_i = \kappa (\text{Max}(x_i) - \text{Min}(x_i)) \quad (5.1)$$

$$CL = \kappa (6 \text{ mm}, 6 \text{ mm}, 2 \text{ mm}, 18^\circ, 18^\circ, 18^\circ), \quad (5.2)$$

mit dem Faktor $\kappa = (2^{ENOB})^{-1} = 2^{-8}$. Es wurden die in Kap. 3.2.3 angegebenen Werte von $20 \mu\text{T}$ für die Standardabweichung der vertikalen und $11 \mu\text{T}$ für die lateralen Sensoren verwendet.

Abb. 5.1 zeigt den beobachtbaren Bereich der Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden mit den genannten Parametern, abhängig von der Position x , y und z . Ab einem Abstand z von 8.5 mm unterscheidet sich die dimensionslose Beobachtbarkeitsmatrix nicht signifikant von der Matrix mit dem nächstkleineren Rang, sodass die Bedingung für die Beobachtbarkeit nicht erfüllt ist. Einer der Zustände kann ab dieser Distanz von 8.5 mm also nicht mehr zuverlässig bestimmt werden. Welcher der Zustände mit der schlechtesten Beobachtbarkeit ist, lässt sich anhand der Singulärwertzerlegung nicht erkennen, da die Zerlegung wie in Kap. 3.10.2 beschrieben nicht nur einen Skalierungsanteil, sondern auch eine Kongruenzabbildung beinhal-

5. Analyse eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden

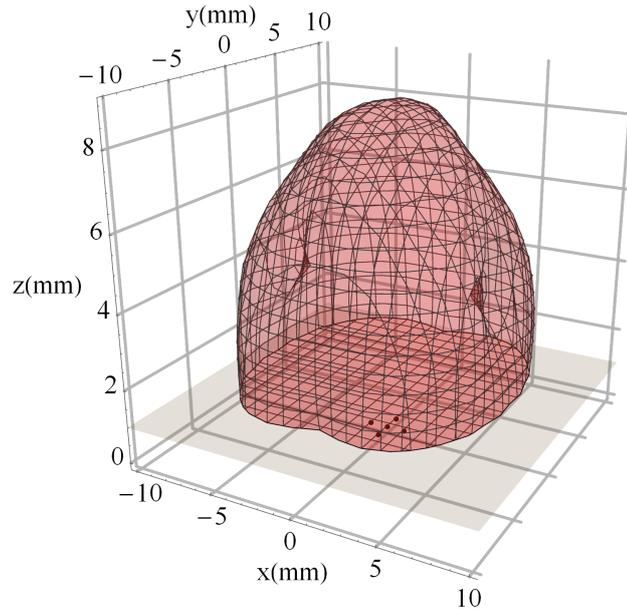


Abbildung 5.1.: Beobachtbarer Bereich (rote Schattierung) für eine Auswertung mit sechs Freiheitsgraden unter Verwendung eines Hall-Sensor-ICs mit fünf Pixeln. Die graue Ebene kennzeichnet die Grenze des praktisch nutzbaren Bereichs (ohne Kollision von Magnet und Sensor).

tet. Aus Abb. 5.1 lässt sich aber erkennen, dass im Bereich $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 10\text{mm}$ sechs Freiheitsgrade bestimmt werden können.

In Abb. 5.1 wurden nur die translatorischen Freiheitsgrade variiert, um die lokale Beobachtbarkeit im Raum zu zeigen. Darüber hinaus hat auch die Lage einen Einfluss auf die Beobachtbarkeit. Dies ist in Abb. 5.2 dargestellt. Hierzu wurde neben der Nulllage bei $(\alpha, \beta, \varphi)^T = (0, 0, 0)^T$ (grauer Bereich), auch die Extremwerte bei $(\alpha, \beta, \varphi)^T = \pm(9^\circ, 9^\circ, 9^\circ)^T$ (schwarz umrandete Bereiche) untersucht. Die Abbildungen zeigen die Beobachtbarkeit für unterschiedliche Abstände vom Magneten zum Sensor.

Befindet sich der Magnet unmittelbar über dem Sensor bei $z = 1.5\text{ mm}$, so kann in einem kreisförmigen Bereich mit dem Radius 5 mm lokalisiert werden. Die Lage des Magneten schränkt diesen Radius geringfügig ein. Mit zunehmendem Abstand nimmt er ab, sodass sich ein annähernd kegelförmiges Volumen für die beobachtbare Region ergibt. Dieser Kegel hat bei $z = 6\text{ mm}$ noch einen Radius von 4.4 mm. Ab 7 mm sind nur noch 3 mm um den Mittelpunkt beobachtbar. Damit ist für den Anwendungsfall eines Joysticks der in Tabelle 5.1 aufgelistete Bewegungsbereich beobachtbar.

Dieser Bereich dient für die Untersuchungen der folgenden Kapitel als Grundlage. Wäre der spezifizierte Bereich nicht beobachtbar, so könnte in einem iterativen Vorgehen zunächst die Spezifikation eingeschränkt werden, entsprechend die charakte-

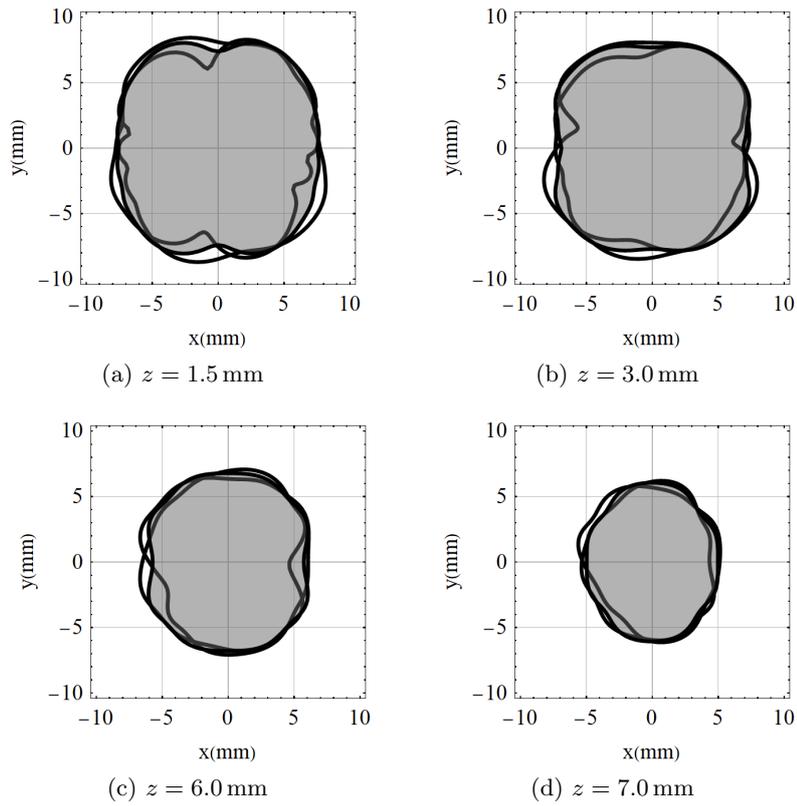


Abbildung 5.2.: Beobachtbarer Bereich ohne (grauer Bereich) und mit Rotation des Magneten um $(\alpha, \beta, \varphi)^T = \pm(9^\circ, 9^\circ, 9^\circ)^T$ (schwarze Linien) für unterschiedliche Abstände z

5. Analyse eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden

ristische Länge angepasst, und danach die Beobachtbarkeit erneut ausgewertet werden. Dies ergibt sich daraus, dass die charakteristische Länge im Beispiel abhängig vom maximalen Bewegungsbereich definiert wurde, der wiederum von der Beobachtbarkeit abhängt. Dahingehende Experimente zeigten jedoch eine sehr schnelle Konvergenz eines solchen Vorgehens, sodass nur zwei Iterationen hierfür notwendig waren.

	min	max
x	-3 mm	3 mm
y	-3 mm	3 mm
z	4 mm	6 mm
α	-9°	9°
β	-9°	9°
φ	-9°	9°

Tabelle 5.1.: Bewegungsbereich

5.2. Simulation der Genauigkeitsgrenzen

Zur Abschätzung der unteren Schranke für die Varianz eines optimalen Schätzers, wurde in Kap. 3.10.4 die Cramér-Rao-Schranke (CRLB) beschrieben. Diese wurde anhand des definierten Anwendungsfalles eines Joysticks mit sechs Freiheitsgraden numerisch berechnet. Hierzu wurde in einer Simulation der quaderförmige Magnet entlang der Magnetisierungsachse vom Sensor wegbewegt und die CRLB aller sechs Freiheitsgrade mit Gl. (3.142) bestimmt. Das Rauschen des Sensors wurde wie in Kap. 3.2.3 beschrieben angenommen.

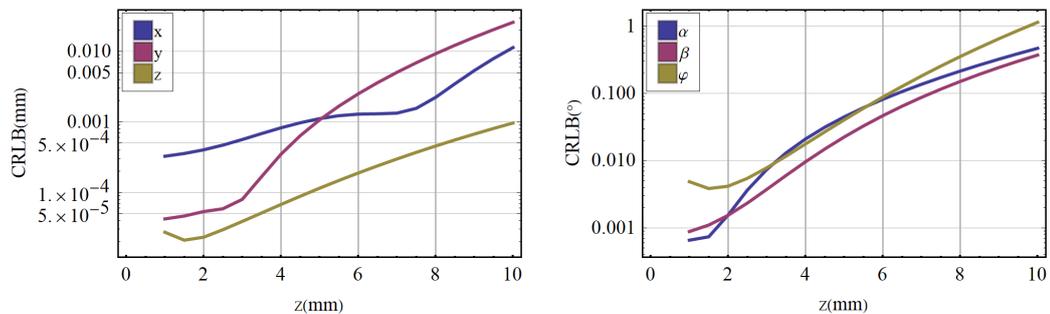


Abbildung 5.3.: Cramér-Rao-Schranke der Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden in Abhängigkeit vom Abstand z

Abb. 5.3 stellt die Cramér-Rao-Schranke der Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden über dem Abstand z dar. Da das Signal- zu Rauschverhältnis mit dem Abstand am stärksten abnimmt, ist hier der größte Einfluss zu erwarten. Im betrach-

5.2. Simulation der Genauigkeitsgrenzen

teten Bereich ist die z -Komponente der Position am genauesten bestimmbar, da die Jacobi-Matrix in dieser Richtung die größte Änderung zeigt und somit auch die Likelihood-Funktion sehr steil ansteigt (vgl. Abb. 3.17). Gemäß der Simulation kann diese Zustandsvariable selbst bei $z = 5$ mm noch mit einer Standardabweichung von unter $0.1 \mu\text{m}$ geschätzt werden, die dazu orthogonalen Komponenten x und y jedoch mit $1 \mu\text{m}$. Die Lage im Raum kann mit der beschriebenen Anordnung auf unter 0.1° genau geschätzt werden. Die Drehung um die z -Achse (φ) ist in weiten Bereichen am ungenauesten.

5.3. Gegenüberstellung verschiedener Lokalisierungsverfahren

Um unterschiedliche Optimierungs- bzw. Schätzverfahren (vgl. Kap. 3.9) zu vergleichen, wurden die in Kap. 3.9.2 beschriebenen nichtlinearen Kalman-Filter (EKF, UKF) sowie der Levenberg-Marquardt-Algorithmus (LM, s. Kap. 3.9.1) und das Simulated Annealing Verfahren (ANNEAL, s. Kap. 3.9.1) mittels der Programmiersprache C++ umgesetzt. Ebenso wurde das analytische Modell des Systems (s. Kap. 3.7.2 und 3.8) implementiert. Alle Verfahren greifen auf dieses Modell zu und, falls erforderlich, auch auf dessen Jacobi-Matrix (s. Kap. 3.7.4). Zum Test weiterer Optimierungsverfahren wurde eine Bibliothek zur nichtlinearen Optimierung des Massachusetts Institute of Technology (NLOpt [90]) verwendet und in die Lokalisierungssoftware integriert. Diese Bibliothek beinhaltet die Optimierungsverfahren mit den Bezeichnungen:

- DIRECT und DIRECT-L (engl. Dividing Rectangles) [91] [92]
- CRS (engl. Controlled Random Search) with local mutation [93]
- MLSL (engl. Multi-Level Single-Linkage) [73]
- StoGO (engl. Stochastic Global Optimization) [94]
- ISRES (engl. Improved Stochastic Ranking Evolution Strategy) [95]
- ESCH (Evolutionäre Strategie) [96]
- COBYLA (engl. Constrained Optimization by Linear Approximations) [97]
- BOBYQA (engl. Bound Optimization by Quadratic Approximation)[98]
- NEWUOA (engl. Unconstrained Optimization Without Derivatives) [99]
- PRAXIS (engl. Principal Axis) [100]
- NMEAD (Nelder-Mead-Simplex Verfahren) [68] (s.a. Kap 3.9.1)
- SBPLX (Nelder-Mead-Simplex Verfahren mittels einer Sequenz von Subräumen) [101]
- MMA (engl. Method of Moving Asymptotes) [102]
- CCSA (engl. Conservative Convex Separable Approximation) [102]
- SLSQP (Sequenzielle quadratische Programmierung) [103]
- BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Verfahren) [64]
- Newton (vorkonditioniertes abgeschnittenes Newton-Verfahren) [104]

5.3. Gegenüberstellung verschiedener Lokalisierungsverfahren

- VAR1/2 (verschobenes speicherlimitiertes Verfahren mit variabler Metrik) [105]
- ALAG (engl. Augmented Lagrangian Algorithm) [106]

Für eine detaillierte Beschreibung der Algorithmen sei auf die genannten Veröffentlichungen verwiesen. Die Zielfunktion der Optimierungsalgorithmen wurde mit

$$g = \|\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})\|_2 \quad (5.3)$$

$$= g_{min} + \Delta g \quad (5.4)$$

definiert, wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm kennzeichnet. Da wie in Kap. 2.2 erläutert das inverse Problem der Lokalisierung von Permanentmagneten schlecht gestellt ist und die Optimierungsverfahren somit divergieren würden, wurde zusätzlich eine Regularisierung angewandt. Hierzu wurde die Minimierungsfunktion um einen Tikhonov-Regularisierungsterm [14] ergänzt, sodass die regularisierte Minimierungsfunktion lautet:

$$g_{reg} = \|\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})\|_2 + \eta \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2. \quad (5.5)$$

Neben der eigentlichen Anpassung an die Messwerte sorgt also ein zusätzlicher Term dafür, dass Zustände in großem Abstand zum Startwert \mathbf{x}_0 den Wert der Zielfunktion erhöhen. Ein Minimum nahe dem Startwert wird somit bevorzugt. Der Parameter η wurde experimentell zu $\eta = 1 \cdot 10^{-7}$ bestimmt. Eine weitere Maßnahme, um die Stabilität der Optimierungsverfahren sicherzustellen, stellt die Anwendung des Diskrepanzprinzips dar (siehe Kap. 2.2): Die Optimierung wird solange durchgeführt, bis die Abweichung zum minimalen Funktionswert g_{min} eine bestimmte Schwelle Δg unterschreitet. Die Anzahl der dafür benötigten Berechnungen ist ein Maß für die Effizienz des jeweiligen Algorithmus. Unter der Annahme, dass die Komplexität des Berechnungsalgorithmus selbst vernachlässigbar gegenüber der Messfunktion $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ ist, reicht es aus, die Anzahl der Aufrufe der Messfunktion und der Funktionalmatrix auszuwerten (siehe Kapitel 3.7.4 und 3.8.2). Daher wurde in die Software ein Zähler integriert, der es ermöglicht die Anzahl der Aufrufe der Messfunktion, sowie der Jacobi-Matrix zu erfassen. Ein Aufruf der Jacobi-Matrix in ableitungsbasierten Verfahren wurde in der Auswertung mit dem Faktor $2n = 12$ gewichtet und zu einer äquivalenten Anzahl der Funktionsaufrufe addiert. Dieser Faktor entspricht der Komplexität einer Berechnung des Differenzenquotienten, also der numerischen Berechnung der Jacobi-Matrix.

Da einige der Verfahren mit Heuristiken arbeiten, wurden mehrere Durchläufe simuliert und das Minimum sowie Maximum der Funktionsaufrufe bestimmt. Der Startwert der Optimierung stellt ein weiteres Problem beim Vergleich der Algorithmen dar. Die untersuchten Lokalisierungsverfahren hängen stark von der Wahl dieses Wertes ab: Wird ein Startwert nahe dem tatsächlichen Minimum gewählt, so konvergiert der Algorithmus in der Regel deutlich schneller als bei einer ungünstigen Wahl. Deshalb wurden die Untersuchungen mit zwei unterschiedlichen Startwerten als Ausgangspunkt für die Optimierung durchgeführt: Einer weit entfernt von Mini-

5. Analyse eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden

ID	$e_t(\text{mm})$		$e_r(^{\circ})$		Aquiv. Aufrufe		$g_{min}(\text{mT})$	
	$\mathbf{x}_{0,1}$	$\mathbf{x}_{0,2}$	$\mathbf{x}_{0,1}$	$\mathbf{x}_{0,2}$	$\mathbf{x}_{0,1}$	$\mathbf{x}_{0,2}$	$\mathbf{x}_{0,1}$	$\mathbf{x}_{0,2}$
mit Ableitung								
MLSL[73]	0.219	3.321	0.04	1.74	1422	109	0.998	0.992
					-5751	-2644		
MLSL_LDS[73]	0.214	2.446	0.04	1.74	4139	109	0.996	0.996
ohne Ableitung								
CRS2_LM[93]	0.142	1.919	0.12	0.98	1308	1388	0.755	0.913
					-1802	-1904		
ISRES[95]	0.164	2.663	0.09	1.45	12k-	11k-	0.745	0.979
					22000	24000		
MLSL[73]	0.222	2.154	0.13	1.55	957-	81-	0.998	0.999
					-3879	-1703		
MLSL_LDS[73]	0.223	2.148	0.13	1.55	2344	81	0.999	0.999
ANNEAL[74]	0.0116	0.175	0.01	0.18	6949	6503	0.102	0.102

Tabelle 5.2.: Globale Optimierungsverfahren

mum ($\mathbf{x}_{0,1}$), was dem Zustand des Systems beim Einschalten entsprechen würde und ein Startwert $\mathbf{x}_{0,2}$ nahe dem Minimum, um das Verhalten während des Betriebes zu simulieren.

Einige der globalen Verfahren, arbeiten mit einem zweistufigen Algorithmus. Die globale Suche wird durch einen lokalen Optimierer ergänzt. In diesen Fällen kommt das lokale Nelder-Mead-Simplex Optimierungsverfahren [68] zum Einsatz. Die Schwelle Δf wurde für die Simulationen auf einen Wert von 1 mT gesetzt.

Die nichtlinearen optimalen Schätzer haben, wie in Kap. 3.9.2 eine rekursive Struktur. Wird nur ein einzelner Messwert betrachtet, so ist der Restfehler größer als bei den Optimierungsalgorithmen, da der Linearisierungsfehler nicht iterativ minimiert wird. Um einen sinnvollen Vergleich der Schätzer mit den Optimierungsalgorithmen durchführen zu können, wird daher der rekursive Algorithmus mehrfach mit dem gleichen Messwert aufgerufen und Mittelwert und Kovarianz somit iterativ verbessert [75]. Die Iteration wird solange fortgesetzt, bis die Innovation (Differenz zwischen Modell und Messung) unter den Wert der Abbruchbedingung Δg fällt. Mit dieser Modifikation erreichten die optimalen Schätzer das Stopkriterium nach 2-4 Iterationen.

Die Tabellen 5.2 und 5.3 zeigen die Auswertung. Die globalen Optimierungsverfahren in Tab. 5.2 benötigen bis zu 5751 äquivalente Funktionsaufrufe, um das Minimum hinreichend genau zu bestimmen. Die beste Effizienz zeigt noch das „Multi Level Single Linkage“ Verfahren (MLSL), wobei die Variante mit gleichförmiger Verteilung der Testpunkte („LDS“) gegenüber einer zufälligen Wahl mit weniger Berechnungen auskommt (siehe auch [73]). Unter Zuhilfenahme der Ableitungsmatrix der Messfunktion steigt die Komplexität an. Eine Variante der kontrollierten zufälligen Suche mit lokaler Mutation (CRS2_LM [93]) zeigt ebenfalls einen akzep-

5.3. Gegenüberstellung verschiedener Lokalisierungsverfahren

tablen Rechenaufwand. Diese Methode ähnelt dem lokalen Nelder-Mead-Simplex-Verfahren (Kap. 3.9.1) und arbeitet rein heuristisch. Die Wahl des Startwertes hat bei den globalen Optimierungsverfahren meist nur geringen Einfluss auf die Berechnungsdauer. Weitere getestete globale Optimierungsverfahren konvergieren in der vorgegebenen Maximalzeit von 5 s nicht zum erwarteten Minimum. Die Verfahren mit der Bezeichnung:

- DIRECT und DIRECT_L,
- AGS,
- STOGO und
- ESCH

sind nicht in der Lage eine Lokalisierung entsprechend dem Anwendungsfall mit sechs Freiheitsgraden durchzuführen. Die in Tab. 5.3 aufgelisteten lokalen Optimierungsverfahren benötigen eine deutlich geringere Anzahl an Berechnungen, um das lokale Minimum zu finden. Besonders effizient sind wiederum die ableitungsfreien Methoden wie das Nelder-Mead-Simplex Verfahren (NMEAD, Kap. 3.9.1) und der restringierten Optimierung durch quadratische Näherung (Bound Optimization BY Quadratic Approximation, BOBYQA). Der Levenberg-Marquardt Algorithmus (LM) konvergiert noch deutlich schneller zum entfernten Zustand \mathbf{x}_0 und mit 34 Aufrufen der Messfunktion auch etwas schneller zum nahe gelegenen Minimum \mathbf{x}_1 .

Die nichtlinearen Bayes'schen Filter führen sowohl bei der Schätzung eines einzelnen entfernten Punktes, als auch bei einem günstig gelegenen Startpunkt zur minimalen Zahl äquivalenter Funktionsaufrufe. Einzig der Levenberg-Marquardt-Algorithmus ist ähnlich effizient. Das Unscented Kalman-Filter mit 12 Sigmapunkten, wie es in Kap. 3.9.2 beschrieben wurde, ist gegenüber dem Extended-Kalman-Filter geringfügig im Vorteil. Die Taylorreihenapproximation des EKF erfordert sowohl einen Aufruf der Messfunktion als auch deren Jacobi-Matrix, was sich zu 13 äquivalenten Funktionsaufrufen summiert.

Ein Vergleich des Rechenaufwandes der Schätzung von sechs Freiheitsgraden mithilfe des Unscented Kalman-Filters mit anderen aus der Literatur bekannten Verfahren (s. Kap. 2.3) wurde in [108] vorgestellt. Auch hier zeigt sich ein deutlicher Geschwindigkeitsvorteil des UKF im Vergleich zu Optimierungsverfahren, wie der Partikel-Schwarm-Optimierung aus [66] und auch dem LevenbergMarquardt-Algorithmus ([24] [25] [109] [110]). Allerdings ist bei einem solchen Vergleich der unterschiedliche Messaufbau, insbesondere die Anzahl verwendeter Sensoren die Art des Messmodells und die Auswertelektronik zu berücksichtigen. Die Bandbreite der Rechenleistung in den Veröffentlichungen reicht von Rechenkernen mit Taktraten von 233 MHz bis zu mehreren Gigahertz.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass sich die optimalen Schätzer, insbesondere das Unscented-Kalman-Filter im Zusammenhang magnetfeldbasierter Positionssensorik als vorteilhaft erweist, und gerade im Bezug auf die begrenzte Rechenleistung am ehesten die Anforderungen für industrielle Anwendungen erfüllt.

5. Analyse eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden

Name	PosError(mm)		AngError(°)		Aquiv. Aufrufe		minf (mT)	
	$\mathbf{x}_{0,1}$	$\mathbf{x}_{0,2}$	$\mathbf{x}_{0,1}$	$\mathbf{x}_{0,2}$	$\mathbf{x}_{0,1}$	$\mathbf{x}_{0,2}$	$\mathbf{x}_{0,1}$	$\mathbf{x}_{0,2}$
mit Ableitung								
VAR2 [105]	0.161	1.762	0.09	2.08	845	182	0.8168	0.817
ALAG [106]	0.202	3.143	0.04	1.74	1418	105	0.9983	0.998
ALAG_EQ [106]	0.202	3.143	0.04	1.74	1418	105	0.9983	0.998
CCSAQ [102]	0.205	3.317	0.04	1.70	2600	78	0.9997	0.999
LBFSG [64]	0.1743	3.017	0.08	2.08	650	169	0.9679	0.967
MMA [102]	0.202	3.143	0.04	1.74	1417	104	0.9983	0.998
SLSQP [103]	0.040	0.431	0.04	1.03	527	306	0.924	0.924
Newton [104]	0.189	3.00	0.09	2.076	4992	117	0.892	0.891
VAR1 [105]	0.156	2.254	0.09	2.08	1092	182	0.9213	0.921
LM [107]	0.010	0.157	0.01	0.19	66	34	0.106	0.107
EKF [75]	0.101	1.658	0.02	0.41	65	26	0.5626	0.189
ohne Ableitung								
ALAG [106]	0.2045	2.935	0.14	1.55	1779	77	0.999	0.999
ALAG_EQ [106]	0.205	2.935	0.14	1.55	1779	77	0.999	0.999
BOBYQA [98]	0.082	1.573	0.04	1.69	157	35	0.761	0.761
COBYLA [97]	0.205	2.935	0.14	1.55	1778	76	0.999	0.999
NMEAD [68]	0.217	3.363	0.19	2.10	432	198	0.995	0.995
NEWUOA [99]	0.203	3.398	0.09	2.06	9978	47	0.995	0.995
PRAXIS [100]	1.317	30.650	0.09	2.08	252-7k	55	13.11	0.959
SBPLX [101]	0.213	3.431	0.23	2.33	12530	753	0.998	0.998
UKF [75]	0.146	2.405	0.03	0.50	60	24	0.900	0.203

Tabelle 5.3.: Lokale Optimierungs- und Schätzverfahren

Ein Vorteil gegenüber dem linearisierten Kalman-Filter (EKF) ist zudem aufgrund der genaueren Abbildung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung durch die Sigma-Punkte zu erwarten (s. Kap. 3.9.2). Es dient daher als Ausgangspunkt für die Untersuchungen der nachfolgenden Kapitel.

5.4. Verifikation des sechs DoF Bedienelementes

Nachdem unterschiedliche numerische Lokalisierungsverfahren zunächst nur anhand einzelner Testpunkte verglichen wurden und dabei das Unscented-Kalman-Filter (UKF) als sehr effizientes Verfahren hervorging, wurde dieses Filter im Hinblick auf reale Anwendungsfälle auch für eine Bewegung des Magneten betrachtet. Hierzu wurde die in Kap. 3.1.2 vorgestellte Lissajous-Kurven-Methode mit dem in 5.1 definierten Bewegungsbereich untersucht. Schrittweise wurde zunächst anhand von Simulationen, dann mithilfe von Messergebnissen die Theorie der praktischen Anwendung gegenübergestellt.

5.4.1. Simulation

Um Messunsicherheiten zu berücksichtigen (thermisches Sensorrauschen der Hall-Sensoren), wurde im Zuge von Simulationen den Messwerten weißes normalverteiltes Rauschen überlagert, das künstlich generiert wurde und dem in Kap. 3.2.3 gezeigten Rauschen der Hall-Sensoren entspricht. Da der Fehler einer einzelnen solchen rauschbehafteten Simulation statistisch nicht aussagekräftig ist, wurde zudem eine Reihe von 100 Simulationen durchgeführt und die Standardabweichung des Fehlers ausgewertet (Monte-Carlo-Methode [111]). Bei der Auswertung wurde für jeden einzelnen Punkt der Trajektorie die CRLB berechnet.

Abb. 5.4 stellen die Ergebnisse für die Ortsschätzung und Abb. 5.5 entsprechend für die Winkelschätzung dar. Die Ergebnisse zeigen, dass sowohl der Ort als auch die Lage des Magneten über der gesamten Trajektorie mit dem UKF-Filter bestimmt werden können. Die Standardabweichung des Fehlers zwischen Soll- und Ist-Kurve unterscheidet sich zwischen den einzelnen Zustandsvariablen. Für die x - und y -Komponente beträgt sie unter $6.0\ \mu\text{m}$, während die z -Komponente bis auf $2.6\ \mu\text{m}$ genau bestimmt kann. Die Standardabweichung der Winkelschätzung beträgt bis zu 0.12° . Die Ergebnisse von Monte-Carlo-Simulation und CRLB weichen geringfügig voneinander ab. In einigen Bereichen liefert die Simulation bessere Resultate als durch die CRLB abgeschätzt. Dennoch zeigt die Simulation, dass die CRLB ein geeignetes Mittel zur Evaluierung der Genauigkeitsgrenzen des Messsystems darstellt. Der Berechnungsaufwand ist dabei um ein vielfaches geringer als bei der Monte-Carlo-Simulation. Während die Berechnung der CRLB für jeden Punkt der Trajektorie nur die einmalige Auswertung der Jacobi-Matrix erfordert, werden bei einer Monte-Carlo-Simulation in jedem Punkt $100 \cdot 12 = 1200$ Modellfunktionsaufrufe benötigt.

5. Analyse eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden

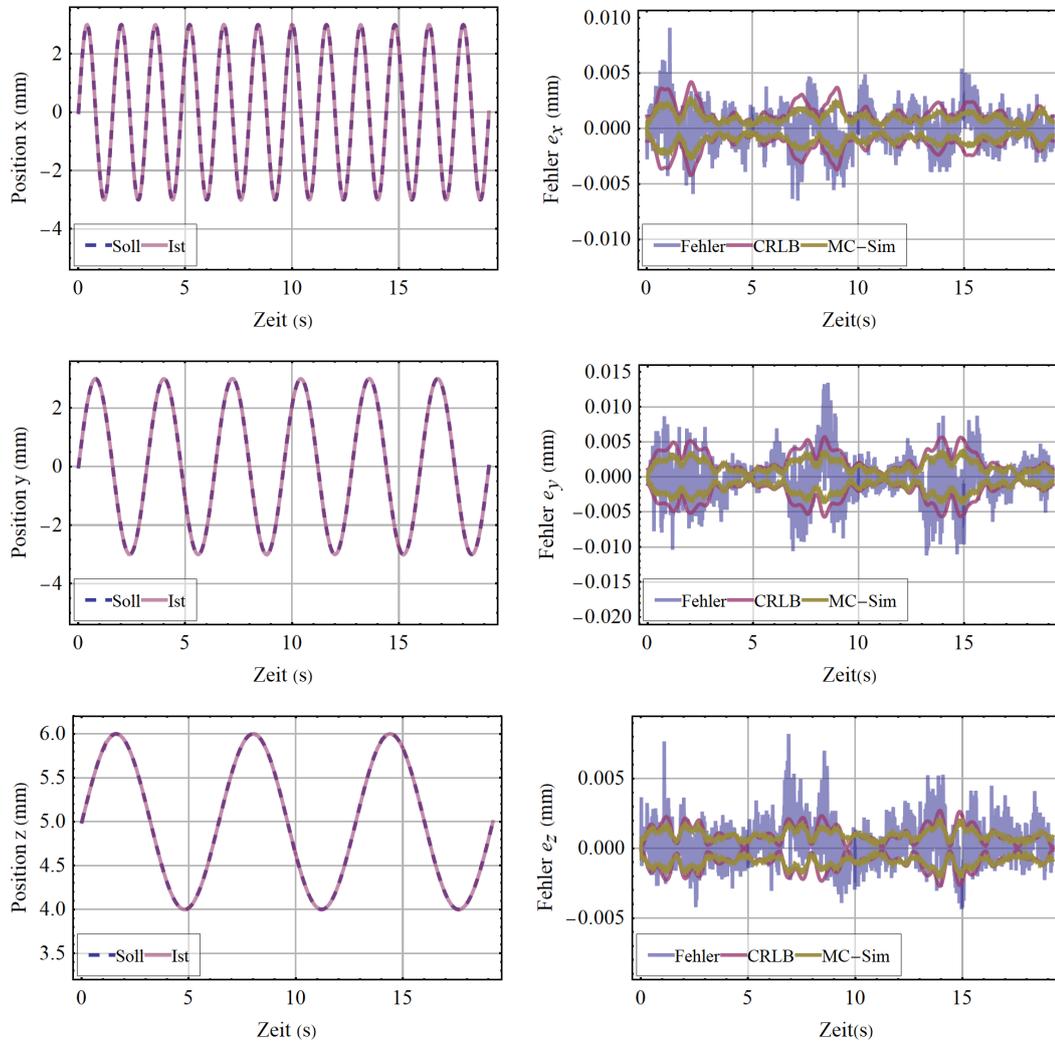


Abbildung 5.4.: Fehler der translatorischen Schätzung (e_t) einer Einzelsimulation mit weißem Rauschen verglichen mit der Cramér-Rao-Schranke (CRLB) und einer Monte-Carlo-Simulation (MC-Sim)

5.4. Verifikation des sechs DoF Bedienelementes

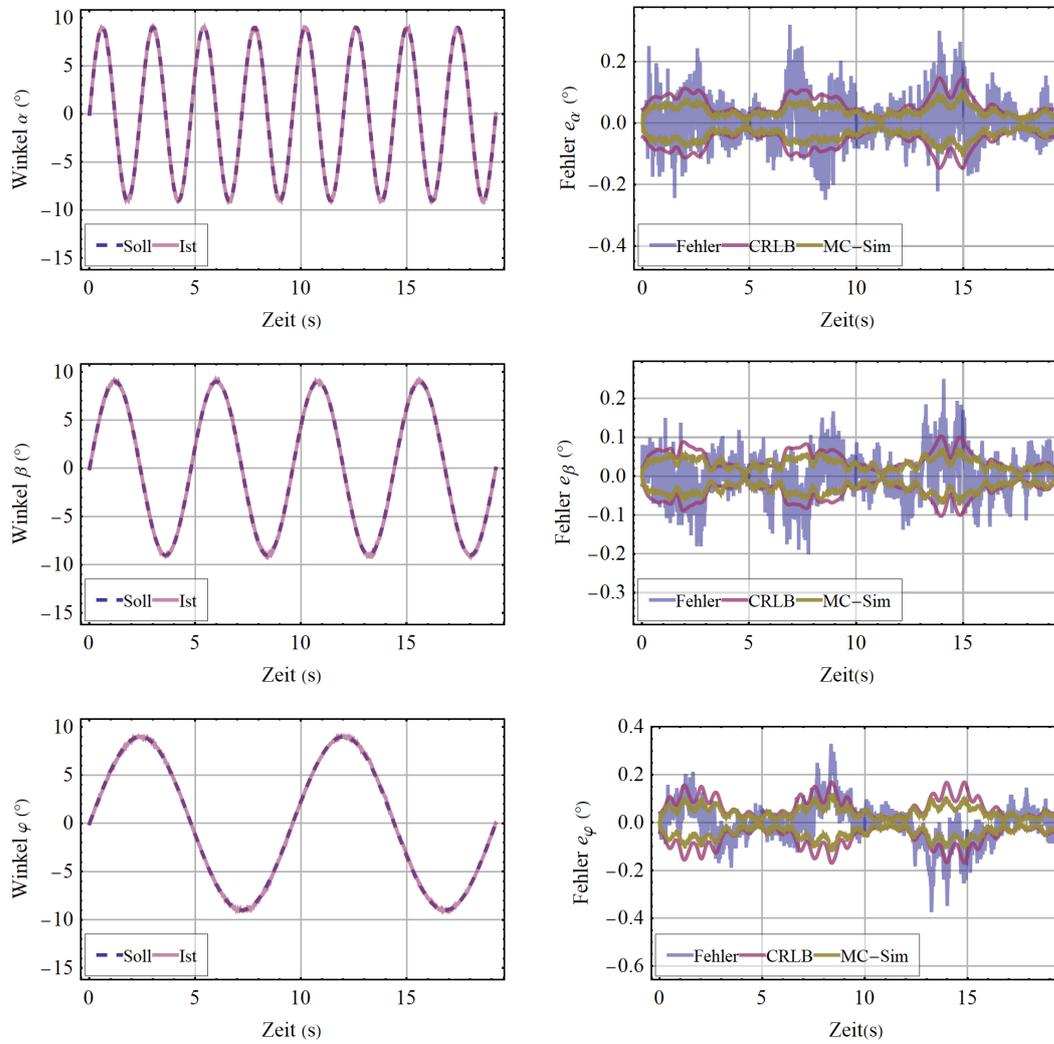


Abbildung 5.5.: Fehler der Lage-Schätzung (e_r) basierend auf den Simulationen mit weißem Rauschen verglichen mit der Cramér-Rao-Schranke (CRLB) und einer Monte-Carlo-Simulation (MC-Sim)

5.4.2. Messungen

Zur Validierung der Simulationsergebnisse wurden Messungen basierend auf der Sensoranordnung aus fünf Pixeln (Kap. 3.3) durchgeführt. Die Anordnung wurde mit einer Stewart-Plattform (vgl. Kap. 3.5) verschoben und rotiert. Hierzu wurde zunächst die magnetbezogene Trajektorie transformiert, um eine äquivalente Bewegung des Sensors im Koordinatensystem der Stewart-Plattform zu ermöglichen. Um die Reproduzierbarkeit des Experiments zu gewährleisten, wurden die Lokalisierung mit verschiedenen Magneten untersucht. Der Lokisierungsalgorithmus arbeitet mit einer konstanten Magnetisierung. Um diesen Parameter zu identifizieren, wurde die Remanenzflussdichte in einem ersten Kalibrierungsschritt vermessen. Für drei Magnete wurde dieser Parameter zu 996, 1005 und 979 kA m⁻¹ bestimmt.

Die Abbildungen 5.6 und 5.7 zeigen die Ergebnisse der Lokalisierung auf Basis der gemessenen Magnetfeldwerte. Wiederum wurden die Positionen mithilfe des UKF bestimmt. Die geschätzte Trajektorie folgt der Soll-Kurve, der Fehler der Schätzung der translatorischen Freiheitsgrade beträgt bis zu 200 µm, die Rotationsfreiheitsgrade weichen um bis zu 4° von den Soll-Winkeln ab. Der Fehler für α (Drehung um x -Achse) zeigt hierbei, anders als in der Simulation (s. 5.4.1), die größte Abweichung.

Ein solches Messsystem könnte nur bedingt als Bedienelement eingesetzt werden. Die erreichbare Auflösung, insbesondere was die Orientierung des Magneten betrifft, würde sich auf wenige Bit beschränken. Die theoretisch abgeleitete untere Schranke (rote Kurve, siehe auch Kap. 5.2) kann nicht erreicht werden. Die Gründe für die eingeschränkte Genauigkeit des Systems sollen in den folgenden Abschnitten analysiert (siehe Kap. 7.1) und geeignete Maßnahmen getroffen werden (siehe Kap. 6 und 7), um die Genauigkeit zu verbessern.

Neben einer PC-basierten Auswertung wurde der Algorithmus auf einer eingebetteten Plattform getestet. Die Ausführungsgeschwindigkeit der Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden mit fünf vektoriell messenden Hall-Sensoren beträgt 10 ms auf einem Cortex-M4 Controller mit 180 MHz. Sie ist konstant und unabhängig von den Eingangswerten. Das System ist damit echtzeitfähig. Die Berechnungsdauer liegt im Bereich der Messdauer des Sensor-ICs. Somit kann die maximale Messfrequenz des Sensors auch in Verbindung mit dem UKF verwendet werden.

Funktion	Anteil
Messmodell	74 %
UKF Inverse	4 %
UKF sonstige	18 %
Sonstiges	4 %

Tabelle 5.4.: Anteil der CPU-Zeit nach Funktion

Ein Profil der Funktionsaufrufe des Mikrocontrollers (Cortex-M4) führte zu den in Tab. 5.4 aufgelisteten Ergebnissen. Wie in Kap. 5.3 zum Vergleich unterschiedlicher Algorithmen angenommen, hat das Messmodell den größten Anteil an der Gesamt-Rechenzeit des Controllers. Die Berechnung der Matrixinversen in Gl. (3.95) trägt

5.4. Verifikation des sechs DoF Bedienelementes

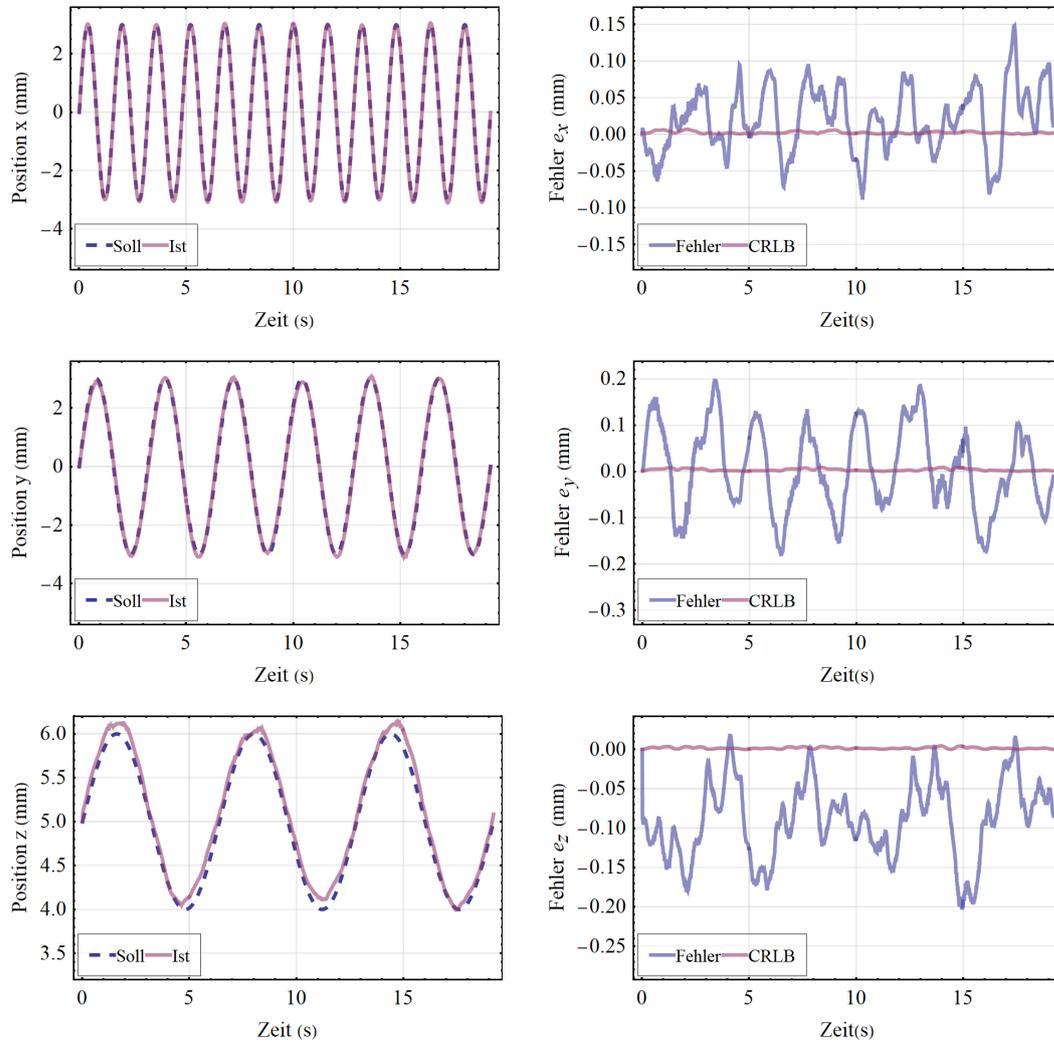


Abbildung 5.6.: Fehler der translatorischen Schätzung (e_t), basierend auf den Messungen, verglichen mit der Cramér-Rao-Schranke (CRLB); die Messung wurde mit der fünf Pixel-Zellen-Anordnung durchgeführt

5. Analyse eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden

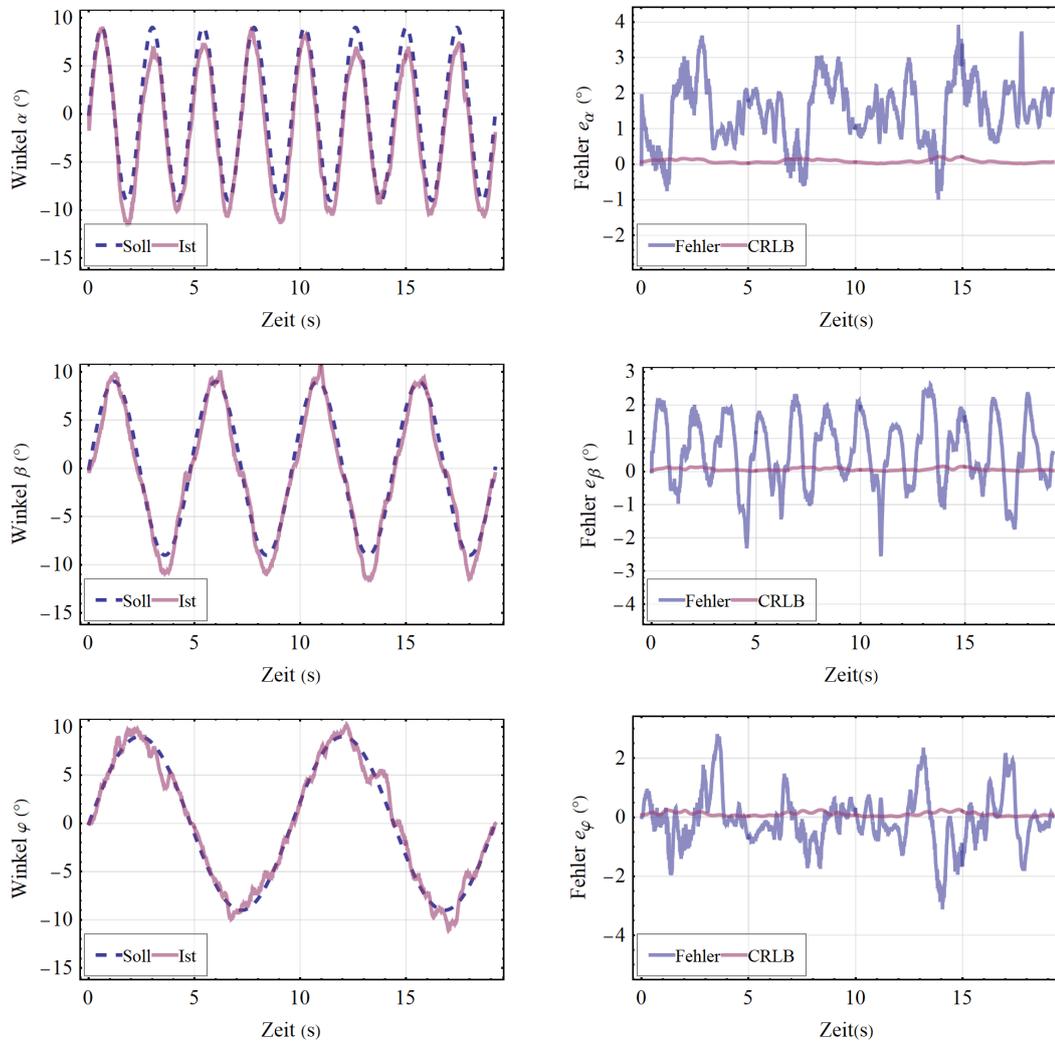


Abbildung 5.7.: Fehler der Winkel-Schätzung (e_r), basierend auf den Messungen, verglichen mit der Cramér-Rao-Schranke (CRLB); die Messung wurde mit der fünf Pixel-Zellen-Anordnung durchgeführt

5.4. Verifikation des sechs DoF Bedienelementes

mit 4% zur Gesamtberechnungszeit bei, während der restliche Rechenaufwand des UKF 18% ausmacht. 4% entfallen auf die Ansteuerung der Sensoren und Betriebssystemoperationen.

6. Entwurf eines optimierten Hall-Sensor-Positionsmesssystems

Die bisher verwendete Anordnung der Pixel des Sensors war nur durch grundlegende pragmatische Überlegungen motiviert. Die Genauigkeit des Messsystems ist jedoch entscheidend von der Abmessung des Magneten und der Anordnung der Pixel abhängig [112]. Ziel dieses Kapitels ist es, anhand der in Kap. 3.10.4 beschriebenen Cramér-Rao-Schranke eine optimale Anordnung für das betrachtete Problem eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden zu finden. Hierzu sollen zunächst anhand des magnetischen Dipols möglichst allgemeingültige Richtlinien abgeleitet werden, die dann in den anschließenden Abschnitten präzisiert werden. Abschließend sollen Messungen die optimierte Anordnung verifizieren.

6.1. Präzision der Dipolortung

Um das zuvor beschriebene Konzept zur Optimierung zu veranschaulichen und eine erste Richtlinie für die Dimensionierung einer Anordnung zur magnetfeldbasierten Lokalisierung zu definieren, soll die Fisher-Information für eine vereinfachte Anordnung aus zwei Hall-Sensor-Pixeln (vgl. 3.6) und einem magnetischen Dipol analysiert werden. Dieser kann in vielen Fällen als Näherung für komplexere Magnetgeometrien dienen, ist aber deutlich einfacher analytisch auszuwerten [22]. Im Beispiel soll der Ort x und die Orientierung α des Magnetisierungsvektors bestimmt werden, also eine Lokalisierung mit zwei DoF durchgeführt werden. Für die magnetische Flussdichte eines magnetischen Dipols am Punkt \mathbf{r} im magnetbezogenen Koordinatensystem gilt (siehe auch Gl. (2.1)):

$$\mathbf{B}_{Dipol}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^3}. \quad (6.1)$$

Angenommen das Feld wird mittels zweier Pixel an den Positionen $\mathbf{p}_1 = (-\frac{d}{2}, 0, 0)^T$ und $\mathbf{p}_2 = (\frac{d}{2}, 0, 0)^T$ gemessen, erhält man den Messvektor:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{Dipol}(x - d/2, y, z) \\ \mathbf{B}_{Dipol}(x + d/2, y, z) \end{pmatrix} = (B_1 \dots B_6)^T. \quad (6.2)$$

Die Ausrichtung des Dipols wird durch das magnetische Dipolmoment \mathbf{m} angegeben und in diesem Beispiel folgendermaßen parametrisiert, um eine Drehung in der Ebene bei $y = 0$ darzustellen: $\mathbf{m} = m_0(\sin(\alpha), 0, \cos(\beta))^T$. Zur Berechnung der CRLB ist die Funktionalmatrix bezogen auf den Zustandsvektor $\mathbf{x} = (x, y, z, \alpha, \beta)$

6. Entwurf eines optimierten Hall-Sensor-Positionsmesssystems

zu bestimmen. Sie lautet:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x} & \frac{\partial B_1}{\partial y} & \frac{\partial B_1}{\partial z} & \frac{\partial B_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial B_1}{\partial \beta} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial B_6}{\partial x} & \frac{\partial B_6}{\partial y} & \frac{\partial B_6}{\partial z} & \frac{\partial B_6}{\partial \alpha} & \frac{\partial B_6}{\partial \beta} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Sollen die Position x und der Winkel α bestimmt werden, so hat die Jacobi-Matrix 12 Komponenten. Die analytische Berechnung dieser Matrix mit den Parametern x , y , z und α ist im Anhang A.2 zu finden. Die Fisher-Informationsmatrix für eine (zunächst willkürlich gewählte) Magnetposition $x = 0$, $y = 0$, $z = h$ und $\alpha = \pi/4$ ergibt:

$$\mathbf{I} = \frac{m_0^2 \mu_0^2}{\pi^2 \sigma^2} \begin{pmatrix} \frac{144(5d^2+8h^2)}{(d^2+4h^2)^5} & -\frac{144h}{(d^2+4h^2)^4} \\ -\frac{144h}{(d^2+4h^2)^4} & \frac{20}{(d^2+4h^2)^3} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Für die Inverse folgt

$$\mathbf{I}^{-1} = \frac{\pi^2 \sigma^2}{m_0^2 \mu_0^2} \begin{pmatrix} \frac{5(d^2+4h^2)^5}{144(25d^2+4h^2)} & \frac{h(d^2+4h^2)^4}{4(25d^2+4h^2)} \\ \frac{h(d^2+4h^2)^4}{4(25d^2+4h^2)} & \frac{(d^2+4h^2)^3(5d^2+8h^2)}{4(25d^2+4h^2)} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Und für die CRLB schließlich

$$\text{CRLB} = \begin{pmatrix} [\mathbf{I}^{-1}]_{11} \\ [\mathbf{I}^{-1}]_{22} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$$= \frac{\pi^2 \sigma^2}{m_0^2 \mu_0^2} \begin{pmatrix} \frac{5(d^2+4h^2)^5}{144(25d^2+4h^2)} \\ \frac{(d^2+4h^2)^3(5d^2+8h^2)}{4(25d^2+4h^2)} \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Abb. 6.1 zeigt die CRLB unter Variation des Abstands d . Der optimale Pixelabstand entspricht nicht etwa der Anordnung mit dem maximalen Signal-Rauschverhältnis bei $d = 0$, sondern ist abhängig von Abstand der Dipol-Quelle zur Sensoranordnung. Im Optimum ist eine deutlich bessere Präzision zu erwarten als beim Minimalabstand.

Um nun eine Bedingung für den Sensorabstand d zu erhalten, bei dem die Varianz der Schätzung minimal wird, werden die Extremwerte der Diagonalelemente der inversen Fisher-Matrix bestimmt. Hierzu wird $\frac{\partial [I^{-1}]_{ii}}{\partial d}$ zu null gesetzt. Das Ergebnis liefert den Extremwert der Komponente i . Für ein Minimum der x -Varianz muss

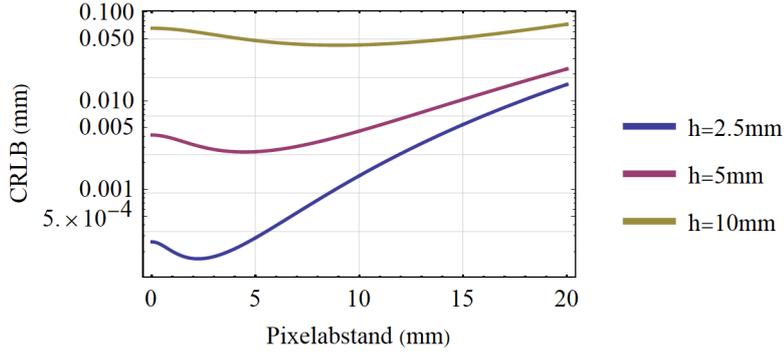


Abbildung 6.1.: Cramér-Rao-Schranke der x -Komponente der Dipollokalisierung mit zwei Freiheitsgraden in Abhängigkeit des Sensorabstandes d und dem Abstand zwischen Sensor und Magnet h ; $m_z = 0.113 \text{Am}^2$

also gelten:

$$\frac{\partial I_{11}^-}{\partial d} = 0 \quad (6.8)$$

$$\Rightarrow \frac{25 (d^2 + 4h^2)^4 (5d^3 - 4dh^2)}{18 (25d^2 + 4h^2)^2} = 0 \quad (6.9)$$

$$\Rightarrow d = \frac{2}{\sqrt{5}}h \quad (6.10)$$

Das Optimum des Abstandes für die Winkel-Bestimmung ergibt sich entsprechend zu:

$$\frac{\partial I_{22}^-}{\partial d} = 0 \quad (6.11)$$

$$\Rightarrow \frac{3 (d^2 + 4h^2)^2 (125d^5 + 160d^3h^2 - 208dh^4)}{2 (25d^2 + 4h^2)^2} = 0 \quad (6.12)$$

$$\Rightarrow d = \frac{2}{\sqrt{5}}h \quad (6.13)$$

Das Optimum der Winkellokalisierung entspricht also für den betrachteten Arbeitspunkt ($\mathbf{x} = (0, 0, h, \pi/4)^T$) dem optimalen Abstand für die Bestimmung der x -Komponente und entspricht $d = \frac{2}{\sqrt{5}}h \approx 0.894h$. Für andere Auslenkungswinkel liegt das Optimum zwischen $d = 0.818h$ und $d = 1.22h$. Eine geschlossene analytische Lösung lässt sich im Allgemeinen jedoch nicht angeben. Die Minima der Orientierungsschätzung und Lageschätzung unterscheiden sich bei Auslenkungswinkeln $\alpha \neq \pm\pi/4$. Die Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 I_{ii}^- (d_0)}{\partial d^2}$ sind für alle $d > 0.23h$ positiv. Somit handelt es sich bei den ermittelten Extremwerten um Minima. Die Ergebnisse liefern einen Ausgangspunkt für die Dimensionierung eines magnetfeldba-

6. Entwurf eines optimierten Hall-Sensor-Positionsmesssystems

sierten Messsystems zur Bestimmung von Ort und Lage eines magnetischen Dipols. Die Anordnung ist so zu dimensionieren, dass der Pixelzellenabstand dem mittleren Abstand (Mittelwert aus Maximum und Minimum der Bewegung) des Magneten zum Sensormittelpunkt entspricht.

6.2. Optimierung der Sensoranordnung

Um auch im Falle der Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden eine möglichst hohe Präzision zu erreichen, ist auch hier die systembedingte untere Schranke der Varianz von Ort und Lage zu minimieren. Eine geschlossene analytische Lösung ist hier nicht mehr möglich. Mittels globaler Optimierungsverfahren und geeigneter Nebenbedingungen kann aber eine optimale Anordnung gefunden werden. Anhand einer zu minimierenden Zielfunktion $FOM(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$ im Arbeitspunkt \mathbf{x}_0 lautet das Optimierungsproblem:

$$\arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{S}} (FOM(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})) := \{\mathbf{p} \in \mathbb{S} \mid \forall \mathbf{p}' \in \mathbb{S} : FOM(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}') \geq FOM(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})\} \quad (6.14)$$

Als Zielfunktion wurde die mit der charakteristischen Länge CL gewichtete Norm der CRLB:

$$FOM(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}) = \left\| \frac{1}{CL^2} \text{CRLB}(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}) \right\|_2 \cdot 10^6 \quad (6.15)$$

verwendet. Damit wurden analog zur dimensionslosen Beobachtbarkeitsmatrix (s. Kap. 3.10.2) die Freiheitsgrade vergleichbar. Der Lösungsraum \mathbb{S} der möglichen Sensorpositionen \mathbf{p} konnte eingeschränkt werden, da für typische Hall-Sensor-Anwendungen alle Sensoren in einer Ebene angeordnet sind. Zum einen liegt dies am Chipaufbau, da in einem Silizium Prozess nur in einer Ebene verteilte Sensoren platziert werden können. Zudem sind auch Anordnungen von Hall-Sensor-ICs auf einer Platine deutlich einfacher und günstiger zu realisieren als dreidimensionale Konstruktionen. Die Optimierung wurde daher in der Ebene $z = 0$ durchgeführt. Außerdem muss eine optimale Sensor-Anordnung folgende Randbedingungen erfüllen:

- Es muss mindestens einen Abstand von 1.1 mm zwischen den Pixeln einhalten werden.
- Die Pixel müssen zentralsymmetrisch zum Ursprung angeordnet sein.

Als Arbeitspunkt der Optimierung wurde der Mittelpunkt der Trajektorie des sechs DoF-Bedienelementes gewählt $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 5 \text{ mm}, 0, 0, 0)^T$. Zur Lösung des globalen Optimierungsproblems wurde das Nelder-Mead-Simplex Verfahren gewählt (s. Kap. 3.9.1). Da es sich hierbei um ein lokales Minimierungsverfahren handelt, wurden zur Vermeidung lokaler Minima mehrere Optimierungen durchgeführt, deren Initialwert mittels eines Zufallswertes bestimmt wurde. Somit sollte die Wahrscheinlichkeit erhöht werden, den globalen Minimalwert zu finden. Abb. 6.2 zeigt die Ergebnisse

der Optimierung. Dargestellt sind die Ergebnisse für Anordnungen aus drei bis sieben Pixeln, sowie der Minimalwert der Zielfunktion FOM. Für drei Pixel beträgt der optimale Pixelabstand 5.2 mm bei einer FOM von 5191. Vier Pixel werden idealerweise in einer kreuzförmigen Struktur platziert, ebenso wie bei der Lokalisierung mit fünf Pixeln. Die große Halbachse dieser kreuzförmigen Anordnungen ist gegenüber der x -Achse gedreht. Es ist also nicht vorteilhaft, die Sensoranordnung parallel zum Magneten auszurichten. Für mehr als sechs Pixel ergeben sich kaum noch Verbesserungen in der Lokalisierungsgenauigkeit. Die Anordnung aus fünf Pixeln stellt einen Kompromiss aus Wirtschaftlichkeit (Anzahl der ICs) und Genauigkeit dar und ermöglicht zugleich einen Vergleich mit der Standardanordnung aus Kap. 3.3. Diese Anordnung wird daher im Folgenden weiter untersucht.

6.3. Optimierung der Magnetposition

Neben der Sensoranordnung selbst, ist der Abstand des Magneten zum Sensor, im Folgenden als Luftspalt bezeichnet, und die Magnetgeometrie zu dimensionieren. Die Sensoranordnung, der Luftspalt und die Abmessung des Magneten skalieren gleichermaßen, sodass als Ausgangspunkt für die Dimensionierung eine feste Magnetgeometrie gewählt wurde. Gesucht ist damit ein Zusammenhang zwischen der Skalierung der Sensoranordnung und dem Luftspalt. Für den Fall, dass fünf Pixel zum Einsatz kommen, wurde im vorangegangenen Abschnitt eine kreuzförmige Struktur als optimale Anordnung ausgemacht. Sie wird durch die Halbachsen a (kleinster Abstand des Mittelpunktes zu einem beliebigen Pixel) und b (größter Abstand zwischen Pixel und Mittelpunkt) beschrieben.

Die Anordnung wurde für verschiedene Luftspalte analysiert. Hierzu wurde der Magnet der Größe $(x_b, y_b, z_b)^T = (8\text{mm}, 4\text{mm}, 3\text{mm})^T$ in unterschiedlichen Abständen h positioniert. Davon ausgehend wurde die optimale Sensorposition mithilfe des Nelder-Mead-Simplex-Verfahrens bestimmt und anhand der Länge der Haupt- und Nebenachse der kreuzförmigen Anordnung ausgewertet. Abb. 6.3a zeigt die Abhängigkeit der Anordnung vom Luftspalt.

Der optimale Sensorabstand ist für alle Werte von h größer als der in Kap. 6.1 hergeleitete Zusammenhang für die Positionsbestimmung des magnetischen Dipols. Dies lässt sich mit der im Vergleich komplexeren Bewegung, insbesondere der nicht-kommutativen Verknüpfung mehrerer Rotationstransformationen erklären. Für kleine Luftspalte unterhalb $h = 4$ mm ist eine Tendenz zur Position der Kanten bei 4 mm bzw. 2 mm zu erkennen. Damit ergibt sich der in Abb. 6.3b grau dargestellte Bereich, in dem eine optimale Positionierung der Pixel möglich ist. Der Sensorabstand sollte immer mindestens der Größe des Magneten entsprechen und gleichzeitig größer als das $2/\sqrt{5}$ -fache des Luftspaltes betragen. Der Winkel unterhalb des Magneten, in dem eine Platzierung ungeeignet ist, ist somit $2 \arctan(1/\sqrt{5}) = 48^\circ$.

6. Entwurf eines optimierten Hall-Sensor-Positionsmesssystems

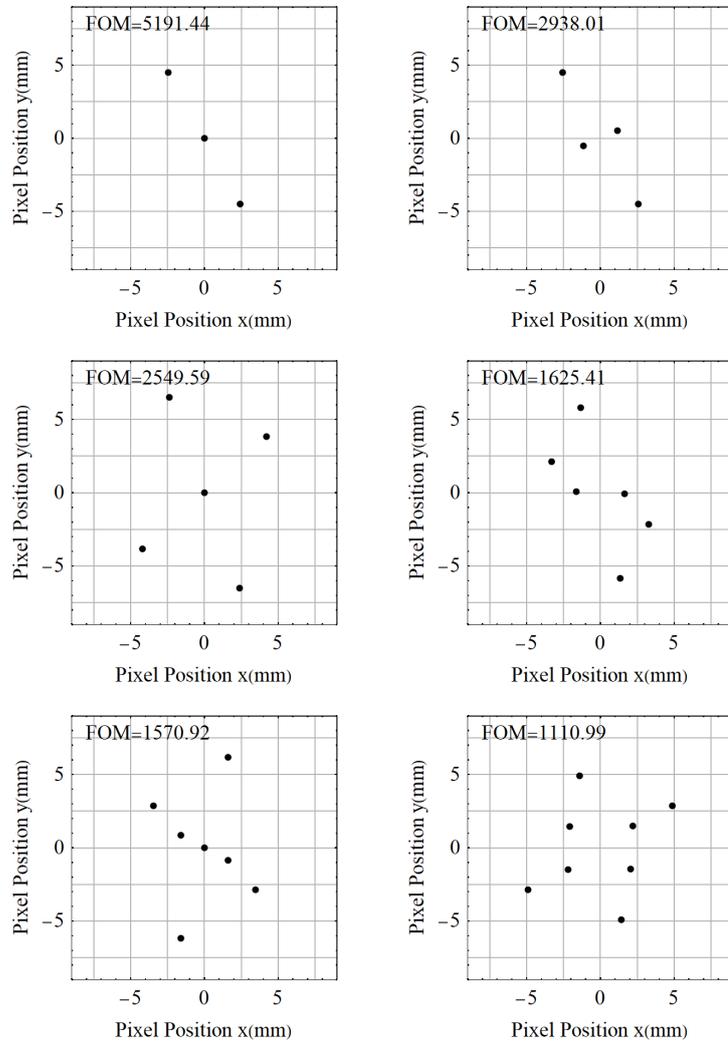
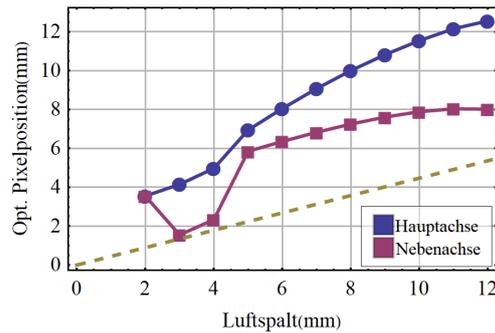
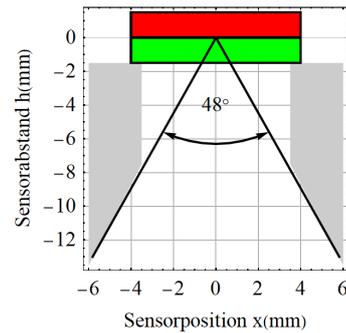


Abbildung 6.2.: Optimale Hall-Sensor Pixelanordnungen zur Positionsbestimmung mit sechs Freiheitsgraden für den Arbeitspunkt $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 5 \text{ mm}, 0, 0, 0)^T$ und eine Magnetgröße von $(x_b, y_b, z_b)^T = (8 \text{ mm}, 4 \text{ mm}, 3 \text{ mm})^T$

6.4. Messungen mit der optimierten Anordnung



(a) Optimaler Sensorabstand für unterschiedliche Luftspalte h



(b) Schematische Darstellung des Bereiches in dem die optimale Platzierung der Sensorelemente möglich ist (grau)

Abbildung 6.3.: Optimale Sensorpositionen zur Bestimmung sechs mechanischer Freiheitsgrade abhängig vom Luftspalt

6.4. Messungen mit der optimierten Anordnung

Mittels geeigneter Messungen sollten die theoretischen Ergebnisse der Optimierung verifiziert werden. Hierzu wurde wiederum die in Kap. 3.5 beschriebene Verschiebepattform mit sechs Freiheitsgraden verwendet. Die Messwerte lieferte die in Kap. 3.4 beschriebene Magnetfeldkamera mit 16×16 Pixeln. Hiermit war es möglich, eine nahezu beliebige ebene Pixelanordnung nachzubilden. Lediglich das festgelegte Raster der Kamera mit der Schrittweite 2.5 mm stellte eine Einschränkung dar. Die Pixel der Kamera wurden so gewählt, dass der Abstand zu den optimalen Pixeln minimal wird. Um einen Vergleich mit der Standardanordnung aus fünf Pixeln zu ermöglichen, wurde eine optimale Anordnung aus fünf Pixeln betrachtet. Abb. 6.4 zeigt die hierzu gewählten Pixel der Kamera. Die sonstigen Parameter der Messung,

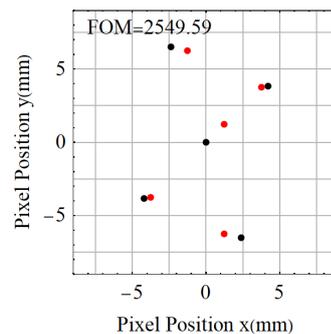


Abbildung 6.4.: Optimale Anordnung (schwarz) und gewählte Pixel der HallinSight-Kamera (rot)

insbesondere die Messzeit, und damit das Messrauschen, blieben identisch (auch

6. Entwurf eines optimierten Hall-Sensor-Positionsmesssystems

wenn aufgrund der Tatsache, dass die definierte Anordnung nur mit mehreren ICs zu realisieren wäre, von einer kürzeren Messzeit ausgegangen werden könnte). Mit dem UKF-Algorithmus wurde die Position mit sechs Freiheitsgraden geschätzt. Der unbekannte Parameter der Remanenzmagnetisierung des Magneten wurde durch eine separate Messung an einer definierten Position bestimmt und betrug für den betrachteten Magneten $M_z = 1030 \text{ kA m}^{-1}$.

Abb. 6.5 und 6.6 zeigen die Ergebnisse der Schätzung von Ort und Lage anhand der Messung von fünf Pixeln in der optimierten Anordnung (Opt) verglichen mit der Standardanordnung (Std). Auch wenn die resultierenden Fehler nicht die theoretische Schranke (CRLB) erreichen, so ist mit der optimierten Anordnung eine deutliche Verbesserung gegenüber der Standard-Anordnung zu erkennen (vgl. Kap. 5.4.2). Vor allem die Lage des Magneten lässt sich mit der optimierten Anordnung besser bestimmen. Der maximale Restfehler beträgt für alle Winkel unter 1.2° . Der Mittelwert des Fehlers ist nicht null, was darauf schließen lässt, dass weitere Einflussfaktoren wie Schiefmagnetisierung und Verkippung des Magneten eine Rolle spielen (vgl. Kap. 7.1). Um die Robustheit weiter zu erhöhen, und der theoretischen Schranke näher zu kommen, werden in den folgenden Kapiteln ausgehend von der optimierten Anordnung weitere Maßnahmen untersucht.

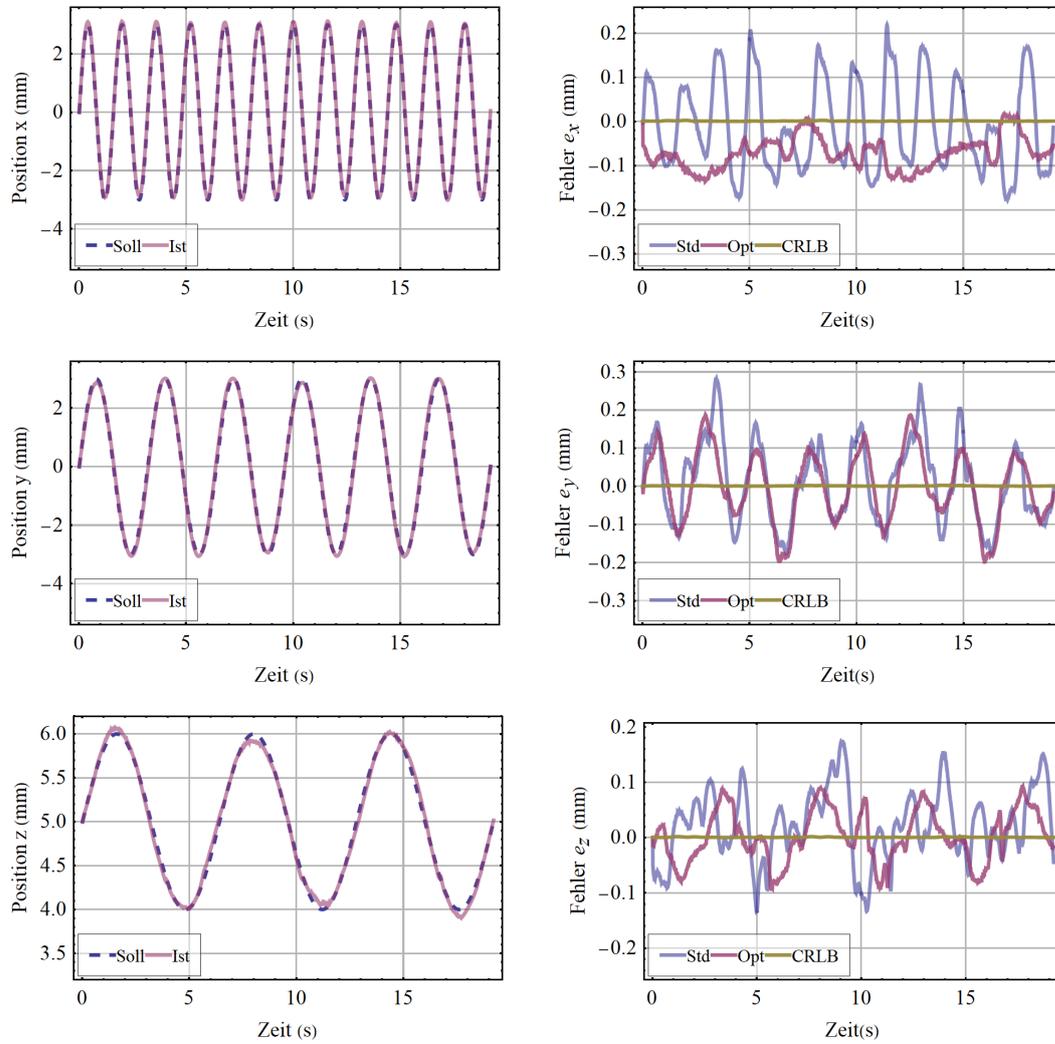


Abbildung 6.5.: Fehler der translatorischen Schätzung e_t , basierend auf den Messdaten einer optimierten Hall-Sensor-Anordnung mit fünf Pixelzellen (Opt) verglichen mit der entsprechenden CRLB und der Standardanordnung (Std)

6. Entwurf eines optimierten Hall-Sensor-Positionsmesssystems

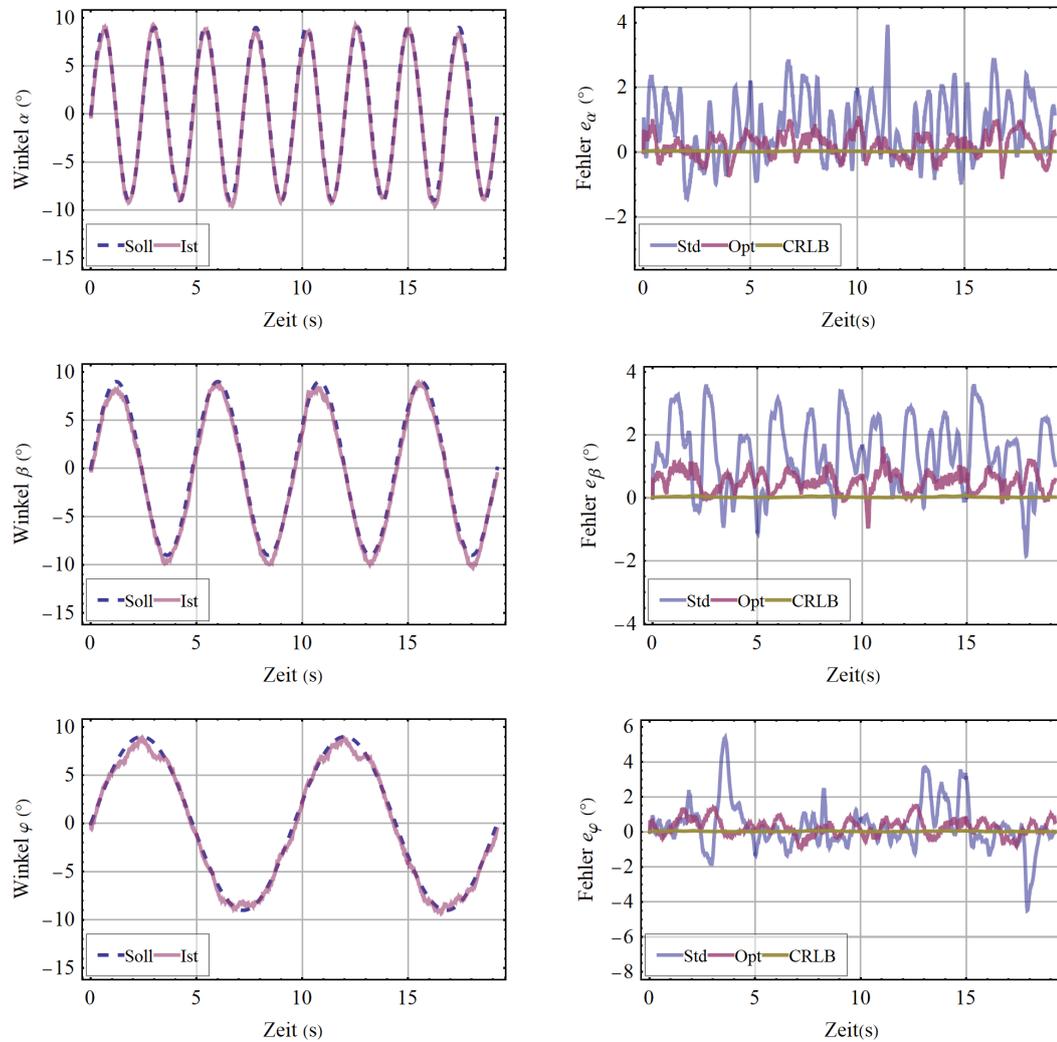


Abbildung 6.6.: Fehler der Orientierungs-Schätzung e_r , basierend auf den Messdaten einer optimierten Hall-Sensor-Anordnung mit fünf Pixelzellen (Opt) verglichen mit der entsprechenden CRLB und der Standardanordnung (Std)

7. Erhöhung der Robustheit

Wie bereits in Kap. 3.2 erläutert, gibt es zahlreiche Einflussfaktoren, die dazu führen, dass die theoretisch durch das thermische Rauschen der Sensoren definierten Grenzen in der Praxis nicht erreicht werden können. Die Abb. 7.1 zeigt eine Übersicht möglicher Fehlerquellen. Sie können vom Sensor selbst, der Signalverarbeitung, der Umgebung, dem Platinenaufbau und dem Magneten herrühren. Durch den modellbasierten Ansatz mithilfe des erwartungstreuen Unscented-Kalman-Filters konnte der Fehler der Signalverarbeitung und auch der Einfluss des Rauschens bereits reduziert werden. Die sensorspezifischen Nichtidealitäten wie Offset und Empfindlichkeitsabweichungen können zwar durch geeignete Kalibrierung minimiert werden (s. Kap. 3.4), dennoch ist mit einem Restfehler zu rechnen.

7.1. Sensitivitätsanalyse der Lokalisierungsgenauigkeit

Um den Einfluss der unterschiedlichen Faktoren auf die Positionsgenauigkeit abschätzen zu können, wurde aus vorhandenen Messdaten und Systemwissen (siehe Kap. 3.2) ein erweitertes Fehlermodell entwickelt. Für ein einzelnes magnetisches Pixel lautet es:

$$\mathbf{h}_{\mathbf{P},\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = S_{XYZ} \mathbf{S} \mathbf{h}_{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{\text{Off}} + \mathbf{w}_{\mathbf{n}} \quad (7.1)$$

$$= \begin{bmatrix} S_X & Q_{XY} & Q_{XZ} \\ Q_{YX} & S_Y & Q_{YZ} \\ Q_{ZX} & Q_{ZY} & S_Z \end{bmatrix} \mathbf{h}_{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} B_{\text{Off}X} \\ B_{\text{Off}Y} \\ B_{\text{Off}Z} \end{pmatrix} + \mathbf{w}_{\mathbf{n}}. \quad (7.2)$$

Der vektorielle Messwert eines Pixels $\mathbf{h}_{\mathbf{P},\mathbf{E}}(\mathbf{x})$ setzt sich aus einem homogenen Störfeld, überlagert mit dem Offset des jeweils verwendeten Pixels \mathbf{B}_{Off} , den Skalierungsparametern $S_{X..Z}$ und Parametern zur Korrektur etwaiger Querempfindlichkeiten auf orthogonale Felder $Q_{X..Y}$ zusammen. Um die Einflüsse der unterschiedlichen Parameter quantifizieren zu können, wurde eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, bei der jeweils nur ein Parameter der Gl. (7.1) oder Gl. (3.39) variiert wurde, sodass er seinem Minimal- bzw. Maximalwert entspricht [113]. Hiermit wurden Datensätze aus gestörten Magnetfeldmesswerten erzeugt, die wiederum zur Lokalisierung verwendet wurden. Das Sensorrauschen wurde in diesen Simulationen zu null gesetzt, um allein den Lokalisierungsfehler der jeweiligen Störung zu quantifizieren. Empfindlichkeitsänderungen wurden dabei so simuliert, dass alle Pixel der Anordnung die gleichen Abweichungen zeigten. Bei jeder Simulation wurde die Trajektorie gemäß Abb. 5.4-5.5 simuliert und das 95 %-Quantil [114] des

7. Erhöhung der Robustheit

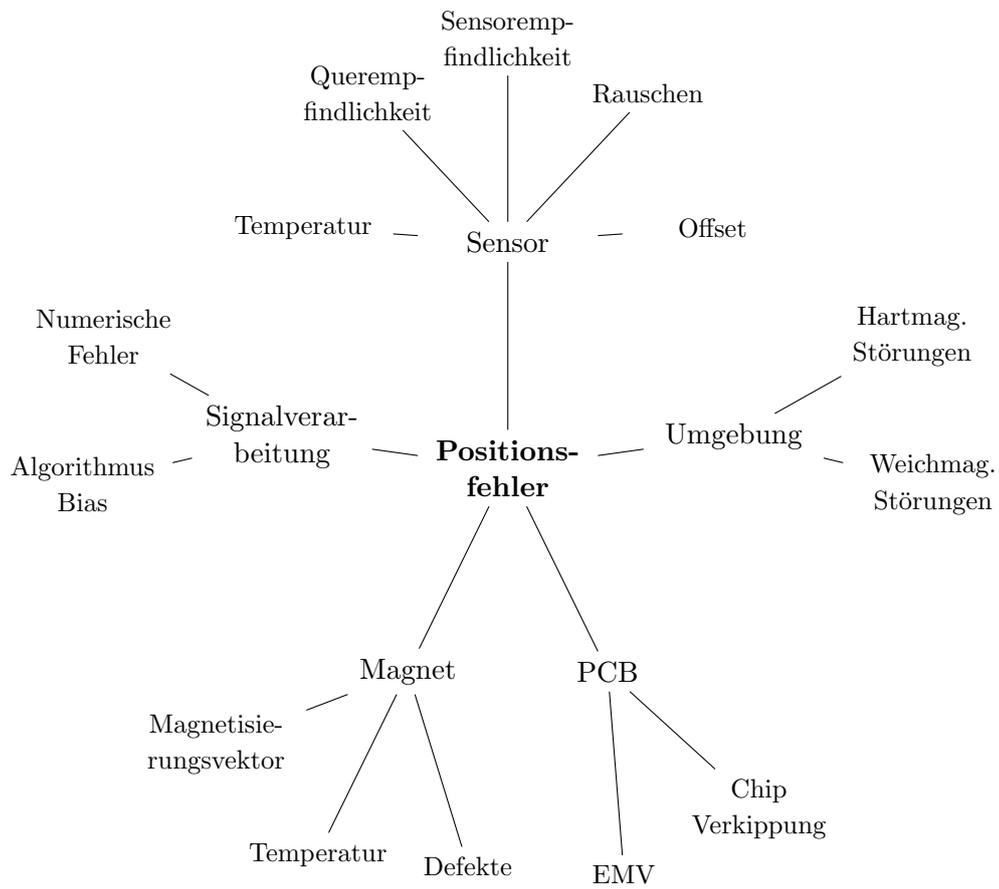


Abbildung 7.1.: Einflüsse auf die Genauigkeit magnetfeldbasierter Positionsmesssysteme

7.1. Sensitivitätsanalyse der Lokalisierungsgenauigkeit

Fehlerbetrags (Absolutbetrag der Differenz von Soll- und Schätzwert) der einzelnen Zustandsvariablen ($x_{err}, \dots, \varphi_{err}$) bestimmt. Tabelle 7.1 und 7.2 zeigen die Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse. Neben dem analysierten Parameter (Par.) sind die jeweiligen Aussteuerungsgrenzen (Max, Min) und die innerhalb der Standardtrajektorie maximal auftretenden 95 %-Quantile bei Maximal- und Minimalaussteuerung angegeben. Die Tabelle 7.1 zeigt den Lokalisierungsfehler durch sensorspezifische Nichtidealitäten. Da der Offset gemäß der Modellierung Gl. (7.1) auch durch ein Störfeld erzeugt werden kann, werden die Toleranzen folgendermaßen abgeschätzt: Die in Deutschland zulässigen Grenzwerte für statische magnetische Felder von Gleichstromanlagen liegen bei $500 \mu\text{T}$ [115]. Unter der Annahme, dass diese Grenzwerte auch in industriellen Anlagen und im Automobilbereich erreicht werden, dient dieser Wert als eine obere Schranke für die zu erwartende magnetische Beeinflussung des Lokalisierungssystems. Alle weiteren sensorspezifischen Parameter ergaben sich aus den Hall-Sensor-Eigenschaften (s. Kap. 3.2). Die Ergebnisse der Lokalisierung zeigen,

Par.	Min	Max	x_{err} (mm)	y_{err} (mm)	z_{err} (mm)	α_{err} (°)	β_{err} (°)	φ_{err} (°)
B_{offX}	$-500 \mu\text{T}$	$500 \mu\text{T}$	0.030	0.031	0.025	0.48	0.85	0.64
B_{offY}	$-500 \mu\text{T}$	$500 \mu\text{T}$	0.023	0.038	0.014	0.60	0.57	0.91
B_{offZ}	$-500 \mu\text{T}$	$500 \mu\text{T}$	0.084	0.108	0.041	2.66	2.04	1.62
S_X	0.99	1.01	0.010	0.007	0.010	0.12	0.25	0.29
S_Y	0.99	1.01	0.019	0.017	0.024	0.31	0.37	0.64
S_Z	0.99	1.01	0.042	0.029	0.019	0.37	0.49	0.80
Q_{xz}	-0.02	0.02	0.075	0.036	0.029	0.58	1.01	1.35
Q_{zx}	-0.02	0.02	0.046	0.030	0.015	0.37	1.03	0.79
Q_{yz}	-0.02	0.02	0.040	0.049	0.038	0.72	0.97	1.58
Q_{zy}	-0.02	0.02	0.033	0.027	0.028	1.47	0.74	1.07
Q_{xy}	-0.02	0.02	0.043	0.047	0.021	0.41	0.61	1.71
Q_{yx}	-0.02	0.02	0.017	0.021	0.022	0.35	0.58	0.77

Tabelle 7.1.: Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse auf sensorbezogene Parameter

dass der magnetische Offset zu einem Positionsfehler von bis zu $108 \mu\text{m}$ und einem Winkelfehler von bis zu 2.66° führt. Ebenfalls problematisch sind Abweichungen von der nominellen Empfindlichkeit der Sensoren. Diese führen bei der Lokalisierung zu einem Fehler von bis zu $75 \mu\text{m}$ und 1.71° . Besonders kritisch sind die Querempfindlichkeiten auf orthogonale Felder.

Eine Analyse magnetspezifischer Parameter wurde mit den in Tab. 7.2 aufgelisteten Grenzen (Min, Max) durchgeführt. Die Remanenzfeldstärke ist abhängig von der Temperatur des Magneten. Für die Abweichung vom Wert bei Raumtemperatur muss daher der gesamten spezifizierten Temperaturbereich zugrunde gelegt werden. Der Bereich der Remanenzfeldstärke berechnet sich aus dem Temperaturkoeffizienten $TK_M = -0.13\% \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ und dem Temperaturbereich für industrielle Elektronikkomponenten von -40°C bis 85°C . Aufgrund der Produktionsschritte bei der Her-

7. Erhöhung der Robustheit

stellung von Permanentmagneten (insbesondere bei der mechanischen Bearbeitung) kann die ideale und die tatsächliche magnetische Achse des Magneten voneinander abweichen (s. Kap. 3.6). Hersteller geben eine typische Abweichung von 2° an und garantieren Winkel von maximal 5° [116]. Bei einem Magneten mit der Remanenzfeldstärke von 1000 kA m^{-1} ist somit mit einer Magnetisierung in der Querrichtung von bis zu $\sin(5^\circ)M_0 = 87 \text{ kA m}^{-1}$ zu rechnen. Außerdem können die Abmessungen des Magneten nach der Verarbeitung um bis zu $100 \mu\text{m}$ variieren. Mit einem zusätzlichen Schleifprozess kann diese Toleranz auf unter $50 \mu\text{m}$ reduziert werden. Im Modell nach Gl. (3.30)-(3.32) sind die Geometrieparameter (x_b, y_b, z_b) sowie der Magnetisierungsvektor $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ bereits berücksichtigt, sodass hier kein zusätzliches Fehlermodell notwendig ist. Die Sensitivitätsanalyse zeigt, dass

Par.	Min	Max	x_{err} (mm)	y_{err} (mm)	z_{err} (mm)	α_{err} ($^\circ$)	β_{err} ($^\circ$)	φ_{err} ($^\circ$)
x_b	7.9 mm	8.1 mm	0.039	0.018	0.028	0.30	0.37	0.86
y_b	3.9 mm	4.1 mm	0.063	0.046	0.068	0.75	0.89	1.74
z_b	2.9 mm	3.1 mm	0.070	0.050	0.107	0.97	1.00	1.74
M_x	-87 kA m^{-1}	87 kA m^{-1}	0.268	0.054	0.052	0.77	3.33	1.32
M_y	-87 kA m^{-1}	87 kA m^{-1}	0.027	0.065	0.025	4.33	0.90	1.23
M_z	969 kA m^{-1}	1133 kA m^{-1}	0.133	0.093	0.178	1.72	1.95	3.41

Tabelle 7.2.: Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse anhand von Simulationen

die Magneteigenschaften zu einem Positionsfehler von bis zu $268 \mu\text{m}$ führen, wobei den größten Einfluss Magnetisierungstoleranzen haben. Der Abweichungswinkel von der nominellen Magnetisierungsrichtung bei Schrägmagnetisierung entspricht in etwa dem maximalen resultierenden Winkelfehler von 5° . Die Temperaturabhängigkeit der Remanenz M_z äußert sich in Fehlern von bis zu $178 \mu\text{m}$ und 3.41° . Die Toleranzen der Magnetgeometrie führen ebenfalls zu einem signifikanten Fehler von bis zu $107 \mu\text{m}$ und 1.74° .

Für einen Joystick mit mehreren bit geforderter Auflösung sind diese Positionstoleranzen nicht zufriedenstellend. Ein derartiger Winkelfehler würde die Anwendungen deutlich einschränken. Daher muss für eine robuste Anwendbarkeit der Einfluss der Störungen weiter reduziert werden.

Entsprechend der Ergebnisse wurde zunächst ein geeignetes Kalibrierverfahren entwickelt, das die Einflüsse aufgrund der gedrehten Magnetisierungsrichtung kompensiert. Den nächsten Haupteinflussfaktor stellt die Temperaturabhängigkeit der Remanenzflussdichte des Magneten dar. Auch hierfür musste eine geeignete Maßnahme gefunden werden. Im dritten Schritt hin zu einem robusten Positionssensor wurde der Einfluss des homogenen Störfeldes reduziert.

7.2. Charakterisierung von Permanentmagneten

Um die Unsicherheiten der Eigenschaften des Magneten und damit die Lokalisierungsfehler möglichst gering zu halten, kann eine Charakterisierung durchgeführt werden, bei der die Permanentmagneten magnetisch und geometrisch vermessen werden [117]. Anschließend werden Prüflinge mit unzureichenden Parametern typischerweise aussortiert und nur solche mit möglichst idealen Parametern zur Lokalisierung verwendet [118]. Durch die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden, insbesondere der Nutzung eines analytischen Messmodells zur Lösung des inversen Problems (modellbasierte Lokalisierung), ergibt sich die Möglichkeit, die gemessenen Parameter nach der magnetischen Vermessung im Lokalisierungsalgorithmus anzupassen und so die Genauigkeit zu verbessern. Diese Methode erfordert zwar eine Kennzeichnung während des Tests, ist aber aufgrund der höheren Ausbeute an verwendbaren Magneten dennoch wirtschaftlich interessant.

Eine Charakterisierung und Klassifizierung kann durch die Erweiterung der Lokalisierung mit sechs mechanischen Freiheitsgraden (s. Kap. 5) erfolgen. Hierbei sollen zusätzlich die magnetspezifischen Parameter geschätzt werden. Dadurch ergeben sich Unterschiede zur dynamischen Lokalisierung: Im Gegensatz zu einer *Variablen* ändert sich ein *Parameter* nicht, sondern bleibt während des Betrachtungszeitraums auf einem konstanten Wert. Im Kontext eines Kalman-Filters lassen sich Parameter als Zustandsvariable mit dem Prozessrauschen null beschreiben.

7.2.1. Systemmodell der Magnetcharakterisierung

Im Gegensatz zum Lokalisierungsproblem dient das System zur Charakterisierung der Magneten dem Produktionstest. Damit sind andere Anforderungen an die Messhardware gestellt. Ein solches System muss nicht zwingend kompakt aufgebaut sein und die Rechenleistung eines Standrechners kann genutzt werden. Im vorgeschlagenen Verfahren wird daher die in Kap. 3.4 beschriebene Kamera, ein System aus 256 3D Hall-Sensoren genutzt. Ein Viertel der Messdaten der Kamera geht in den Auswertalgorithmus ein. Der zu untersuchende Magnet wird auf dieser Kamera platziert und mit dem UKF-Verfahren eine Parameterschätzung mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = (x, y, z, \varphi, x_b, y_b, z_b, M_x, M_y, M_z)^T \quad (7.3)$$

durchgeführt. Die Parameter der Magnetgeometrie (x_b, y_b, z_b) und der Magnetisierung (M_x, M_y, M_z) werden durch das Magnetmodell Gl. (3.39) beschrieben. Neben den Magnetparametern sind auch hier die kinematischen Freiheitsgrade x, y, z und φ zu bestimmen, da die Position des Magneten auf der Kamera als unbekannt angenommen wird. Den Magneten mechanisch an einer vordefinierten Position zu fixieren wäre konstruktiv aufwendiger, und wiederum mit Toleranzen behaftet. Die Winkel α und β können jedoch in guter Näherung mit null angegeben werden, sofern sich der Magnet auf einer ebenen Fläche parallel zur Sensorebene befindet. Die charak-

7. Erhöhung der Robustheit

teristische Länge der Anordnung wurde zur Analyse der Beobachtbarkeit mit

$$CL = \begin{pmatrix} 20 \text{ mm} \\ 20 \text{ mm} \\ 5 \text{ mm} \\ 10^\circ \\ 180 \mu\text{m} \\ 180 \mu\text{m} \\ 180 \mu\text{m} \\ 180 \text{ kA m}^{-1} \\ 180 \text{ kA m}^{-1} \\ 180 \text{ kA m}^{-1} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

angenommen, sodass mit $\kappa = 1/32$ eine Schätzung der Magnetparameter mit der Auflösung $5 \mu\text{m}$ und 5 kA m^{-1} spezifiziert wurde. Mit diesen Werten ist von einer Verbesserung der in Kap. 7.1 erreichten Werte auszugehen.

Abb. 7.2 stellt den unter diesen Spezifikationen beobachtbaren Bereich für die Magnetcharakterisierung dar. Wird der Magnet mit den Abmessungen $(x_b, y_b, z_b)^T = (8 \text{ mm}, 4 \text{ mm}, 3 \text{ mm})^T$ mittig auf der Magnetfeldkamera platziert, so können die Magnetparameter inklusive der Position bis zu einem Abstand von 4 mm bestimmt werden. Dieser Abstand kann auch noch erreicht werden, wenn die Kamera mit einer Auflagefläche zum Test der Magneten versehen wird. Die Beobachtbarkeit ist also für das Messsystem mit zehn Freiheitsgraden auch in einem für den Produktionstest tauglichen Aufbau gegeben. Das Ziel der Parameterschätzung im Rahmen einer Magnetcharakterisierung ist es, die Modellparameter x_b, y_b, z_b, M_x, M_y und M_z so zu bestimmen, dass ein Messvektor \mathbf{y} möglichst exakt angenähert wird. Wie bereits im Fall der Lokalisierung beschrieben, wird hierzu der Unscented Kalman Filter (UKF) verwendet. Dieser nutzt die Messfunktion $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, welche die Einflüsse der Magnetparameter abbildet. Die Kovarianzmatrix des Prozessrauschens \mathbf{Q} ist im Falle der Parameterschätzung null. Die Unsicherheit über die Parameter wird alleine durch die initiale Kovarianzmatrix \mathbf{P}_0^+ gem. Gl. (3.85) definiert. Diese ergibt sich aus den Herstellerangaben als Diagonalmatrix mit den Elementen:

$$P_{xb} = P_{yb} = P_{zb} = (100 \mu\text{m})^2 \quad (7.5)$$

$$P_{MX} = P_{MY} = P_{MZ} = (87 \text{ kA m}^{-1})^2. \quad (7.6)$$

7.2.2. Messergebnisse

Das vorgestellte Verfahren zur Magnetcharakterisierung mittels des UKF wurde anhand einer Reihe von Testmagneten messtechnisch verifiziert. Mangels Referenzmagneten mit exakt definierten Parametern wurden die einzelnen Magneten zunächst auf der Vorrichtung platziert, und anschließend in 90° -Schritten gedreht. Abb. 7.3 zeigt die Vorgehensweise bei der Messung. Unter der Annahme, dass eine homogene Magnetisierung vorliegt, dreht sich der geschätzte Wert des Magnetisierungsvektors ebenfalls und die Magnetcharakterisierung kann somit plausibilisiert werden. Abb. 7.4 zeigt die Ergebnisse der Parameterschätzung für fünf Magneten. Jeweils vier auf-

7.2. Charakterisierung von Permanentmagneten

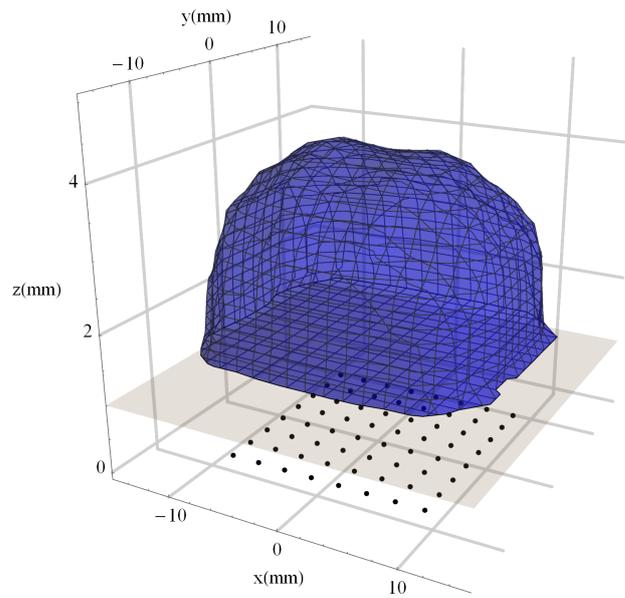


Abbildung 7.2.: Beobachtbarer Bereich (blau) (gem. Kap. ?? für 10 Freiheitsgrade (Position und Magnetparameter) beim Zustand $\mathbf{x} = (x, y, z, 0, 8\text{mm}, 4\text{mm}, 3\text{mm}, 0, 0, 1\text{M A m}^{-1})$). Die graue Ebene begrenzt den praktisch nutzbaren Bereich (keine Kollision von Magnet und Sensor).

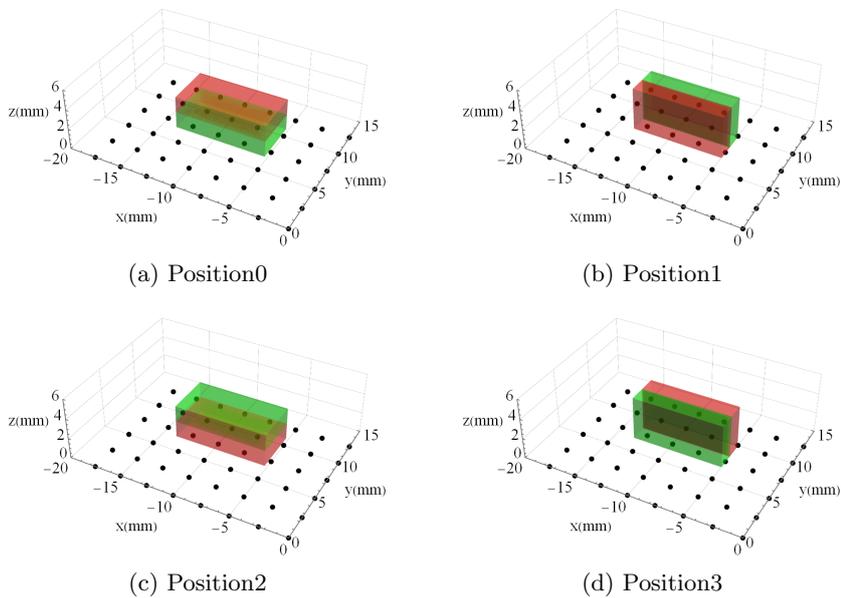


Abbildung 7.3.: Vorgehensweise bei der Messung der Magnetparameter

7. Erhöhung der Robustheit

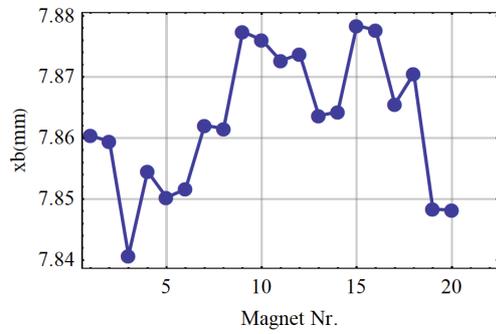
einanderfolgende Messungen sind mit demselben Magneten aber unterschiedlicher Positionierung auf der Kamera durchgeführt worden und die geschätzten Parameter entsprechend der Orientierung des Magneten zugeordnet worden. Die geschätzte Länge der Magneten bewegt sich im Bereich von 7.84 mm bis 7.88 mm, wobei die Schätzung für die Messungen des jeweiligen Magneten um $\pm 2\mu\text{m}$ variiert. Die Abmessung ist damit bei jedem Prüfling unter dem nominellen Wert von 8 mm. Dies kann durch die Toleranzen beim Sägen, aber auch durch die Beschichtung des Magneten (vgl. Kap. 3.6) erklärt werden. Die anderen beiden geometrischen Parameter zeigen deutlichere Abweichungen von Magnet zu Magnet, aber auch bei Betrachtung eines einzelnen Magneten. Die Abweichungen bewegen sich im Bereich der vom Hersteller spezifizierten Magnettoleranzen. Eine Verbesserung der Lokalisierung mithilfe einer Korrektur der Geometrieparameter ist daher nur bedingt zu erwarten.

Anders bei den Ergebnissen der Magnetisierungsschätzung: Die zur spezifizierten Magnetisierungsrichtung orthogonalen Komponenten M_x und M_y betragen bis zu 40 kA m^{-1} , was einer Schiefmagnetisierung von 2.3° entspricht. Da die Werte für die jeweiligen Magneten um weniger als 10 kA m^{-1} abweichen, können diese als Kalibrierparameter im Lokalisierungsalgorithmus sinnvoll eingesetzt werden. Die Magnetisierung M_z variiert um ca. 2% von Messung zu Messung und korreliert mit der Schätzung der Magnetgeometrie: Eine hohe Magnetisierung wird durch einen kleineren Magneten in der Schätzung wieder ausgeglichen.

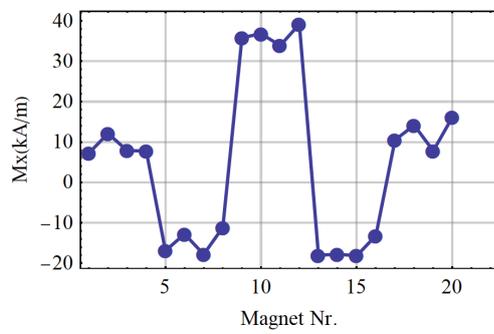
7.2.3. Innovationsbasierte Defekterkennung

Neben parametrischen Abweichungen von den Nennwerten des Magneten, die im Messmodell erfasst werden können, treten auch nicht-modellierbare Fehler auf. Diese können durch Brüche, Löcher oder Einschlüsse besonders in gesinterten Magneten [119], aber auch infolge partieller Entmagnetisierung entstehen [120] [121]. Um solche Defekte ebenfalls zu erkennen und die Magneten entsprechend zu klassifizieren, kann die Abweichung zwischen den tatsächlichen Messwerten \mathbf{y} und den geschätzten Messwerten $\hat{\mathbf{y}}$ herangezogen werden. Diese Differenz wird im Rahmen des Kalman-Filter Algorithmus als Innovation bezeichnet. Sie beschreibt den Anteil an einer Messung, der neue Informationen über den Zustand des Messsystems enthält. Sie wird mit der Kalman-Verstärkung \mathbf{K} multipliziert und aktualisiert damit die Zustandsschätzung (s. Kap. 3.9.2). Für ein lineares Kalman-Filter mit der Messmatrix \mathbf{H} kann gezeigt werden, dass der Innovationsterm den Mittelwert null, eine definierte Kovarianz ($H_k P_k^- H_k^T + R_k$) und ein weißes Spektrum besitzt [75]. Sind diese Eigenschaften im Messsystem nicht erfüllt, ist dies ein Hinweis dafür, dass das Modell sich nicht in Übereinstimmung mit den Messwerten bringen lässt. Damit kann die Innovation als ein Indikator für Fehler im Messsystem dienen. Anders als bei der magnetischen Kalibrierung können die Ergebnisse allerdings nicht im Systemmodell der Lokalisierung verwendet werden, sondern lediglich, um fehlerhafte Magneten auszusortieren. Um eine skalare Messgröße aus der Innovation zu gewinnen, wird

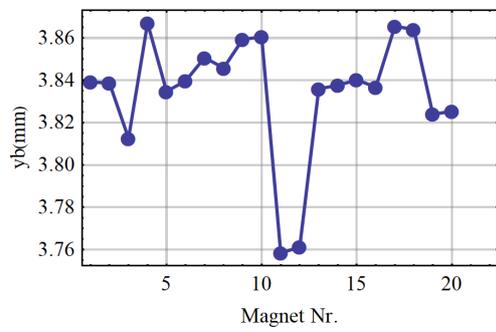
7.2. Charakterisierung von Permanentmagneten



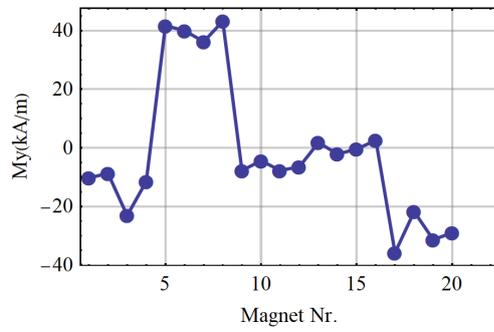
(a) Abmessung x_b



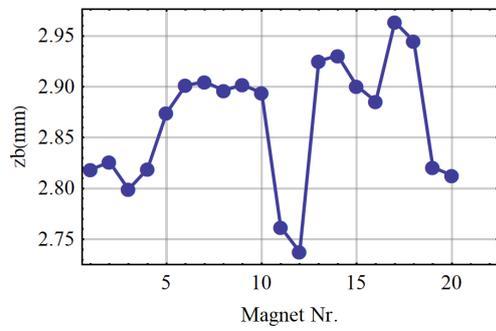
(b) Magnetisierung M_x



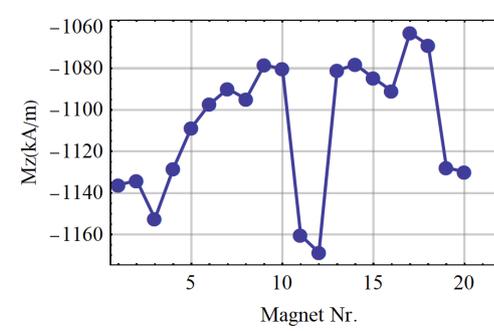
(c) Abmessung y_b



(d) Magnetisierung M_y



(e) Abmessung z_b



(f) Magnetisierung M_z

Abbildung 7.4.: Ermittelte Magnetparameter einer Reihe von 5 Magneten

7. Erhöhung der Robustheit

der Vergleichswert

$$\mathbf{r}_{rel} = \frac{|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}|}{|\hat{\mathbf{y}}|} \quad (7.7)$$

analog zum relativen Fehler in Gl. (3.111) gebildet. r_{rel} beschreibt die relative Abweichung des geschätzten Messvektors zum gemessenen. Für einen defekten Magnet wäre ein hoher Wert zu erwarten, wenn die Fehler nicht mithilfe der Zustandsgrößen und des Modells abgebildet werden können. Umgekehrt bedeutet allerdings eine gute Übereinstimmung zwischen Modell und Messung nicht, dass die Schätzung korrekt ist. Beispielsweise lässt eine Messfunktion, die Zustandsvariablen für sämtliche Nullpunktsfehler \mathbf{B}_{off} enthält, die Innovation für beliebige Messwerte mittelwertfrei werden. Zur Zustandsschätzung wird wiederum der Vektor der Magnetcharakterisierung aus Kap. 7.2.1 verwendet und dementsprechend das Messmodell $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

Verifikation des Verfahrens zur Defekterkennung

Um die innovationsbasierte Defekterkennung zu verifizieren, wurden mechanische sowie magnetische Defekte an verschiedenen Magneten erzeugt. Um die Magneten einfacher bearbeiten zu können wurden hierbei Magneten der Größe

$$(x_b, y_b, z_b)^T = (19.1 \text{ mm}, 12.7 \text{ mm}, 6.4 \text{ mm})^T \quad (7.8)$$

verwendet und nicht der kleine Magnet der Messungen aus den vorhergehenden Kapiteln. Abb. 7.5 zeigt schematisch einen Defekt, der an dem Magneten durch Nassschleifen erzeugt wurde. Vier Millimeter Material wurden auf diese Weise abgetragen. Andere Fehler wurden durch starkes lokales Erhitzen des Magneten über 200° und 300° erzeugt. Der untersuchte gesinterte Seltenerd magnet (NdFeB) hat eine Curie-Temperatur von $310 - 370^\circ$. Nach dem partiellen Erhitzen des Magneten wurde dieser gleichförmig erhitzt und die Charakterisierung inklusive Defekterkennung erneut durchgeführt. Tab. 7.3 zeigt die Ergebnisse der Analyse. Der geschliffene

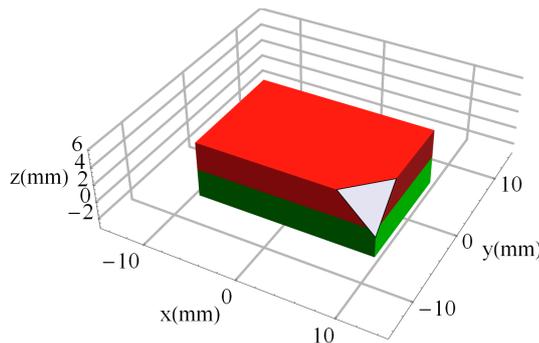


Abbildung 7.5.: Schematische Darstellung des Defekts am Testmagneten (G)

Magnet gemäß Abb. 7.5 (G) führt zu einem deutlich erhöhten Wert der relativen

7.3. Kompensation der Temperaturabhängigkeit

Bez.	\hat{x}_b (mm)	\hat{y}_b (mm)	\hat{z}_b (mm)	\hat{M}_x (kA m ⁻¹)	\hat{M}_y (kA m ⁻¹)	\hat{M}_z (kA m ⁻¹)	\mathbf{r}_{rel} (%)
T30	18.58	12.23	5.42	-5.57	952.50	-4.06	0.099
T200	18.93	11.91	5.08	2.33	726.00	0.18	0.518
T300	18.49	9.16	2.97	-11.44	1300.05	-1.93	0.829
T300Uni	19.98	13.55	5.49	2.01	302.94	0.13	0.058
G	16.92	14.03	5.67	-958.81	-2.05	8.62	0.356

Tabelle 7.3.: Schätzung der Magnetparameter und relative Innovation \mathbf{r}_{rel} für verschiedene Magnetdefekte

Innovation von \mathbf{r}_{rel} wobei auch die geometrischen Parameter auf eine Deformation des Magneten hindeuten. Partielles Erhitzen des Magneten auf 200° (T200) resultiert ebenfalls in einem erhöhten \mathbf{r}_{rel} und einer reduzierten Magnetisierung nach dem Abkühlen des Magneten. Nach partiellem Erhitzen auf 300° (T300) liefert die Schätzung einen kleineren Magneten mit einer erhöhten Magnetisierung bei einer relativen Innovation von 0.82%. Die geschätzten Werte der Magnetparameter sind also unplausibel. Offensichtlich kann das angenommene Modell die Messwerte nicht abbilden. Anhand der relativen Innovation kann aber der Magnet klassifiziert und als Defekt eingeordnet werden.

Ein gleichförmiges Erhitzen des Magneten auf 300° (T300Uni) sorgt dafür, dass das Messmodell wieder besser zu den Messwerten passt. Die Innovation geht auf einen Wert unter 0.05% zurück. Die Magnetisierung ist aber auch nach dem Abkühlen deutlich gegenüber dem Ausgangszustand bei $T = 30^\circ$ (T30) reduziert. Die vorgeschlagene Methode kann also grundsätzlich dazu eingesetzt werden Defekte in Magneten im Rahmen eines Produktionstests zu erkennen, und so deren Einfluss auf die Lokalisierungsgenauigkeit bzw. einen Ausfall des Messsystems zu vermeiden.

7.3. Kompensation der Temperaturabhängigkeit

Sowohl die Remanenz des Magneten wie auch die Empfindlichkeit des Sensors zeigen eine Temperaturabhängigkeit, die signifikanten Einfluss auf die Lokalisierungsgenauigkeit hat (s. Tab. 7.1). Während Letztere mithilfe eines Temperatursensors und einer abgespeicherten Kennlinie kompensiert werden kann, ist die Magnetremanenz im System meist unbekannt, da die Magnettemperatur von der Sensortemperatur abweicht, und daher nur unter großem Aufwand gemessen werden kann. Ein robustes Lokalisierungsverfahren sollte tolerant gegenüber dieser Temperaturabhängigkeit, sowie irreversiblen Magnetisierungsverlusten sein. Hierzu bieten sich zwei Möglichkeiten als Erweiterung des UKF-Lokalisierungsverfahrens an: zum einen eine Erweiterung der Zustandsvariablen des Schätzers um einen Skalierungsfaktor $S_{XYZ} = M_T/M_0$ (s. Gl. (7.1)), zum anderen eine Modifikation des Messmodells in Verbindung mit einer Vorverarbeitung des Messvektors, sodass die Abhängigkeit von \mathbf{M} direkt eliminiert wird. Dies kann durch Quotientenbildung einzelner Mess-

7. Erhöhung der Robustheit

größen erreicht werden. Beide Varianten sollen im Folgenden untersucht und gegenübergestellt werden. Ausgangspunkt ist hierbei die mithilfe der CRLB optimierte Sensoranordnung mit fünf Pixeln (s. Kap. 6.2) zur Anwendung als Bedienelement mit sechs Freiheitsgraden (s. Kap. 3.1).

7.3.1. Schätzung der Temperatur

Um neben den sechs mechanischen Freiheitsgraden auch die temperaturabhängige Änderung der Magnetisierung zu erfassen, wird der Zustandsvektor um den Skalierungsparameter S_{XYZ} (vgl. Gl. (7.1)) ergänzt, sodass

$$\mathbf{x} = (x, y, z, \alpha, \beta, \varphi, S_{XYZ})^T. \quad (7.9)$$

S_{XYZ} beschreibt die relative Änderung gegenüber der Magnetisierung bei Raumtemperatur M_0 . Somit ist $S_{XYZ} = |M|/|M_0|$. Die für die Analyse der Beobachtbarkeit relevante charakteristische Länge muss für den zusätzlichen Freiheitsgrad separat gewählt werden. Der temperaturabhängige Faktor soll auf 1 % genau im Bereich $\pm 50\%$ bestimmt werden, damit der Einfluss auf die Lokalisierung reduziert wird, die charakteristische Länge berechnet sich also mit $\kappa = 0.01$ zu $CL_T = 1.0$.

Abb. 7.6 zeigt den beobachtbaren Bereich der Lokalisierung mit sieben Freiheitsgraden (Gl. (7.9)) im Vergleich zur Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden. Der Bereich ist nahezu identisch. Lediglich der Schnitt bei $y = -3\text{ mm}$ lässt eine geringfügige Einschränkung durch den zusätzlichen Freiheitsgrad erkennen. Eine temperaturrobuste Lokalisierung ist also möglich, ohne dass dadurch der Bewegungsbereich des Bedienelementes entscheidend eingeschränkt werden muss.

7.3.2. Temperaturkompensation durch Normierung

Alle Komponenten des Messvektors \mathbf{y} werden gleichermaßen von der temperaturbedingten Änderung der Flussdichte beeinflusst. Somit wird auch die Norm des Messvektors \mathbf{y} mit $S_{XYZ} = |M/M_0|$ skaliert. Um nun aus dem Gleichungssystem mit temperaturabhängigen Gleichungen ein System aus temperaturunabhängigen Gleichungen zu erhalten, wurde der Messvektor und das Messmodell normiert, sodass sich die modifizierte Vektoren

$$\mathbf{y}' = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_2} \quad (7.10)$$

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_2} \quad (7.11)$$

ergeben. Der Lokisierungsalgorithmus ist damit nicht mehr abhängig von den Absolutmessungen der Flussdichte, sondern lediglich von der Relation der einzelnen Messkomponenten zur Länge des Messvektors. Die normierten Werte zeigen damit auch keine invers kubische Abhängigkeit vom Abstand zum Magneten. Um das Modell mittels des UKF zur Lokalisierung nutzen zu können, ist eine Anpassung des

7.3. Kompensation der Temperaturabhängigkeit

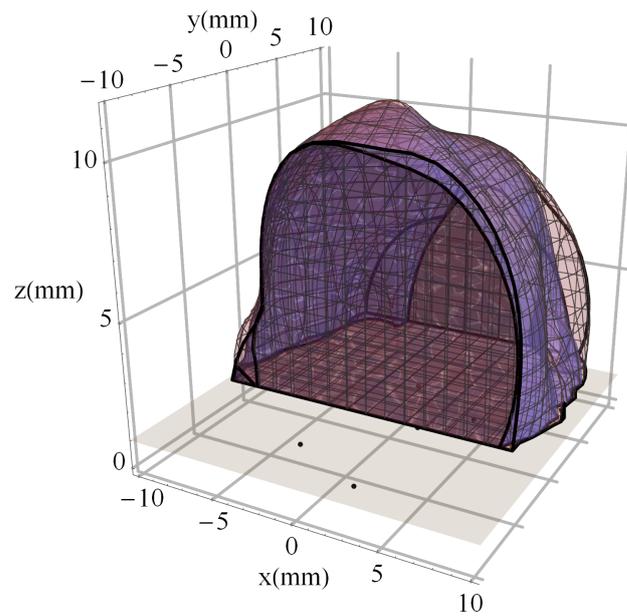


Abbildung 7.6.: Beobachtbarer Bereich der Lokalisierung bei zusätzlicher Temperaturschätzung (blau) im Vergleich zur Lokalisierung mit sechs mechanischen Freiheitsgraden (rot); geschnitten bei $y = -3$ mm

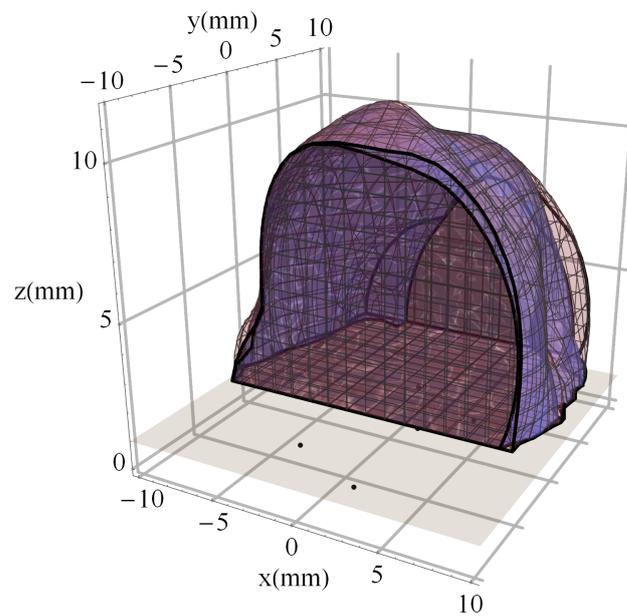


Abbildung 7.7.: Beobachtbarer Bereich der Lokalisierung bei Temperaturkompensation durch Normierung (blau) im Vergleich zur alleinigen Lokalisierung (rot)

7. Erhöhung der Robustheit

Fehlermodells nötig. Das angepasste Fehlermodell der Messung lautet:

$$\mathbf{y}_n = \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_n}{|\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_n|} \stackrel{\mathbf{w}_n \ll \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\approx} \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{|\mathbf{h}(\mathbf{x})|} + \frac{\mathbf{w}_n}{|\mathbf{h}(\mathbf{x})|}. \quad (7.12)$$

Unter der Annahme, dass der Rauschanteil der Messung wesentlich kleiner als die Länge des Messvektors ist, können die Fehler weiterhin durch additives weißes Rauschen beschrieben werden. Das Messrauschen muss entsprechend der Messung, also während des Betriebes, normiert werden. Damit wird:

$$\mathbf{R}_n = \frac{\mathbf{R}}{|y|^2} \quad (7.13)$$

$$\approx \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{h}(\mathbf{x}^-)|^2} \quad (7.14)$$

Gl. (7.13) kommt dabei ohne einen Aufruf der Modellfunktion aus, ist allerdings abhängig von der Länge des nicht normierten Messvektors \mathbf{y} und damit auch von der Magnetisierung \mathbf{M} . Eine Alternative bietet Gl. (7.14). Hier wird die Messfunktion mit dem a priori Schätzwert \mathbf{x}^- ausgewertet.

Abb. 7.7 zeigt die beobachtbare Region der quotientenbasierten Temperaturkompensation. Die Beobachtbarkeit ist auch bei dieser Variante der Temperaturkompensation geringfügig eingeschränkt, allerdings etwas weniger stark als bei einer zusätzlichen Temperaturschätzung.

7.3.3. Vergleich der Varianten zur Temperaturkompensation

Abb. 7.8 zeigt den Vergleich der Varianten zur Temperaturkompensation und der Schätzung mit nur sechs Freiheitsgraden (6DoF) anhand der CRLB (vgl. Kap. 3.10.4). Die Komponenten x , y , α , β und φ sind mit allen drei Verfahren identisch. Lediglich bei der z -Komponente ist eine Verschlechterung der Genauigkeit um mehr als eine Größenordnung zu erwarten. Die Kompensation durch Temperaturschätzung (7DoF) und durch Normierung (Norm) unterscheiden sich dabei nicht signifikant. Während bei der Normierung die kubische Abhängigkeit der Messfunktion vom Abstand des Magneten verloren geht und somit sich auch der für die Genauigkeit maßgebliche Gradient der z -Komponente betragsmäßig verkleinert, sorgt bei der Temperaturschätzung eine zusätzliche Variable für einen zusätzlichen Unsicherheitsfaktor bei der Bestimmung von z .

Beide Varianten eignen sich für eine temperaturrobuste Anwendung des betrachteten Bedienelementes. Die Variante mit Normierung verursacht nahezu den gleichen Rechenaufwand ($2n = 12$ Sigmapunke, s. Kap. 3.9.2) wie die Standardauswertung. Die Schätzung der Temperatur hingegen ($2n = 14$ Sigmapunke) geht mit einem zusätzlichen Aufwand von ca. 16 % einher.

Die Information über die Magnetisierung gegenüber der Magnetisierung bei 25 °C lässt sich aber je nach Anwendung nutzen. Ist die (nichtlineare) Kennlinie der Magnetisierung bekannt, so kann über die relative Magnetisierung die Temperatur des

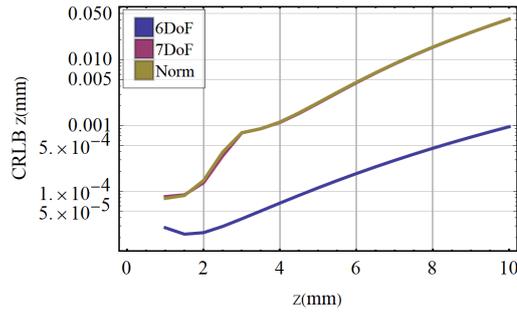


Abbildung 7.8.: Vergleich der Verfahren zur Temperaturkompensation anhand der Cramér-Rao-Schranke der z -Komponente(CRLB)

Magneten bestimmt werden. Damit könnte beispielsweise ein berührungsloser Temperatursensor realisiert werden.

7.3.4. Messergebnisse

Die Abbildungen 7.9 und 7.10 zeigen die Ergebnisse der Messungen mit dem temperaturrobusten Lokalisierungsverfahren basierend auf der Normierung (Norm). Der resultierende Fehler ist dem Fehler der Standardauswertung (Std, vgl. Kap. 5.4.2) mit der optimierten Anordnung von fünf Pixeln (s. Kap. 6.2) gegenübergestellt. Durch die modifizierte Algorithmik erhöht sich der Restfehler nur an wenigen Stellen der Trajektorie. Der Maximalfehler der x -Komponente und, wie anhand der Simulation im vorhergehenden Abschnitt erwartet, der z -Komponente, ist geringfügig größer als bei der Standardauswertung.

Die Fehler der Winkelschätzung (s. Abb. 7.10) bleiben bei der temperaturrobusten Variante gegenüber der Standardauswertung unverändert. Auch dies deckt sich mit den Simulationsergebnissen. Die Temperaturabhängigkeit des Magneten und auch Skalierungsparameter, die sich durch den Parameter S_{XYZ} in Gl. (7.1) beschreiben lassen, wirken sich nicht mehr auf die Lokalisierung aus. Einer der Haupteinflussfaktoren aus der Sensitivitätsanalyse (vgl. Tab. 7.2) kann somit eliminiert werden. Außerdem muss das Messsystem nicht mehr, wie in Kap. 5.4.2 beschrieben, magnetisch kalibriert werden. Somit bietet das beschriebene Verfahren deutliche Vorteile und vereinfacht den Einsatz magnetfeldbasierter Positionssensorik im Allgemeinen und den eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden im Speziellen.

7.4. Kompensation von Störfeldern

Einen weiteren wichtigen Einflussfaktor für das betrachtete Bedienelement, stellen magnetische Störfelder dar (s. Tab. 7.1). Störende Magnetfelder, die sich in großer Entfernung zum Sensor befinden, können als homogen approximiert werden. Wenn der Abstand zwischen zu lokalisierendem Magneten und dem Sensor deutlich geringer als der zur Ursache des Störfeldes ist, kann dieses als konstantes, homoge-

7. Erhöhung der Robustheit

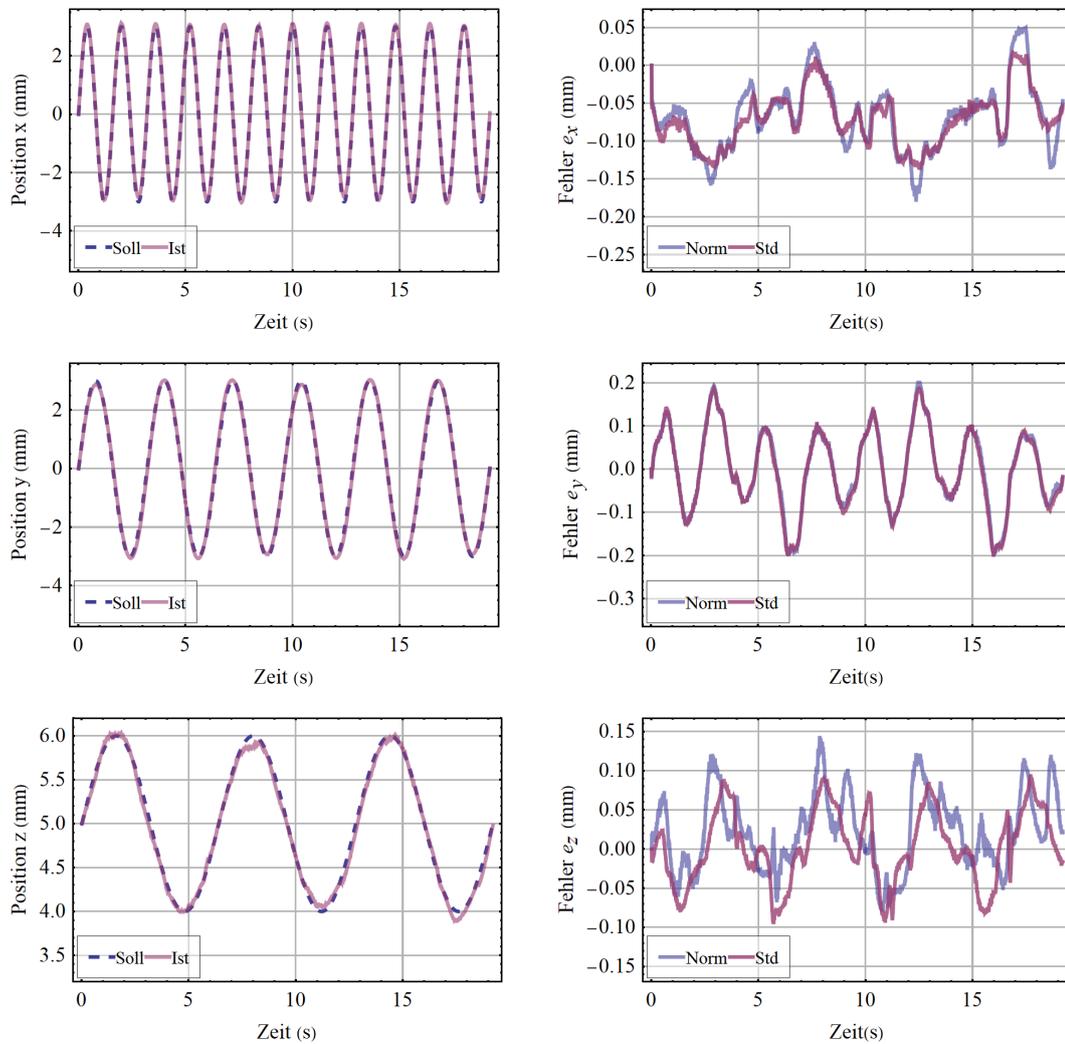


Abbildung 7.9.: Fehler der translatorischen Schätzung (e_t), basierend auf den Messungen, verglichen mit der Standard-Auswertung (Std); die Messung wurde mit der optimierten fünf Pixel-Anordnung durchgeführt

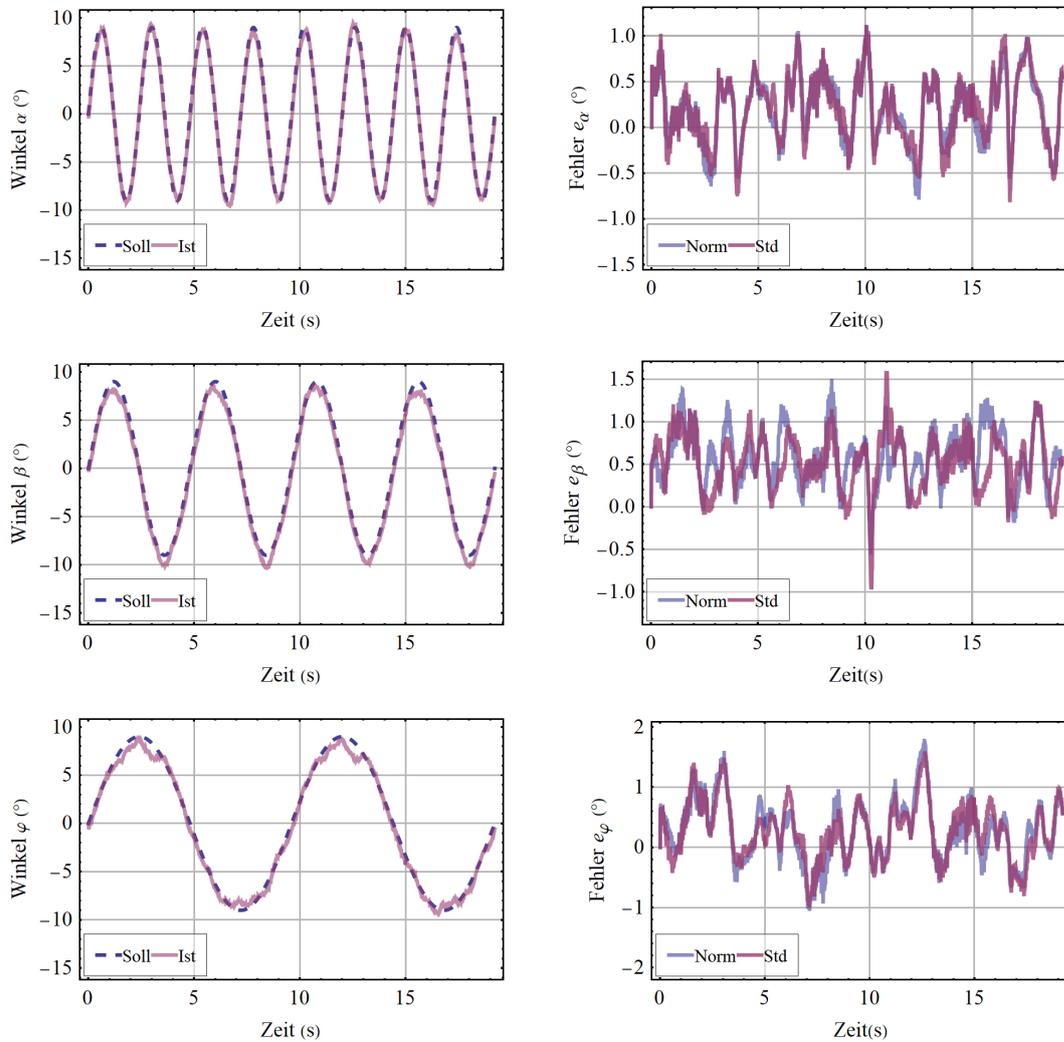


Abbildung 7.10.: Fehler der rotatorischen Schätzung (e_r), basierend auf den Messungen, verglichen mit der Standard-Auswertung (Std); die Messung wurde mit der optimierten fünf Pixel-Zellen-Anordnung durchgeführt

7. Erhöhung der Robustheit

nes Vektorfeld angenähert werden. Das Messmodell einer Messung mit homogenem Störfeld lautet demzufolge:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{B}_{\text{off}}) = \mathbf{h}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{\text{off}} \quad (7.15)$$

$$= \mathbf{h}_0(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Um das Messsystem auch robust hinsichtlich dieser Störung zu gestalten, kann wiederum eine Schätzung zusätzlicher Parameter, sowie eine Signalvorverarbeitung angewandt werden.

7.4.1. Schätzung des Störfeldes

Für eine Schätzung des Störfeldes wird der Zustandsvektor der Lokalisierung um drei Freiheitsgrade vergrößert:

$$\mathbf{x} = (x, y, z, \alpha, \beta, \varphi, B_x, B_y, B_z)^T. \quad (7.17)$$

Der Störfeldvektor soll bestimmt werden und damit die eigentliche Messung der Position und Orientierung robuster gestaltet werden. Die charakteristische Länge der Störfeldschätzung wird mit $CL_B = 1.6 \text{ mT}$ angenommen, sodass eine Auflösung von $50 \mu\text{T}$ bei $\kappa = 1/32$ erreicht wird. Der beobachtbare Bereich ist in Abb. 7.11 dargestellt. Der Bereich ist kleiner als bei einer reinen Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden. Das Volumen, in dem eine Lokalisierung mit den spezifizierten Parametern erfolgen kann, ist jedoch noch ausreichend für ein Bedienelement.

7.4.2. Gradientenbasierte Schätzung

Durch eine geeignete Differenzenbildung mehrerer Pixel ist es, ähnlich wie in Kap. 7.3.2 gezeigt, möglich die Abhängigkeit des Messvektors vom Störfeld zu eliminieren. Somit wird

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (7.18)$$

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{\text{off}}) - (\mathbf{h}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{\text{off}}) \quad \text{für } i \neq 0 \quad (7.19)$$

$$= \text{vec} \left(\begin{pmatrix} h_{1,x} & \dots & h_{p,x} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{1,z} & \dots & h_{p,z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_{0,x} \\ h_{0,y} \\ h_{0,z} \end{pmatrix} \right). \quad (7.20)$$

Der Operator $\text{vec}(\mathbf{A})$ bezeichnet die spaltenweise Vektorisierung der Matrix \mathbf{A} zu einem Spaltenvektor. Der Messvektor wird also in 3D Messwerte zerlegt, ein Referenzelement \mathbf{h}_0 ausgewählt und dieses von allen anderen 3D Messwerten subtrahiert. Es entsteht ein Gleichungssystem aus $m - 3$ Gleichungen. Die Anzahl der Bestim-

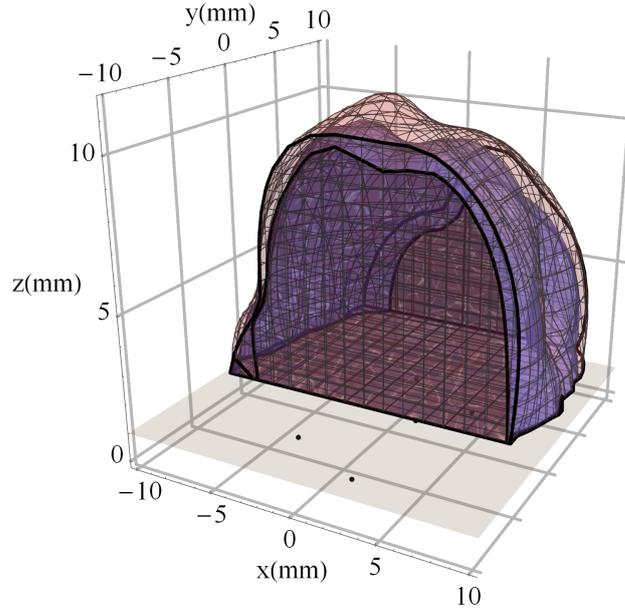


Abbildung 7.11.: Beobachtbarer Bereich der Lokalisierung bei zusätzlicher Störfeldschätzung (blau) im Vergleich zur Lokalisierung mit sechs mechanischen Freiheitsgraden (rot); geschnitten bei $y = -3$ mm

mungsgleichungen reduziert sich also. Das Fehlermodell lautet nun:

$$\mathbf{y}'_i = \mathbf{h}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_{ni} - \mathbf{h}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_{n0}. \quad (7.21)$$

Die Standardabweichung des Messrauschens ergibt sich aus der Summe der unabhängigen Rauschgrößen:

$$\mathbf{R}' = \sqrt{\mathbf{R} + \mathbf{R}} \quad (7.22)$$

$$= \sqrt{2}\mathbf{R}. \quad (7.23)$$

Das Messrauschen erhöht sich also um den Faktor $\sqrt{2}$. Abb. 7.12 zeigt den beobachtbaren Bereich der gradientenbasierten Lokalisierung. Der beobachtbare Bereich ist nahezu identisch mit dem der Störfeldschätzung, auch hier reduziert die erweiterte Schätzung den Bereich, aber trotz des deutlich robusteren Verfahrens ist in einem großen Bereich eine Lokalisierung mit sechs kinematischen Freiheitsgraden möglich.

7.4.3. Vergleich der Methoden

Zur Abschätzung der erreichbaren Genauigkeit wurde für die beiden Varianten die Cramér-Rao-Schranke berechnet. Abb. 7.13 zeigt die untere Schranke für die Standardauswertung (6DoF) die Störfeldschätzung (9DoF) und das gradientenbasierte Verfahren (Grad) zur Störfeldkompensation. Die größte Änderung ist in der φ -

7. Erhöhung der Robustheit

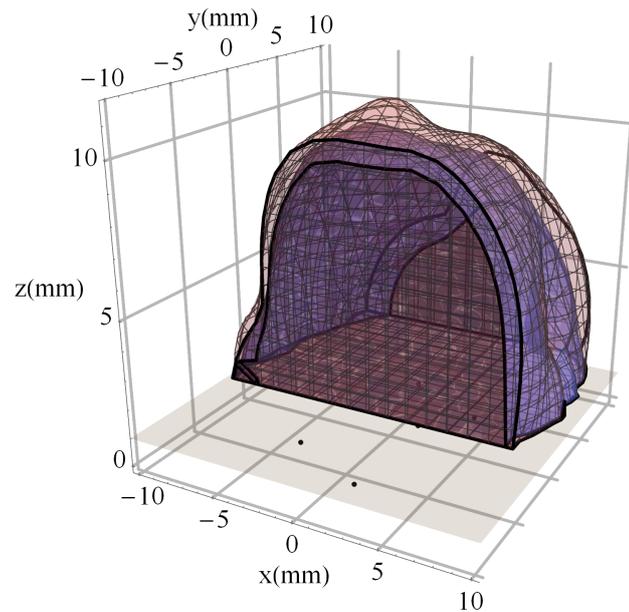


Abbildung 7.12.: Beobachtbarer Bereich der Gradientenmethode im Vergleich zur Standardvariante mit sechs Freiheitsgraden (rot); geschnitten bei $y = -3$ mm

Komponente zu sehen, während in den übrigen Freiheitsgraden nur mit einer geringfügigen Beeinflussung der Präzision zu rechnen ist.

Die CRLB für die zusätzlich geschätzten Parameter des Störfeldes, B_x, B_y liegen unterhalb von $20 \mu\text{T}$ und für B_z unterhalb von $10 \mu\text{T}$. Das Störfeld kann also ebenfalls sehr exakt bestimmt werden.

Beide Varianten zur Störfeldkompensation sind somit geeignet für ein robustes Lokalisierungsverfahren, wenn die Einschränkung des beobachtbaren Bereichs in Kauf genommen werden kann. Der Rechenaufwand für eine UKF basierte Schätzung mit neun Freiheitsgraden ($2 \cdot 9$ Sigmapunkte) ist allerdings deutlich höher als bei der gradientenbasierten Auswertung ($2 \cdot 6$ Sigmapunkte), die demnach zu bevorzugen ist.

7.4. Kompensation von Störfeldern

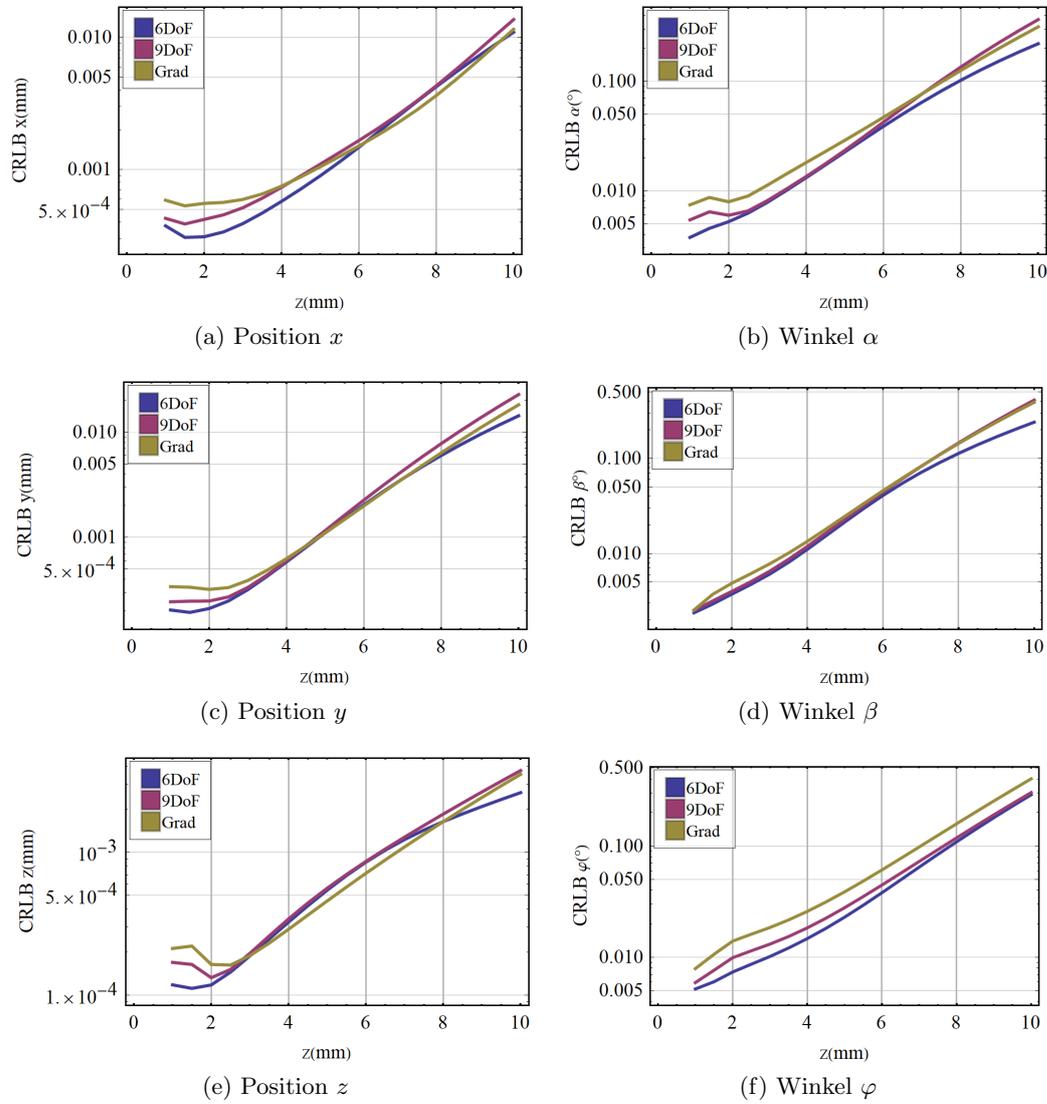


Abbildung 7.13.: Vergleich der Verfahren zur Störfeldkompensation anhand der Cramér-Rao-Schranke (CRLB)

7.5. Robustes Lokalisierungsverfahren

Die Kombination der Verfahren der vorhergehenden Abschnitte führt zu einem sowohl temperatur- als auch störfeldrobusten Lokalisierungsverfahren. Hierzu wird die Gradientenbildung und Normierung nacheinander angewandt. Somit ist

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (7.24)$$

$$\mathbf{y}_{\text{Grad}} = (\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{\text{off}}) - (\mathbf{h}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{\text{off}}) \quad \text{für } i \neq 0 \quad (7.25)$$

$$= \text{vec} \left(\begin{pmatrix} h_{1,x} & \dots & h_{p,x} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{1,z} & \dots & h_{p,z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_{0,x} \\ h_{0,y} \\ h_{0,z} \end{pmatrix} \right) \quad (7.26)$$

$$\mathbf{y}_{\text{Komb}} = \frac{\mathbf{y}_{\text{Grad}}}{\|\mathbf{y}_{\text{Grad}}\|_2}. \quad (7.27)$$

Der Operator $\text{vec}(\mathbf{A})$ bezeichnet die spaltenweise Vektorisierung der Matrix \mathbf{A} zu einem Spaltenvektor. Der Messvektor wird also wiederum in 3D Messwerte zerlegt, ein Referenzelement \mathbf{h}_0 ausgewählt und dieses von allen anderen 3D Messwerten subtrahiert. Im zweiten Schritt in Gl. (7.27) erfolgt die Normierung des Messvektors. Die Standardabweichung der Messung ergibt sich zu $\mathbf{R}' = \sqrt{2}\mathbf{R}$.

Abb. 7.14 zeigt den beobachtbaren Bereich des modifizierten Algorithmus. Im Vergleich zur Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden (rot) ist der Bereich weiter eingeschränkt, aber immernoch ausreichend für den Bewegungsbereich eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden.

Zum Vergleich wurde der beobachtbare Bereich ebenso mit der Standardanordnung aus fünf Pixeln (siehe Kap. 3.3) untersucht. In diesem Fall wäre der Bereich auf etwa 4 mm beschränkt. Die Optimierung aus Kap. 6 führt somit dazu, dass das modifizierte Verfahren angewandt werden kann.

Verifikation

Die Abbildungen 7.15 und 7.16 zeigen messdatenbasierte Lokalisierungsergebnisse des temperatur- und störfeldrobusten Verfahrens. Der Fehler der einzelnen Freiheitsgrade ist zum Vergleich den Ergebnissen der Standardlokalisierung (siehe Kap. 5.4.2) gegenübergestellt. Die angepasste Algorithmik sorgt demnach für einen geringfügig größeren Restfehler in den translatorischen Freiheitsgraden. Wie auch in den Simulationen in Kap. 7.3.3 steigt der Fehler der z -Komponente durch die Normierung am stärksten an.

Auch in den rotatorischen Freiheitsgraden ist eine Erhöhung des Lokalisierungsfehlers zu erkennen. Er steigt auf bis zu 1.75° . Das 95 % Quantil des Fehlerbetrages der Trajektorie ist $e_{Q95} = (37 \mu\text{m}, 135 \mu\text{m}, 89 \mu\text{m}, 0.94^\circ, 0.93^\circ, 1.3^\circ)$.

Wird zusätzlich ein magnetisch vermessener Magnet gem. Kap. 7.2 verwendet so beträgt der maximale Restfehler $(120 \mu\text{m}, 220 \mu\text{m}, 125 \mu\text{m}, 0.94^\circ, 1.20^\circ, 1.24^\circ)^T$ bzw. das 95 % Quantil $e_{Q95} = (90 \mu\text{m}, 143 \mu\text{m}, 74 \mu\text{m}, 0.43^\circ, 0.16^\circ, 0.77^\circ)^T$.

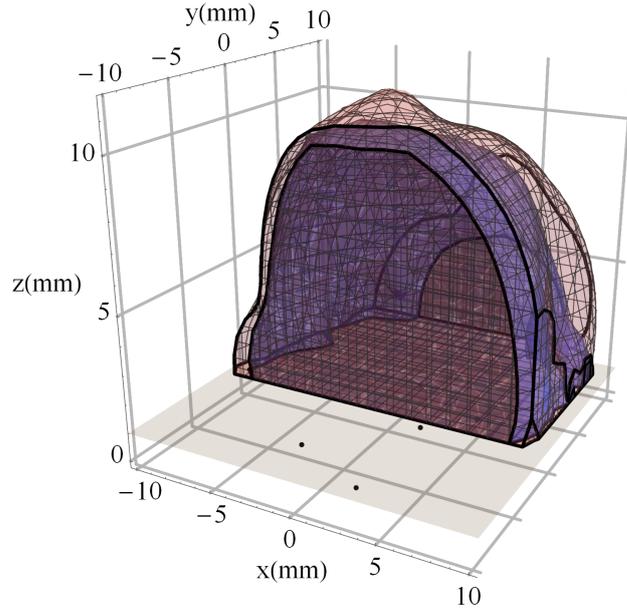


Abbildung 7.14.: Beobachtbarer Bereich der Lokalisierung beim robusten Verfahren (blau) im Vergleich zur Lokalisierung mit sechs mechanischen Freiheitsgraden (rot); geschnitten bei $y = -3$ mm

Die Sensitivitätsanalyse (vgl. Kap. 7.1) wurde für das robuste Verfahren wiederholt, um den Einfluss der Magnetisierung und des Störfeldes zu beurteilen. Tab. 7.4 zeigt die Ergebnisse dieser Simulation. Wie zu erwarten, zeigt der modifizierte Algorithmus keine Beeinflussung mehr von den betrachteten Störgrößen. Lediglich Abweichungen von bis zu $1 \mu\text{m}$ und 0.01° sind zu erkennen, die auf numerische Ungenauigkeiten der Simulation (Maschinengenauigkeit) zurückzuführen sind.

Par.	Min	Max	x_{err} (mm)	y_{err} (mm)	z_{err} (mm)	α_{err} ($^\circ$)	β_{err} ($^\circ$)	φ_{err} ($^\circ$)
B_{offX}	$-500 \mu\text{T}$	$500 \mu\text{T}$	0.000	0.000	0.001	0.01	0.01	0.01
B_{offY}	$-500 \mu\text{T}$	$500 \mu\text{T}$	0.000	0.000	0.001	0.01	0.01	0.01
B_{offZ}	$-500 \mu\text{T}$	$500 \mu\text{T}$	0.000	0.000	0.001	0.01	0.01	0.01
M_z	969 kA m^{-1}	1133 kA m^{-1}	0.000	0.000	0.001	0.01	0.01	0.01

Tabelle 7.4.: Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse der Lokalisierung mit dem robusten Verfahren

7. Erhöhung der Robustheit

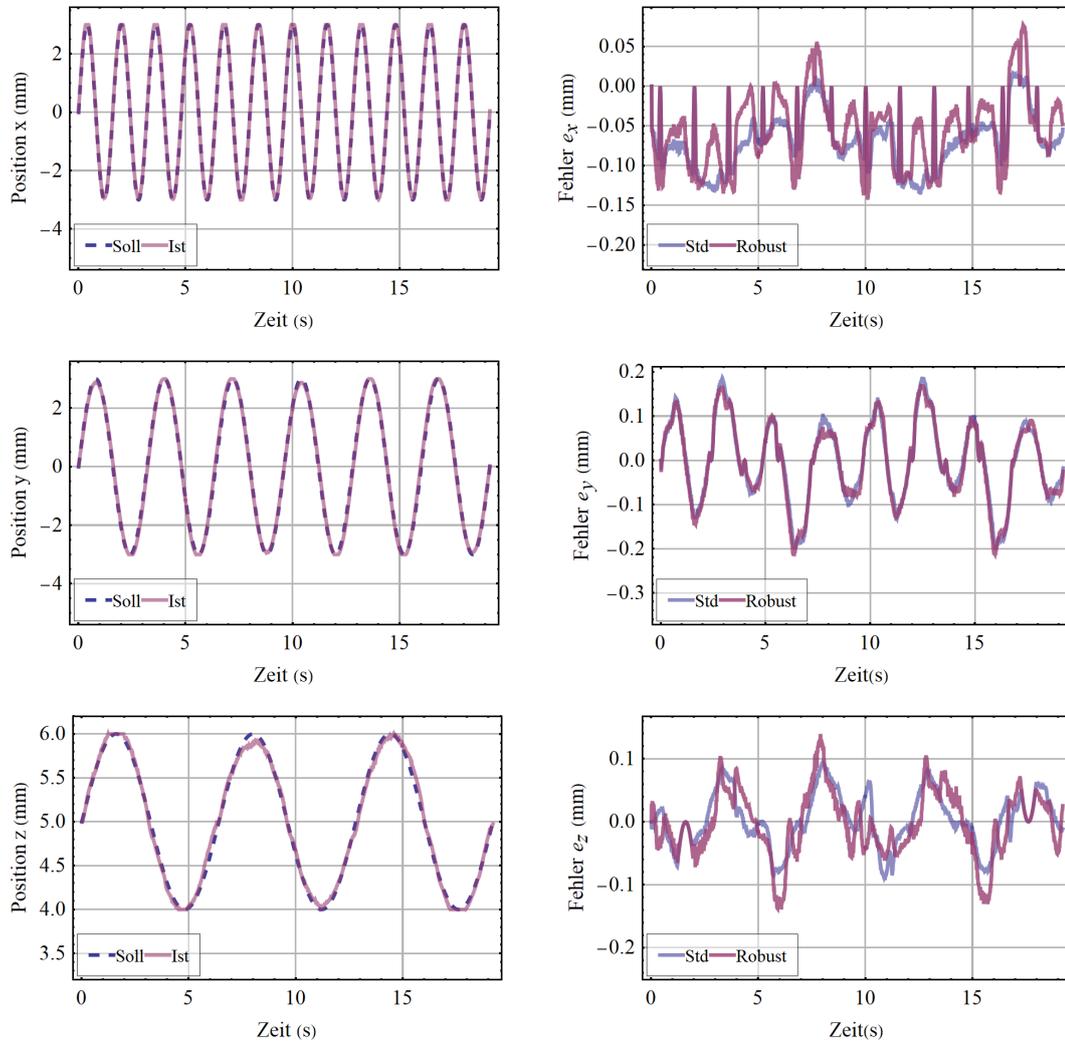


Abbildung 7.15.: Fehler der translatorischen Schätzung (e_t), basierend auf den Messungen, verglichen mit der Standard-Auswertung (Std); die Messung wurde mit der optimierten fünf Pixel-Anordnung durchgeführt

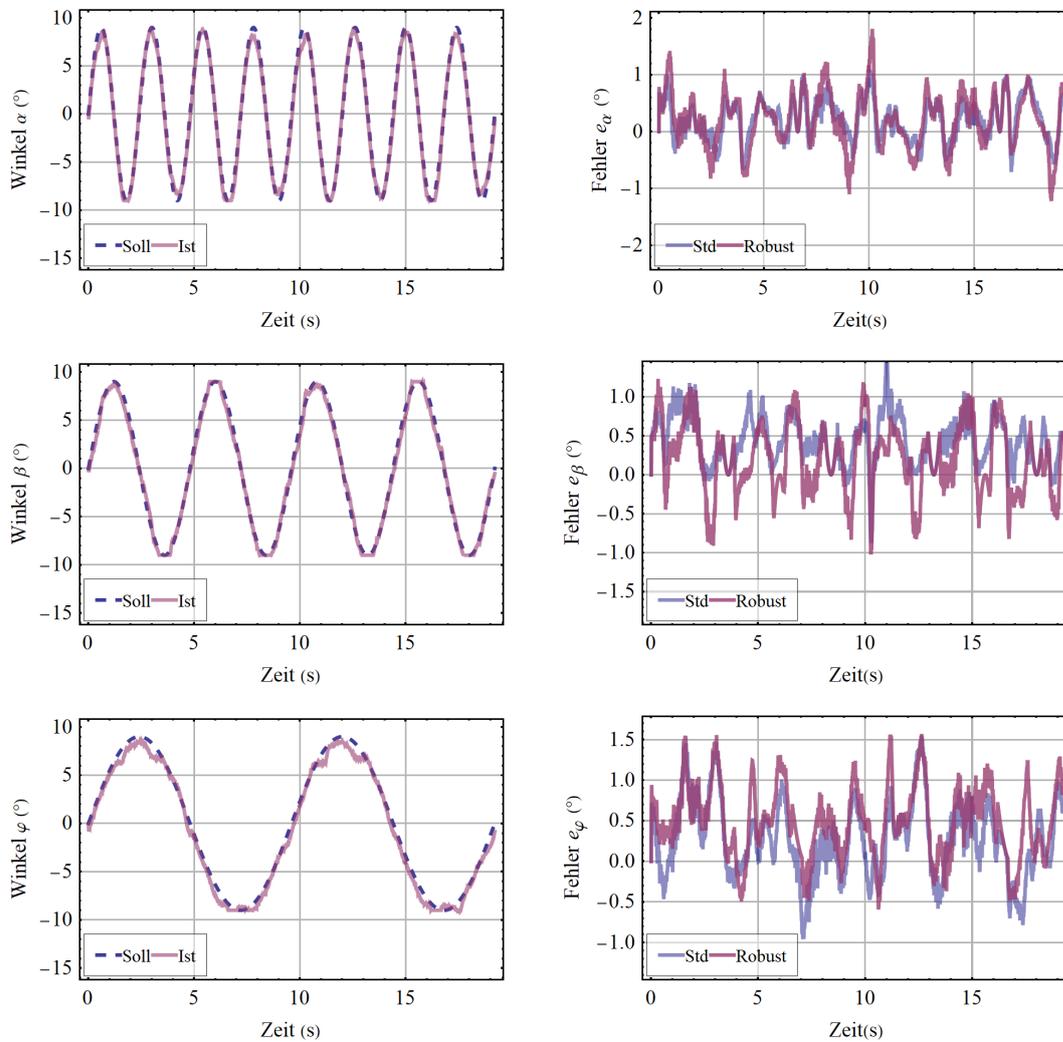


Abbildung 7.16.: Fehler der rotatorischen Schätzung (e_r), basierend auf den Messungen, verglichen mit der Standard-Auswertung (Std); die Messung wurde mit der optimierten fünf Pixel-Zellen-Anordnung durchgeführt

7. Erhöhung der Robustheit

Zusammenfassend bietet das vorgeschlagene Verfahren somit die Möglichkeit wesentliche Einflussfaktoren auf die Lokalisierungsgenauigkeit des Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden zu eliminieren. Weder eine Kalibrierung bezüglich der Magnetisierung, noch eine Abschirmung ist hierzu notwendig, was sich positiv auf die Kosten eines solchen Messsystems auswirkt. Eine Charakterisierung des eingesetzten Magneten kann für bestimmte Anwendungen die Genauigkeit weiter verbessern. Durch die optimierte Anordnung ist der beobachtbare Bewegungsbereich und die erreichbare Genauigkeit nur geringfügig eingeschränkt. Demgegenüber steht der große Vorteil, dass sich das vorgeschlagene robuste Messsystem in industriellen Anwendungen und unter Störeinflüssen einsetzen lässt. Der rechentechnische Aufwand wird durch die modifizierte Algorithmik um weniger als 1% gegenüber der Standardauswertung mit sechs Freiheitsgraden (s. Kap. 5) erhöht. Mithilfe der rekursiven Struktur des UKF sind somit auch die Geschwindigkeitsanforderungen industrieller Anwendungen erfüllt.

8. Schlussfolgerungen und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, die Frage zu beantworten, wie Hall-Sensor Anordnungen zur Lokalisierung magnetischer Quellen mit mehreren Freiheitsgraden im industriellen Umfeld eingesetzt werden können. Hierbei sollten die umgebungsspezifischen Eigenschaften, die limitierte Rechenleistung, sowie umgebungsbedingte Störungen berücksichtigt werden.

Um die vorgegebenen Ziele zu erreichen, wurden zunächst geeignete Methoden ausgewählt, die es ermöglichen das inverse Problem der magnetfeldbasierten Lokalisierung zu lösen. Basis dieser Methoden bildet ein analytisches Systemmodell welches anschließend erarbeitet und optimiert wurde. Dies geschah anhand des Beispiels eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden. Des Weiteren wurden Methoden definiert, die Anhaltspunkte für die Auslegung eines magnetfeldbasierten Positionsmesssystems liefern. Die nichtlineare Beobachtbarkeit wurde als geeignetes Mittel identifiziert, um den zulässigen Wertebereich für den Bewegungsbereich mit mehreren Freiheitsgraden zu bestimmen. Die erreichbare Genauigkeit konnte anhand der Cramér-Rao-Schranke analysiert werden. Auf Basis dieser Betrachtung wurde eine Methode entwickelt, die es ermöglicht, optimale Sensor-Magnet-Anordnungen zu entwerfen. Hierbei wurde festgestellt, dass für in der Praxis verwendete Magnetgrößen eine Anordnung aus diskreten Hall-Sensor-ICs Vorteile bietet, da der ideale Sensorabstand sich in der Größenordnung des Magneten bewegt. Eine optimierte Anordnung aus 3D Hall-Sensoren ermöglichte sowohl in der Simulation als auch Messung eine deutlich genauere Lokalisierung mit sechs Freiheitsgraden. Verschiedene algorithmische Lösungen zur Lokalisierung magnetischer Quellen wurden implementiert und gegenübergestellt. Hierbei erwiesen sich die nichtlinearen Kalman-Filter als besonders effizient im Hinblick auf die Ausführungsgeschwindigkeit und die erreichbare Genauigkeit. Es konnte gezeigt werden, dass Echtzeitanforderungen auch auf eingebetteten Systemen erreicht werden. Um die Einflüsse typischer, im industriellen Umfeld auftretenden Störungen zu reduzieren, wurde die Lokalisierung mittels des Unscented-Kalman Filters weiterentwickelt. Hierzu wurde zunächst eine Sensitivitätsanalyse typischer Störungen durchgeführt und so die zu erwartenden Lokalisierungsfehler abgeschätzt. Für die Haupteinflussfaktoren wurden anschließend algorithmische Maßnahmen definiert und diskutiert. Störungen, die sich durch wenige Freiheitsgrade modellieren lassen, insbesondere der Betrag der Magnetisierung, können ohne große Einbußen des Bewegungsbereiches eliminiert werden.

Eine Methode zur Magnetcharakterisierung wurde skizziert, mit deren Hilfe Permanentmagneten magnetisch vermessen werden können. Die grundsätzliche Anwendbarkeit zur Kalibrierung einiger kritischer Magnetparameter wurde anhand von Messungen belegt.

8. Schlussfolgerungen und Ausblick

Durch diese Teilschritte konnte ein Lösungsweg aufgezeigt werden, wie der Informationsgehalt von vektorialen Magnetfeldmessungen optimal ausgenutzt werden kann. Die Vorgehensweise anhand des Beispiels eines Bedienelementes mit sechs Freiheitsgraden kann in zukünftigen Arbeiten auf weitere Anwendungen mit mehreren Freiheitsgraden übertragen werden. Mögliche Beispiele hierfür sind Dynamometer zur Kraftmessung, sphärische Motoren oder auch Aufgaben bei der Materialprüfung.

Hinsichtlich klassischer Positionssensorik mit einem Freiheitsgrad können sich durch die erarbeitete Methodik ebenfalls Vorteile ergeben: Oft treten in solchen Anwendungen durch mechanischen Toleranzen ungewollte Bewegungen auf, die sich störend auf die eigentliche Messgröße auswirken, oder auf einen Verschleiß hindeuten können. Die vorgestellte Algorithmik erlaubt es, solche Toleranzen auszugleichen und somit auch einfache Anwendungen robuster zu gestalten.

Ausblick

Im Zuge dieser Arbeit sind weitere Fragestellungen aufgetreten, die zunächst nicht adressiert werden konnten, und als Anregung für zukünftigen Arbeiten dienen können:

- **Weitere magnetische Quellen:** In dieser Arbeit wurde nur eine Magnetform mit festen Seitenverhältnissen betrachtet. Durch Anordnungen mit mehreren Magneten oder Halbachmagneten [122] kann der magnetische Fluss unter Umständen so geführt werden, dass eine besonders exakte und robuste Lokalisierung möglich ist. Auch lässt sich die Methodik auf Anwendungsbereiche der induktiven Lokalisierung übertragen, sofern Wellenausbreitungseffekte eine vernachlässigbare Rolle spielen. Erste dahin gehende Untersuchungen sind in [123] [124] beschrieben.
- **3D Sensoranordnungen:** In dieser Arbeit wurde von zweidimensionalen Sensor-Anordnungen ausgegangen, die auf einer Platine angebracht werden. Mit einer dritten Komponente lässt sich vermutlich der Informationsgehalt der Messung noch weiter erhöhen. Besonders zur Magnetcharakterisierung wäre eine zweite Sensorebene senkrecht zur Ersten hilfreich, um die Magnetparameter genauer zu bestimmen.
- **Magnetcharakterisierung:** Ein Aufbau zur Magnetcharakterisierung wurde vorgeschlagen. Für praktische Anwendungen müsste der Ansatz weiter verfeinert werden. Unter Umständen kann auf einige Parameter bei der Charakterisierung verzichtet werden. Im Rahmen eines Produktionstests ist zudem eine Lösung mittels einer magnetischen Zeilenkamera denkbar, über die sich die Prüflinge hinwegbewegen.
- **Einfluss von Verzögerungen in den Messdaten:** Verzögerungen in den Messdaten sind bei einer sequenziellen Messung mehrerer Sensorkomponenten vorhanden. Diese können sich besonders bei schnellen Bewegungen auf die Lokalisierungsgenauigkeit auswirken. Der Kalman-Filter-Ansatz ermöglicht es

dies zu berücksichtigen [125] und somit die Lokalisierung noch robuster und genauer zu gestalten.

- **Kombination von Auswerteverfahren:** Es wurde in Kap. 5.3 gezeigt, dass nach der Initialisierung der Lokalisierungsalgorithmen eine höhere Anzahl von Berechnungen notwendig ist, um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen. Unter Umständen ließe sich diese Zeit reduzieren, wenn eine Kombination mehrerer numerischer Verfahren, oder aber auch der analytischen inversen Lösung für den magnetischen Dipol (Gl. (2.3)) verwendet wird
- **Einfluss weichmagnetischer Störungen:** In einigen Anwendungen spielen weichmagnetische Störer eine entscheidende Rolle. Diese Art der Störung konnte in dieser Arbeit zunächst nicht berücksichtigt werden. In zukünftigen Untersuchungen könnte dieser Einfluss beispielsweise durch die Spiegelungsmethode [9] oder aber auch durch eine Kombination analytischer Modelle mit abgespeicherten Werten reduziert werden.
- **Dimensionierung anhand der relativen Entropie:** Eine weitere interessante Möglichkeit, magnetfeldbasierte Positionsmesssysteme zu evaluieren stellt die relative Entropie oder auch Transinformation dar. Mit dieser Größe lässt sich der Informationsgehalt einer Messung für eine vorgegebene Anordnung bestimmen und optimieren.

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei meinem Vater, Klaus Cichon, bedanken, der leider die Fertigstellung meiner Dissertation nicht mehr erleben durfte und dem ich die Arbeit widme. Er vermittelte mir die richtigen Werte und bedachte meine beruflichen Werdegang mit jeder möglichen Unterstützung.

Außerdem möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt und motiviert haben. Mein Dank gilt Herrn Prof. Töpfer, der mir die Möglichkeit gegeben hat, als externer Doktorand an der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der TU Ilmenau zu promovieren, die Arbeit betreut, und das Erstgutachten übernommen hat. Besonders möchte ich mich auch bei seinem Mitarbeiter Herrn Dr. Brauer für die fachliche Betreuung und die vielen hilfreichen Kommentare und Anregungen zum Thema bedanken. Auch möchte ich mich für die Geduld und das Verständnis bedanken, das mir entgegengebracht wurde.

Des Weiteren möchte ich mich bei Jörg Bretschneider und Willi Neudeck vom Fraunhofer Institut für Entwurfsautomatisierung in Dresden bedanken, die dazu beigetragen haben, die Grundideen dieser Arbeit zu einem Forschungsthema zu entwickeln.

Außerdem möchte ich mich bei meinen Kollegen, besonders bei Philip Beran, Markus Sand, Gerhard Tischlinger, Dr. Markus Stahl-Offergeld und Dr. Hans-Peter Hohe bedanken, die mir mit Rat und Tat bei allen Themen rund um die Hall-Sensorik zur Seite standen.

Der größte Dank gilt jedoch meiner Familie, meiner Frau Judith, und meinen Kindern, ohne deren Verständnis, Unterstützung und Ablenkung diese Arbeit nicht hätte abgeschlossen werden können.

A. Anhang

A.1. Verifikation des Modells magnetischer Flächenladungen

Um das Modell magnetischer Flächenladungen, mit denen allgemeinere Magnetformen modellierbar sind, nach Gl. (3.44) zu verifizieren, wurden die berechneten Ergebnisse ebenfalls mit der FEM-Simulation verglichen. Abb. A.1 zeigt den relativen Fehler. Die Diskretisierung des auf Flächenladungen basierenden Modells führt

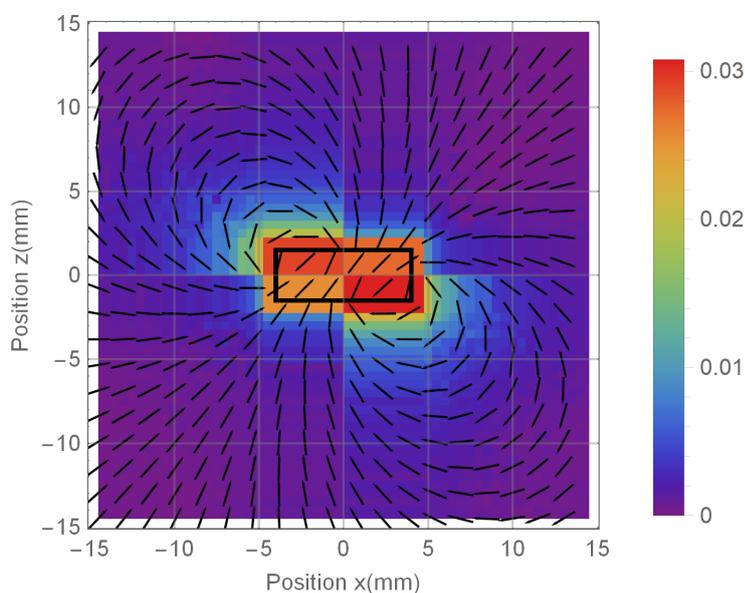


Abbildung A.1.: Maximaler relativer Fehler $e_{rel,max}$ des Modells gegenüber der analytischen Berechnung bei einer maximalen Kantenlänge der Flächenelemente von 1 mm

zu einer starken Zunahme des Messfehlers in der Nähe des Magneten. Da jedoch der Sensor in praktischen Anwendungen ohnehin nicht beliebig nahe am Magneten positioniert werden kann, ist diese Einschränkung in der Praxis weniger problematisch. In einem Abstand von 1 mm zur Magnetoberfläche nimmt der Fehler stark ab.

Abb. A.2 zeigt den zu erwartenden Fehler in Abhängigkeit der Größe der Flächenelemente. Aufgetragen ist der maximale Fehler im Bereich von $x, y, z = \pm 15$ mm, wobei die Region um den Magneten herum in einem Abstand von 1 mm ausgespart wurde. Die Simulation zeigt, dass mit einer maximalen Gitter-Kantenlänge von 0.8 mm der Fehler unter 1.05 % bleibt. Der Rechenaufwand ist bei der gewählten Diskreti-

A. Anhang

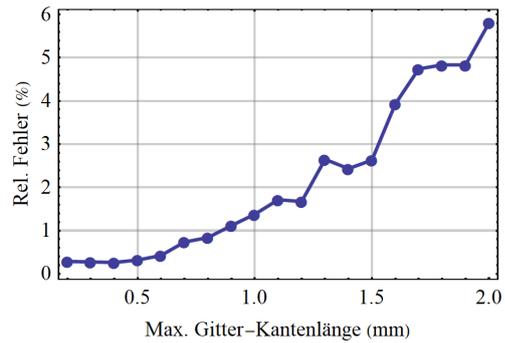


Abbildung A.2.: Maximaler relativer Fehler $e_{rel,max}$ des Modells gegenüber der analytischen Berechnung in Abhängigkeit der maximal zulässigen Kantenlänge der Flächenelemente und bei einem Mindestabstand zum Magneten von 1 mm.

sierung der Oberfläche (440 Dreiecke) noch in einem Rahmen, der es erlaubt das Modell ausreichend schnell auf eingebetteter Hardware zu rechnen.

A.2. Funktionalmatrix der Dipolortung

Die Komponenten der Funktionalmatrix (Jacobi-Matrix) zur Lokalisierung der Position x und dem Winkel α eines magnetischen Dipols mithilfe von zwei im Abstand d angeordneten 3D-Magnetfeldsensoren lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1(d)}{\partial x} &= \frac{\partial B_4(-d)}{\partial x} = \\ &= \frac{24m_0\mu_0}{\pi((d-2x)^2 + 4(y^2 + z^2))^{7/2}} [4z(-(d-2x)^2 + y^2 + z^2)\cos(\alpha) + \\ &\quad (d-2x)((d-2x)^2 - 6(y^2 + z^2))\sin(\alpha)] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$(d-2x)((d-2x)^2 - 6(y^2 + z^2))\sin(\alpha)] \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1(d)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial B_4(-d)}{\partial \alpha} = \\ &= \frac{4m_0\mu_0(((d-2x)^2 - 2(y^2 + z^2))\cos(\alpha) + 3(d-2x)z\sin(\alpha))}{\pi((d-2x)^2 + 4(y^2 + z^2))^{5/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_2(d)}{\partial x} &= \frac{\partial B_5(-d)}{\partial x} = \\ &= \frac{48m_0y\mu_0(5(d-2x)z\cos(\alpha) + 2(-(d-2x)^2 + y^2 + z^2)\sin(\alpha))}{\pi((d-2x)^2 + 4(y^2 + z^2))^{7/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_2(d)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial B_4(-d)}{\partial \alpha} = \\ &= -\frac{12m_0y\mu_0((d-2x)\cos(\alpha) + 2z\sin(\alpha))}{\pi((d-2x)^2 + 4(y^2 + z^2))^{5/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_3(d)}{\partial x} &= \frac{\partial B_6(-d)}{\partial x} = \\ &= \frac{12m_0\mu_0}{\pi((d-2x)^2 + 4(y^2 + z^2))^{7/2}} [8z(-(d-2x)^2 + y^2 + z^2)\sin(\alpha) - \\ &\quad (d-2x)((d-2x)^2 + 4(y^2 - 4z^2))\cos(\alpha)] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$(d-2x)((d-2x)^2 + 4(y^2 - 4z^2))\cos(\alpha)] \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_3(d)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial B_3(-d)}{\partial \alpha} = \\ &= \frac{2m_0\mu_0(((d-2x)^2 + 4(y^2 - 2z^2))\sin(\alpha) - 6(d-2x)z\cos(\alpha))}{\pi((d-2x)^2 + 4(y^2 + z^2))^{5/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Literaturverzeichnis

- [1] TUMAŃSKI, S.: *Handbook of magnetic measurements*. Boca Raton, Fla. : CRC Press, 2011 (Series in sensors). – ISBN 978-1-4398-2951-6
- [2] RIPKA, P. ; JANOSEK, M. ; BUTTA, M.: Crossfield Sensitivity in AMR Sensors. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 45 (2009), Oktober, Nr. 10, S. 4514–4517. <http://dx.doi.org/10/dxkg9g>. – DOI 10/dxkg9g. – ISSN 0018-9464
- [3] JEDLICSKA, I. ; WEISS, R. ; WEIGEL, R.: Linearizing the Output Characteristic of GMR Current Sensors Through Hysteresis Modeling. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 57 (2010), Mai, Nr. 5, S. 1728–1734. <http://dx.doi.org/10/fmshr4>. – DOI 10/fmshr4. – ISSN 0278-0046
- [4] RIPKA, P.: *Magnetic Sensors and Magnetometers*. Artech House Publishers, 2000. – ISBN 978-1-58053-057-6
- [5] LENZ, J. E.: A review of magnetic sensors. In: *Proceedings of the IEEE* 78 (1990), Juni, Nr. 6, S. 973–989. <http://dx.doi.org/10/cb3762>. – DOI 10/cb3762. – ISSN 0018-9219
- [6] HALL, E. H.: On a New Action of the Magnet on Electric Currents. In: *American Journal of Mathematics* 2 (1879), Nr. 3, S. 287–292. <http://dx.doi.org/10/ffhb8z>. – DOI 10/ffhb8z. – ISSN 0002-9327
- [7] HADAMARD, J.: Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique. In: *Princeton University Bulletin* 13 (1902), April, Nr. 4, S. 49–52
- [8] MOURA NETO, F. D. ; DA SILVA NETO, A. J.: *An Introduction to Inverse Problems with Applications*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2013. – ISBN 978-3-642-32556-4 978-3-642-32557-1
- [9] GRIFFITHS, D. J.: *Introduction to electrodynamics*. Fourth edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2017. – ISBN 978-1-108-42041-9
- [10] NARA, T. ; SUZUKI, S. ; ANDO, S.: A Closed-Form Formula for Magnetic Dipole Localization by Measurement of Its Magnetic Field and Spatial Gradients. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 42 (2006), Oktober, Nr. 10, S. 3291–3293. <http://dx.doi.org/10/cstvdv>. – DOI 10/cstvdv. – ISSN 0018-9464
- [11] DEMMEL, J. W.: *Applied numerical linear algebra*. Philadelphia : Soc. for Industrial and Applied Math, 1997. – ISBN 978-0-89871-361-9 978-0-89871-389-3

- [12] UHL, T.: The inverse identification problem and its technical application. In: *Archive of Applied Mechanics* 77 (2007), März, Nr. 5, S. 325–337. <http://dx.doi.org/10.1007/s00419-006-0086-9>. – DOI 10.1007/s00419-006-0086-9. – ISSN 0939–1533, 1432–0681
- [13] LIU, G.-R. ; HAN, X.: *Computational inverse techniques in nondestructive evaluation*. Boca Raton, Fla. : CRC Press, 2003. – ISBN 978–0–8493–1523–7
- [14] TIKHONOV, A. N. ; GONCHARSKY, A. ; STEPANOV, V. V. ; YAGOLA, A. G.: *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*. Springer Netherlands, 1995 (Mathematics and Its Applications). – ISBN 978–0–7923–3583–2
- [15] BJÖRCK, Å.: *Numerical methods for least squares problems*. Philadelphia, Pa : SIAM Soc. for Industrial and Applied Mathematics, 1996. – ISBN 978–0–89871–360–2
- [16] MOROZOV, V. A. ; STESSIN, M.: *Regularization methods for ill-posed problems*. Boca Raton, Fla. : CRC Press, 1993. – ISBN 978–0–8493–9311–2
- [17] WYNN, W. ; FRAHM, C. ; CARROLL, P. ; CLARK, R. ; WELLHONER, J. ; WYNN, M.: Advanced superconducting gradiometer/Magnetometer arrays and a novel signal processing technique. In: *IEEE Transactions on Magnetism* 11 (1975), März, Nr. 2, S. 701–707. <http://dx.doi.org/10/fbmgzc>. – DOI 10/fbmgzc. – ISSN 0018–9464
- [18] RAAB, F. H. ; BLOOD, E. B. ; STEINER, T. O. ; JONES, H. R.: Magnetic Position and Orientation Tracking System. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* AES-15 (1979), September, Nr. 5, S. 709–718. <http://dx.doi.org/10/d4rbk6>. – DOI 10/d4rbk6. – ISSN 0018–9251
- [19] WEITSCHIES, W. ; WEDEMEYER, J. ; STEHR, R. ; TRAHMS, L.: Magnetic markers as a noninvasive tool to monitor gastrointestinal transit. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 41 (1994), Februar, Nr. 2, S. 192–195. <http://dx.doi.org/10/bc8pdr>. – DOI 10/bc8pdr. – ISSN 0018–9294
- [20] SCHLAGETER, V. ; BESSE, P. A. ; POPOVIC, R. S. ; KUCERA, P.: Tracking system with five degrees of freedom using a 2D-array of Hall sensors and a permanent magnet. In: *Sensors and Actuators A: Physical* 92 (2001), August, Nr. 1, S. 37–42. [http://dx.doi.org/10.1016/S0924-4247\(01\)00537-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0924-4247(01)00537-4). – DOI 10.1016/S0924-4247(01)00537-4. – ISSN 0924–4247
- [21] LEVENBERG, K.: A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 2 (1944), Juli, Nr. 2, S. 164–168. <http://dx.doi.org/10.1090/qam/10666>. – DOI 10.1090/qam/10666. – ISSN 0033–569X, 1552–4485

- [22] PETRUSKA, A. J. ; ABBOTT, J. J.: Optimal Permanent-Magnet Geometries for Dipole Field Approximation. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 49 (2013), Februar, Nr. 2, S. 811–819. <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2012.2205014>. – DOI 10.1109/TMAG.2012.2205014. – ISSN 0018–9464
- [23] SONG, S. ; LI, B. ; QIAO, W. ; HU, C. ; REN, H. ; YU, H. ; ZHANG, Q. ; MENG, M. Q.-H. ; XU, G.: 6-D Magnetic Localization and Orientation Method for an Annular Magnet Based on a Closed-Form Analytical Model. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 50 (2014), September, Nr. 9, S. 1–11. <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2014.2315592>. – DOI 10.1109/TMAG.2014.2315592. – ISSN 0018–9464, 1941–0069
- [24] SONG, S. ; QIU, X. ; LIU, W. ; MENG, M. Q.-H.: An Improved 6-D Pose Detection Method Based on Opposing-Magnet Pair System and Constraint Multiple Magnets Tracking Algorithm. In: *IEEE Sensors Journal* 17 (2017), Oktober, Nr. 20, S. 6752–6759. <http://dx.doi.org/10.1109/JSEN.2017.2742520>. – DOI 10.1109/JSEN.2017.2742520. – ISSN 1530–437X, 1558–1748, 2379–9153
- [25] POPEK, K. M. ; SCHMID, T. ; ABBOTT, J. J.: Six-Degree-of-Freedom Localization of an Untethered Magnetic Capsule Using a Single Rotating Magnetic Dipole. In: *IEEE Robotics and Automation Letters* 2 (2017), Januar, Nr. 1, S. 305–312. <http://dx.doi.org/10.1109/LRA.2016.2608421>. – DOI 10.1109/LRA.2016.2608421. – ISSN 2377–3766, 2377–3774
- [26] ARIMOTO, S.: Measuring system for development of stroke-sensing cylinder for automatic excavator. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 45 (1998), Juni, Nr. 3, S. 376–384. <http://dx.doi.org/10/fwhhsr>. – DOI 10/fwhhsr. – ISSN 0278–0046
- [27] BURGER, F. ; BESSE, P. A. ; POPOVIC, R. S.: New fully integrated 3-D silicon Hall sensor for precise angular-position measurements. In: *Sensors and Actuators A: Physical* 67 (1998), Mai, Nr. 1, S. 72–76. <http://dx.doi.org/10/cs4h28>. – DOI 10/cs4h28. – ISSN 0924–4247
- [28] DORISS, H. T. ; EN ; HOBEIN, D. ; IRLE, H. ; KOST, N.: Berührungslose Weg- und Winkel-Sensorik. In: *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift* 100 (1998), Oktober, Nr. 10, S. 720–727. <http://dx.doi.org/10/gf3gg3>. – DOI 10/gf3gg3. – ISSN 0001–2785, 2192–8800
- [29] FROST AND SULLIVAN: Analysis of the Global Magnetic Sensors Market / Frost & Sullivan. 2013 (M961). – Industry Research Analysis
- [30] HU, J. ; ZOU, J. ; XU, F. ; LI, Y. ; FU, Y.: An Improved PMSM Rotor Position Sensor Based on Linear Hall Sensors. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 48 (2012), November, Nr. 11, S. 3591–3594. <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2012.2202279>. – DOI 10.1109/TMAG.2012.2202279. – ISSN 0018–9464

- [31] SCHOTT, C. ; RACZ, R. ; HUBER, S.: CMOS three axis Hall sensor and joystick application. In: *2004 IEEE SENSORS*, 2004, S. 977–980 vol.2
- [32] WEGENER, R. ; SENICAR, F. ; JUNGE, C. ; SOTER, S.: Low Cost Position Sensor for Permanent Magnet Linear Drive. In: *2007 7th International Conference on Power Electronics and Drive Systems*, 2007, S. 1367–1371
- [33] KIM, J. ; SON, H.: Two-DOF orientation measurement system for a magnet with single magnetic sensor and neural network. In: *2017 14th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI)*, 2017, S. 448–453
- [34] SENSATA TECHNOLOGIES: *AJ3 Joystick*. Version: April 2018. <https://www.sensata.com/sites/default/files/a/sensata-aj3-contactless-sensing-joystick-datasheet.pdf>
- [35] BAILEY, C.: Solid state controller three-axes controller. 1973 (US3771037A). – United States Patent
- [36] SCHOTT, C. ; BLANCHARD, H. ; POPOVIC, R. S. ; RACZ, R. ; HREJSA, J.: High-accuracy analog Hall probe. In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 46 (1997), April, Nr. 2, S. 613–616. <http://dx.doi.org/10/cb5c3t>. – DOI 10/cb5c3t. – ISSN 0018–9456
- [37] POPOVIĆ, R. S.: *Hall effect devices*. 2. ed. Bristol : Institute of Physics Publ, 2004 (Series in sensors). – ISBN 978–0–7503–0855–7
- [38] STAHL-OFFERGELD, M.: *Aktuelle Berichte aus der Mikrosystemtechnik*. Bd. 20: *Robuste dreidimensionale Hall-Sensoren für mehrachsige Positionsmesssysteme*. First. Shaker, 2011. – ISBN 978–3–8440–0303–1
- [39] HEIDARI, H. ; GATTI, U. ; MALOBERTI, F.: Sensitivity characteristics of horizontal and vertical Hall sensors in the voltage- and current-mode. In: *2015 11th Conference on Ph.D. Research in Microelectronics and Electronics (PRIME)*, IEEE, Juni 2015. – ISBN 978–1–4799–8229–5, S. 330–333
- [40] POPOVIC, R. S.: The vertical hall-effect device. In: *IEEE Electron Device Letters* 5 (1984), September, Nr. 9, S. 357–358. <http://dx.doi.org/10/cpqmf5>. – DOI 10/cpqmf5. – ISSN 0741–3106
- [41] HOHE, H.-P. ; HACKNER, M. ; STAHL-OFFERGELD, M. ; SCHLAG, U.: Vertikales Hall-Sensorelement / Fraunhofer Institut für integrierte Schaltungen. 2007 (DE102006017910 (A1)). – Deutsches Patent
- [42] RAMSDEN, E.: *Hall-effect sensors: theory and application*. 2. ed. Amsterdam : Elsevier/Newnes, 2006. – ISBN 978–0–7506–7934–3

- [43] POPOVIĆ, R. S.: *Hall effect devices: magnetic sensors and characterization of semiconductors*. Bristol : Hilger, 1991 (The Adam Hilger series on sensors). – ISBN 978-0-7503-0096-4
- [44] LI, S. S. ; THURBER, W. R.: The dopant density and temperature dependence of electron mobility and resistivity in n-type silicon. In: *Solid-State Electronics* 20 (1977), Nr. 7, S. 609–616
- [45] BERAN, P. ; STAHL-OFFERGELD, M. ; PETERS, V. ; KRAUSE, D. ; HOHE, H.: Impact of Contact Misalignment on Magnetic Cross Sensitivity of Integrated Vertical Hall Sensors. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 55 (2019), Januar, Nr. 1, S. 1–4. <http://dx.doi.org/10/gfx7sj>. – DOI 10/gfx7sj. – ISSN 0018-9464
- [46] MOHAMADABADI, K. ; HILLION, M.: An Automated Indoor Scalar Calibration Method for Three-Axis Vector Magnetometers. In: *IEEE Sensors Journal* 14 (2014), September, Nr. 9, S. 3076–3083. <http://dx.doi.org/10/f6tc63>. – DOI 10/f6tc63. – ISSN 1530-437X
- [47] RAZAVI, B.: *Design of analog CMOS integrated circuits*. New Delhi; New York : Tata McGraw-Hill Pub. Co. Ltd., 2010. – ISBN 978-0-07-052903-8
- [48] TIETZE, U. ; SCHENK, C. ; GAMM, E.: *Halbleiter-Schaltungstechnik*. 12. Aufl. Berlin : Springer, 2002. – ISBN 978-3-540-42849-7
- [49] KEJIK, P. ; BOERO, G. ; DEMIERRE, M. ; POPOVIC, R. S.: An integrated micro-Hall probe for scanning magnetic microscopy. In: *Sensors and Actuators A: Physical* 129 (2006), Mai, Nr. 1, S. 212–215. <http://dx.doi.org/10/czkcdx>. – DOI 10/czkcdx. – ISSN 0924-4247
- [50] JARQUE, C. M. ; BERA, A. K.: Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. In: *Economics Letters* 6 (1980), Januar, Nr. 3, S. 255–259. <http://dx.doi.org/10/dm8gjsx>. – DOI 10/dm8gjsx. – ISSN 0165-1765
- [51] PHYSIK INSTRUMENTE GMBH & CO. KG: *6-Achsen-Hexapod H-840*. Version: Mai 2019. https://www.physikinstrumente.de/fileadmin/user_upload/physik_instrumente/files/datasheets/H-840-Datenblatt.pdf
- [52] MTS MAGNETE: *Block magnets NdFeB*. Version: Mai 2015. https://www.mtsmagnete.de/Datenblatt/new/Datenblatt_QA.pdf
- [53] LEHNER, G.: *Elektromagnetische Feldtheorie*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010. – ISBN 978-3-642-13041-0 978-3-642-13042-7
- [54] FURLANI, E. P.: *Permanent Magnet and Electromechanical Devices*. Academic Press, 2001. <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-269951-1.X5000-1>. <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-269951-1.X5000-1>. – ISBN 978-0-12-269951-1

- [55] BRONŠTEJN, I. N. ; SEMENDJAEV, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Fifth. Thun : Deutsch, 2001. – ISBN 978-3-8171-2005-5 978-3-8171-2015-4
- [56] ENGEL-HERBERT, R. ; HESJEDAL, T.: Calculation of the magnetic stray field of a uniaxial magnetic domain. In: *Journal of Applied Physics* 97 (2005), April, Nr. 7, S. 074504. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1883308>. – DOI 10.1063/1.1883308. – ISSN 0021-8979, 1089-7550
- [57] FURLANI, E. P. ; REZNIK, S. ; JANSON, W.: A three-dimensional field solution for bipolar cylinders. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 30 (1994), September, Nr. 5, S. 2916–2919. <http://dx.doi.org/10.1109/20.312547>. – DOI 10.1109/20.312547. – ISSN 0018-9464
- [58] DERBY, N. ; OLBERT, S.: Cylindrical Magnets and Ideal Solenoids. In: *American Journal of Physics* 78 (2009), September. <http://dx.doi.org/10/bb6qtn>. – DOI 10/bb6qtn
- [59] WIKSWO, J. P. ; SWINNEY, K. R.: A comparison of scalar multipole expansions. In: *Journal of Applied Physics* 56 (1984), Dezember, Nr. 11, S. 3039–3049. <http://dx.doi.org/10/fq73bb>. – DOI 10/fq73bb. – ISSN 0021-8979
- [60] WOERNLE, C.: *Mehrkörpersysteme: Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper*. Second. Springer Vieweg, 2016. – ISBN 978-3-662-46686-5
- [61] ANG, M. H. ; TOURASSIS, V. D.: Singularities of Euler and Roll-Pitch-Yaw Representations. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* AES-23 (1987), Mai, Nr. 3, S. 317–324. <http://dx.doi.org/10/d896zv>. – DOI 10/d896zv. – ISSN 0018-9251
- [62] FORSTER, O.: *Analysis 2: Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , gewöhnliche Differentialgleichungen*. Ninth. Vieweg+Teubner Verlag, 2010 (Grundkurs Mathematik). <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-8103-8>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-8103-8>. – ISBN 978-3-8348-8103-8
- [63] WOLPERT, D. H. ; MACREADY, W. G.: No Free Lunch Theorems for Optimization. In: *IEEE Transactions on evolutionary computation* 1 (1997), Nr. 1, S. 16
- [64] NOCEDAL, J.: Updating Quasi-Newton Matrices with Limited Storage. In: *Mathematics of Computation* 35 (1980), Nr. 151, S. 773–782. <http://dx.doi.org/10/bz7s4h>. – DOI 10/bz7s4h. – ISSN 0025-5718
- [65] BURGER, M.: *Inverse Problems* / Westfälische Wilhelms-Universität. Münster, Oktober 2007. – Vorlesungsskript

- [66] YANG, W. ; HU, C. ; MENG, M.-H. ; SONG, S. ; DAI, H.: A Six-Dimensional Magnetic Localization Algorithm for a Rectangular Magnet Objective Based on a Particle Swarm Optimizer. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 45 (2009), August, Nr. 8, S. 3092–3099. <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2009.2019116>. – DOI 10.1109/TMAG.2009.2019116. – ISSN 0018–9464
- [67] WANG, X. ; MENG, M. Q. H. ; HU, C.: A Localization Method Using 3-axis Magnetoresistive Sensors for Tracking of Capsule Endoscope. In: *2006 International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2006, S. 2522–2525
- [68] NELDER, J. A. ; MEAD, R.: A Simplex Method for Function Minimization. In: *The Computer Journal* 7 (1965), Januar, Nr. 4, S. 308–313. <http://dx.doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>. – DOI 10.1093/comjnl/7.4.308. – ISSN 0010–4620, 1460–2067
- [69] GEIGER, C. ; KANZOW, C.: *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1999 (Springer-Lehrbuch). <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-58582-1>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-58582-1>. – ISBN 978–3–540–66220–4 978–3–642–58582–1
- [70] PAPAGEORGIOU, M. ; LEIBOLD, M. ; BUSS, M.: *Optimierung*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-34013-3>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-34013-3>. – ISBN 978–3–540–34012–6 978–3–540–34013–3
- [71] CHENG, C. ; HUO, X. ; GHOVANLOO, M.: Towards a magnetic localization system for 3-D tracking of tongue movements in speech-language therapy. In: *2009 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, IEEE, 2009, S. 563–566
- [72] HORST, R. ; PARDALOS, P. M.: *Handbook of Global Optimization*. Springer US, 1995 (Nonconvex Optimization and Its Applications). – ISBN 978–0–7923–3120–9
- [73] KUCHERENKO, S. ; SYTSKO, Y.: Application of Deterministic Low-Discrepancy Sequences in Global Optimization. In: *Computational Optimization and Applications* 30 (2005), März, Nr. 3, S. 297–318. <http://dx.doi.org/10/cxkkjc>. – DOI 10/cxkkjc. – ISSN 0926–6003, 1573–2894
- [74] KIRKPATRICK, S. ; GELATT, C. D. ; VECCHI, M. P.: Optimization by Simulated Annealing. In: *Science* 220 (1983), Mai, Nr. 4598, S. 671–680. <http://dx.doi.org/10/cn7jh2>. – DOI 10/cn7jh2. – ISSN 0036–8075, 1095–9203
- [75] SIMON, D.: *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. Hoboken, NJ, USA : John Wiley & Sons, Inc., 2006. <http://dx.doi.org/10.1002/9781118016111>

- doi.org/10.1002/0470045345. <http://dx.doi.org/10.1002/0470045345>.
– ISBN 978-0-470-04534-3 978-0-471-70858-2
- [76] JULIER, S. J. ; UHLMANN, J. K.: New extension of the Kalman filter to non-linear systems. In: *Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI* Bd. 3068, International Society for Optics and Photonics, Juli 1997, S. 182–194
- [77] UHLMANN, J. K.: *First-Hand:The Unscented Transform – ETHW*. https://ethw.org/First-Hand:The_Unscented_Transform. Version: Januar 2019
- [78] SIMON, D. ; CHIA, T. L.: Kalman filtering with state equality constraints. In: *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems* 38 (2002), Nr. 1, S. 128–136
- [79] PRESS, W. H. ; FLANNERY, B. P. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T.: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, Second Edition*. 2 edition. Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – ISBN 978-0-521-43108-8
- [80] JULIER, S. ; UHLMANN, J.: Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. In: *Proceedings of the IEEE* 92 (2004), März, Nr. 3, S. 401–422. <http://dx.doi.org/10.1109/JPROC.2003.823141>. – DOI 10.1109/JPROC.2003.823141. – ISSN 0018-9219
- [81] KALMAN, R.: On the general theory of control systems. In: *IRE Transactions on Automatic Control* 4 (1959), Dezember, Nr. 3, S. 110–110. <http://dx.doi.org/10/czffc7>. – DOI 10/czffc7. – ISSN 0096-199X
- [82] HERMANN, R. ; KRENER, A. J.: Nonlinear controllability and observability. In: *IEEE Transactions on automatic control* 22 (1977), Nr. 5, S. 728–740
- [83] PAIGE, C.: Properties of numerical algorithms related to computing controllability. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (1981), Februar, Nr. 1, S. 130–138. <http://dx.doi.org/10.1109/TAC.1981.1102563>. – DOI 10.1109/TAC.1981.1102563. – ISSN 0018-9286
- [84] STOCCO, L. ; SALCUDEAN, S. ; SASSANI, F.: On the use of scaling matrices for task-specific robot design. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 15 (Oct./1999), Nr. 5, S. 958–965. <http://dx.doi.org/10.1109/70.795800>. – DOI 10.1109/70.795800. – ISSN 1042296X
- [85] MA, O. ; ANGELES, J.: Optimum architecture design of platform manipulators. In: *Advanced Robotics, 1991. 'Robots in Unstructured Environments', 91 ICAR., Fifth International Conference on, IEEE, 1991*. – ISBN 978-0-7803-0078-1, S. 1130–1135 vol.2

- [86] ANGELES, J.: The Design of Isotropic Manipulator Architectures in the Presence of Redundancies. In: *The International Journal of Robotics Research* 11 (1992), Juni, Nr. 3, S. 196–201. <http://dx.doi.org/10.1177/027836499201100303>. – DOI 10.1177/027836499201100303. – ISSN 0278–3649, 1741–3176
- [87] KAY, S. M.: *Estimation theory*. 19. print. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall PTR, 2011 (Fundamentals of statistical signal processing Steven M. Kay ; Vol. 1). – ISBN 978–0–13–345711–7
- [88] SAMOFALOV, V. N. ; BELOZOROV, D. P. ; RAVLIK, A. G.: Optimization of systems of permanent magnets. In: *The Physics of Metals and Metallography* 102 (2006), November, Nr. 5, S. 494–505. <http://dx.doi.org/10/fp6s75>. – DOI 10/fp6s75. – ISSN 0031–918X, 1555–6190
- [89] SAMOFALOV, V. N. ; RAVLIK, A. G. ; BELOZOROV, D. P. ; AVRAMENKO, B. A.: Generation of strong inhomogeneous stray fields by high-anisotropy permanent magnets. In: *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 281 (2004), Oktober, Nr. 2, S. 326–335. <http://dx.doi.org/10/b3vktv>. – DOI 10/b3vktv. – ISSN 0304–8853
- [90] JOHNSON, S. G.: *The NLOpt nonlinear-optimization package*. <http://ab-initio.mit.edu/nlopt>, Januar 2019
- [91] JONES, D. R. ; PERTTUNEN, C. D. ; STUCKMAN, B. E.: Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 79 (1993), Oktober, Nr. 1, S. 157–181. <http://dx.doi.org/10/d33k9n>. – DOI 10/d33k9n. – ISSN 0022–3239, 1573–2878
- [92] GABLONSKY, J. M. ; KELLEY, C. T.: A Locally-Biased form of the DIRECT Algorithm. In: *Journal of Global Optimization* 21 (2001), September, Nr. 1, S. 27–37. <http://dx.doi.org/10/ffnqns>. – DOI 10/ffnqns. – ISSN 0925–5001, 1573–2916
- [93] KAELO, P. ; ALI, M. M.: Some Variants of the Controlled Random Search Algorithm for Global Optimization. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 130 (2006), August, Nr. 2, S. 253–264. <http://dx.doi.org/10/cj45hz>. – DOI 10/cj45hz. – ISSN 0022–3239, 1573–2878
- [94] MADSEN, K. ; ZERTCHANINOV, S.: A C++ Programme for Global Optimization / Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark. Lyngby, Denmark, 1998 (IMM-REP-1998-04). – Forschungsbericht
- [95] RUNARSSON, T. P. ; YAO, X.: Search biases in constrained evolutionary optimization. In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)* 35 (2005), Mai, Nr. 2, S. 233–243. <http://dx.doi.org/10/d5g5rw>. – DOI 10/d5g5rw. – ISSN 1094–6977

- [96] SANTOS, C. H. d. S. ; GONCALVES, M. S. ; HERNANDEZ-FIGUEROA, H. E.: Designing Novel Photonic Devices by Bio-Inspired Computing. In: *IEEE Photonics Technology Letters* 22 (2010), August, Nr. 15, S. 1177–1179. <http://dx.doi.org/10/b5qbkd>. – DOI 10/b5qbkd. – ISSN 1041–1135
- [97] POWELL, M. J. D.: A Direct Search Optimization Method That Models the Objective and Constraint Functions by Linear Interpolation. In: *Advances in Optimization and Numerical Analysis* (1994), S. 51–67. <http://dx.doi.org/10/gft3s8>. – DOI 10/gft3s8
- [98] POWELL, M. J.: The BOBYQA algorithm for bound constrained optimization without derivatives. In: *Cambridge NA Report NA2009/06, University of Cambridge, Cambridge* (2009), S. 26–46
- [99] POWELL, M. J. D.: The NEWUOA software for unconstrained optimization without derivatives. In: *Large-Scale Nonlinear Optimization* (2006), S. 255–297. <http://dx.doi.org/10/bmj3qs>. – DOI 10/bmj3qs
- [100] BRENT, R. P.: *Algorithms for Minimization Without Derivatives*. Courier Corporation, 2013. – ISBN 978–0–486–14368–2
- [101] ROWAN, T. H.: *Functional Stability Analysis Of Numerical Algorithms*. Austin, University of Texas, Diss., 1990
- [102] SVANBERG, K.: A Class of Globally Convergent Optimization Methods Based on Conservative Convex Separable Approximations. In: *SIAM Journal on Optimization* 12 (2002), Januar, Nr. 2, S. 555–573. <http://dx.doi.org/10/cdhbq4>. – DOI 10/cdhbq4. – ISSN 1052–6234
- [103] KRAFT, D.: A software package for sequential quadratic programming / Deutsche Forschungs-und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DFVLR). Braunschweig, 1988 (1). – Forschungsbericht
- [104] DEMBO, R. S. ; STEihaug, T.: Truncated-newtono algorithms for large-scale unconstrained optimization. In: *Mathematical Programming* 26 (1983), Juni, Nr. 2, S. 190–212. <http://dx.doi.org/10/d2d4qf>. – DOI 10/d2d4qf. – ISSN 0025–5610, 1436–4646
- [105] VLČEK, J. ; LUKŠAN, L.: Shifted limited-memory variable metric methods for large-scale unconstrained optimization. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 186 (2006), Februar, Nr. 2, S. 365–390. <http://dx.doi.org/10/ddtwc8>. – DOI 10/ddtwc8. – ISSN 0377–0427
- [106] CONN, A. ; GOULD, N. ; TOINT, P.: A Globally Convergent Augmented Lagrangian Algorithm for Optimization with General Constraints and Simple Bounds. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 28 (1991), April, Nr. 2, S. 545–572. <http://dx.doi.org/10/cmng6c>. – DOI 10/cmng6c. – ISSN 0036–1429

- [107] MARQUARDT, D.: An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 11 (1963), Juni, Nr. 2, S. 431–441. <http://dx.doi.org/10/bsjz75>. – DOI 10/bsjz75. – ISSN 0368–4245
- [108] CICHON, D. ; PSIUK, R. ; BRAUER, H. ; TÖPFER, H.: A Hall-Sensor-Based Localization Method With Six Degrees of Freedom Using Unscented Kalman Filter. In: *IEEE Sensors Journal* 19 (2019), April, Nr. 7, S. 2509–2516. <http://dx.doi.org/10/gfzx8h>. – DOI 10/gfzx8h. – ISSN 1530–437X
- [109] MEHMOOD, N. ; AZIZ, S. M.: A real-time tracking system for in vivo endofunctional capsule using magnetic sensors. In: *2012 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2012, S. 598–601
- [110] HU, C. ; MENG, M. Q. H. ; MANDAL, M. ; WANG, X.: 3-Axis Magnetic Sensor Array System for Tracking Magnet's Position and Orientation. In: *2006 6th World Congress on Intelligent Control and Automation* Bd. 2, 2006, S. 5304–5308
- [111] BINDER, K.: *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. Second. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1986 (Topics in Current Physics). – ISBN 978–3–540–16514–9
- [112] SONG, S. ; QIU, X. ; WANG, J. ; MENG, M. Q. H.: Design and Optimization Strategy of Sensor Array Layout for Magnetic Localization System. In: *IEEE Sensors Journal* 17 (2017), März, Nr. 6, S. 1849–1857. <http://dx.doi.org/10.1109/JSEN.2017.2652470>. – DOI 10.1109/JSEN.2017.2652470. – ISSN 1530–437X
- [113] FASSÒ, A. ; PERRI, P. F.: Sensitivity Analysis. Version: 2006. <http://dx.doi.org/10.1002/9780470057339.vas015>. In: *Encyclopedia of Environmetrics*. American Cancer Society, 2006. – DOI 10.1002/9780470057339.vas015. – ISBN 978–0–470–05733–9
- [114] GEORGII, H.-O.: *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. De Gruyter, 2009. – ISBN 978–3–11–021527–4
- [115] BUNDESAMT FÜR STRAHLENSCHUTZ: *Gesetz zum Schutz vor schädlichen Umwelteinwirkungen durch Luftverunreinigungen, Geräusche, Erschütterungen und ähnliche Vorgänge*. Oktober 2002
- [116] MAGNETIC COMPONENT ENGINEERING INC.: *Magnetic vs. Physical Axis in Permanent Magnets*. https://www.mceproducts.com/Knowledge_Base/Articles/Magnetic_vs_Physical_Axis_in_Permanent_Magnets.htm. Version: Januar 2019

- [117] CICHON, D. ; PSIUK, R.: Model-based characterization of permanent magnets with a 3D Hall-Sensor array. In: *2016 6th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2016, S. 238–243
- [118] VERVAEKE, K.: Inline magnet inspection using fast high resolution MagCam magnetic field mapping and analysis. In: *Electric Drives Production Conference (EDPC), 2011 1st International*, IEEE, 2011, S. 172–180
- [119] BRELA, M. ; MICHALSKI, M. ; GEBHARDT, H.-J. ; FRANKE, J.: Hall measurement method for the detection of material defects in plastic-embedded permanent magnets of rotors. In: *Industrial Electronics Society, IECON 2013-39th Annual Conference of the IEEE*, IEEE, 2013, S. 3928–3934
- [120] KIM, K.-C. ; LIM, S.-B. ; KOO, D.-H. ; LEE, J.: The Shape Design of Permanent Magnet for Permanent Magnet Synchronous Motor Considering Partial Demagnetization. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 42 (2006), Oktober, Nr. 10, S. 3485–3487. <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2006.879077>. – DOI 10.1109/TMAG.2006.879077. – ISSN 0018–9464
- [121] FAROOQ, J. ; DJERDIR, A. ; MIRAOUI, A.: Analytical Modeling Approach to Detect Magnet Defects in Permanent-Magnet Brushless Motors. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 44 (2008), Dezember, Nr. 12, S. 4599–4604. <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2008.2001751>. – DOI 10.1109/TMAG.2008.2001751. – ISSN 0018–9464
- [122] ZHU, Z. Q. ; HOWE, D.: Halbach permanent magnet machines and applications: a review. In: *IEE Proceedings - Electric Power Applications* 148 (2001), Juli, Nr. 4, S. 299–308. <http://dx.doi.org/10/df6fc6>. – DOI 10/df6fc6. – ISSN 1350–2352
- [123] PSIUK, R. ; MÜLLER, A. ; CICHON, D. ; HEUBERGER, A. ; BRAUER, H. ; TÖPFER, H.: Inductive localization accuracy of a passive 3-D coil in an Industry 4.0 environment. In: *Journal of Sensors and Sensor Systems* 8 (2019), April, Nr. 1, S. 171–183. <http://dx.doi.org/10/gf2vrw>. – DOI 10/gf2vrw. – ISSN 2194–8771
- [124] PSIUK, R. ; ARTIZADA, A. ; CICHON, D. ; BRAUER, H. ; TOEPFER, H. ; HEUBERGER, A.: Modeling of an inductively coupled system. In: *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* 37 (2018), Juli, Nr. 4, S. 1500–1514. <http://dx.doi.org/10/gf2vrw>. – DOI 10/gf2vrw. – ISSN 0332–1649
- [125] LUA, X. ; ZHANG, H. ; WANG, W.: Optimal filtering for discrete time-varying systems with multiple time-delay measurements. In: *Control, Automation, Robotics and Vision Conference, 2004. ICARCV 2004 8th Bd. 3*, IEEE, 2004, S. 1735–1740