Stefano Domingues Stival

Logizismus und Toleranzprinzip

Die Beiträge von Carnap, Tarski und Gödel

Dissertation
zur Erlangung des akademischen
Grades eines Doctor philosophiae (Dr. phil.)

vorgelegt dem Rat der Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von
Stefano Domingues Stival
Geboren am 17. Dezember 1974 in Goiânia, Brasilien

Erstgutachter: Prof. Dr. Gottfried Gabriel (FSU Jena)
Zweitgutachter: PD Dr. Wolfgang Kienzler (FSU Jena)

Verteidigung der Dissertation: Jena, 6. November 2019.

Für Tatiana, Suelene, Heitor und Clotilde (*in memoriam*).

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vorliegende Arbeit hat der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena als Dissertation vorgelegen. Die Disputation ist am 6. November 2019 erfolgt.

Meinen besonderen Dank spreche ich Herrn Professor Gottfried Gabriel aus. Als Doktorvater hat er mich mit viel Geduld und Engagement betreut. Ohne seine tatkräftige Unterstützung hätte ich die vorliegende Arbeit in dieser Form wohl nicht erfolgreich abschließen können. Zu danken ist auch Herrn Dr. Wolfgang Kienzler, dem zweiten Gutachter der Dissertation für seine Beratung.

Das Stipendium der Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) ermöglichte meinen Aufenthalt in Deutschland und damit die Abfassung meiner Doktorarbeit. Zu Beginn meines Studiums in Deutschland wurde ein Sprachkurs vom Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) bezahlt. Beiden Stiftungen gilt mein aufrichtiger Dank.

Schließlich bedanke ich mich bei allen Kollegen, Kolleginnen und Freunden, die direkt oder indirekt zur Fertigstellung der vorliegenden Arbeit beigetragen haben.

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine ausführliche historische Analyse der Rolle der Begriffe „Logizismus“ und „Toleranzprinzip“ in der Carnapschen Philosophie durchzuführen. Nur eine solche Analyse – das ist unsere These – kann eine korrekte Darstellung der grundlegenden Haltung Carnaps sowie der Entwicklung von Carnaps Gedanken ergeben. Es gibt zwei Hauptgründe für diese Meinung: Erstens, die fraglichen Begriffe sind Konstanten in Carnaps Werk, auch wenn wir von einem Prozess der Reifung der Auffassung derselben sprechen müssen; zweitens, durch diese Begriffe werden die Reaktionen Carnaps auf die technischen Innovationen in dem Gebiet der Logik im Laufe des 20. Jahrhunderts beleuchtet. Aus diesem Grund sollen auch die technischen Details der Auseinandersetzungen zwischen Carnap und den Mitgliedern des Wiener Kreises, Gödel und Tarski untersucht werden, denn sie sind nötig für das richtige Verständnis des dialektischen Prozesses, der Carnaps Methode bestimmt hat. Ohne diese Betrachtung würde sich ein womöglich falsches Bild ergeben, indem Carnaps Philosophie als eine Reihe von erfolglosen Versuchen angesehen werden könnte, lediglich um seine Überzeugungen beibehalten zu können.

Bevor wir unsere Untersuchungsmethode beschreiben, werden wir den Hintergrund und die Motivation dieses Forschungsthemas erläutern. Zunächst muss der Begriff „Logizismus“ geklärt werden, denn er bedeutet bei verschiedenen Autoren Verschiedenes. Trotz dieser Verschiedenheit können wir einen gemeinsamen Nenner identifizieren, welcher diese Benennung rechtfertigt: Logizismus ist im allgemeinen Sinne mit der Idee verbunden, dass mathematische Begriffe logische Begriffe und mathematische Wahrheiten logische Wahrheiten sind. Die ersten Durchführungen des logizistischen Programms finden wir in *Grundgesetze der Arithmetik* von Frege sowie später im Zusammenhang mit der Typentheorie in dem Werk *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell. Beide Werke deuten die mathematischen Wahrheiten als etwas, das aus logischen Axiomen und Definitionen deduziert werden kann. Freges Logizismus war auf die Arithmetik beschränkt. Der Russellsche Logizismus hingegen – wie schon in *Principles of Mathematics* zu erkennen ist – dehnt sich auf das Gebiet der überabzählbaren Zahlen aus (Cantors Mengenlehre wird also angenommen).

Nachdem das axiomatische System des Fregeschen Programms sich als widersprüchlich zeigte, wurde das typentheoretische System von Whitehead und Russell nach und nach (mit Änderungen und Anpassungen) als Paradigma solange gefestigt, bis in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts Gödels Ergebnisse demonstrierten, dass die deduktivistische (finitarische) Auffassung des Logizismus, die bei Frege und Russell zu finden ist, nicht haltbar war, sodass das Programm umformuliert werden musste. In diesem Szenario taucht Carnap auf.

Carnap betont in seiner *Intellectual Autobiography* die aus Freges Analysen gewonnene Überzeugung, dass die Wahrheiten der Mathematik analytisch sind: „[…] in the general sense of truth based on logic alone“.[1] Carnaps Auffassung von ‚analytisch‘ ändert sich aber im Laufe der Zeit. In der ersten Phase des Carnapschen Logizismus (von hier an als CL abgekürzt) bedeutete die Behauptung, dass die mathematischen Sätze analytisch sind, die Ableitbarkeit (Deduzierbarkeit) dieser Sätze aus den Grundsätzen der Logik. „Logik“ heißt dann das deduktiv-definitorische System der Russellschen Typentheorie, verbessert durch die

[1] Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 46.

Vereinfachung von Ramsey und durch die Interpretation der von Wittgenstein stammenden Idee, dass die Wahrheiten der Logik Tautologien sind. Ein bleibender Grundsatz des CL ist es, dass alle Schlüsse tautologischer oder analytischer Natur sind, und zwar nicht nur die Schlüsse der formalen Wissenschaften, sondern auch der Naturwissenschaften. Daraus folgt eine weitere These des Carnapschen Programms: Der Nachweis der Einheitlichkeit des Charakters der Schlüsse in den Wissenschaften (also dass alle korrekten Schlüsse tautologischen Charakters sind) hängt von einer Erklärung der Anwendung der Mathematik auf die empirische Wirklichkeit ab. Nur auf diese Weise könnte man demonstrieren, dass die mathematischen Sätze in allen möglichen Fällen gültig sind.

Nachdem Carnap aufgrund der Ergebnisse von Gödel und Tarski anerkannte, dass die deduktivistische Formulierung nicht zu halten ist, heißt „analytisch“: „nur aufgrund der *syntaktischen* Regeln bestimmt.“ Der CL wird in dieser Phase in *Die Logische Syntax der Sprache* (1934) seine reife Formulierung finden. Infolge des Gebrauchs der syntaktischen (formalistischen) Methode, das heißt einer Methode, bei der sich die Beschreibung einer formalen Sprache L nur auf die Zeichen von L und deren Reihenfolge bezieht, sprechen wir prinzipiell nicht von einer Interpretation.[2] Deswegen gab Carnap ein algebraisches Kriterium, welches die Gültigkeit der logisch-mathematischen Sätze für alle möglichen Fälle (relativ zu einer Sprache) bestimmen sollte. Dies scheiterte aber ebenfalls. Infolgedessen ging Carnap zur Semantik über.

Die Idee einer analytischen Interpretation der mathematischen Sätze bedeutet, im Rahmen des bei Carnap angenommenen semantischen Standpunktes im CL, dass die gültigen Sätze der Mathematik nur aufgrund der *semantischen* Regeln wahr seien. Diese semantische Charakterisierung des

[2] Siehe Carnap: *Replies*, S. 928.

Logischen ist mit der Auffassung verbunden, dass die Sätze, die nur aufgrund der semantischen Regeln wahr sind, Instanzen einer allgemeingültigen logischen Satzfunktion sind (einer gültigen logischen Form). Hier entsteht ein Konflikt mit anderen Philosophien der Mathematik, wie Intuitionismus und Formalismus, die die klassische Interpretation der logischen Gesetze verneinen und somit auch die Möglichkeit einer Interpretation der klassischen Mathematik leugnen. Die Gültigkeit der logischen Satzfunktion $A \vee \neg A$, zum Beispiel, besitzt in klassischen und in konstruktiven Logiken verschiedene Bedeutungen. Im Kontext einer konstruktiven Logik darf das *Tertium non datur* bei aktual unendlichen Bereichen nicht angewendet werden. Nachdem Carnap die These aufstellte, dass die klassische Mathematik logisch interpretiert werden kann, und seitdem es verschiedene Antworten auf die Frage „Was heißt Logik?“ gibt, muss er die gegensätzlichen Antworten auf diese Frage in einer Weise versöhnen, dass diese These eine genaue Bedeutung bekommt. „Versöhnen“ heißt hier zunächst „irgendwie Einigkeit finden“.

Carnaps Strategie in dieser Hinsicht wird es sein zu zeigen, dass die Konflikte zwischen Logizismus, Formalismus und Intuitionismus nur die philosophischen Überzeugungen betreffen, die mit jeder dieser Auffassungen verbunden sind. Aus wissenschaftlichem, d. h. *methodologischem*, Gesichtspunkt gibt es dagegen keine Konflikte, sondern nur verschiedene mögliche Vorschläge, die aus pragmatischen Gründen eingebracht werden. Die Frage, wie das bei Carnap gezeigt wird, führt uns zum Toleranzprinzip (als TP abgekürzt).

Das Toleranzprinzip hat seine Wurzeln in der Tendenz Carnaps, Philosophien als „ways of speaking“ zu betrachten.[3] Dadurch kam er zu der folgenden Ansicht:

> This neutral attitude toward the various philosophical *forms of language*, based on the principle that *everyone is free to use the language most suitable for his purpose*, has remained the same throughout my life.”[4]

In den Sprachen der verschiedenen philosophischen Auffassungen hat man verschiedene Methoden für die Konstitution eines Begriffssystems; dies betonen die Carnapschen Ausdrücke „methodischer Idealismus“, „methodischer Positivismus“, „methodischer Realismus“, usw. Der gemeinsame Nenner dieser Systeme ist, dass sie alle „Sprachformen“ sind. Carnap meinte, er habe einen neutralen Standpunkt in Bezug auf die ontologischen Thesen, die mit diesen Sprachformen verbunden sind. Der Ausdruck dieser Neutralität sei die Logik.

Was den philosophischen Streit in Bezug auf die besondere Natur der Logik anbelangt, nahm Carnap eine analoge Haltung ein, wie jene gegenüber den bereits erwähnten philosophischen Kontroversen. Das wird in der *Logischen Syntax* genau formuliert:

> „*In der Logik gibt es keine Moral.* Jeder mag seine Logik, d. h. seine Sprachform, aufbauen wie er will. Nur muss er, wenn er mit uns diskutieren will, deutlich angeben, wie er es machen will, *syntaktische Bestimmungen geben anstatt philosophischer Erörterungen*.“[5]

Mit „Bestimmungen“ bezieht sich Carnap auf die in der *Logischen Syntax* genannten Formbestimmungen und Umformungsbestimmungen. Was daher Logizismus, Formalismus und Intuitionismus eint, ist der wissenschaftliche

[3] Siehe Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 17ff.
[4] Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 18.
[5] Carnap: *Logische Syntax*, S. 45 [Meine Hervorhebung].

Aspekt: die Formulierung der Theorie in wohlgeformten Sätzen und gültigen Schlüssen. Die metaphysischen Auffassungen, die mit diesen Thesen verbunden sein können, seien unerheblich. (Wir denken hier z. B. an Behauptungen wie „es gibt ‚wirklich' eine aktuale Unendlichkeit"; oder „ein aktual Unendliches darf es nicht geben, denn die mathematische Wirklichkeit ist in der reinen Anschauung gegeben"; usw.) Die Metaphysik kann nicht in wissenschaftlicher (logischer) Form konstruiert werden, sie gehört nicht zur theoretischen Sphäre. Deswegen ist die Metaphysikkritik ein wesentlicher Teil des CL.

Wenn man frei ist, die Sprache zu wählen, die man will, erfolgt diese Wahl aus pragmatischen, nicht aus theoretischen Gründen. Dies erklärt die Beziehung zwischen Logizismus und Toleranzprinzip bei Carnap: Wenn z. B. Evert Beth behauptet, Carnap hätte in *Logische Syntax* einen Formalismus vertreten, antwortet Carnap, er habe in diesem Buch die formalistische *Methode* verwendet; die begleitende (philosophische) *These* des Formalismus, dass die Möglichkeit einer logischen Interpretation der klassischen Mathematik verneint wird, habe er jedoch nicht vertreten. Er kann auf diese Weise von der Methode des Formalismus Gebrauch zu machen, um sie für seinen eigenen Zweck anzuwenden, nämlich für die Beibehaltung der These des Logizismus. Er benutzt eine Sprache seiner freien Wahl, „to his purposes". Es ist das Toleranzprinzip, das es ihm erlaubt, die These des Logizismus für eine Sache der Zweckmäßigkeit zu halten, eine freie Wahl aus pragmatischen Gründen, ohne dafür eine philosophische Rechtfertigung zu benötigen.

In der semantischen Phase seiner Philosophie änderte Carnap einige technische Aspekte, die bei der Umsetzung seiner Grundhaltung zum Einsatz kamen. Dies geschah aufgrund seiner Erkenntnis, die auf den Ergebnissen Tarskis beruhten, dass eine korrekte Charakterisierung der gültigen

Schlüsse („logischen Folgerung“) und anderer logischer Begriffe nicht im Rahmen der Syntax, sondern der Semantik geschehen soll. Das TP bleibt aber im Wesentlichen dasselbe Prinzip.

Dieses Bild, das wir hier skizziert haben, soll uns erlauben, die Fehler einiger Interpretationen zu identifizieren. In der Tat ist es unser Ziel, in dieser Arbeit nachzuweisen, dass weder das TP „sich selbst erodiert“ (so beispielsweise Michael Friedmann), noch dass es zu einem Zusammenbruch des CL führt (André Carus u.a.).

Damit haben wir die Argumente dargestellt, aus welchen sich der Standpunkt dieser ganzen Schrift ergibt. Wir werden jetzt die Methode umreißen, die sich aus diesem Standpunkt ergibt.

In Kapitel 1 werfen wir einen Blick auf die Wurzeln des CL und den Zustand des Programms um 1930, um die wichtigsten Schwierigkeiten zu präzisieren, die der Ausführung des CL in seinen Elementen im Weg stehen. Diese Elemente sind das, was wir „Thesen des Carnapschen Logizismus“ nennen. In diesem sowie in den nächsten Kapiteln wird gezeigt, wie durch einen intensiven dialektischen Prozess mit anderen Autoren und philosophischen Strömungen in Europa die Thesen des CL in dem Versuch, ihre wesentlichen Aspekte durchzusetzen, tiefgehend modifiziert werden.

Dabei stellen wir fest, wie die reife Form des TP sich aus dem Versuch, die Gegensätze in Bezug auf die Auffassung der logischen Basis des Erkenntnissystems zu neutralisieren, entwickelt. Diese Problematik führt uns zu der Diskussion der Entwicklung des CL in der Zeit des Wiener Kreises. Diese Periode zeigt entscheidende Umwandlungen der Methodologie Carnaps, um das Programm als haltbar beizubehalten.

Die Herausforderungen werden danach noch größer, als Gödel, und später Tarski, die Szene dominieren. Die Wirkung der Gödelschen Ergebnisse werden im Kapitel 2.2. analysiert. Die Interaktion mit Gödel ist teilweise verantwortlich für die Form, wie der CL in der *Logischen Syntax* formuliert wird. Der andere große Einfluss ist jener von Tarski, der noch wichtiger als derjenige Gödels wird, weil Tarski in die Einzelheiten der Diskussion um die Möglichkeiten der Umsetzung des CL mit einbezogen ist. In Kapitel 3 wird analysiert, wie sich der Übergang Carnaps von der Syntax zur Semantik vollzog. Hier können wir bereits sehen, wie entscheidend Tarskis Rolle war. Dieses Kapitel zeigt uns, dass die Durchführung des CL in dieser Periode ein Ergebnis der intensiven Zusammenarbeit von Tarski mit Carnap war. Die Anerkennung der Wahrheit dieser These hängt von zwei Faktoren ab.

An erster Stelle soll der Dialog zwischen Carnap und Tarski um das Thema rekonstruiert werden. Die Quellen für diese Rekonstruktion sind die Tagebucheinträge und Notizen der Gespräche, die wir in Carnaps Nachlass finden konnten. Durch dieses Material werden viele Passagen von veröffentlichten Vorträgen und Aufsätzen verständlicher. Danach wird es möglich die richtige Bedeutung der logischen und semantischen Begriffe in diesen Diskussionen zu erklären. Wir werden sehen, dass die Definitionen solcher Begriffe in der heute dominanten Auffassung der Logik und in der modernen „model theory“ anders sind als bei Tarski und Carnap in der Diskussion über die Durchführung des Logizismus.

Die Analyse in Kapitel 3 soll es uns ermöglichen, in Kapitel 4 die Quellen der Fehler einiger Interpretationen des CL zu identifizieren, wie wir sie weiter oben beschrieben haben. Abschließend werden die Perspektiven und Aufgaben des Logizismus in der dargestellten Form zusammengefasst.

1. Einblicke in Carnaps Logizismus 1930: Seine Hauptmerkmale

In diesem Kapitel wollen wir versuchen ein klares Bild des CL gegen 1930 zu geben, indem seine Grundelemente aufgeführt und analysiert werden, so wie sie der Autor selbst präsentiert hat und wie sie im ersten Band von „Erkenntnis“[6] erschienen sind. Carnap teilt diese Grundelemente in jene, die eine „innerlogische Bedeutung“ haben, und jene, die eine „wissenschaftliche Bedeutung“ besitzen. Diejenigen der ersten Kategorie betreffen die formale Grundlage des Systems, gewissermaßen die reine Logik, während diejenigen der zweiten Kategorie die sogenannte „angewandte Logik“ (hier im Sinne von „Erkenntnistheorie“ verstanden) umfassen[7]. Mit Hilfe dieser Methode – so dachte Carnap damals – wird die Philosophie fortschreiten. Das Kantische Echo ist hier klar zu hören, es handelt sich um die Idee, die Philosophie den „sicheren Gang der Wissenschaften“ einschlagen zu lassen[8]. Um die erwähnte Analyse auszuführen, werden wir die Wurzeln der Elemente des CL erforschen und jedes einzelne so deutlich wie möglich präsentieren.

Die Grundelemente der neuen Logik sind folgendermaßen eingeteilt: zunächst jene, die nach Carnap a) eine „innerlogische Bedeutung“ besitzen: 1) symbolische Einkleidung; 2) Ausdehnung des Bereiches; 3) Überwindung der Antinomien durch die Typentheorie. Anschließend folgen jene, die b) eine „wissenschaftliche Bedeutung“ haben: 4) die Möglichkeit der Ableitung der Mathematik aus der Logik; 5) der tautologische Charakter des Schließens; 6) die Einheitswissenschaftsthese; 7) die Ausschaltung der

[6] Erkenntnis I, S. 12-26.
[7] Vgl. Carnap: *Alte und Neue Logik*, S. 63ff.
[8] Vgl. Kant: *Kritik der reinen Vernunft*, Vorrede zur zweiten Auflage.

Metaphysik[9]. Die ersten drei erwähnten Grundelemente des Systems bilden die technische Grundlage, die uns erlauben soll, den Fortschritt der Philosophie zu erreichen. Was Carnap im Grundelement „1)“ meint, wird im Vorwort seiner *Logischen Syntax* ganz klar: „Seit beinahe einem Jahrhundert sind Mathematiker und Logiker mit Erfolg bemüht, aus der Logik eine strenge Wissenschaft zu machen.“[10] In diesem Zitat bezieht sich der Autor auf die zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts entstehende Mathematisierung der Logik (insbesondere die französische Schule, De Morgan und George Boole), hauptsächlich aber auf die Tradition, die ihre Spitze in der Fregeschen Konstruktion der Sätze der logischen Sprache (eine „Sprache des reinen Denkens“) hatte, mit ihrer Unterscheidung zwischen Funktion und Argument[11], sowie auf die typentheoretische Konstruktion von Russell, welche den Widerspruch des Fregeschen Systems aufhob. Im Folgenden – als erster Schritt im Aufspüren der Wurzeln des CL – erkunden wir einige der Hauptaspekte beider Formulierungen der symbolischen Logik, sowie die anschließenden Ideen Wittgensteins, soweit sie den Fortschritt des Logizismus und infolgedessen der Philosophie selbst in Carnaps Sinne ermöglichten.

Analysieren wir zunächst die Beiträge der Fregeschen Logik in Bezug auf die zwei ersten Punkte der formalen Grundlage der neuen Logik; also jene, die eine innerlogische Bedeutung besitzen: Der Haupterfolg der Fregeschen Logik, was die symbolische Einkleidung der Logik betrifft, wird von Carnap „Strenge der Schlussfolgerung“ genannt[12]. Durch die Fregesche zweidimensionale Notation, so glaubt Carnap noch

---

[9] Siehe Carnap: *Alte und Neue Logik*. Die Elemente von „a)“ sind Werkzeuge, um jene der zweiten Kategorie umzusetzen. Deswegen nennen wir die Elemente von „b)“ die eigentlichen „Thesen des CL“ und werden sie von (I) bis (IV) nummerieren. Siehe unten Kapitel 2.

[10] Carnap: *Logische Syntax*, S. III.

[11] Siehe Frege: *Begriffsschrift*, §3; vgl. auch §9.

[12] Siehe Carnap: *Alte und Neue Logik*.

1930, werden alle unbemerkten Voraussetzungen ausgeschaltet, indem jeder Schritt des Gedankenganges durch den Symbolismus expliziert wird. Freges Urteilstheorie hat die Möglichkeiten der Logik in einer unerhörten Weise erweitert, sei es durch die schon erwähnte Zerfällung der Urteile in Funktion und Argument oder durch die Möglichkeit der Zurückführung aller logischen Urteile auf die assertorischen[13]. Diese Innovationen erlaubten ihm, die Axiomatisierung der Logik durchzuführen[14].

Weitere systematische Beiträge Freges für die symbolische Einkleidung der neuen Logik, für die Ausdehnung ihres Bereiches und damit indirekt für Carnaps künftige Arbeit in der Logik und in der Philosophie insgesamt stehen in seinen berühmtesten Werken (außer der schon erwähnten *Begriffsschrift*[15], teilweise in den *Grundlagen der Arithmetik*[16] und in den *Grundgesetzen der Arithmetik*[17]). Frege sah seine Symbolik oder „Begriffsschrift" als „das Ganze von Bezeichnungen"[18] von Inhalten an[19]. Das bedeutet, unabhängig von den Phasen seines Denkens[20], dass die logische Sprache nach Freges Meinung auf keinen Fall nur ein syntaktisches System ist. Sie sollte in sich zwei Hauptaspekte vereinen, die fünf der Elemente der oben genannten „neuen Logik" – welche den Logizismus von Carnap zusammenfasst – betreffen. Frege sah sein Projekt als eine langsame,

---

[13] Frege: *Begriffsschrift*, S. 4.
[14] Ebd., S. 2.
[15] Ebd.
[16] Frege: *Grundlagen der Arithmetik*.
[17] Frege *Grundgesetze I* und *Grundgesetze II*.
[18] Frege: *Funktion und Begriff*, S. 125.
[19] Der Terminus ‚Begriffsschrift' bezieht sich in diesem Sinne nicht auf das gleichnamige Buch, sondern auf die von Frege entwickelte Form der begrifflichen Notation.
[20] Man darf von einer anfänglicher Phase reden, in der die Notation den sogenannten „begrifflichen Inhalt" bezeichnet. Ab dem Aufsatz *Funktion und Begriff* (1891) wird die Unterscheidung zwischen dem Bezeichneten (dem Gegenstand selbst als „Bedeutung") und der „Art des Gegebenseins" des Gegenstandes (als „Sinn") eingeführt.

schrittweise Verwirklichung des Leibnizschen Projekts einer *lingua characteristica* an, welche gleichzeitig ein *calculus philosophicus* oder *ratiocinator* ist[21]. Praktisch bedeutet das für Frege: die Ausdehnung der reinen Formelsprache erst auf die Geometrie, dann auf die reine Bewegungslehre und weiter auf „Mechanik und Physik“.[22] In diesem Zusammenhang macht er eine entscheidende Behauptung: „In den letzteren Gebieten, wo neben der *Denknothwendigkeit die Naturnothwendigkeit sich geltend macht,* ist am ehesten eine Weiterentwicklung der Bezeichnungsweise mit dem Fortschreiten der Erkenntnis vorauszusehen.“[23] Diese Konzeption Freges ist von zentraler Bedeutung für den CL, wie wir später sehen werden. Zunächst genügt die Andeutung, dass das Verständnis des logischen Symbolismus – unabhängig von der Beschaffenheit der Dinge – sowohl ein Bezeichnungssystem, gleichzeitig aber auch ein Operationssystem ist, das auf alle Gegenstandsarten anwendbar sein soll und insbesondere die Möglichkeit liefert, die Mathematik (bei Frege nur die Arithmetik) aus der Logik abzuleiten. Weiterhin – und das ist für den Fregeschen Logizismus und auch für den CL wesentlich – enthält der Logizismus die Erklärung der Anwendbarkeit der Mathematik durch das Aufzeigen der Möglichkeit einer Gesamtsprache der Wissenschaften, oder auch der Einheitswissenschaftsthese (unser Punkt 6). Dass eine befriedigende Grundlegung der Logik und der Mathematik von der Anwendbarkeit dieser Wissenschaften auf die nicht rein formalen Bereiche abhängt –

[21] Siehe Frege: *Begriffsschrift*, S. XIff., insbesondere Seite XII. Sich auf das Leibnizsche Programm beziehend, bemerkt Frege: „Wenn aber auch dies hohe Ziel [eine universale Sprache des „*calculus ratiocinator*“] mit Einem Anlaufe nicht erreicht werden kann, so braucht man doch an einer langsamen, schrittweisen Annäherung nicht zu verzweifeln. Wenn eine Aufgabe in ihrer vollen Allgemeinheit unlösbar scheint, so beschränke man sie vorläufig; dann wird vielleicht durch allmähliche Erweiterung ihre Bewältigung gelingen.“

[22] Ebd., S. XII.

[23] Ebd., S. XII [Meine Hervorhebung].

insbesondere von der Anwendung auf die empirische Wirklichkeit –, wird in der folgenden Passage von Carnaps Autobiographie ganz deutlich:

> "Furthermore the following conception, which *derives essentially from Frege*, seemed to me of paramount importance: It is the task of logic and mathematics within the total system of knowledge to supply the forms of concepts, statements and inferences, forms which are then applicable everywhere, hence also to non-logical knowledge. *It follows from these considerations that the nature of logic and mathematics can be clearly understood only if close attention is given to their application in non-logical fields, especially in empirical science*."[24]

Carnap zufolge bedeutet diese These, dass die „formalen" und „realen" Wissenschaften nur dadurch in Einklang gebracht werden können, dass sie in ein Gesamtsystem eingebettet werden[25]. Diese wissenschaftliche (logische) Behandlung der Dinge unabhängig von ihren Beschaffenheiten, wurde bei Frege dadurch erreicht, dass die Einführung der Gegenstände einem Identitätskriterium gehorcht[26]. Danach eröffnet Frege durch die Konstruktion einer ordnenden Beziehung die Möglichkeit einer Konstruktion aller Wissenschaften, die es mit Reihen zu tun haben; also Zahlenreihe (Arithmetik); Punktreihe (Geometrie); Maßreihe (solche des Raumes; der Zeit; der verschiedenen Zustandsgrößen: Physik). Auf diese Weise erreicht Frege die Erweiterung der Möglichkeiten der Schlussfolgerung und die Ausdehnung des Bereiches durch die Entwicklung einer Relationstheorie. Obwohl der Beginn dieses Teils der

---

[24] Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 12.

[25] Carnap hat diese Auffassung – wesentlich für seinen Logizismus – durch sein ganzes Leben beibehalten. Über die Änderungen, die sich später wegen des Scheiterns des *Logischen Aufbaus* gezeigt haben, siehe das Nachwort von Carnap: *Alte und Neue Logik* (von 1957). Wir kommen darauf zurück. Für eine kritische Position gegenüber Carnaps Interpretation von Freges Grundlegung der Mathematik in Verbindung mit der Sicht der empirischen Wissenschaften siehe Gabriel: *Carnap and Frege*, S. 73ff., insbesondere Seite 75.

[26] Über das Identitätskriterium siehe Frege: *Grundlagen*, insbesondere §§ 55-68; Vgl. auch Frege: *Grundgesetze I*, §§ 10; 29; 31.

symbolischen Logik sich schon in dem Fregeschen System findet, wurde erst durch die Russellsche Fassung und Notation dieser Theorie möglich, dass Carnap seine philosophische Arbeit und seine Formulierungen von axiomatischen Systemen durchführen konnte[27]. Werfen wir zunächst einen Blick auf die Stellung der Metaphysik, um dann zu dem wichtigsten Punkt zu kommen, nämlich zur „Möglichkeit der Ableitung der Mathematik aus der Logik".

Freges Einstellung gegenüber der Metaphysik war anders als jene, die wir bei Carnap finden. Bekanntlich ging es Carnap um die Ausschaltung dieser, seiner Meinung nach, Scheinwissenschaft, die von ihm auch „Begriffsdichtung" genannt wurde. Die Metaphysik sei der verfehlte Versuch, ein Lebensgefühl in wissenschaftlicher Darstellungsform auszudrücken. Tatsächlich habe sie aber keinen wissenschaftlichen Inhalt. Diese Auffassung ergibt sich bei Carnap und dem Wiener Kreis als Konsequenz aus dem sogenannten „Sinnkriterium". Als 1930 der Wiener Kreis Wittgensteins Werk interpretierte, wurde dieses Kriterium identifiziert mit dem „Verifikationsprinzip". Hingegen finden wir bei Frege nur die Kritik an einzelnen metaphysischen Sätzen und Argumenten mit Hilfe der Logik, aber keine generelle Ablehnung der Metaphysik. Ganz im Gegenteil lassen sich bei ihm metaphysische Interessen dingfest machen.[28]

Wenden wir uns dem Problem der Antinomien innerhalb der klassischen Logik und ihren Lösungen im System der *Principia Mathematica* zu. Dieses Problem steht im engen Zusammenhang mit der Möglichkeit der Ableitung der Mathematik aus der Logik. Wir werden jetzt ausführlich

---

[27] Vgl. Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 11f.

[28] In diesem Zusammenhang siehe Gabriel: *Freges Philosophie der Mathematik*, auch Gabriel: *Frege und die Kontinentalen Ursprünge der Analytischen Philosophie*, S. 21.

untersuchen, was für einen Fortschritt das System von Whitehead und Russell – später durch Wittgenstein und Ramsey verbessert und modifiziert – repräsentiert, sowie die Probleme aufzeigen, die dieses System noch offen lässt, um das ganze Bild der Situation und der Umstände darzustellen, die Carnap Ende 1930 vorfand.

Der bekannte Schlag von Russell gegen das Fregesche Programm erfolgte durch einen auf den 16. Juni 1902 datierten Brief. Dort finden wir die berühmten Worte Russells:

> „Nur in einem Punkt ist mir eine Schwierigkeit begegnet. Sie behaupten (…) *es könne auch die Function das unbestimmte Element bilden*. Dies habe ich früher geglaubt, jedoch jetzt scheint mir diese Ansicht zweifelhaft, wegen des folgenden Widerspruchs: sei *w* das Prädicat, ein Prädicat zu sein welches von sich selbst nicht prädicirt werden kann. Kann man *w* von sich selbst prädiciren? Aus jeder Antwort folgt das Gegentheil. Deshalb muss man schließen, dass *w* kein Prädicat ist.“[29]

Frege erkannte sogleich den Widerspruch und antwortete Russell prompt.[30] Die Strategie, auf die Russell sich in der obigen Passage bezieht (‚die Funktion unbestimmt lassen‘), wurde in der *Begriffsschrift* als die korrekte geschildert, und in den *Grundlagen* weiterentwickelt[31]. Dabei geht es Frege letztlich darum, die Zahlen als Begriffsumfänge (Klassen, Wertverläufe)[32] und damit als Gegenstände einzuführen[33]. Das entsprechende Kriterium können wir, wie schon angedeutet, das Identitätskriterium nennen. Als sich die Widersprüchlichkeit des ganzen Systems zeigte, schlug Russell in Appendix A von *Principles of Mathematics*[34] eine

[29] Frege: *Wissenschaftliche Briefwechsel*, S. 211 [Meine Hervorhebung].
[30] Frege: *Wissenschaftliche Briefwechsel*, S. 213.
[31] Siehe Frege: *Grundlagen*, §§ 55-68.
[32] In Russell: *Principia* zeigt Russell, dass die Antinomie auch die Eigenschaften im Fregeschen System betrifft (Vgl. Carnap: *Alte und Neue Logik*, S. 71; und Carnap: *Logical Syntax*, § 60a. Dieser Abschnitt ist die Übersetzung von Carnap: *Unvollständigkeit und Antinomien*.)
[33] Vgl. Frege: *Grundgesetze II*, S. 257f.
[34] Siehe Russell: *Principles of Mathematics*, S. 501ff.

Lösung vor, die in den mit Whitehead verfassten *Principia Mathematica*[35] als Typentheorie entwickelt wurde.

Die Beziehungslehre oder Relationstheorie, die im Fregeschen System schon präsent war, konnte mit der Entwicklung des Systems der *Principia Mathematica* eine große Erweiterung erfahren. Die Russellsche Notation erweist sich zudem als viel praktischer als jene von Frege. Die Typentheorie überwand die allgemein-logischen Antinomien, obwohl sie seinerzeit noch einige Probleme aufwies. Bei der in *Principia Mathematica* konstruierten Typentheorie handelt es sich um die sogenannte verzweigte Typentheorie, die viele Hindernisse für die Entwicklung der Mathematik mit sich brachte. Vielleicht das ernsteste soll hier als Frage formuliert werden: wie viele Sätze der Analysis können nicht nur nicht bewiesen, sondern sogar nicht einmal ausgesprochen werden? Dies ist natürlich ein Hindernis für die Möglichkeit der Ableitung der Mathematik aus der Logik (also: die Ableitung mathematischer Begriffe aus logischen Begriffen, sowie die Ableitung mathematischer Theoreme aus logischen Grundsätzen). Um dieses Problem zu überwinden, stellte Russell das sogenannte Reduzibilitätsaxiom auf, das uns erlaubt, alle Ordnungen auf einen ‚Typus' zu reduzieren. Dieses Axiom wurde von Wittgenstein scharf kritisiert, wodurch er Russell zum Aufgeben desselben brachte. Andere ernste Probleme waren die bei der Annahme der Unendlichkeits- und Auswahlaxiome bestehenden Existenzvoraussetzungen. Es sei inakzeptabel, so war damals allgemein angenommen worden, dass die Logik irgendwelche existentiellen Implikationen bedinge. Aus diesen Gründen erfolgten die Kritiken von Wittgenstein und der erneute Umbau der Typentheorie in 1926 durch Ramsey[36].

[35] Russell/Whitehead: *Principia Mathematica*.
[36] Siehe Ramsey: *Foundations of Mathematics*.

Wittgenstein hielt an der These fest, alle Wahrheiten der Logik seien Tautologien. Das bedeutet, wie erwähnt, dass die Logik keine existentiellen Annahmen treffen kann und darf. Sie ist, woran auch Carnap lebenslang festhielt, gehaltleer. Vielleicht ist dies die bedeutendste Konsequenz seiner Auffassung, dass es sich beim Schließen nur um die Umwandlung innerhalb irgendwelcher Sprache handelt, wobei es keine Erweiterung des Inhalts gibt. Die durch Wittgenstein zum Status der Logik vertretenen Thesen waren für den ganzen Wiener Kreis und speziell für Carnap sehr wichtig; denn mit dieser Auffassung des Schließens gewann die These, dass die Metaphysik keinen echten Satz enthält, einen bis dahin nicht vorhersagbaren Schwung: „Niemals kann aus einem Sachverhalt ein anderer erschlossen werden.“[37] Insbesondere kann man niemals aus einer erfahrbaren Tatsache etwas Transzendenten ableiten, sei es ein „Ding an sich“, „das Absolute“ oder andere „Gegenstände“ gleicher Art.

Eine andere Konsequenz dieser von Carnap angenommenen Auffassung betrifft den sogenannten ‚induktiven Schluss‘. Diese Art des Schließens wird in einem Vortrag behandelt, den Carnap am 1. Dezember 1930 in Warschau gehalten hat[38]. Dort wird die Frage gestellt, ob die induktive Schlussart nicht einfach eine andere Art des Schließens sei. Wir skizzieren jetzt den bei Carnap durchgeführten Gedankengang, um die deduktive (d. h. damals per Definition tautologische) Natur alles echten Schließens nachzuweisen, und zwar nicht nur für die Schlüsse der formalen Wissenschaften, sondern auch für alle berechtigten Schlüsse der Naturwissenschaften. Zunächst wird

[37] Carnap: *Alte und Neue Logik*, S. 78.

[38] Carnap [110-07-34]. Die Ausführung der These, dass alle berechtigten Schlüsse der Naturwissenschaften auch deduktiv (d. h. tautologisch) nachkonstruiert werden können, findet sich in Carnap [110-07-35].

die Prämisse akzeptiert, dass aus einem Sachverhalt kein anderer geschlossen werden kann. Tatsächlich scheint es klar genug zu sein, dass wir z. B. aus Wahrnehmungen keinen Schluss auf die Existenz von Dingen ziehen können, seien es sichtbare Dinge seien es nicht sichtbare Dinge (Atome, Elektronen). Solche Schlüsse seien nur Scheinschlüsse. Man kann nicht aus den Wahrnehmungen zu dem Schluss „es gibt Dinge“ kommen. Dass es so zu sein scheint, kommt nur dadurch zustande, dass wir durch die natürliche Sprache in die Irre geleitet werden. In einer streng logischen Nachkonstruktion durch eine künstliche Sprache zeigt sich, dass alle implizierten ‚Entitäten‘ durch die Sprache vorausgesetzt worden sind.[39] Das ontologiefreie Verständnis der Logik ist der wichtigste Zug der neuen Auffassung der Wittgensteinschen Logik (in Kritik an den vorausgegangenen Ergebnissen von Russell und Frege), wie sie der Wiener Kreis übernommen hat.

Infolge der Annahme der Wittgensteinschen Konzeption, dass die gültigen Schlussfolgerungen immer tautologisch oder gehaltleer sind – damals nahm Carnap beide Termini als Synonyme – und davon ausgehend, dass die Logik keine faktischen Implikationen zulassen dürfe, erfährt der Logizismus einen gründlichen Umbau. Russell erkannte die Problematik des Reduzibilitätsaxioms. Daher wird die verzweigte Typentheorie aufgegeben und durch die einfache Typentheorie in der Formulierung von Ramsey ersetzt. Für Carnap sind solche Transformationen der logizistischen Auffassung weitere Schritte in Richtung einer Auflösung der Konflikte um die Probleme, die in Zusammenhang mit der Grundlegung der Mathematik standen. So war Carnap insbesondere darum bemüht, Logizismus und Formalismus –

[39] Dies ist eine Folge der Tatsache, dass in einer formalen Sprache die Grundbegriffe erklärt werden und auf deren Grundlage alle anderen Begriffe definiert werden müssen. Ebenso müssen alle komplexeren Sätze aus einfacheren Sätzen zusammengesetzt werden.

später auch Intuitionismus – miteinander in Einklang zu bringen. Trotzdem sah er noch viele offene logische und erkenntnistheoretische Probleme, die wir hier kurz auflisten und behandeln werden.

Die Diskussion um den Zustand der Grundlegung der Mathematik finden wir in zwei Aufsätzen, die aus Tagungen über das Thema im Jahr 1930 hervorgegangen sind. Der erste erschien in den *Blättern für Deutsche Philosophie* mit dem Titel *Die Mathematik als Zweig der Logik*, die Tagung hatte wahrscheinlich im Sommer stattgefunden (vielleicht im Juni); der zweite, mit dem Titel *Die Logizistische Grundlegung der Mathematik* basiert auf dem am 5. September desselben Jahres unter dem Titel *Die Grundgedanken des Logizismus* gehaltenen Vortrag[40] (der erste Paragraph *von Mathematik als Zweig der Logik* trägt denselben Titel). Zwar sind die Inhalte beider Aufsätze sehr ähnlich, jedoch gibt es auch bemerkenswerte Unterschiede, die wahrscheinlich auf die zwischenzeitlichen Erfahrungen Carnaps mit Gödels negativen Ergebnissen über die Entscheidbarkeit der Logik zurückgehen[41]. Es liegt eine in „Erkenntnis" erschienene *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik*[42] vor, die hauptsächlich von Gödels Ergebnissen angeregt worden war. Wir werden im Folgenden die relevantesten Details dieses Materials untersuchen. Unsere Strategie wird folgende sein: Der Vergleich zwischen den genannten Aufsätzen wird eine ausführliche Darstellung von Carnaps Rezeption des Logizismus in der hier fraglichen Zeit ermöglichen. Wir wollen Carnaps Verwertung und Herausarbeitung der

[40] Siehe dazu Dawson: *Introductory Notes*, S.197f.

[41] Darüber Dawson: *Introductory Notes*, S. 199: "On the other hand, there is evidence in Carnap's Nachlass that Gödel had told him of his incompleteness discovery before the Königsberg meeting, but that, even so, Carnap still found the result difficult to understand months later." (Mehr dazu weiter unten.) Darüber auch Carnap: *Logizistische Grundlegung der Mathematik*, S. 104 und Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 53.

[42] Hahn u. a.: *Diskussion* zur *Grundlegung der Mathematik*.

Wurzeln, die wir oben angedeutet haben und welche in verschiedenen Formulierungen der Typentheorie als Grundlage der Diskussion fungieren, präsentieren. Die ‚Ergebnisse' dieser Darstellung sollen den dialektischen Prozess, welcher in der Einleitung als methodischer Ansatz vorausgesetzt worden ist, weiter voranbringen. Es wird sich zeigen, dass die Elemente der neuen Logik, welche Carnaps Logizismus eigentlich verbindet, und die eine wissenschaftliche Bedeutung haben (unsere Punkte 4 bis 7), stark modifiziert werden.

Zwar finden wir in *Die Mathematik als Zweig der Logik* eine Diskussion unserer vier Punkte und ihre Zusammenführung, sie werden jedoch meist nur angedeutet oder skizziert, obwohl sich durch den Aufsatz ein klares Exposé der wichtigsten Aspekte ergibt. Was die Ableitung der Mathematik aus der Logik anbelangt, wird z. B. ganz deutlich gemacht, dass in der Ableitung der mathematischen Begriffe nur der Gebrauch logischer Begriffe notwendig ist[43]. Wichtig ist hier zu beachten, dass gemäß Carnap der Logizismus keine neue philosophische Interpretation der Zahlen ist, sondern die erste Deutung der Zahlen, während der Intuitionismus auf der Annahme einer anderen Deutung der Zahlen beruht (durch die Idee einer reinen Anschauung). Im Unterschied dazu liefert der Formalismus keine Deutung der Zahlen, sondern nur eine Methode, die ergänzt werden muss, denn durch den Formalismus werden den Zahlausdrücken keine Bedeutungen beigelegt. Es werden die Zahlausdrücke vielmehr als bloß bedeutungslose Figuren behandelt, sodass die Anwendbarkeit der Mathematik auf nicht mathematische Sätze verhindert wird, was keine befriedigende Erklärung der Grundlegung der Mathematik sei, da dies ihren Gebrauch in den nicht formalen Wissenschaften in Frage stellt. Carnaps Lösung für diesen

[43] Siehe Carnap: *Mathematik als Zweig der Logik*, § 3.

Konflikt zwischen den ursprünglichen ‚Philosophien der Mathematik' wird darin bestehen: nur einen Teil des Intuitionismus als etwas von Bedeutung zu betrachten, nämlich die methodische finitistisch-konstruktivistische Forderung[44], und diesen Teil anschließend im Formalismus anzuerkennen, um schließlich das übrig Gebliebene mit „dem Gesichtspunkt des Physikers (Physik im weitesten Sinne verstanden)" in Einklang zu bringen. Darüber werden wir später ausführlicher sprechen.

Im Abschnitt über die Überwindung mancher wesentlicher Schwierigkeiten der verzweigten Typentheorie finden wir in derselben Schrift eine Diskussion über die problematischen Grundsätze dieser Theorie, ausgehend von Wittgensteins Auffassung des tautologischen Charakters der Logik. Anschließend findet sich eine Erwähnung von Ramseys vereinfachter Version der verzweigten Typentheorie, gefolgt von einer Ablehnung der Ramseyschen absolutistischen und metaphysischen Konzeptionen der Logik und Mathematik, die im Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz nicht definierbarer logischer Gebilde stehen[45]. Diese Diskussion gehört allerdings in den Abschnitt über die Ableitbarkeit der mathematischen Sätze aus logischen Sätzen. In *Die Mathematik als Zweig der Logik* finden wir keine weitere Besprechung der Probleme, welche die Ableitung der mathematischen Begriffe aus jenen der Logik betreffen. Im Gegenteil: in *Die logizistische Grundlegung der Mathematik* liefert Carnap eine ausführliche Behandlung von Begriffen, die Russell zur Verschärfung der Typentheorie veranlasst haben und die später die Arbeit Ramseys motivierten. Es handelt sich um sogenannte „nicht-prädikative" Begriffe oder Eigenschaften, die mit dem Problem des „*circulus vitiosus*" zusammenhängen. Als Beispiel eines solchen nicht-

[44] Vgl. Carnap: *Mathematik als Zweig der Logik*, S. 308.
[45] Carnap: *Mathematik als Zweig der Logik*, S. 308.

prädikativen Begriffes benutzt Carnap den zur Zahlentheorie gehörenden Terminus „induktiv“, dessen Begriffsbildung so formuliert werden kann:

$$\mathrm{Ind}\,(x) =_{\mathrm{df.}} \forall f\ [(\mathrm{Erbl}\,(f) \wedge f(0))\ \exists\ f(x)]$$

In Worten: eine Zahl ‚x‘ heißt kraft Definition induktiv, wenn und nur wenn, ‚x‘ alle Eigenschaften zukommen, die erblich sind, und die der Zahl Null zukommen. Russell hat zu dieser Art von Begriffsbildung ein Verbot erlassen, das „Prinzip des *circulus vitiosus*“ benannt wird. Dieses Prinzip lautet: „Keine Gesamtheit kann Glieder enthalten, die nur mit Hilfe dieser Gesamtheit definiert werden können“.[46]

Der Grund dieses Verbotes kann leicht eingesehen werden, wenn wir Einzelfälle betrachten, z. B. wenn wir die Frage stellen, ob die Eigenschaft *f* der Zahl 3 zukommt. Der Gedankengang wird in folgender Weise dargestellt: Der Allquantor drückt ‚für alle Eigenschaften‘ aus; zu ‚allen Eigenschaften‘ gehört auch ‚die Eigenschaft, ‚induktiv‘ zu sein‘. Um festzustellen, ob diese Eigenschaft der Zahl 3 zukommt, müssen wir zuerst feststellen, dass sie erblich ist und der Null zukommt, und außerdem, dass sie der Zahl 3 zukommt. Die Zirkularität kommt hier ans Licht und zeigt uns ganz deutlich, dass die Prädikativität in diesem Fall nur scheinbar ist. Deswegen sollen solche Begriffsbildungen, so sah es Russell, für nicht zulässig erklärt werden und dazu gehört auch die hier gegebene Definition.[47] Seitdem war es einhellige Auffassung, dass das Reduzibilitätsaxiom kein logischer Satz ist. So schien es keine Lösung dieses Problems zu geben.

Die von Ramsey vorgelegte Lösung für den fraglichen Fall bestand – wie schon erwähnt – in der sogenannten

46 Carnap: *Grundlegung der Mathematik aus der Logik*, S. 99.
47 Vgl. Carnap: *Grundlegung der Mathematik aus der Logik*, S. 100.

einfachen Typentheorie, die in seinem berühmten Aufsatz über die Grundlagen der Mathematik[48] dargestellt ist. Ramseys These besagt, dass der *circulus* eigentlich nicht *vitiosus*, sondern unschädlich ist.[49] Infolge dieser These braucht der Typus keine Unterteilung in den Ordnungen, also: wir haben die Ebene 0, jene der Individuen, die nächste Ebene ist jene der Klassen von Individuen, es folgen die Klassen der Klassen von Individuen: (0), ((0)), … Die n-stelligen Beziehungen können in einer ähnlichen Weise wiedergegeben werden, also: eine zweistellige Funktion von Individuen vom Typus 1: (0:0) usw. Ramseys Vereinfachung von Russells Formulierung involviert die Idee, dass die Eigenschaften für sich selbst existieren, unabhängig davon, ob sie definiert werden, oder nicht. Die Probleme, die sich aus den Definitionen oder Begriffsbildungen in unserer Notation ergeben, sind nur ein Merkmal des endlichen Wesens des Menschen, also ein empirisches Faktum, das die Logik und die Mathematik nichts angeht. Als ein analoges Beispiel benutzt Carnap die Eigenschaft „der längste Mann in diesem Zimmer“, mit dem Hinweis, so wie in diesem Fall, seien die Eigenschaften irgendwelcher Zahlen[50], die unendliche Klassen bezeichnen, nicht erschaffen, sondern nur herausgehoben.

Zwar hielt Carnap Ramseys Lösung für sehr erfreulich, aber er mochte die Auffassung, die im Hintergrund derselben steht, nicht akzeptieren, weil sie nämlich die Ausschaltung der Metaphysik in Frage stellen oder sogar verhindern würde. An Stelle dieser Auffassung schlägt Carnap vor, die Formulierung der Typentheorie in einfacher Form – wie jene von Ramsey – beizubehalten, sie aber ohne die Aufladung durch die absolutistische und metaphysische Auffassung Ramseys anzunehmen. Zum Wesen des Logizismus gehört gemäß

[48] Ramsey: *Foundations of Mathematics*.
[49] Siehe Carnap: *Grundlegung der Mathematik aus der Logik*, S. 101.
[50] Seien sie Eigenschaften von natürlichen Zahlen oder von reellen Zahlen.

Carnap seit der Fregeschen Formulierung desselben, dass „nur das als vorhanden angenommen werden darf, dessen Existenz bewiesen ist, und das bedeutet: mit endlich vielen Schritten bewiesen ist.“[51]

Wegen der Wichtigkeit für unsere ganze spätere Diskussion geben wir hier Carnaps Anwendung dieser Idee wieder, und zwar ab der wesentlichen Unterscheidung hinsichtlich der Interpretation der Quantoren, die in seiner Umwandlung der Ramseyschen Lösung im Hintergrund steht. Die Unterscheidung besteht darin, dass die formale oder „spezifische“ Benutzung der Quantoren, also jene, die durch die Regeln der Logik sich als „Tautologien“ zeigen oder die aus denselben Tautologien durch Schlussregeln abgeleitet werden können, ganz scharf von der sogenannten materialen oder „numerischen“ Verwendung derselben getrennt werden, welche sich wiederum auf das sukzessive, numerische Durchlaufen einer ganzen Reihe von Einzelfällen gründet. In der Begriffsbildung mit dem Allquantor haben wir einen Fall der spezifischen Verwendung dieses Operators[52]. Nimmt man die Anzahl 2 als Beispiel, so können wir in folgender Weise eine Prüfung vornehmen. Greifen wir auf die Begriffsbildung für „induktiv“ zurück:

$$\mathrm{Ind}\ (x) =_{\mathrm{df.}} \forall f\ [(\mathrm{Erbl}\ (f)\ \square\ f(0))\ \exists\ f(x)]$$

Gemäß dieser Definition ist 2 induktiv, wenn und nur wenn sie alle erblichen Eigenschaften von Null besitzt, also muss Folgendes geprüft werden:

$$\forall f\ [(\mathrm{Erbl}\ (f)\ \square\ f(0))\ \exists\ f(2)]$$

[51] Carnap: *Grundlegung der Mathematik aus der Logik*, S. 102.
[52] Vgl. Carnap: *Grundlegung der Mathematik aus der Logik*, S. 103.

Dass $f(0)$ aus Erbl (f) $f(0)$ folgt ist trivial. Der Beweis für den Fall von 2 folgt aus der Definition von Erbl:

$$\mathrm{Erbl}(f) =_{\mathrm{df.}} \forall \mathrm{n}\ [f(\mathrm{n}) \ \exists \ f(\mathrm{n}+1)]$$

Daraus folgt direkt $f(1)$ und durch die Wiederholung derselben Operation $f(2)$.

Dieses Beispiel zeigt uns, dass hier kein Zirkel entsteht, sobald wir von der richtigen Interpretation des Allquantors Gebrauch machen. Die angedeutete Unterscheidung zwischen „numerisch“ und „spezifisch“ ist für den Aufbau des Carnapschen Logizismus von großer Bedeutung, denn nach seiner Auffassung kann das ganze Erkenntnisgebäude aufgebaut werden, indem wir die formalen Begriffe, die gehaltleer sind, als die Basis eines Konstitutionssystems nehmen. Demnach sind sie nur Hilfsmittel zur Darstellung von Erkenntnissen mit Hilfe der eigentlichen Begriffe[53] (also der Begriffe der nicht formalen Wissenschaften). Im *Logischen Aufbau* versuchte Carnap sein Programm auszuführen, was sich aber schon wegen technischer Probleme mit den expliziten Definitionen als undurchführbar herausstellte. Einige Jahre später, als Carnap wegen dieses Problems und anderer Probleme die Durchführung seines Programms veränderte und den metasprachlichen Gesichtspunkt annahm, tauchten die Schwierigkeiten mit den fraglichen Interpretationen des Allquantors erneut auf, dieses Mal im Rahmen der ‚allgemeinen Syntax‘. Diese Schwierigkeiten werden sich in einem solchen Kontext als nicht überwindbar zeigen, wie wir sehen werden. Eine weitere Schwierigkeit, die im Zusammenhang mit dem Ausweg der metaphysischen Voraussetzungen der Ramseyschen Lösung auftritt, wird in

[53] Siehe Carnap: *Eigentliche und Uneigentliche Begriffe*, S. 356.

dieser Passage ganz deutlich:

> „Ist eine Eigenschaft nichtprädikativ definiert, so mag die Entscheidung ihres Vorliegens oder nicht Vorliegens in einem bestimmten Einzelfalle zwar unter Umständen Schwierigkeiten machen, vielleicht auch unmöglich sein, falls die Logik kein entscheidungsdefinites System darstellt. Keineswegs aber wird diese Entscheidung infolge der Nicht-prädikativität prinzipiell für alle Fälle unmöglich."[54]

Ein Hinweis auf Gödels Ergebnisse steht klar in dieser Passage. Carnap hat schon zu dieser Zeit die Probleme seines Versuchs, eine *allgemeine Axiomatik*[55] aufzubauen, mit Gödel besprochen; aber Carnap scheint die erschütternden Wirkungen von Gödels Ergebnissen für den vorgestellten Ausweg und für alle die Komponenten, auf denen die Voraussetzungen seiner damaligen Auffassung des Logizismus beruhten, nicht vollkommen erkannt zu haben. Das greifen wir im 2. Kapitel erneut auf. Nehmen wir uns zunächst des zweiten Aspekts des Problems der Möglichkeit der Ableitung der Mathematik aus der Logik (die Diskussion der Ableitung mathematischer Sätze aus der Logik) im Kontext von *Mathematik als Zweig der Logik* und *Logizistische Grundlegung der Mathematik* wieder an.

Das Hauptproblem für den Nachweis des logischen Charakters der mathematischen Sätze in der einfachen Typentheorie hängt mit der Frage nach dem logischen Charakter zweier ihrer Grundsätze zusammen. Wie schon erwähnt handelt es sich dabei um das Unendlichkeitsaxiom und das Auswahlaxiom. Der Grund, warum diese beiden Sätze Hindernisse für die Ausführung des Programms sind, ist die Tatsache, dass sie Existenzannahmen enthalten. Das bedeutet, ihre Geltung hängt nicht allein von der *Form* dieser Sätze ab.

---

[54] Carnap: *Grundlegung der Mathematik aus der Logik*, S. 104.

[55] Siehe Carnap: *Bericht zur Allgemeinen Axiomatik* und Carnap: *Untersuchungen zur Allgemeinen Axiomatik* für das Programm einer allgemeinen Axiomatik.

Wir werden den Inhalt beider Axiome beschreiben und im Anschluss ihre anstößigen Konsequenzen für die Logik, für die Mathematik und schließlich auch für die Idee eines Aufbaus der „Gesamtheit der Wissenschaft“ analysieren.

Zunächst zu den Definitionen der beiden Axiome: Das Unendlichkeitsaxiom besagt, dass es zu jeder endlichen Kardinalzahl einer Klasse von Individuen eine größere Kardinalzahl gibt. Das Auswahlaxiom besagt, dass es eine Auswahlklasse gibt, d. h., dass es zu jeder Klasse von elementfremden, nicht leeren Klassen eine Klasse gibt, die mit jeder jener Klassen genau ein Element gemeinsam hat.[56] Wittgenstein lehnte die zwei Grundsätze für die Begründung der Mathematik deswegen ab, weil sie keine *Tautologien* sind[57]. Für ihn ergibt sich daraus die Konsequenz, dass der Logizismus selbst zurückgewiesen werden muss. Andererseits ging es damals für die Anhänger des Logizismus – wie Carnap und Ramsey – darum, die Wittgensteinsche Auffassung der Logik anzuerkennen und trotzdem das logizistische Programm beizubehalten. Daraus ergeben sich Probleme. Betrachten wir z. B. das Unendlichkeitsaxiom. Ob es endlich oder unendlich viele Individuen gibt, hängt von den Individuenbereichen und nicht von der Logik mit ihren inneren Konstruktionsverfahren und Transformationen ab. In dieser Interpretation gilt das Unendlichkeitsaxiom nur zufällig und nicht notwendigerweise, wie die logischen Gesetze eigentlich aufgefasst werden sollen. Etwas Ähnliches passiert mit dem Auswahlaxiom: seine Gültigkeit hängt ab von der Frage nach der Zahl der existierenden Klassen oder Eigenschaften, sowie der Konstruktionsprinzipien, die zur Ableitung von Satzfunktionen (und infolgedessen Klassen) aufgestellt

[56] Siehe Carnap: *Mathematik als Zweig der Logik*, S. 305.

[57] Siehe Wittgenstein: *Tractatus Logico-philosophicus*, Carnap: *Mathematik als Zweig der Logik*, S. 305ff. und Ramsey: *Foundations of Mathematics*, S. 340ff.

werden.[58] Was die Problematik der angeführten Axiome anbelangt, schlägt Ramsey vor, den Versuch zu unternehmen, deren tautologischen (bzw. widersprüchlichen) Charakter zu demonstrieren. Alle Sätze, die sich dabei nicht als Tautologien erweisen, nämlich Sätze, die Widersprüche oder Tatsachen ausdrücken, müssen aus dem System entfernt werden. Durch diese Veränderung der Perspektive und durch die Nutzung der betreffenden Methode bewies Ramsey den tautologischen Charakter des Auswahlaxioms und zeigte, dass ein Beweis für das Unendlichkeitsaxiom nicht unplausibel ist.[59]

Ramseys Lösungsversuch belegt, wie anregend und anziehend die Wittgensteinsche Auffassung der Logik in der hier betrachteten Zeit gewesen sein muss. Trotzdem ist die These (oder Hypothese) über den tautologischen Charakter der Logik, selbst wenn wir beide bedenklichen Axiome ausschließen, nicht frei von Herausforderungen.[60] Gemäß Wittgenstein ist der Satz eine Wahrheitsfunktion der elementaren (oder atomaren) Sätze (von hier an nennen wir diese Behauptung Wittgensteins ‚Wahrheitsfunktionsthese') und impliziert, dass die elementaren Sätze Wahrheitsargumente des Satzes sind.[61] Dass (im Aussagenkalkül) ‚$p \rightarrow (q \rightarrow p)$' eine Tautologie ist (unabhängig davon, ob die Satzvariablen ‚p' und ‚q' atomar sind oder nicht, und unter allen möglichen erlaubten Ersetzungen), wird dadurch nachgewiesen, dass die letzte Kolonne dieser Satzfunktion immer der Wert ‚W' besitzt.

Ganz anders stellt sich die Situation dar, wenn wir den Fall für den Funktionen- oder Prädikatenkalkül zu beleuchten versuchen. Prinzipiell muss die Logik unabhängig davon sein,

[58] Vgl. Carnap: *Mathematik als Zweig der Logik*, S. 306.
[59] Siehe Ramsey: *Foundations of Mathematics*, S. 380ff.
[60] Siehe dazu Ramsey: *Foundations of Mathematics*, S. 343-344. Vgl. Carnap: *Mathematik als Zweig der Logik*, S. 306 und auch Carnap: *Logische Syntax*, § 34.
[61] Wittgenstein: *Tractatus Logico-philosophicus*, 5 und 5.01.

ob der zu betrachtende Bereich der Individuen und Eigenschaften endlich oder unendlich ist (unabhängig davon, ob die Logik eine Logik erster oder höherer Stufe ist). Stellen wir das durch ein einfaches Beispiel dar: Nehmen wir zunächst an, dass die Form F(a) bedeutet: ‚a ist zweibeinig'. Durch angemessene Ersetzungen von ‚a' können wir erhalten: ‚b ist zweibeinig', ‚c ist zweibeinig', usw. (nehmen wir an, ‚a', ‚b' und ‚c' seien Beispiele von Namen von Individuen). Den so bestehenden elementaren Sätzen entspricht eine sogenannte Satzfunktion F(x), aus der nicht elementare Sätze aufgebaut werden können, indem die Variable ‚x' durch einen Quantor gebunden wird, also: (1) $\exists$x F(x); (2) (x) F(x). Wenn die Sätze (1) und (2) Wahrheitsfunktionen der hier angedeuteten elementaren Sätze (ihrer Argumente) sind, dann müssen die Wahrheitswerte von (1) und (2) in Abhängigkeit von jenen der betreffenden elementaren Sätze durch ein rein logisches Verfahren bestimmt werden können. Der Ausdruck ‚durch ein rein logisches Verfahren' bedeutet in unserem Kontext, dass sich die Wahrheitswerte von (1) und (2) aus den Wahrheitswerten aller elementarer Sätze der Form ‚x ist zweibeinig' nur auf Grund von Konstruktionen aus logischen Operationen – ohne jede Existenzannahme – beweisen lassen. Um die Schwierigkeit hier deutlich werden zu lassen, müssen wir den Begriff „Spielraum" einführen. Der Spielraum eines elementaren Satzes der Form ‚x ist zweibeinig' ist in allen Fällen gegeben, für die gilt, dass wir den Wahrheitswert ‚W' erhalten, wenn die Variable ‚x' durch den Namen eines zweibeinigen Individuums ersetzt wird. Daher ergibt sich die folgende Situation: Erstens, wir wollen die These beibehalten, alle Sätze seien Wahrheitsfunktionen der elementaren Sätze; zweitens, die Logik darf nicht von der Zahl der möglichen Argumente für elementare Sätze wie jene der Form ‚x ist zweibeinig' abhängig sein. Das heißt, die Logik darf nicht abhängig sein von der Kardinalzahl des Spielraums solcher

Sätze (schon deswegen, weil diese Zahl sich nicht *a priori* erkennen lässt). Daraus folgt: die Feststellung, dass Sätze wie (1) und (2) Wahrheitsfunktionen von elementaren Sätzen sind, setzt eine ausreichende Erklärung der Beziehung zwischen Funktion und Argument voraus, die unabhängig von der Angabe der Anzahl der Wahrheitswerte der elementaren Sätze ist. Also: von einer hinreichenden Darstellung der betreffenden Beziehung hängt die Möglichkeit ab, eine hinreichende Explikation der Bestimmung der Wahrheitswerte von Sätzen wie (1) und (2) im Rahmen der Wittgensteinschen Auffassung der Logik zu geben. Es scheint nicht möglich zu sein, sowohl für die hier angesprochene Beziehung als auch für jene, die Wittgenstein für den Aussagenkalkül definiert hat, eine Explikation zu liefern. Wittgenstein hat eine solche Definition jedenfalls nicht geliefert, sondern nur einige undeutliche Hinweise gegeben.

In der Interpretation der Quantoren folgt Ramsey ebenfalls der Wittgensteinschen Auffassung, nämlich der Idee, dass der Allquantor ein logisches Produkt und der Existenzquantor eine logische Summe ist. So kann (1) diesem Verständnis entsprechend notiert werden als: F(a) □ F(b) □ F(c)… Hier wird gemäß Ramsey die Forderung erfüllt, dass die Interpretationen von Sätzen der Form (1) eine vollkommen immateriale ist, d. h. prinzipiell unabhängig von der Beschaffenheit der Welt ist; denn die Feststellung solcher Sätze ist ganz unabhängig von der Endlich- oder Unendlichkeit des betrachteten Bereiches. Die Betrachtung des Allquantors macht es jedoch erforderlich, solche Interpretationen der allgemeinen Sätze auszuschließen, denen die Aufzählung sämtlicher Wahrheitswerte zugrunde liegt. Es wird bereits klar, dass eine solche Interpretation für den Prädikatenkalkül auf keinen Fall eindeutig sein kann, weil der Allquantor unter dieser Auffassung wie ein Produkt oder eine Konjunktion der elementaren Sätze interpretiert werden muss, also für Sätze der Form (2): F(a) □ F(b) □ F(c)… Diese Tatsache macht deutlich, dass die These vom Satz, als einer Wahrheitsfunktion der elementaren Sätze (als seinen Argumenten), keine numerische Beziehung zwischen einem solchen Satz und seinen Argumenten ausdrücken kann. Ansonsten würde der Wahrheitswert von Sätzen wie (2) von der Kardinalzahl des Bereiches abhängig sein. Trotz all dieser Schwierigkeiten hält Ramsey die Wahrheitsfunktionsthese für plausibel[62]. Zwar scheint es nachvollziehbar zu sein, Regeln wie ‚F(a) □ □x‘ F(x) und ‚(x) F(x) □ F(a)‘ als Tautologien anzunehmen. Nach Carnap sind sie beispielsweise Tautologien in dem Sinne, dass sie keine Erweiterung des Inhaltes mit sich bringen. Die Schwierigkeiten bleiben aber bestehen, denn schon eine exakte Erklärung des Terminus ‚Tautologie‘ für diese Art von Fällen konnte nicht gegeben werden, ganz zu schweigen von der Möglichkeit, eine Definition für diesen Terminus aufzustellen.

Das Problem der Präzisierung der Beziehung zwischen den allgemeinen Sätzen und den zu ihnen gehörenden elementaren Sätzen – später entwickelte sich daraus das Problem der so genannten ‚Protokollsätze‘ – hat eine heiße Diskussion im Umfeld des Wiener Kreises hervorgerufen. Später hat diese Diskussion zu einer Spaltung der Gruppe geführt, und schließlich hat sich bei den Hauptvertretern die Überzeugung gefestigt, dass die entsprechende Auffassung der Logik für die Konstruktion der Mathematik und der Naturwissenschaften nicht geeignet sei. In dieser Arbeit werden wir sehen, wie Carnap die Thesen seines Logizismus an das Szenario einer intensiven Entwicklung der Konzeption der grundlegenden logischen Begriffe anpasste. Zunächst werden wir zum Schluss dieses Kapitels die Auswirkung dieses Sachverhalts für das Carnapsche logizistische

[62] Ramsey: *Foundations of Logic and Mathematics*, S. 344.

Programm in seinen Komponenten zusammenfassen und anschließend den bedenklichen Charakter der damit zusammenhängenden Thesen untersuchen.

Die Mathematik kann aus der Logik abgeleitet werden. Die Umsetzung dieser Behauptung hängt von einer Erklärung der Natur der Logik selbst ab: wenn wir in dieser hier betrachteten Phase „gültig nur aufgrund der Form“ sagen, dann ist das Problem für den Fall der mathematischen Sätze noch offen (und auch für den Fall der mathematischen Begriffe, als eine weitere Konsequenz der Gödelschen Ergebnisse).

Jeder Schluss ist tautologisch. Dies ist schon Ende 1930 aufgrund der Schwierigkeiten, die wir oben analysiert haben, als eine sehr vage Formulierung erkannt worden. Schließlich zeigte sich diese Behauptung als unhaltbar, selbst wenn man sich nur auf das rein mathematische Schließen beschränkte, ganz zu schweigen von den Schlüssen der Naturwissenschaften. Um die Transformationen und Weiterentwicklungen der Carnapschen Auffassung der Schlüsse (und ihrer Wirkung auf seine philosophische Denkweise) richtig zu verstehen, brauchen wir, wie wir sehen werden, nur den überaus komplexen Kontext zu charakterisieren, der ihr zugrunde liegt. Die Antwort auf die Frage nach der Möglichkeit der Identifizierung des rein formalen Schließens mit dem Schließen in den Naturwissenschaften führt uns zur These der Einheitswissenschaft (von hier an Einheitswissenschaftsthese).

Die Einheitswissenschaftsthese besagt: es ist möglich, alle Wissenschaften in eine einzige Sprache rückzuübersetzen. Dies bedeutet: wir können eine Universalsprache der Wissenschaften aufbauen, d. h. eine solche, die imstande ist, jeden beliebigen Sachverhalt zum Ausdruck zu bringen. Diese Behauptung bringt grundsätzlich drei Probleme mit sich. Die beiden ersten haben wir schon angesprochen, nämlich einerseits die Schwierigkeiten mit den problematischen Axiomen der einfachen Typentheorie und andererseits den problematischen Nachweis der Wahrheitsfunktionsthese auf dem Gebiet der Wittgensteinschen Logik. Außerdem muss, um ein gesamtes Begriffssystem solcher Art aufzubauen, das Verhältnis der Realwissenschaften zu den Formalwissenschaften deutlich bestimmt werden. Es muss in einem solchen Kontext gezeigt werden, wie sich die formalen Ausdrücke mit den sogenannten materialen Ausdrücken durch ein klares Verfahren verbinden lassen. Dies setzt auch voraus, dass beide Arten von Ausdrücken innerhalb des Begriffssystems unterscheidbar sind. Endlich ist es eine in diesem Kontext wesentliche Frage: Wie können die elementaren Sätze einer möglichen Universalsprache lauten, oder besser: Was sind die grundlegenden Sachverhalte, auf die sie sich beziehen? Wittgenstein wies diese Frage mit der Erklärung zurück, sie gehöre nicht zu den Aufgaben der Logiker. Carnap konnte dieser Verweigerung nicht zustimmen, da er der Überzeugung war, dass die Anwendung der Mathematik auf nicht logische Gebiete eine zentrale Bedingung für die Lösung des Problems der Grundlegung dieser Wissenschaft sei. Außerdem sah er in der Erklärung der Anwendbarkeit der Mathematik eine mögliche Auflösung des Streits zwischen Logizismus, Inuitionismus und Formalismus.

Die Möglichkeit der Bestimmung von elementaren Sätzen für die Universalsprache steht auch im engen Zusammenhang mit der These, dass es keine philosophischen Sätze neben den wissenschaftlichen Sätzen geben könne. Infolgedessen *wurde die Metaphysik ausgeschaltet*. Diese Abhängigkeit wird folgenderweise demonstriert: Durch die

Darstellung der Gesamtheit der Wissenschaften in einer Universalsprache und die Zurückführung allgemeiner Sätze auf elementare Sätze erhalten wir eine epistemologische Kontrolle aller Sätze und Schlüsse der fraglichen Sprache. Die elementaren Sätze müssen dem Verifikationsprinzip gehorchen, ansonsten werden sie als sinnlos zurückgewiesen. Ein Satz hat einen Sinn, wenn wir wissen, wie er zu verifizieren ist. Um einen Satz ‚p' zu verifizieren, muss ‚p' mit dem Sachverhalt verglichen werden, den ‚p' ausdrückt[63]. Also wie immer die elementaren Sätze auch seien, wenn sie prinzipiell verifizierbar sind, so sind auch die allgemeinen Sätze, die aus ihnen zusammengesetzt werden, prinzipiell verifizierbar, da die entsprechenden elementaren Sätze Argumente der allgemeinen Sätze bilden. Ohne eine Durchführung des Programms der Einheitswissenschaft ist die These der Ausschaltung der Metaphysik allerdings nicht haltbar.

Dieses Kapitel abschließend versuchen wir die wichtigsten Gründe zu benennen, aus denen Carnap die Forderungen des logizistischen Programms – wie er es auffasste – herleitete und aus denen er seine Erwartungen an dieses Programm bezog.

Einerseits sah er die Menge der Schwierigkeiten und Probleme für die Ausführung seines Programms im Rahmen einer sehr starken und anspruchsvollen Erwartung, die im Zusammenhang mit der neuen Logik stand. Er glaubte, seine Auffassungen hauptsächlich aufgrund der vielen Errungenschaften gewonnen zu haben, die durch die Mathematisierung der Logik geschaffen wurden. Die Anerkennung, vielleicht Überschätzung, dieser Leistung, hat ihn möglicherweise daran gehindert, die Konsequenzen der ihm schon bekannten Ergebnisse, insbesondere derjenigen

[63] Siehe Carnap [110-03-22].

Gödels, die die Logikauffassung vollkommen umwandelten, vorauszusehen. Trotzdem ließ er sich, als er diese Konsequenzen später anerkannte, trotz der noch schwieriger gewordenen Verhältnisse nicht entmutigen und versuchte die logizistische Auffassung durch Modifizierungen anzupassen und beizubehalten.

Hiermit haben wir ein Bild der Hauptforderungen erhalten, welche im Zusammenhang mit der technischen Implementierung des CL stehen. Solche Forderungen sind zum Teil durch die Wurzeln des Carnapschen Programms, zum Teil aber auch durch die Natur des Logizismus selbst bestimmt. Bis zum Schluss dieser Dissertation werden wir versuchen, zwei Vermutungen zu bestätigen. Erstens: der Logizismus als philosophisches Programm bedingt die Verfahren im Gebiet der formalen Sprachen. Zweitens: das logizistische Programm verdient nicht nur ein historisches Interesse, sondern es spielt in der gegenwärtigen Debatte um die Natur der Logik und der Mathematik, um die Klärung ihrer Beziehung zueinander, sowie für die Frage des Aufbaus einer Gesamtsprache der Wissenschaften eine zentrale Rolle. Dadurch wird auch gezeigt, dass viele Einwände, die heute gegen Carnaps Auffassung angeführt werden, verfehlt sind. Sie gehen nämlich von eigenen Voraussetzungen aus, die in der Debatte erst später dominant oder sogar als selbstverständlich angenommen wurden.

2. Die Entwicklung des Carnapschen Logizismus in der Wiener Zeit

Die bisherige Diskussion liefert eine kurze Zusammenfassung der Hauptaspekte der logizistischen Unternehmung zu Beginn des 20. Jahrhunderts, sowohl von ihren formalen Grundlagen, als auch von ihren zentralen Ideen. Gleichzeitig haben wir versucht Carnaps eigene Interpretation des Logizismus in ihren Grundelementen darzustellen[64], ohne sein Programm beispielhaft durchzuführen. Wir werden in diesem Kapitel die Diskussion von einem anderen Gesichtspunkt aus wieder aufnehmen, um die Analyse einiger systematischer Aspekte des CL vorzunehmen. Zunächst werden einige der bedeutendsten Aspekte der Fregeschen und Hilbertschen Auffassungen axiomatischer Systeme untersucht. Danach wird analysiert, wie Carnap diese Aspekte kombiniert hat. Im Anschluss daran werden die Reaktionen einiger Mitglieder des Wiener Kreises und auch von Gödel in diesem Zusammenhang untersucht. Das wird uns erlauben die Entwicklung der Thesen des CL zu verstehen und uns erkennen lassen, wie sie voneinander abhängen.

Bevor wir aber weiter machen, sollte Folgendes betont werden: Eine erfolgreiche Untersuchung dieses Programms hängt vom richtigen Verständnis der Carnapschen Auffassung desselben ab. Die klare Formulierung der vier wissenschaftlichen Thesen des CL - bekanntermaßen die der Möglichkeit der Ableitung der Mathematik aus der Logik (von hier an: These I des CL), der *tautologische* Charakter des Schließens (von hier an: These II des CL), die *Einheitswissenschaftsthese* (von hier an: These III des CL) und die These, dass die Metaphysik ausgeschaltet werden

[64] Nämlich die vier wissenschaftlichen Thesen des CL oder einfach „Thesen des CL“. Siehe oben Kapitel 1.

kann (von hier an: These IV des CL) – setzen alle als gemeinsamen Hintergrund die Idee der Konstruktion eines totalen Erkenntnissystems voraus, das in einer Art *‚universaler Sprache der Wissenschaft‘* verkörpert wird. Diese Auffassung einer universalen Sprache, die bei Carnap jedoch keine absolute im Sinne von *‚einzig mögliche‘*[65] ist, wird für unsere ganze Untersuchung von zentraler Bedeutung sein, da wir im Rahmen einer universalen Sprache in diesem Sinne deutlich machen können, dass jeder gültige Schluss überhaupt gehaltleer ist. Dies wird zeigen, dass der wissenschaftliche (d. h. logische) Aspekt der Sprache neutral gegenüber philosophischen Kontroversen ist.

Wenn wir einmal bis in die Einzelheiten dieser Thesen und ihrer Probleme eingedrungen sein werden, werden wir in der Lage sein, die entscheidende Frage dieser Arbeit zu stellen, die die folgende sein wird: Einerseits haben wir Evidenz, dass Carnap die Idee einer einheitlichen Sprache der Wissenschaft bis zu seinen späteren Überlegungen beibehalten hat (wenn auch in einer relativistischen Auffassung)[66]; andererseits müssen wir die Frage stellen, ob diese Tendenz zur Vereinheitlichung des begrifflichen Apparats der Erkenntnis – die im Zentrum des Logizismus steht – möglicherweise unverträglich mit einigen Aspekten des TP ist. Ein solches Bedenken wird hauptsächlich den Konventionalismus der Sprachformen betreffen.[67] Diese knappe Skizze lässt uns schon die Komplexität unserer Diskussion im gegenwärtigen Kapitel voraussehen. Daraus können wir die entsprechenden Aufgaben identifizieren und entsprechend das Kapitel untergliedern.

---

[65] Also: Prinzipiell ist die „Universale Sprache“ nur irgendeine geeignete Sprache für den Aufbau der Gesamtheit der wissenschaftlichen Erkenntnis; siehe darüber Carnap: *Physikalische Sprache als Universalsprache*, auch Carnap: *Logischer Aufbau*, und die Skizze von Carnap: *Physikalische Sprache als Universalsprache* in Carnap [110-03-22].

[66] Carnap: *Replies*, S. 880.

[67] Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 55.

Diese Untergliederung knüpft an die hier besprochenen Thesen des CL an. Die Antwort auf die Frage nach der Möglichkeit der Etablierung der These I[68] des CL hängt von der Antwort auf die Frage „was heißt Logik?“ ab, und diese führt uns klarerweise auf das Problem einer befriedigenden Erklärung des formalen Schließens, also zur These II[69] des CL; ihrerseits hängt die These IV[70] – so sieht es Carnap – von der Möglichkeit einer Rückübersetzung in eine *universale Sprache der Wissenschaft* ab. Dieser Paragraph, der die Untergliederung des Kapitels gibt, könnte dem Leser den Eindruck geben, dass wir hier die Diskussionen des ersten Kapitels bloß wiederholen werden. Das ist aber nicht der Fall. Im vorigen Kapitel haben wir nur versucht, die allgemeinen Züge des CL durch ein Bild aus dem Jahr 1930 zu liefern. Jetzt werden wir einige technische Details der Durchführung des CL untersuchen, um den Entwicklungsprozess von Carnaps Denken ausführlich zu explizieren und die Wurzeln des TP und dessen Verbindung mit dem Logizismus in den Konsequenzen aufzuweisen.

---

[68] Die Mathematik ist aus der Logik ableitbar.
[69] Also dass jeder Schluss tautologisch ist.
[70] Also dass die Metaphysik ausgeschaltet werden kann.

2.1. Die Natur des Schlusses

2.1.1. Der Schluss im rein formalen Kontext

Um die Entwicklung der Auffassung Carnaps über die Natur des formalen Schlusses im betreffenden Zeitraum zu verstehen, können wir die Logik in ihrer klassischen Einteilung betrachten, nämlich den Teil über die Begriffe, der zunächst eine Definitionstheorie beinhaltet, dann eine Urteilstheorie und schließlich eine sich daraus ergebende Schluss- oder Demonstrationstheorie. Haben wir einmal die Anerkennung des Intuitionismus im Rahmen des Formalismus akzeptiert, dann gilt es nur noch einen Gegensatz in Carnaps Werk[71] zu überbrücken, nämlich jenen zwischen Formalismus und Logizismus. Prinzipiell besteht der Unterschied zwischen Logizismus und Formalismus in der Form, in der beide Schulen das System der Logik auszuführen versuchen.

Wir können den Hauptunterschied zwischen Logizismus und Formalismus in ihren klassischen Formulierungen – wie sie sich bei Frege und Hilbert finden – an ihren Auffassungen axiomatischer Systeme festmachen und hauptsächlich an der Theorie der Begriffe oder der Definitionstheorie verdeutlichen. Die Definitionen des Formalismus sind implizit aufgefasst, jene des Logizismus sind hingegen explizit aufgebaut. Wie ist aber der Unterschied in den wirklichen Ausführungen innerhalb beider Programme genau zu verstehen?

Um diese Frage zu beantworten – soweit sie bei Frege und Hilbert behandelt wird – betrachten wir die Diskussion

[71] Carnap: *Die Mathematik als Zweig der Logik*.

der Definitionstheorie im Briefwechsel der beiden Autoren[72]. Auch einige andere Quellen werden dazu herangezogen[73]. Beginnen wir mit der Kritik, die Frege an der Handhabung der axiomatischen Methode bei Hilbert in den *Grundlagen der Geometrie* übte. Gemäß Frege besteht das zentrale Problem des Formalismus innerhalb bestimmter Kontexte im Gebrauch von Axiomen statt Definitionen. Dadurch „wird etwas den Axiomen aufgebürdet, was Sache der Definitionen ist“[74], und infolgedessen wird auch die Grenze zwischen Axiomen und Definitionen verwischt. Ein richtiges Verständnis dieses Vorwurfs gegen den klassischen Formalismus, sowie dessen Auswirkung auf den CL werden wir in drei Schritten zu gewinnen versuchen: Erstens durch eine Analyse der Fregeschen Auffassung der Definitionen; zweitens durch einen Vergleich dieser Auffassung mit derjenigen Hilberts. Drittens werden wir zeigen, wie Carnap aus einer Synthese der methodischen Verfahren von Frege und Hilbert seine Idee entwickelt, dass die Streitigkeiten im Gebiet der Grundlagen der Mathematik geschlichtet werden können, wenn wir die metaphysischen Inhalte beseitigen.

Frege gebraucht die Definitionen im klassischen Sinne, also als Nominaldefinitionen. Durch eine Definition wird einem Zeichen eine neue Bedeutung gegeben. Eine Definition wird durch eine Gleichung ausgedrückt, deren linke Seite das erklärende Zeichen (also das *Definiens*) enthält, und deren rechte Seite das erklärte Zeichen (also das *Definiendum*)

[72] Darüber siehe Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, S. 58-69. In dieser Diskussion geht es nicht um Freges Logizismus, denn für Frege ist das logizistische Programm auf die Arithmetik eingeschränkt. Trotzdem können wir in dem Briefwechsel zwischen Frege und Hilbert die spezifischen Unterschiede ihrer Methoden des axiomatischen Denkens identifizieren. Das Verständnis dieser verschiedenen Verfahren ist übrigens wichtig, um Carnaps späteres Prozedere zur Versöhnung der methodologischen Konflikte beider Positionen zu verstehen.

[73] Zum Beispiel Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*; und Frege: *Grundgesetze I*.

[74] Vgl. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, S. 61.

enthält. Diese Gleichung ist gleichzeitig eine Festsetzung und eine Abkürzung, in der die erklärende Zeichenverbindung der Definition schon als bedeutungsvoll anerkannt wird. Die eindeutige Bedeutung aller Zeichen ist insbesondere ein Erfordernis korrekten Schließens. So liest man in Freges Kritik an Peano in seiner *Begründung meiner strengeren Grundsätze des Definierens*:

> „Auch folgende Erwägung ergibt dasselbe. Das Schliessen aus zwei Prämissen beruht sehr oft, wenn nicht immer darauf, dass ein Begriff beiden gemeinsam ist. Soll nicht ein Fehlschluss geschehen, so muss nicht nur das Begriffszeichen dasselbe sein, sondern es muss auch dasselbe bedeuten. Es muss eine Bedeutung haben unabhängig vom Zusammenhange, nicht erst im Zusammenhange eine solche erhalten, was ja allerdings bei den Worten der Sprache sehr oft der Fall ist.“[75]

Daraus ergibt sich auch der Kern der Fregeschen Kritik an Hilberts Durchführung der axiomatischen Methode. Den Vorwurf Axiome zu nutzen, wo Definitionen gebraucht werden sollten, verbindet Frege mit der Feststellung, dass „die Bedeutungen der Wörter „Punkt“, „Gerade“, „zwischen“ nicht angegeben, sondern als bekannt vorausgesetzt werden“.[76] Darauf erwidert Hilbert: „Hier liegt wohl der Cardinalpunkt des Missverständnisses. Ich will nichts als bekannt voraussetzen; ich sehe in meiner Erklärung des § 1[77] die Definition der Begriffe Punkte, Gerade, Ebenen, wenn man wieder die sämtlichen Axiome der Axiomgruppe I-V als Merkmale hinzunimmt.“[78] Also glaubte Hilbert, die Definitionen würden durch die Axiome erfolgen. Ein weiterer gravierender Unterschied zwischen beiden Autoren besteht in

[75] Frege: *Nachgelassene Schriften*, S. 168.
[76] Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, S. 61.
[77] Hilbert bezieht sich in dieser Passage auf seine Festschrift über die Grundlagen der Geometrie (1899), die später (mit Ergänzungen) sein Buch *Grundlagen der Geometrie* geworden ist. Siehe darüber Arnold Schmidt: *Zu Hilberts Grundlegung der Geometrie*.
[78] Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, S. 66.

der Auffassung des Verhältnisses von Wahrheit und Widerspruchsfreiheit. An Frege schreibt Hilbert:

„Sie schreiben: „Axiome nenne ich Sätze… Aus der Wahrheit der Axiome folgt, dass sie einander nicht widersprechen". Es hat mich sehr interessirt, gerade diesen Satz bei Ihnen zu lesen, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe und vortrage, immer gerade umgekehrt sage: Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so *existieren* die durch die Axiome definirten Dinge. *Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz*."[79]

Laut Frege bleibt bei dem Hilbertschen Aufbau des axiomatischen Systems eine entscheidende Unvollständigkeit bestehen, indem die Bedeutungen der grundlegenden Begriffswörter unbekannt bleiben. Ein formalistisches System ist gewissermaßen ein System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, „bei dem die Auflösbarkeit und besonders die Eindeutigkeit der Bestimmungen der Unbekannten [Variablen] zweifelhaft bleibt."[80] Später meint Frege, er könne mit den Hilbertschen Definitionen nicht entscheiden, ob seine Taschenuhr ein Punkt sei[81]. Der gemeinsame Nenner dieser Kritiken ist immer derselbe: Der Formalismus führt zu einem abwegigen Verfahren der Konstruktion der Geometrie und der Analysis (und so auch indirekt zu einer nicht zutreffenden Erklärung der Anwendbarkeit der formalen Wissenschaften auf die empirische Wirklichkeit). Der Grund ist eben, dass keine präzisen Kriterien für die Feststellung der Bedeutungen der Begriffswörter, die „gänzlich verschwimmend"[82] bleiben, angegeben werden. Dieser Gedankengang besagt, dass die formalistische Ausführung der axiomatischen Methode uns nicht vor dem Risiko eines Widerspruchs bewahrt.

[79] Ebd. [meine Hervorhebung].
[80] Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, S. 73.
[81] Ebd.
[82] Ebd., S. 74.

Zwar hat die Entdeckung des Russellschen Paradoxes die Einwände von Frege gegen Hilberts Behandlung des axiomatischen Systems und der Logik in den Augen der Öffentlichkeit vielleicht entkräftet[83]. Allerdings beantwortete Hilbert einige bedeutende Punkte dieser Einwände nicht, sodass sie im Allgemeinen nicht mehr besprochen wurden. Trotzdem scheint es klar zu sein, dass Carnap Freges Einwände gegen die formalistische Auffassung des axiomatischen Denkens vor Augen hatte, als er sein eigenes Programm auszuführen versuchte. Die Definitionstheorie Hilberts – also die Anerkennung impliziter Definitionen – ließ das Problem der Feststellung der Bezugsgegenstände offen; infolgedessen werden wir gemäß Frege Urteile erhalten, die keine Bedeutung haben. Das würde zu einer fehlerhaften Demonstrationstheorie führen, in der das Risiko eines auftretenden Widerspruchs nicht auszuschließen ist.

Als Carnap viele Jahre später, in Übereinstimmung mit seiner Grundposition der Neutralisierung philosophischer Probleme, versuchte beide Auffassungen in Einklang zu bringen, hat er dennoch die Erfüllung einer zentralen Forderung des Logizismus – selbstverständlich nun völlig anders aufgefasst – verlangt, nämlich eine Interpretation des ganzen Systems der Logik zu liefern. Dies können wir in einem Manuskript aus dem Nachlass bestätigt sehen, mit dem Titel *Neue Grundlegung der Logik*[84]. Dort erklärt Carnap:

„Es soll hier gezeigt werden, dass trotzdem jede Formel, die hierbei entstehen kann, eine bestimmte Bedeutung hat, indem sie entweder eine Tautologie ist (oder: „die" Tautologie bedeutet; oder: den Bedeutungswert 0 hat), oder aber eine bedeutungsvolle Aussage, nämlich eine Wahrheitsfunktion der Atomsätze. Folglich ist <u>trotz radikalem Formalismus die Forderung der Sinnhaftigkeit erfüllt!</u>"

[83] Vgl. damit Grattan-Guinness: *The Search for Mathematical Roots*, S. 213.

[84] Carnap [089-64-01], im März 1929 in Davos geschrieben.

Dieses Zitat ist sehr interessant, denn es macht die Unterschiede zwischen der logizistischen Auffassung Carnaps – bekanntermaßen der Möglichkeit einer Interpretation des vollständigen Systems der Mathematik auf dem Gebiet der Naturwissenschaften – und derjenigen Hilberts sehr deutlich. Schon im Briefwechsel mit Frege finden wir die negative Auffassung Hilberts, was diesen Punkt anbelangt, klar bestätigt. Zwar hält Hilbert die Grundelemente des Systems für beliebig, er geht jedoch andererseits davon aus, dass jedes Axiom etwas zur Definition beiträgt. Das bedeutet auch: Jedes Axiom ändert den Begriff.[85] Hilberts Auffassung in dieser Frage belegt das folgende Zitat:

> „'Punkt' in der Euklidischen, Nicht-Euklidischen, Archimedischen, Nicht-Archimedischen Geometrie ist jedesmal was Anderes. Nach vollständiger und eindeutiger Festlegung eines Begriffes ist die Hinzufügung irgendeines Axioms meiner Ansicht nach etwas durchaus Unerlaubtes und Unlogisches – ein Fehler, der sehr häufig, besonders von Physikern gemacht wird. Dadurch dass sie im Laufe der Untersuchung immer neue und neue Axiome machen, die mit den früher gemachten Annahmen gar nicht confrontiert werden und von denen gar nicht gezeigt wird, ob sie auch keiner aus den früher gemachten Axiomen folgenden Tatsache widersprechen, kommt in physikalischen theoretischen Untersuchungen oft heller Unsinn zum Vorschein. Gerade das Verfahren ein Axiom zu machen, sich auf die Wahrheit desselben zu berufen und daraus zu schliessen, dass dasselbe mit den definierten Begriffen sich verträgt, ist in den modernen physikalischen Untersuchungen eine Hauptquelle von Irrthümern und Missverständnissen. Ein Hauptzweck meiner Festschrift sollte es sein, diesen Fehler zu vermeiden."[86]

Einerseits erkennt Hilbert die *Beliebigkeit* der Grundelemente an, die den Gesetzen derselben Struktur gehorchen; deswegen darf jede Theorie stets auf unendlich viele Systeme von Grundelementen angewandt werden („man braucht ja nur eine umkehrbar eindeutige Transformation anzuwenden und festzusetzen"[87]); andererseits müssen trotz dieser prinzipiellen „Beliebigkeit der Grundelemente" die zum

[85] Vgl. Hilbert in Frege: *Wissenschaftliche Briefwechsel*, S. 66ff.
[86] Ebd., S. 66-67.
[87] Ebd., S. 67.

Aufbau jeder Theorie geforderten Axiome aber erfüllt sein, also, „zur Anwendung der Theorie [Struktur] auf die Welt der Erscheinungen [ist] immer ein gewisses Maass von gutem Willen und Takt erforderlich"[88]. Also: trotz der unendlichen Möglichkeiten der Erfüllung bestimmter Strukturen ist die Relativität gegeben. Das heißt: Analoge Begriffe (‚Punkt', ‚Gerade') und selbst universale (logische) Begriffe (‚jede', ‚eins' ‚zwei', ‚Klasse', usw.) unterliegen in verschiedenen Theorien verschiedenen Interpretationen. Diese Tatsache macht eine vollständige (absolute) Interpretation für das System der Mathematik zu einer Unmöglichkeit. Auf diese Auffassung bezieht sich Carnap in den folgenden Zeilen:

> We had a good deal of sympathy with the formalist method of Hilbert, because it was in agreement with our emphasis on the hypothetico-deductive method, and we learned much from this school about the construction and analysis of formal systems. Later, in my book *Logical Syntax*, this influence became clearly visible. *On the other hand, we were not satisfied with Hilbert's skepticism about the possibility of giving an interpretation to the total formal system of mathematics.* Frege had already strongly emphasized that the foundation problems of mathematics can only be solved if we look not solely at pure mathematics but also at the use of mathematical concepts in factual sentences.[89]

Wie das obigen Zitat belegt, hängt ein ausreichendes Verständnis der These, dass jeder Schluss gehaltleer oder tautologisch ist (These II des CL), gemäß Carnap davon ab, eine befriedigende Erklärung der Anwendung des formalen Schließens auf die Wirklichkeit zu liefern. Die Bedeutung der These II wird sich im Laufe der Zeit stark verändern. Das ist eine Konsequenz der Interaktionen mit den Mitgliedern des Wiener Kreises, so auch mit Gödel und Tarski. Es bleibt zu klären, wie solche Veränderungen Konsequenzen für die These der Ableitbarkeit der Mathematik aus der Logik (These I) haben. Dazu müssen wir zu einer Analyse des angewandten

[88] Ebd., S. 67-68.
[89] Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 48.

Schließens bei Carnap übergehen. Diese Analyse der Carnapschen Technik, im Umgang mit den philosophischen Streitigkeiten um die Natur der Mathematik und ihre Beziehung zur Logik, wird es uns ermöglichen, seine philosophische Auffassung der so genannten ‚Wirklichkeitssätze' zu verstehen. Betroffen davon ist die Einheitswissenschaftsthese und die Ausschaltung der Metaphysik (Thesen III und IV des CL). Am Ende dieser Diskussion steht dann ein befriedigendes Bild von Carnaps Verbindung von Formalismus und Logizismus.

2.1.2. Der angewandte Schluss, die Rückübersetzung in die Gesamtsprache der Wissenschaft und die Ausschaltung der Metaphysik

Die Entwicklung der Carnapschen Auffassung der Anwendung des Schließens im Gebiet der Grundlagen der Mathematik lässt sich durch den Vergleich zweier Zitate aus dem Jahr 1930 nachvollziehen. Betrachten wir zunächst jenes, welches sich in *Die Mathematik als Zweig der Logik* findet:

„So bestehen, wenn auch noch keine Beweise, so doch einige Gründe für die Hoffnung, dass, sobald der Formalismus eine gewisse, für die Wissenschaft unentbehrliche Ergänzung seines Systems vornimmt, der jetzt bestehende Gegensatz der beiden Richtungen überbrückt werden wird. Die Einzelheiten in der endgültigen Lösung des Problems der Grundlegung der Mathematik lassen sich heute noch nicht übersehen. Angesichts der Tatsache aber, dass der Formalismus die wichtigsten Grundgedanken des Intuitionismus in seinem System zur Anerkennung gebracht hat, und der soeben gegebenen Andeutung über das Verhältnis zwischen Formalismus und Logizismus darf die Auffindung einer Problemlösung, die von verschiedenen Gesichtspunkten aus als befriedigend erscheinen wird, gegenwärtig nicht mehr als so aussichtslos angesehen werden, wie es noch vor wenigen Jahren schien.“[90]

Etwas anders lautet Carnaps Auffassung in *Grundlegung der Mathematik*, die wenige Monate später vorgetragen wurde:

„Der Logizismus hat in der hier vertretenen Form mit jeder der beiden anderen Richtungen gewisse Züge gemein. Mit dem *Intuitionismus* verbindet ihn die konstruktivistische Tendenz in der Begriffsbildung, die ja auch Frege schon mit Nachdruck vertreten hat: Ein Begriff darf nicht axiomatisch eingeführt werden, sondern muss aus den undefiniert vorausgesetzten Grundbegriffen durch schrittweise explizite Definitionen konstruiert werden. Die Anerkennung der nichtprädikativen Definitionen scheint auf den ersten Blick dieser Tendenz zu widersprechen; das ist jedoch nur bei dem Aufbau in der von Ramsey vertretenen Form der Fall. Wir rechnen, ebenso wie die Intuitionisten, zu den Eigenschaften nur diejenigen Ausdrücke (genauer: Ausdrücke von der Form eines Satzes mit éiner freien Variabeln), die aus undefinierten

[90] Carnap: *Die Mathematik als Zweig der Logik*, S. 310.

Grundeigenschaften des betreffenden Bereiches nach bestimmten Konstruktionsregeln in endlich vielen Schritten konstruiert sind. Der Unterschied liegt aber darin, daß wir nicht nur die von den Intuitionisten angewandten Konstruktionsregeln für gültig ansehen (es sind die des sogenannten „engeren Funktionenkalküls“), sondern darüber hinaus auch die Verwendung des Ausdruckes „für alle Eigenschaften“ (die Operationen des sogenannten „weiteren Funktionenkalküls“).

Auch mit dem Formalismus besteht eine methodische Verwandtschaft. Der Logizismus stellt sich die Aufgabe, das logisch-mathematische System so aufzubauen, daß zwar die Aufstellung der Ausgangsformeln und der Operationsvorschriften im Hinblick auf die Bedeutung der Grundbegriffe geschieht, daß aber innerhalb des Systems die Kette der Deduktionen und die der Definitionen formalistisch weitergeführt wird, rein kalkülmäßig, d. h. ohne auf die Bedeutung der Grundbegriffe Bezug zu nehmen.“[91]

Unsere Aufgabe von hier an besteht zum großen Teil im Auffinden der Wurzeln des Unterschiedes zwischen den beiden Haltungen, die wir in diesen Passagen identifizieren können. Die Gründe für die Hoffnung, den Gegensatz zwischen Logizismus und Formalismus zu überbrücken, wie sie im ersten Zitat zum Ausdruck kommt, beziehen sich auf die Möglichkeit der oben erwähnten Interpretation für das ‚Gesamtsystem der Mathematik‘. Der Ausdruck ‚Gesamtsystem‘ entspricht dem Gedanken der ‚universale[n] Sprache der Wissenschaft‘, wie er zu Beginn dieses Kapitels angesprochen worden ist. Dabei geht es nicht um die Idee eines einzigen absoluten Systems, sondern vielmehr um die Vereinheitlichung der verschiedenen möglichen Darstellungen des axiomatischen Aufbaus der Mathematik. In *Die Mathematik als Zweig der Logik* sind die Schritte des Carnapschen Vorschlages für das Erreichen eines Einklangs zwischen Logizismus und Formalismus die folgenden:

(1) Die Anerkennung einer der Forderungen des Intuitionismus, nämlich des finitistisch-konstruktivistischen Vorgehens. Man muss darauf achten, dass diese Forderung im Gebiet der Metamathematik des Formalismus aufgestellt wird,

[91] Carnap: *Logizistische Grundlegung der Mathematik*, S. 104f.

also eines Gebiets, dessen Wahrheiten inhaltlich-anschaulich gewonnen und bewiesen werden;[92]

(2) Andererseits werden im formalen Gebiet der Mathematik diejenigen Formeln beibehalten, die sich auf Unendliches oder sogar auf Überabzählbares beziehen.

Nachdem diese Forderungen erhoben worden sind, macht Carnap von seinem damaligen Gesichtspunkt ausgehend weitere Vorschläge, welche auf die Vereinheitlichung der verschiedenen Auffassungen der Grundlegung der Mathematik hinauslaufen sollten.

(3) Er regt dazu an, das metamathematische Axiomensystem des Formalismus zu ergänzen, sodass diejenigen Schlüsse, die von Wirklichkeitssätzen ohne mathematische Zeichen zu jenen mit mathematischen Zeichen führen, sich als logisch legitime aufweisen lassen[93].

Der Grundgedanke des klassischen Formalismus (Hilbertsche ‚Beweistheorie') ist die Idee, dass die Anwendungen der Technik des Denkverfahrens auf die konkreten (anschaulichen) Gegenstände der mathematischen Theorien (z. B. die elementare Zahlentheorie oder die Geometrie) eine Abbildung geben sollte, welche sozusagen die formalen Beziehungen der *idealen Gebilde* der Mathematik darstellen.[94] Dieses Verfahren wird uns erlauben, so meinte Carnap, den Zahlzeichen eine logische Bedeutung beizulegen und gleichzeitig den in (3) beschriebenen Übergang auszuführen. Eine solche Kombination würde zur Folge haben, dass

(4) „die Formeln der formalistischen Mathematik sich dann als Tautologien herausstellen werden."[95]

---

[92] Siehe dazu Hilbert: *Grundlagen der Mathematik*, insbesondere S. 71.

[93] Dazu siehe Carnap: *Die Mathematik als Zweig der Logik,* S. 309f.

[94] Dazu vgl. Hilbert: *Grundlagen der Mathematik*, insbesondere S. 65-66; auch S. 71ff. und S. 79.

[95] Carnap: *Die Mathematik als Zweig der Logik*, S. 310.

Die Weise, durch die Carnap solchermaßen den Gegensatz zwischen Logizismus und Formalismus überbrücken wollte, findet sich in *Neue Grundlegung der Logik*[96] angedeutet: Dem Axiomensystem des Formalismus werden nichtlogische Konstanten hinzugefügt, sodass die Atomsätze, wenn interpretiert, faktische Zustände der Welt ausdrücken. Die Atomsätze sind diejenigen, die nicht weiter zerlegt werden können und die daher unabhängig voneinander sind.[97] Wir können durch ein bei Carnap sehr übliches Beispiel den Übergang von einem Wirklichkeitssatz ohne mathematische Zeichen zu einem solchen mit mathematischen Zeichen illustrieren. Es geht um den Schluss von „In diesem Zimmer sind nur die Personen Karl und Fritz" zu dem Satz „In diesem Zimmer sind zwei Personen."[98] Wenn wir dem in *Neue Grundlegung der Logik* skizzierten Modell folgen, formalisieren wir die betreffenden Sätze so: Zunächst nehmen wir ‚Zim' als eine nichtlogische Konstante für die Eigenschaft ‚Person in diesem Zimmer zu sein'; die individuellen Konstanten ‚k' und ‚f' für ‚Karl' und ‚Fritz'; der Aussagen- und Prädikatenkalkül (mit den Ersetzungsregeln) wird vorausgesetzt. Wir können dann etwa folgende Argumentationsform formulieren: (5)

Zim (f) □ Zim (k) □ □x□y [Zim(x) □ Zim(y) □ ¬(y = z) □ ∀z (Zim(z) □ ((z = x) □ (z = y)))]

□ □x□y [Zim(x) □ Zim(y) □ ¬(x = y) □ ∀z (Zim(z) □ ((z = x) □ (z = y)))]

Hieraus ergibt sich dann, indem „P" als eine Prädikatvariable angenommen wird:

---

[96] Carnap [089-64-01] (Ende 1929).

[97] Siehe Carnap [089-64-01].

[98] Siehe Carnap: *Die Mathematik als Zweig der Logik*, S. 309. Es gibt andere Varianten, in denen solche Sätze als „Hans-Peter Argument" dargestellt sind; wir werden diese Art Argument „Karl-Fritz Argument" nennen.

(6) □ □x□y [P(x) □ P(y) □ ¬(x = y) □ ∀z (P(z) □ ((z = x) □ (z = y)))]

So haben wir eine Formel, welche die Zahl 2 in einem logisch aufgebauten System ausdrücken kann. Das Wichtigste an dieser Art von Formeln und Schlüssen ist als Anweisung im Konvolut von *Neue Grundlegung der Logik* enthalten, welche im Einklang mit der Behauptung Carnaps steht: „Eine Formel heisse <u>tautologisch</u>, wenn wir [sic] [durch] ihre Hinzufügung zu einem beliebigen System von Atomsätze[n] und von Axiomen niemals der Bestand an beweisbaren, nicht logischen Formeln vermehrt werden kann."[99] Das bei (5) dargestellte Argument besitzt – von einem metalogischen Gesichtspunkt aus betrachtet – die Form:

(7) <u>□□□</u>
□ □

Die Formel (6) ist die rein logische Struktur von ‚□', also eine Formel, die nur logische Konstanten und Variablen enthält. Diese Argumentationsform durch Konjunktionsbeseitigung, deren Modell in *Neue Grundlegung der Logik* zu finden ist[100], zeigt auf, dass bei beliebigen Systemformen die logisch-mathematische Schlussform dem Gehalt der Sätze nichts hinzufügt und folglich ‚tautologisch', ‚analytisch', ‚gehaltleer' ist (in der Nomenklatur von *Neue Grundlegung der Logik* haben die rein logischen Sätze daher immer den Wert ‚0'). Neben diesem Aspekt ergeben sich bei einem solchen Verfahren zwei weitere Faktoren. Zuerst versucht Carnap mit dieser Operation die finitistisch-konstruktivistische Interpretation des Allquantors in der

[99] Carnap [089-64-01].

[100] Siehe Carnap [089-64-01], insbesondere die ersten Seiten, und auch [089-64-02].

Metamathematik beizubehalten, wie das Exposé des Programms in *Die Mathematik als Zweig der Logik* zu erkennen gibt (dadurch scheint es auch zunächst einleuchtend, dass die Wittgensteinsche Interpretation des Allquantors irgendwie gerettet werden könnte). Zweitens, wie man in *Intellectual Autobiography* bestätigt findet, war es ein weiteres Bestreben Carnaps die Ausdehnung des Hilbertschen Programms für sein eigenes Ziel zu gebrauchen:

> "Whereas Hilbert intended his metamathematics only for the special purpose of proving the consistency of a mathematical system formulated in the object language, I aimed at the construction of a *general theory of linguistic forms*."[101]

Obwohl die in diesem Zitat erkennbare Auffassung erst später explizit artikuliert wird, kann sie schon in *Neue Grundlegung der Logik* und *Die Mathematik als Zweig der Logik* ganz deutlich identifiziert werden. In diesem Zusammenhang ist es interessant zu beachten, dass Carnaps Skizze einer allgemeinen Metalogik, die die Entwicklung der Kernidee der *Logischen Syntax* enthält,[102] schon am Ende des zweiten Teils von *Neue Grundlegung der Logik* (also 1929)[103] erwähnt wird.

Wenn wir diesen Gedankengang verfolgen, den Carnap bereits in *Neue Grundlegung der Logik* entwickelt und der später in *Die Mathematik als Zweig der Logik* vorgetragen wird, und ihn mit demjenigen aus der oben zitierten Passage aus der *Logizistische Grundlegung der Mathematik* vergleichen, so fällt trotz der Ähnlichkeit mit den vorigen

[101] Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 54; meine Hervorhebung.

[102] Von der ersten Version der *Logischen Syntax* von 1932 ist nur der Index (auf 1932 datiert) erhalten (in: Carnap [110-04-7]). Dieser wird von Gödel u. a. gelesen (siehe dazu [110-04-8,9], das Vorwort zu *Logische Syntax* und den Briefwechsel zwischen Carnap und Gödel). Das zu diesem Index gehörige Konvolut ist verloren gegangen. Der *Versuch einer Metalogik*, die Carnap nach einer schlaflose Nacht im Januar 1931 geschrieben hat, wurde von André Carus transkribiert (mehr dazu weiter unten).

[103] Tatsächlich finden wir am Schluss von Carnap [089-64-02] die Anmerkung: „Feigls Vorschläge zu meinem MS Metalogik". Dieses ist auf den 19.12.1929 datiert.

Schriften eine Änderung in Carnaps Haltung auf. In *Logizistische Grundlegung der Mathematik* versucht Carnap, die verschiedenen Richtungen innerhalb der Forschung über die Grundlagen der Mathematik zu kombinieren. Dies erinnert uns an den späten Carnap und die reife Form des TP, also die Tendenz, das Grundlegende als eine Sache der Zweckmäßigkeit zu behandeln. Es scheint, dass er seinen Weg gefunden hat, den ‚Gegensatz' zwischen den verschiedenen philosophischen Interpretationen der Mathematik zu überbrücken. Wir müssen aber darauf achten, dass trotz dieser scheinbar pragmatischen Haltung, was die Art der Mathematik anbelangt, Carnap einige für ihn sehr ernste theoretische Fragen vor Augen hat, wie die Diskussion des Aufsatzes *Grundlegung der Mathematik*, die auf derselben Tagung stattfand, belegt. Bevor wir aber auf die Details dieser Diskussion eingehen, versuchen wir den Grund auszumachen, aus dem heraus eine Veränderung in Carnaps Haltung und somit in den Thesen des CL stattfand.

Wesentlich für Carnaps Veränderung im Umgang mit dem Problem der Grundlagen der Mathematik waren die Ergebnisse von Gödel[104]. Am 26. August 1930 – also zwischen der Präsentation von *Die Mathematik als Zweig der Logik* und derjenigen von *Logizistische Grundlegung der Mathematik* – erklärte Gödel im Café „Reichsrat" in Wien Carnap, Waismann und Feigl seine Überlegungen zum Unvollständigkeitstheorem[105]. Carnap wusste also schon zur Zeit der Tagung im September 1930, dass – wenn sich die Ergebnisse von Gödel bewahrheiten – für die Logik kein ‚entscheidungsdefinites' System besteht[106]. Wir sehen, dass

[104] Siehe Carnap: *Grundlegung der Mathematik*, S. 104, im ersten Kapitel zitiert.
[105] Siehe Dawson: *A Gödel Chronology*, in: Gödel: *Collected Works*, Vol. I, S. 38.
[106] Das heißt für die Logik: Wenn sie ausdrucksstark genug ist, um die Arithmetik der natürlichen Zahlen aufzubauen, ist sie ‚unvollständig'.

Carnap schon früh einen zentralen Aspekt dieser Ergebnisse verstanden hat, d. h. er verstand die Konstruktion von unentscheidbaren Sätzen durch die Gödelsche Methode. Andererseits wird Carnap die Folgen der Gödelschen Ergebnisse, insbesondere für die technische Situation, die den Hintergrund des CL bildet, erst in den folgenden Jahren vollständig verstehen.

In jedem Fall reicht Carnaps Verständnis der Konsequenzen von Gödels Methode und Ergebnissen aus, um zu erkennen, dass diese Ergebnisse in seinem System untergebracht werden müssen, um seine Interpretation der Sätze der Mathematik als Tautologien nicht zu gefährden. Aus diesem Grund hat Carnap die erkenntnistheoretischen oder epistemologischen Auswirkungen dieser Ergebnisse dauerhaft minimiert. Und zwar – das ist unsere Meinung dazu – bremst Carnap insbesondere die Wirkungskraft der Schlüsse ab, die Gödel aus ihnen ziehen wollte.

Zur Zeit der Tagung, deren Niederschrift in *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik* besteht, macht Carnap Gebrauch von den Begriffen der Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit im Sinne Hilberts.[107] Falls ein Axiomensystem widerspruchsfrei ist, so wird gemäß Carnap jede mathematische Formel zu einer Tautologie, und falls es vollständig ist (also falls keine nicht-ableitbare Formel widerspruchsfrei zu ihr hinzuzufügen ist), dann fasst er die Bedeutungsanalyse als eindeutig auf (jedes Zeichen erhält also genau eine Bedeutung).[108] Wenn dieses Verfahren erfolgreich ist, so glaubte Carnap, dann hat er eine eindeutige Interpretation für die Bedeutung der rein formalen Sätze gefunden. Es ist entscheidend darauf zu achten, dass Carnap die formalistischen Thesen in diesem Kontext nur der Klarheit der Diskussion wegen nennt, da er die Schwierigkeiten im

[107] Siehe *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik*, S. 144ff.
[108] Ebd., S. 144.

Gebiet der Grundlegung der Mathematik kennt, wie seine Worte bestätigen: „Die Durchführung der angedeuteten Gedanken kann erst versucht werden, wenn das Hilbertsche logisch-mathematische Axiomensystem einmal vollständig vorliegen wird.“[109] Was Carnap hier anvisiert, ist die Möglichkeit, trotz der Ergebnisse Gödels das Problem in rein formaler Weise gemäß dem logizistischen Standpunkt zu lösen.

Gödels Antwort auf die Carnapsche Position ist in diesem Zusammenhang sehr interessant. Er fordert Carnap dazu auf, die Folgerung seiner Ergebnisse zu übernehmen, nämlich dass man von keinem formalen System mit Sicherheit behaupten kann, dass alle inhaltlichen Überlegungen in ihm darstellbar seien.[110] Die ‚inhaltlichen Überlegungen‘ werden in diesem Kontext von Gödel intuitionistisch aufgefasst, also als Wahrheiten, die aus anschaulichen (synthetisch-apriorischen) Überlegungen gewonnen und bewiesen werden können. Gödel vertritt damit eine Epistemologie der Mathematik, die Carnap nur zu gern verwerfen möchte[111].

Das wichtigste Ergebnis ist, dass Gödels Interpretation seiner eigenen Resultate derjenigen von Carnap entgegensetzt ist, da sie die epistemologische Kontrolle verletzt, auf die es Carnap gerade ankommt, nämlich eine scharfe Abgrenzung zwischen inhaltlichen und formalen Sätzen festzulegen[112].

[109] Ebd., S. 144.

[110] Vgl. ebd., S. 148.

[111] Es ist auch zu beachten, dass Gödel seine Ergebnisse von einem intuitionistischen Hintergrund aus interpretierte. Es ist wahrscheinlich, dass er sich seine platonistische (objektivistische) Position hinsichtlich mathematischer Wahrheiten auf jener Tagung nicht ausreden lassen wollte. In diesem Zusammenhang ist auch bemerkenswert, dass van Heijenoort in seiner Einführung zur englischen Version des Aufsatzes sich auf Gödels Aufsatz über Unentscheidbarkeit beziehend, behauptet: “There is not one branch of research, *except perhaps intuitionism*, that has not been pervaded by this influence.” (van Heijenoort, J. (ed.): *From Frege to Gödel*, S. 595; meine Hervorhebung).

[112] Diese Festlegung muss auch zeigen, dass die Sätze der Wissenschaft entweder analytisch oder synthetisch *a posteriori* sind und dass es keine synthetischen Sätze *a priori* gibt.

Spuren dieser Debatte lassen sich noch in der *Logischen Syntax* ausmachen.

Die gerade skizzierte Interpretation zeigt, dass Carnaps Verständnis der Situation in der Zeit des Kongresses im September 1930 schon den Kern der Position enthält, die Carnap durchgehend (auch in seiner reiferen Phase) aufrechterhalten wird. Das wird deutlich in der Antwort auf den Einwand Poppers, dass die Einheitswissenschaftsthese angesichts der Ergebnisse von Gödel und Tarski widerlegt worden sei. Ihrer Wichtigkeit wegen sei hier die ganze Passage zitiert:

> "Popper asserts (…) that our thesis of the possibility of a unified language of science has been refuted by the results of Gödel and Tarski. These results are certainly of the greatest importance. But they show only that no fixed language can be logically and semantically complete; every language can be further strengthened by the addition of new logical forms of expression and new logical means of deduction. The thesis of the unity of science, as Neurath and I maintained it, *has nothing to do with the question of logical completeness*. Rather, it was meant as a rejection of the division of empirical science into allegedly fundamentally separate fields, above all of the division into natural sciences and social sciences ("Geisteswissenschaften"), a division which was based on the dualistic metaphysics prevailing at that time in Germany. In contrast to this dualistic conception, our thesis asserted that empirical science, with all its various fields, can be constructed on a uniform basis. *Understood in this sense, I still maintain this thesis*."[113]

Das Verständnis der Bedeutung des Einwandes von Popper hängt prinzipiell von einem Verständnis der bisherigen Entwicklung der Thesen des CL und ihrer Beziehungen zu einander ab. These I nimmt demnach auf die Antwort zur Frage ‚Was heißt Logik?' Bezug. Eine solche Frage setzt voraus, dass wir die Natur des formalen Schlusses schon bestimmt haben (These II). Auch die Einheitswissenschaftsthese (These III) ist in Carnaps Programm von dem Nachweis des Gebrauchs einer einzigen

[113] Carnap: *Replies*, S. 880.

Art des Schließens in der Wissenschaft abhängig, d. h. von der effektiven Konstruktion einer Gesamtsprache, deren logisch-mathematischer Teil als analytisch nachgewiesen wird. Die Vereinheitlichung des Schlussfolgerungsbegriffes würde es auch ermöglichen, die metaphysisch orientierten ontologischen Diskussionen im Rahmen der Mathematik aufzulösen (These IV). Daraus ergibt sich, dass der These II die zentrale Rolle zukommt, denn alle anderen Thesen des CL hängen von ihr ab.

Auch das TP selbst kann nur Bestand haben, wenn die These II haltbar ist. Nur durch den Nachweis, dass alle gültigen Schlüsse gehaltleer, nämlich analytisch sind, wird die Idee haltbar, dass die Wahl zwischen formalen Systemen frei ist. Dies liegt daran, dass in diesem Fall die logische Notwendigkeit keine ontologische Notwendigkeit ist. Auch wenn die Gödelschen Ergebnisse die Einheitswissenschaftsthese – und mit ihr die anderen Thesen des CL – nicht aufheben, ist das Programm unter Gödels direktem Einfluss zumindest stark modifiziert worden. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, was dieser Einfluss bewirkt hat und inwiefern Gödel für die reife Form des TP mit verantwortlich ist.

2.2. Weitere Details über die Auswirkungen der Gödelschen Ergebnisse auf den Carnapschen Logizismus: Von 1931 bis Die Logische Syntax der Sprache

Im letzten Abschnitt haben wir die erste Reaktion Carnaps auf Gödels Ankündigung seiner Resultate in der Zeit der Königsberger Tagung von 1930 näher betrachtet. Wir werden jetzt die Entstehung der reifen Form des TP analysieren, um ein vollständiges Bild der Auswirkungen des Unvollständigkeitstheorems auf den CL zu erhalten.

Betrachten wir zunächst chronologisch die Tendenz zur ‚Toleranz' in Carnaps philosophischen Auffassungen. In den zwanziger Jahren ist sie bereits ganz klar präsent. So beispielsweise im *Logischen Aufbau*, dessen erste Version zwischen 1922 und 1925 geschrieben wurde.[114] Hier wurde der logische Teil des Erkenntnissystems als neutral gegenüber den verschiedenen (klassischen) philosophischen Auffassungen angesehen. Die philosophischen Thesen des Realismus, Phänomenalismus und Idealismus sind Carnap zufolge als verschiedene mögliche Interpretationen des nicht-logischen Teils der Sprache zu betrachten. Deswegen werden sie ‚methodischer Realismus', ‚methodischer Physikalismus' usw. genannt[115]. Im *Logischen Aufbau* und in anderen Arbeiten dieser Zeit ist der logische Kern gewöhnlich typentheoretisch. Der Carnapsche Pluralismus erstreckt sich aber bereits zu dieser Zeit auf den logischen Kern, denn Carnap erklärt, schon im Jahr 1927 den Versuch gemacht zu haben, ein System ohne Typenunterscheidungen für die

[114] Siehe darüber Friedman: *Reconsidering Logical Positivism*, S. 207, Fußnote 19.

[115] Siehe Carnap: *Logischer Aufbau*, insbesondere §§ 175-178. Über Ausdrücke von der Art „methodischer Realismus" usw. siehe Carnap: *Physikalische Sprache als Universalsprache*, S. 462.

Gesamtsprache der Wissenschaft im Zermelo-Fraenkel Stil aufzubauen[116].

Ab 1930, als Folge der revolutionären Ergebnisse von Gödel, wird die Logik tiefgreifend modifiziert, was Carnap zwingt, sein Programm neu zu formulieren und zu reorganisieren. Carnaps Pluralismus mit der Tendenz, den logischen Kern der Gesamtsprache als gehaltleer zu betrachten, wird durch die Annahme des metasprachlichen Gesichtspunktes explizit. Diese Änderung seiner Meinung wird in *Intellectual Autobiography* etwas literarisch beschrieben. Wir erfahren, wie die zu jener Zeit angesehene Lösung für die Kernprobleme, welche die Diskussionen und Auseinandersetzungen im Umfeld des Wiener Kreises prägten, gefunden wurde:

> "After thinking about these problems *for several years*, the whole theory of language structure and its possible applications in philosophy came to me like a vision during a sleepless night in January 1931, when I was ill. On the following day, still in bed with a fever, I wrote down my ideas on forty-four pages under the title "Attempt at a metalogic". These shorthand notes were the first version of my book Logical Syntax of Language […]. In the spring of 1931 I changed the form of language of this essay to that of a co-ordinate language of about the same form as that later called "Language I" in my book."[117]

Die Konsequenzen der neuen metasprachlichen Behandlung von logischen und epistemologischen Problemen lassen sich in verschiedenen Schriften aus dem Jahr 1931 finden, hauptsächlich in den sogenannten *Referaten über Metalogik*[118]. Aus der Lektüre dieser Schriften können wir ersehen, wie Carnap in dieser Übergangszeit seine Metalogik konzipierte und in welcher Weise sie später für den CL entscheidend sein wird.

---

[116] Siehe Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 33.

[117] Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 53f.; meine Hervorhebung.

[118] Carnap [081-07-17,18,19].

Zunächst müssen wir verstehen, dass die metasprachliche Methode für Carnap eine Definitionsmethode ist. Aus seiner Sicht sollte die Metalogik dazu dienen, die zentralen Begriffe für eine Sprache zu definieren, die als Gesamtsprache der Wissenschaft fungieren sollte. Dabei handelt es sich um Begriffe wie ‚Zeichen', ‚Satz', und auf dieser Grundlage auch um logische Begriffe, wie etwa ‚tautologisch' oder ‚analytisch', die im Carnapschen Logizismus die zentrale Rolle spielen, wie wir im vorigen Abschnitt dieses Kapitels gesehen haben.

Die wichtigste Konsequenz der syntaktischen Methode der Metalogik, was die Definition von ‚analytisch' anbelangt, ist, dass dieser Begriff schon zu dieser Zeit als eine Sache der Festsetzung in der Metasprache behandelt wird. So können wir in einem Gespräch mit Hahn lesen:

„Hahn: Ich möchte zur symmetrischen Relation etwas bemerken: Waismann sagt, dass wir eine logische Symmetrie nicht dadurch ausdrücken können, dass wir schreiben: (x,y) (xRy ∃ yRx).
Carnap: Diese Formel sagt nicht, dass eine Symmetrie vorliegt, weil sie eine Tautologie ist und daher nichts besagt. Man kann sie ansetzen und als wahr ansehen, aber sie drückt nicht aus, dass R symmetrisch ist. *Erst der metalogische Satz „diese Formel ist eine Tautologie" drückt es aus*."[119]

Dann später in demselben Protokoll:

„Carnap: Dass ein Ausdruck symmetrisch ist, kann auf verschiedene Weisen geschrieben werden: 1) durch den Satz R… ist symmetrisch. Diese Art ist auszuschalten. 2) dadurch, dass man die metalogische Beschreibung der Formel angibt (oder wenigstens wie Frege die Form selbst in Anführungsstriche setzt) und hinzusetzt, *dass sie eine Tautologie ist*, und 3) durch xRy folgt aus yRx."[120]

Ein weiterer wichtiger Aspekt von Carnaps metalogischer Methode zu dieser Zeit hängt mit seiner Suche zusammen, an eine zentrale Auffassung über die Sprache anzuknüpfen, die in Wittgensteins *Tractatus* zum Ausdruck

[119] Carnap [081-07-16], Diskussion vom 3. Juni 1931; meine Hervorhebung.
[120] Ebd., meine Hervorhebung.

kommt. Es handelt sich hierbei um die Unmöglichkeit, über die formalen Eigenschaften der Sätze der Sprache etwas Sinnvolles aussagen zu können. Auf diese Weise möchte Carnap seine Metalogik mit einem Postulat in Einklang bringen:

> „Da wir nur physikalische Gebilde, nämlich Reihen von Sprachzeichen, beschreiben, können wir die Metalogik in unserer gewöhnlichen Sprache ausdrücken und zwar so, dass dies den Ansichten Wittgensteins nicht widerspricht. Es handelt sich hier nicht um Sätze über eine Art von Sätzen, sondern um Sätze, teils singuläre, teils konditionale, über physikalische Gebilde.“[121]

Nach dieser Auffassung würde die Metalogik auf folgende Weise mit der Wittgensteinschen Auffassung übereinstimmen: wir betrachten die Objektsprache als eine aus Reihen physischer Formen zusammengesetzte Menge. Auf diese Weise würden nicht die Grenzen überschritten, die die Möglichkeitsbedingungen dafür sind, etwas Sinnvolles zu sagen, entsprechend der transzendentalen Rolle, die Wittgenstein der Sprache zuweist. In diesem Fall ist von Interesse, wie Carnap die kombinatorischen Gesetze, d. h. die Syntax der Objektsprache, diesem Gesichtspunkt gemäß erklären würde. Wären diese Gesetze dann physikalische Verbindungen zwischen physikalischen Gebilden? Da Carnap diesen Punkt nicht klarstellt, konzentrieren wir uns darauf, einen anderen Aspekt zu klären, der unserer Ansicht nach noch wichtiger ist und mit dem Versuch Carnaps zusammenhängt, Wittgensteins Philosophie in diesem Punkt zu entsprechen.

Wittgensteins Auffassung von der Natur der Sprache scheint sich Carnaps Auffassung zufolge auf eine abstrakte Struktur zu beziehen, also auf eine ideale Sprache.[122] Wenn Wittgenstein den Begriff ‚Sprache‘ verwendet, spricht er nach

---

[121] Carnap [081-7-19].

[122] Siehe Wittgenstein: *Tractatus*, Satz 3.325. Auch die folgenden Sätze sind dafür einschlägig.

Carnaps Meinung von unseren Ausdrucksmöglichkeiten und nicht von dieser oder jener realisierten konkreten Sprache. Diese Interpretation erlaubt uns zu verstehen, warum Carnap, obwohl er immer typentheoretische Formulierungen für den Aufbau der Gesamtsprache bevorzugte, schon im Jahr 1927 eine solche Sprache auf Zermelo-Fraenkel-Basis aufzubauen hoffte, wie wir im vorigen Abschnitt dieses Kapitels gesehen haben.

An dieser Stelle müssen wir technische Fragen von philosophischen trennen, um Fehlinterpretationen zu vermeiden. Unter ‚technischen Fragen' verstehen wir jene, die die Möglichkeiten und Besonderheiten der Logik, als Werkzeug zur Implementierung des CL betreffen, insbesondere nach den Ergebnissen von Gödel. Diese technischen Fragen im Hintergrund des CL werden letztendlich die anfängliche philosophische Auffassung von Carnap ändern, die zu einer Abweichung von der von Schlick und Waismann vertretenen ‚Partei' des Wiener Kreises führen wird, die hauptsächlich auf Wittgensteins transzendentale Agenda abgestimmt ist. Betrachten wir, wie diese Änderung in Carnaps Gedanken stattfand.

Zunächst ist Carnap daran interessiert, seinen neuen metalogischen Standpunkt mit Wittgensteins Philosophie, wie der Wiener Kreis sie verstanden hat, in Einklang zu bringen. In dieser Phase besteht das Hauptanliegen darin, den Zirkel zu vermeiden, der entsteht, wenn wir eine Sprache verwenden, die von sich selbst spricht.

Carnap glaubte damals, die Hauptforderung der Wittgensteinschen Philosophie zu erfüllen, nach der jede Sprache, die als Kandidat für die Gesamtsprache angesehen werden kann, einen minimalen logischen Kern besitzt.

Carnaps Auffassung geht aus dem folgenden Gespräch im Referat über Metalogik vom 25. Juni 1931 hervor[123]:

„Feigl: Wie steht es mit der Hierarchie der Sprachen? Fällt die in Ihrem System weg?

Carnap: Ja._ _ _ _ Ich möchte noch einen Überblick über die verschiedenen Arten von Sätzen in unserer Sprache geben.

[…]

Neumann: es ergibt sich die Konsequenz, dass nur éine Sprache existiert?

Carnap: Ja, es gibt wohl Sätze von sehr verschiedener Art (wie die obige Tabelle zeigt), aber alle, auch die metalogischen, sind in éiner Sprache.

Hahn: Braucht man überhaupt den Terminus „Metalogik", d. h. sind die metalogischen Sätze prinzipiell von den andern verschieden?

Carnap: *Nein, nur aus Zweckmäßigkeitsgründen fasst man eine gewisse Klasse von Sätzen unter dem Namen „metalogische Sätze" zusammen*.

Neurath: Es handelt sich hier also um eine konkrete Selektion von Sätzen?

Carnap: Ja.

Neurath: Ist die Metalogik der Metalogik wieder in der ursprünglichen Sprache ausdrückbar?

Carnap: *Ja, man kann es so einrichten, dass das der Fall ist*."[124]

Aus dieser Passage, und aus allem, was wir aus der Analyse der Entwicklung des Carnapschen Denkens und aus einigen Spuren dieser ursprünglichen, in *Logische Syntax* noch vorhandenen Konzeption herauslesen, können wir rekonstruieren, wie sich Carnap zu dieser Zeit die Ausführung des CL dachte. Der oben erwähnte minimal logische Kern war nicht als Sondergebiet, sondern als Teilgebiet der Gesamtsprache der Wissenschaften gedacht. Es scheint, als glaubte Carnap, dass dieser Kern den verschiedenen

[123] Carnap [081-07-19].
[124] Carnap [081-07-19].

Formulierungen der Logik gemeinsam sei und dass er die verschiedenen philosophischen Vorstellungen, die mit diesen Formulierungen verbunden sind, neutralisieren könne.[125] Diese Minimalsprache, dieser harte Kern, würde bestimmen, was ausgedrückt werden kann, ohne die Grenzen der Ausdrucksmöglichkeiten im Wittgensteinschen Sinn zu verletzen. Auf diese Weise könnte die Syntax aller Sprachen, so reich sie auch sein mögen, in der ursprünglichen Minimalsprache ausgedrückt werden. Selbst die minimale Sprache sollte natürlich ihre eigene Syntax ausdrücken können, ohne dabei Widersprüche zu verursachen.[126]

Es scheint, dass Carnap mit diesem Verfahren alle Thesen des CL zu demonstrieren hoffte.[127] Ein Bild der Situation kann wie folgt gezeichnet werden: Die Syntax jeder wissenschaftlichen Sprache könnte ungeachtet ihres Reichtums durch den minimalen Kern formuliert werden. Nennen wir diesen minimalen Kern der Kürze wegen S_A[128]. Durch die Formbestimmungen von S_A hätten wir eine Definition von ‚Satz' für alle wissenschaftlichen Sprachen. Durch die Umformungsbestimmungen von S_A könnte man auch den Begriff der Folgebeziehung für die verschiedenen Sprachen definieren. Mit dem tautologischen oder analytischen Satz könnte gezeigt werden, dass die Sätze der klassischen Mathematik, die beispielweise im Rahmen der

[125] Die Grundidee hier ist, dass die Formulierungen der Logik, die wir bei Frege, Russell, Brouwer usw. finden, einen gemeinsamen minimalen Kern enthalten. Das wäre die primitive rekursive Arithmetik. Diese rekursive Arithmetik würde aus diesem Grund die Basis aller anderen legitimen wissenschaftlichen Sprachen bilden, da sich alle in dieser primitiven Sprache ausdrücken lassen sollten. Vgl. in dieser Hinsicht Friedman: *Reconsidering Logical Positivism*, S. 169-172.

[126] Darüber siehe auch Carnap: *Logische Syntax*, §§ 18 und 19.

[127] Die erste Ausführung dieses Projekts ging verloren soweit wir feststellen können. Siehe dazu Awodey und Carus: *From Wittgenstein's Prison to the Boundless Ocean*, S. 93ff.

[128] S_A sollte die allgemeine Syntax aller möglichen (wissenschaftlichen) Sprachen enthalten.

Principia Mathematica formuliert werden, analytisch sind (also auch deren Folgen).

Sobald die Syntax aller wohlgeformten Sprachen in S_A übersetzt werden könnte, könnte man nachweisen, dass alle Folgebeziehungen tautologisch oder analytisch sind (These II des CL). Die Metaphysik würde eliminiert werden, da ihre Formulierungen die Grammatik der wissenschaftlichen Sprachen (also ihre Form- und Umformungsbestimmungen) verletzt, indem sie über legitime Ausdrucksmöglichkeiten hinausgehen (These IV). Letztendlich, wird auch die Einheitswissenschaftsthese (These III) demonstriert, da die Syntax aller Sprachen in wohlgeformten Sätzen und gültigen Schlussfolgerungen in der Minimalsprache S_A wiedergegeben werden könnte.

Die Details des Carnapschen Programms zu diesem Zeitpunkt sind nicht mehr verfügbar. Nachdem er die 44 Seiten von *Versuch einer Metalogik* geschrieben hatte, entwickelte Carnap die erste Version der *Logische Syntax*. Geblieben ist von dieser ersten Version, die von Gödel, Behmann und Hempel gelesen wurde, nur ihr Index.[129] Die Methode, mit der Carnap hoffte, die Syntax einer beliebigen Objektsprache in der Kernsprache wiederzugeben, war jene der Arithmetisierung der Syntax von Gödel.[130] Aber sein Versuch, insbesondere im Hinblick auf den zentralen Begriff ‚analytisch', war dennoch verfehlt.

Der Grund für das Scheitern dieses Versuchs lässt sich anhand der Korrespondenz zwischen Carnap und Gödel ab Ende September 1932 ermitteln, nachdem Gödel die erste Version der *Logische Syntax* gelesen hatte.[131] In einem Brief vom 11. September wies Gödel Carnap darauf hin, dass eine

[129] Der Index ist in Carnap [110-04-07] enthalten. Über die Logiker, die das alte Manuskript gelesen haben siehe Carnap [110-04-08].

[130] Siehe Carnap [081-07-18, 19].

[131] Also das Werk, dessen Index in Carnap [110-04-07] enthalten ist.

rekursive Arithmetik (in Carnaps damaliger Terminologie eine ‚definite Sprache‘) keine korrekte Definition von ‚analytisch‘ liefern könne, weil der Bereich eines Prädikates wie ‚F(x)‘ die Ausdrucksmöglichkeiten einer solchen Sprache überschreiten würde und aufgrund dessen alle Mengen überhaupt als dieser Bereich angesehen werden müssten. Die unmittelbare Auswirkung dieser Situation auf den CL besteht darin, dass selbst die Definition von ‚analytisch‘ für den minimalen Kern nicht korrekt war, was insbesondere auch die Möglichkeit verhindert, durch die Verwendung dieser Methode ‚analytisch‘ für reichere Sprachen zu definieren.[132]

Ein deutliches Bild der durch die Gödelsche Methode hervorgerufenen Situation ergibt sich anhand von Carnaps Aufsatz *Über die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik* von 1935.[133] Denken wir in diesem Zusammenhang an einen Zahlfunktor einer logisch-mathematischen Sprache (nennen wir sie wieder der Bequemlichkeit wegen S_A). Nennen wir den Funktor $zfun^1(\ )$. Durch Diagonalisierung können wir eine Eigenschaft (eine Zahl) konstruieren, sodass durch das normale Verfahren der klassischen Logik geprüft werden kann, ob sie $zfun^1(\ )$ erfüllt oder nicht; infolgedessen ist es möglich, dass ein solcher Funktor für alle einzelnen Argumente in S_A gültig bleibt, ohne dadurch zu bestätigen, dass er analytisch ist. Die Methode der Diagonalisierung wurde für diesen Fall durch Carnap sehr geschickt aufgebaut. Stellen wir uns vor, dass es für $zfun^1(\ )$ einen entsprechenden Funktor *k* gibt, sodass für ihn das

[132] Diese Situation wird später in der *Logischen Syntax* vorgestellt, als Carnap über den Begriff der Wahrheit für die in der Sprache I formulierte Konstruktion spricht: „Es kann der Fall vorkommen, daß für ein bestimmtes pr_l, etwa pr_1, jeder Satz von der Form $pr_1(s_t)$ beweisbar ist, nicht aber der allgemeine Satz $pr_1(z_1)$“ (Carnap: *Logische Syntax*, S. 34). (‚pr_1‘ steht hier für den metasprachlichen Namen eines Prädikates der Objektsprache, ‚s_t‘ für den Namen irgendeiner Konstanten der Objektsprache, ‚z_1‘ für den Namen einer Variable der Objektsprache. Carnap verwendet gotische Buchstaben für metasprachliche Zeichen, was sich nicht darstellen ließ).

[133] Carnap: *Antinomien und Unvollständigkeit*.

Folgende gilt: wenn x nicht eine Gliedzahl von *zfun*^{1}*( )* ist, dann $k = 0$. Wird andererseits x eine Gliedzahl von *zfun*^{1}*(*x*)* = h in S_A, dann gilt k = h+1. Das bedeutet: der Wert von *k* weicht von jedem möglichen Argument von *zfun*^{1}*( )* ab. Wegen der Undefinierbarkeit bestimmter Argumente (Zahlen) in S_A (schon eine der wichtigsten Konsequenzen der ‚arithmetisierten Metasprache'), kann der Wertverlauf von *zfun*^{1}*( )* keinesfalls in S_A dargestellt werden. Also bleibt die Frage nach dem analytischen Charakter eines solchen Zahlfunktors unentschieden. Wäre andererseits eine solche Prüfung der Analytizität von *zfun*^{1}*( )* durch die in S_A darstellbaren Ausdrucksmittel möglich, d. h. wären alle Werte von *zfun*^{1}*( )* in S_A ausdrückbar, so läge die Definition von ‚analytisch' für S_A in S_A selbst vor. Dann aber wäre S_A in sich widersprüchlich, wie durch einen ganz einfachen Beweis gezeigt werden kann (eine Version der Antinomie des Lügners).[134] Auch auf diesem Wege können wir zu vielen Resultaten kommen, die mithilfe der Methode der Arithmetisierung der Syntax der Metasprache erreicht werden können.

Wie wir an den Fortschritten der mit Gödel ausgetauschten Briefe sehen können, wusste Carnap zunächst nicht, wie er aus dieser Aporie herauskommen sollte. Er bat Gödel sogar, eine Lösung für das Problem zu finden. Eine solche Lösung für das Problem der Definition des Begriffes von ‚analytisch' ist von entscheidender Bedeutung, da die Philosophie für Carnap ‚logische Analyse der Sprache' war und dies immer blieb. Ohne die Definition von ‚analytisch'

---

[134] In seinem Beweis der Antinomie des Lügners (siehe Carnap: *Antinomien und Unvollständigkeit*, S. 267ff., auch in der englischen Version der *Logischen Syntax*, § $60_{a\text{-}d}$) benutzt Carnap nicht die syntaktischen Begriffe ‚analytisch' und ‚kontradiktorisch', sondern ‚wahr' und ‚falsch'. Aber im Rahmen von Sprachen, die nur rein logische Transformationen (Umformungsbestimmungen, L-Bestimmungen in Carnaps Terminologie) enthalten, fallen diese Begriffe zusammen (‚wahr' mit ‚analytisch' und ‚kontradiktorisch' mit ‚falsch').

wäre die Aufgabe der Philosophie in diesem Sinne nicht ausführbar.

Im Laufe des Briefwechsels sehen wir, dass Carnap die Lösung für sich selbst findet. Diese Lösung besteht darin, dass die Definition von ‚analytisch' insgesamt durch den Beweis in einer reicheren Sprache als der Objektsprache geschehen soll, also einer Sprache, die für jede Bewertung (z. B. für den ganzen Wertverlauf eines Funktors) unabhängig von der definitorischen Stärke der Objektsprache ist. Später, als die *Logische Syntax* schon erschienen war, sehen wir die klare Beherrschung der Technik. Die logischen Begriffe einer Sprache – wie bei den Sprachen I und II – werden immer in einer reicheren Sprache konstruiert. Bemerkenswert und für unsere Diskussion hier von größter Bedeutung ist die Zuspitzung der Idee, die wir schon im Briefwechsel angedeutet finden und die in Carnaps *Gültigkeitskriterium für die Sätze der Mathematik* vollständig entwickelt wird (später als § 34_d der englischen Version der *Logischen Syntax* erschienen). Es handelt sich um eine Definition von ‚analytisch', ‚die für alle Sprachen gelten soll, welche nur logische Transformationen oder L-Umformungsbestimmungen enthalten (von hier an als L-Sprachen abgekürzt). Es geht um die Konstruktion ‚(F) (…)'. Diese allgemeine Formel soll bedeuten: „‚für alle Eigenschaften…', aber nicht für alle Eigenschaften in S_i, (‚S_i' eine beliebige Sprache seiend), sondern ‚für alle Eigenschaften schlechthin'."[135]

Durch das hier beschriebene Verfahren erreicht Carnap ein allgemeines Schema für die Definition von ‚analytisch'. Die konkrete Definition dieses Begriffes ist jedoch immer relativ zur Metasprache, die reicher sein muss als die Objektsprache, für die der Begriff definiert wird. In der

[135] Carnap: *Gültigkeitskriterium für die Sätze der Mathematik*, insbesondere S. 179 ff.

Sekundärliteratur zu diesem Thema sehen viele angesichts dieser Situation ein schlagendes Argument gegen den Carnapschen Logizismus.[136] Unsere bisherigen Untersuchungen zeigen jedoch, dass Carnap die Situation selbst nicht so sah. Erinnern wir uns zuerst an seine Antwort auf Popper (siehe das Zitat oben), der meinte, die Ergebnisse Gödels (und später jene von Tarski) seien für die Einheitswissenschaftsthese widerlegend. Carnaps Antwort lautet, dass die Frage nach der Vereinheitlichung der Wissenschaftssprache („unified language of science", siehe das Zitat oben), die von der Definition von ‚analytisch' abhängt[137], „absolut nichts mit der Frage nach der Vollständigkeit der Logik zu tun hat." Laut Carnap zeigt Gödel, dass keine fixe Sprache (wie beispielsweise die minimale Kernsprache S_A) logisch vollständig sein kann. Zweitens sehen wir, dass Carnap seine Meinung über die zentrale Rolle der Definition des Begriffs ‚analytisch' für sein Programm nicht geändert hat, wie eine Passage seiner *Intellectual Autobiography* zeigt:

> "I mentioned above the problem of the distinction between logical and factual truth, which constitutes a point of divergence among those working in semantics. To me it had always seemed to be one of the most important tasks to explicate this distinction, in other words, to construct a definition of logical truth or analyticity."[138]

Unseres Erachtens war Folgendes geschehen: Carnap verstand zunächst die Konsequenzen von Gödels Methode für die Metasprache und ihre Beziehung zur Objektsprache nur unvollkommen. Dies betrifft vor allem die Situation des logischen Apparats, also die technische Situation im Hintergrund, die die Implementierung des CL bedingt. Durch

[136] Carus: *Carnap and Twentieth Century Thought*, Chapter 8; Friedman: *Reconsidering Logical Positivism*, Chapter 9, auch Awodey: *Explicating Analytic*.
[137] Sowie die anderen Thesen des CL.
[138] Siehe Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 63.

seine Interaktion mit Gödel lernte er später die Konsequenzen der neuen logischen Situation für seine Arbeit besser zu verstehen. Dementsprechend formulierte Carnap seinen Pluralismus neu. Die Einheit der wissenschaftlichen Sprache wird nicht in einer minimal fixen Sprache gefunden, in der die Syntax aller Sprachen wiedergegeben werden könnte. Im Gegenteil setzt sich die allgemeine Syntax aus Definitionsschemata der zentralen Begriffe zusammen[139], wobei die konkreten Definitionen aus der im jeweiligen Einzelfall erforderlichen Metasprache und Objektsprache gebildet werden. Mit anderen Worten: Die Metasprache kann variieren, es ist nur keine fixe Sprache möglich (wie Gödel gezeigt hat).

Die Einheit aller wissenschaftlichen Sprachen beginnt sich von diesem Punkt an auf den Begriff der Widerspruchsfreiheit zu stützen.[140] In allen anderen Aspekten herrscht völlige Freiheit. Dies wird im Vorwort der *Logischen Syntax* angesprochen:

> „Man kann die Sprache in ihrem mathematischen Teil so einrichten, wie die eine, oder so, wie die andere Richtung es vorzieht. Eine Frage der „Berechtigung“ gibt es da nicht; sondern nur die Frage der syntaktischen Konsequenzen, zu denen die eine oder andere Wahl führt, *darunter auch die Frage der Widerspruchsfreiheit*.“[141]

Dies ist die reife Form des Toleranzprinzips, die wir in der *Logischen Syntax* finden und die im IV. Teil des Buches konkret angewendet wird[142]. Bis zu diesem Zeitpunkt glaubte Carnap eine methodologische Lösung für die Probleme und Herausforderungen des CL gefunden zu haben. Die Geschichte wird jedoch etwas anderes zeigen. Eine der Hauptquellen der Probleme wird die Tatsache sein, dass

[139] Siehe Carnap: *Logische Syntax*, IV. Teil, insbesondere S. 120ff.
[140] Carnap distanziert sich also von den Grundsätzen der Wittgensteinschen Philosophie in diesem Punkt.
[141] Carnap: *Logische Syntax*, Vorwort, S. V.
[142] Carnap: *Logische Syntax*, S. 106ff.

Carnap beabsichtigte, die P-Umformungsbestimmungen[143] in die Syntax einzugliedern und ein Kriterium für die Unterscheidung dieser Bestimmungen von den sogenannten L-Umformungsbestimmungen innerhalb einer Sprache zu liefern. Dieses Unterscheidungskriterium (algebraisch in der allgemeinen Syntax aufgebaut[144]) wird sich als fehlerhaft erweisen, wie Tarskis Kritik zeigte. Dies sind die Details der neuen Entwicklungsstufe von Carnaps Gedanken, die wir im nächsten Kapitel genauer betrachten werden.

[143] Axiome, die, wenn interpretiert, physikalische Gesetze ausdrücken.
[144] Carnap: *Logische Syntax*, §§ 50 ff.

3. Tarskis Reaktion auf *Die Logische Syntax der Sprache* und die sogenannte semantische Phase des Carnapschen Logizismus

3.1. Von der Syntax zur Semantik

Wenn wir die Herausarbeitung des CL betrachten, die auf der Auseinandersetzung mit Gödel beruht, so können wir feststellen, dass im Rahmen der syntaktischen Metasprache für die L-Sprachen (wie die Sprachen I und II der *Logischen Syntax*), vollständige Definitionen für ‚analytisch', ‚kontradiktorisch' und andere L-Begriffe konstruiert werden können[145]. Wie bereits erwähnt, fallen in L-Sprachen die Begriffe ‚analytisch' bzw. ‚kontradiktorisch' mit ‚wahr' bzw. ‚falsch' zusammen. Eine völlig andere Situation ergibt sich, sofern P-Bestimmungen in einer Sprache enthalten sind. In der *Logischen Syntax* finden wir die Art und Weise, in der P-Bestimmungen zu behandeln sind, im IV. Teil des Buches, also im Rahmen der sogenannten ‚allgemeinen Syntax', jenem Teil, der nicht auf „[…] bestimmte einzelne Sprachen bezogen [ist], sondern entweder auf alle Sprachen oder auf die Sprachen einer bestimmten Art."[146] Wir stehen vor dem Versuch einer konkreten Implementierung der ‚allgemeinen Theorie der Sprachformen'.

[145] L-Sprachen sind diejenigen, die nur logische Umformungsbestimmungen (Transformationen) besitzen. P-Sprachen sind diejenigen, die physikalische Umformungsbestimmungen besitzen (s.o. Kapitel 2). Eine Sprache, die nur logische Konstanten und Variablen enthält, heißt logische Sprache; andererseits heißt eine Sprache, die deskriptive Konstanten enthält, deskriptive Sprache. In diesem Sinne sind die Sprachen I und II der *Logischen Syntax* deskriptive L-Sprachen, denn sie besitzen deskriptive Konstanten, aber nur logische Umformungsbestimmungen (siehe dazu Carnap: *Logische Syntax*, S. 134f.). Wir werden in Folgendem der Kürze wegen von L-Bestimmungen bzw. P-Bestimmungen reden.

[146] Carnap: *Logische Syntax*, S. 106.

Es taucht in diesem Kontext ein Problem auf, das sich durchgehend als wesentlich für Carnaps Konzeption erweist. Im Gebiet der P-Sprachen wird selbstverständlich der Begriff ‚analytisch' nicht mit dem semantischen Begriff ‚wahr' zusammenfallen; denn es ist evident, dass es auch wahre nicht-analytische Sätze gibt. Das formale (syntaktische) Kriterium, das am nächsten zu ‚analytisch' steht, ist mit dem Begriff ‚gültig' am besten beschrieben (auch in einer syntaktischen Metasprache definiert), sobald bestimmte nichtlogische allgemeine Formeln in der Metasprache vorkommen werden. Für L-Sprachen hat Carnap, wie wir in der *Logischen Syntax* sehen können, die Vollständigkeit solcher Sprachen erreicht. (Natürlich ist diese Vollständigkeit keine absolute, sondern relativ in Bezug auf die Metasprache, in der sie bewiesen werden kann). Andererseits gibt es keinen solchen Vollständigkeitsbeweis für P-Sprachen, weil die allgemeinen P-Sätze, wenn sie interpretiert werden, sogenannte Naturgesetze ausdrücken und undeterminiert bleiben müssen. Diese Undeterminiertheit ist ihr wesentliches Merkmal. Eine solche Auffassung hat die wesentlichen Aspekte des damaligen CL geprägt. Im Folgenden werden wir die bedeutendsten Details des Programms technisch näher betrachten und seine Kernprobleme hervorheben, wie sie damals hauptsächlich von Tarski aufgezeigt wurden. Anschließend werden wir die Annahme einer semantischen Metasprache bei Carnap analysieren, sowie die Konsequenzen dieser Annahme für das TP anzeigen.

Im § 50 der *Logischen Syntax* stellt Carnap ein allgemeines Kriterium zur Kennzeichnung von logischen Zeichen und Ausdrücken innerhalb einer beliebigen Sprache auf, für die ein ‚Alphabet' zum Aufbau von Sätzen und Folgen von Ausdrücken formal angegeben werden kann. Das Kriterium ist ein algebraisches und lautet:

„K_l sei der Durchschnitt aller Ausdrucksklassen K_i von S, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen […]. **1.** Gehört A_1 [ein Ausdruck] zu K_i so ist A_1 nicht leer und es gibt einen Satz, der so in Teilausdrücke zerlegt werden kann, daß alle zu K_i gehören und einer A_1 ist. **2.** Jeder in Ausdrücke von K_i zerlegbare Satz ist determiniert. **3.** Die Ausdrücke von K_i sind möglichst klein, d. h. kein Ausdruck gehört zu K_i, der in mehrere Ausdrücke von K_i zerlegt werden kann. **4.** K_i ist möglichst umfassend, d. h. nicht eine echte Teilklasse einer Klasse, die ebenfalls (1) und (2) erfüllt. Ein *Ausdruck* heißt **logisch** (A_l), wenn er zerlegbar ist in Ausdrücke von K_l; andernfalls **deskriptiv** (A_d). Eine *Sprache* heißt *logisch*, wenn sie nur a_l enthält [eine Bezeichnung für beliebige logische Zeichen; Carnap benutzt Frakturzeichen für diesen Zweck]; andernfalls *deskriptiv*."[147]

Für das richtige Verständnis dieses Kriteriums ist dessen Relativität zu beachten, wonach der logische oder deskriptive Charakter keinesfalls ein für alle Mal feststeht. Das folgende Zitat zeigt dies ganz klar:

„Keine Bestimmung der physikalischen Sprache ist endgültig gesichert; alle Bestimmungen werden nur mit dem Vorbehalt aufgestellt, daß man sie unter Umständen ändern wird, sobald das zweckmäßig erscheint. Das gilt nicht nur für die P-Bestimmungen, sondern auch für die L-Bestimmungen einschließlich der Mathematik. In dieser Hinsicht gibt es nur graduelle Unterschiede; bei gewissen Bestimmungen entschließt man sich schwerer dazu, sie aufzugeben, als bei andern."[148]

Das wichtigste Merkmal des L-Kriteriums ist, dass alle logischen Sätze allein durch Umformungsbestimmungen, also ohne dass wir das Gebiet der Sprache verlassen, völlig determiniert werden. Diese Forderung wird dadurch erfüllt, dass die logischen Sätze unter allen Ersetzungen nichtlogischer Konstanten gültig bleiben. Dies kann zunächst seltsam erscheinen, da Carnap die Forderungen an jedes Verfahren im Umgang mit formalen Sprachen, die Gödel aufgestellt hat, zu diesem Zeitpunkt genau kennt. Wir vermuten, dass die Situation sich in diesem Zusammenhang folgendermaßen darstellt: Carnap weiß, dass ein bloßes Beibehalten der Gültigkeit unter allen Ersetzungen

[147] Carnap: *Logische Syntax*, S. 130f.
[148] Carnap: *Logische Syntax*, S. 246.

nichtlogischer Konstanten nicht ausreicht, um ‚analytisch' oder ‚L-Bestimmungen' (‚logische Folgerungen') zu definieren. Er glaubt jedoch, dass die Ersetzbarkeit hinreichend sei, um die P-Bestimmungen von den L-Bestimmungen zu unterscheiden, weil eine P-Bestimmung und ihre Konsequenzen undeterminiert bleiben müssen. Das Problem an dieser Auffassung ist aber: Carnap hat mit diesem syntaktischen Verfahren nicht erreicht, was er erreichen wollte, wie Tarski durch seine Kritik aufwies.

Gemäß Tarski kann es nämlich vorkommen, dass die Forderung der Ersetzbarkeit, wie wir sie charakterisiert haben, für eine bestimmte Folgebeziehung zwischen einer Satzklasse K und einem Satz X erfüllt wird, obwohl X keine logische Folgerung von K ist. Das heißt, wir haben eine P-Bestimmung als L-Bestimmung formal durchgeführt, weil die Sprache keinen ausreichenden Bestand an nichtlogischen Konstanten aufweist.[149] Tarskis Kritik in dieser Hinsicht darf so zusammengefasst werden: Die Unterscheidung zwischen L-Bestimmungen und P-Bestimmungen soll unabhängig von den Eigentümlichkeiten der Objektsprache sein, beispielsweise von ihren Strukturen, aber insbesondere von ihrem Reichtum (in den Ausdrucksmitteln), was aber im Rahmen der allgemeinen Syntax nicht der Fall sein kann[150]. Um einen Schritt in Richtung der Überwindung dieser Schwierigkeit zu gehen, deutet Tarski auf die Möglichkeit hin, P- und L-Bestimmungen in der allgemeinen Semantik zu definieren und zu unterscheiden. Die Änderung besteht hauptsächlich darin, dass der Begriff der Adäquatheit – also ein Begriff, der nur im Rahmen der Semantik eingeführt werden kann – statt desjenigen der Vollständigkeit im Gebiet der allgemeinen

[149] Vgl. Tarski: *Logische Folgerung*, S. 277f.
[150] Über die kritischen Bemerkungen von Tarski zu den Definitionen von L-Begriffen in der allgemeinen Syntax siehe Tarski: *Logische Folgerung*, S. 277f., insbesondere Fußnote 8 des Aufsatzes.

Metasprache gebraucht wird. Um diese Änderung in ihren Einzelheiten für unsere Diskussion besser zu verstehen, müssen wir die zentralen Begriffe der Tarskischen Semantik skizzieren.

Der grundlegende Begriff der Tarskischen Semantik ist jener des Erfülltseins einer Aussagefunktion durch einzelne Gegenstände, bzw. des Erfülltseins durch eine „unendliche Folge von Gegenständen".[151] Folglich wird sich in dieser Linie der entscheidende Begriff des Modells ergeben: Alle unendlichen Folgen (Reihen) von Gegenständen, die eine einem Satz entsprechende Aussagefunktion erfüllen, sind Modelle des betreffenden Satzes. Auf der Basis dieses semantisch-metasprachlichen Begriffs des Erfülltseins entwickelt Tarski die Konstruktion eines formalen Begriffs von Wahrheit, welcher rekursiv ist und der Form der Sätze leicht angepasst werden kann.

Das Kriterium für die Adäquatheit der semantischen Wahrheitsdefinition wird durch die sogenannte T-Konvention[152] gegeben. Eine materiale adäquate Definition muss alle T-Konventionen als Folgerungen in der Metasprache besitzen (von den einfachen oder elementaren Sätzen bis hin zu den allgemeinen Sätzen, also Sätzen mit Quantoren). Sie besitzt folgende Form:

T: x □ Wr dann und nur dann, wenn p.[153]

Es lässt sich leicht bestätigen, dass Tarski mit seiner Wahrheitsdefinition dieses Ziel erreicht: „x ist eine wahre

[151] Eine eingehende formale Behandlung der semantischen Begriffe findet sich in Tarski: *Wahrheitsbegriff*. Wir werden hier und im Folgenden die technischen Details der Tarskischen Semantik nur in dem Maße behandeln, wie sie von Bedeutung für unsere Ziele sind.

[152] „W-Konvention" im Original: Siehe Tarski: *Wahrheitsbegriff*, S. 305.

[153] Hier stellt „x □ Wr" eine Satzfunktion der Metasprache, „p" eine Variable, die für Übersetzungen von Sätzen der Objektsprachen in die Metasprache gebraucht werden kann, dar.

Aussage – symbolisch $x \in Wr$ – dann und nur dann, wenn $x \in As$ ist [das bedeutet ‚x gehört der Klasse der Aussagen an'], und wenn jede unendliche Folge von Klassen x erfüllt."[154]

Wir müssen beachten, dass Tarskis Wahrheitstheorie eine Wahrheitsbedingungstheorie ist, jedoch keine Wahrheitsbestimmungstheorie. Als solche soll sie nur die Forderungen der Widerspruchsfreiheit und Adäquatheit erfüllen. Im Rahmen der Semantik ist es außerdem möglich, in der formalen Behandlung der P- und L-Bestimmungen konsequenter zu sein als im Rahmen der allgemeinen Syntax. Im Rahmen der Syntax sind die Sätze nur hinsichtlich der L-Sprachen uniform zu behandeln, wie wir dies auch bei Carnap gesehen haben, da auf diesem Gebiet die Begriffe ‚wahr' und ‚falsch' beziehungsweise mit ‚analytisch' und ‚kontradiktorisch' zusammenfallen. Für die P-Sprachen ist dies allerdings nicht der Fall. In Konformität mit diesem Wissensstand stellt Carnap die Theoreme in der allgemeinen Metasprache als ‚gültig' beziehungsweise ‚widergültig' dar, da die P-Bestimmungen die Struktur einer Implikation haben. Nehmen wir beispielsweise das folgende Naturgesetz an:

(P) Alle Eisenstücke sind magnetisierbar.

Formal wird dies, wenn wir ‚E' für Eisenstück, ‚M' für ‚magnetisierbar' nehmen, folgendermaßen ausgedrückt:
(P') $\forall x\, (E(x) \rightarrow M(x))$

Wenn (P') gültig ist, dann sind alle seine Folgerungen gleichfalls gültig. Natürlich wäre dies im Gebiet der syntaktischen Metasprache nur ein Hinweis auf eine mögliche Interpretation; wenn wir bei der reinen Syntax blieben, könnten ‚E' und ‚M' nur als deskriptive (nicht-interpretierte)

[154] Tarski: *Wahrheitsbegriff*, S. 313.

Konstanten angenommen werden. Das Beispiel reicht trotzdem aus, uns die Konsequenzen der Carnapschen syntaktischen Denkweise in dieser Hinsicht vorzuführen. Die Gültigkeit allgemeiner Sätze in solchen und ähnlichen Fällen wird nicht mit dem Anspruch auf Wahrheit zusammenfallen, da ihre Folgerungen (trotz Carnaps radikalem Relativismus) *per se* undeterminiert sein *müssen*. Damit scheitert Carnaps Form des Versuchs, den empirischen Charakter solcher Sätze formal (syntaktisch) zu erfassen.

Im Rahmen der Semantik sind allein die Bedingungen von Sätzen wie (P’) oder ihren Konsequenzen angegeben. Das kann nachvollzogen werden, wenn wir einen molekularen Satz, der eine logische Folgerung von (P’) ist, in Betracht ziehen. In Worten: „wenn a ein Eisenstück ist, so ist a magnetisierbar“. Symbolisch dargestellt:

(A): E(a) □ M(a).

Gemäß der Konvention T: (A) □ Wr

Dies gilt dann und nur dann, wenn E(a) □ M(a), das heißt, es wird durch die Konvention nicht vorausgesetzt bzw. entschieden, ob der betreffende Satz in der Tat wahr oder falsch ist. Nur die Bedingungen der Satzwahrheit werden dargelegt. Auf diese Weise können wir diejenigen sprachlichen Konstruktionen behandeln, die aus dem Gebiet der Zeichen herausfallen. Im semantischen Sinne darf behauptet werden, dass alle unendlichen Folgen, die die Aussagefunktion ‚E(x) □ M(x)‘ erfüllen, Modelle des Satzes ‚E(a) □ M(a)‘ sind.

Mit diesem logischen Werkzeug kann Tarski die L-Umformungsbestimmungen oder – mit seinen Worten – den Begriff der logischen Folgerung sowie weitere L-Begriffe durch den Begriff des Modells definieren. So schreibt er in *Logische Folgerung*:

„*Die Aussage X FOLGT LOGISCH aus den Aussagen der Klasse K dann und nur dann, wenn jedes Modell der Klasse K zugleich ein Modell der Aussage X ist.*“[155]

In gleicher Weise kann ‚analytischer Satz‘ als ein Satz verstanden werden, dessen entsprechende Aussagefunktion bei jeder unendlichen Folge von Gegenständen erfüllt wird. Kontradiktorisch ist ein Satz, der kein Modell besitzt.[156] Die Definitionen der L-Begriffe im Rahmen der speziellen Semantik überschreiten jene der speziellen Syntax nicht, wie Tarski selbst in einer Fußnote seines Aufsatzes bemerkte.[157] Trotzdem war der Übergang zur Semantik im Rahmen der allgemeinen Metasprache ein „wesentlicher Fortschritt“ für die Definitionen der L-Begriffe, wie Carnap selbst über den Vorschlag Tarskis in seiner *Introduction to Semantics* urteilt[158].

Wir sind jetzt in der Lage, eine Frage zu beantworten, die schon viel diskutiert wurde: Wie stellt sich die Situation des TP nach Carnaps Übergang zur Semantik dar? Unterliegt das TP in diesem neuen Kontext Einschränkungen? Solche Fragen tauchen auf, da Tarskis kritische Bemerkungen, wie wir leicht einsehen können, ein Schlag gegen den Carnapschen ‚Konventionalismus der Sprachformen‘ zu sein scheinen. Carnap sah hierin jedoch keine Unverträglichkeit, jedenfalls hat er sich so auch viel später noch geäußert[159]. Das

---

[155] Tarski: *Logische Folgerung*, S. 9; Hervorhebung von Tarski.

[156] Vgl. Tarski: *Logische Folgerung*, S. 279.

[157] Siehe Tarski: *Logische Folgerung*, Fußnote 9, S. 279f.

[158] Siehe Carnap: *Introduction to Semantics*, S. 87.

[159] So z. B. in Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 18: „This neutral attitude toward the various philosophical forms of language, based in the principle that everyone is free to use the language most suited to his purpose, *has remained the same throughout my life*. It was formulated as “

TP (das zunächst rein syntaktisch formuliert war) wird jedoch aufgrund der Beziehungen zwischen syntaktischen Systemen (Kalkülen) und semantischen Systemen einige notwendige Modifikationen benötigen, insbesondere was die Anforderung an die Adäquatheit logischer Begriffe in einem schon gegebenen semantischen System betrifft. Wir können außerdem beobachten, wie kohärent Carnap hinsichtlich seines allgemeinen epistemologischen Standpunkts bleibt. Die Akzeptanz der Tarskischen Semantik ist eine Anerkennung des Scheiterns des alten Konventionalismus in seiner syntaktischen Form, jedoch nicht des Konventionalismus selbst.

Bemerkenswert in diesem Zusammenhang ist, dass die Befreiung der Betrachtung von der Abhängigkeit vom Reichtum der untersuchten Sprache oder Objektsprache einige bedeutende Implikationen mit sich bringt. Achten wir auf die Ausführungen Tarskis:

> „Zu den fundamentalen Begriffen der Semantik gehört der Begriff des *Erfülltseins einer Aussagefunktion* durch einzelne Gegenstände, bzw. durch eine Folge von Gegenständen. Es wäre überflüssig, den Inhalt dieses Begriffs hier näher zu klären; der inhaltliche Sinn solcher Redewendungen wie: Johann und Peter erfüllen die Bedingung ‚X und Y sind Brüder', das Trippel von 2, 3 und 5 erfüllt die Gleichung ‚x + y = z' kann doch keinen Zweifel hervorrufen."[160]

Es sind Gegenstände, die die Aussagefunktionen erfüllen, nicht Namen oder sprachliche Formen. Das ergibt sich aus dem Verfahren Tarskis, die Mengenlehre zu benutzen, um die Erfüllung in der Metasprache zu definieren. Die Definitionen der L-Begriffe hängen nicht mehr von der Objektsprache ab, sie sind vielmehr von der Metasprache abhängig. Es ist in diesem Sinne trotzdem noch möglich, Carnaps Haltung

---

principle of tolerance" in *Logical Syntax* and I still hold it today, e.g., with respect to the contemporary controversy about a nominalist or Platonic language." (Meine Hervorhebung.)

[160] Tarski: *Logische Folgerung*, S. 278.

beizubehalten. Wie das Beispiel des Zitats zeigt und wie auch Tarski selbst später behaupten wird, ist der semantisch-metasprachliche Ansatz neutral gegenüber ontologischen Kontroversen[161]. Die Objekte, die die Aussagefunktionen erfüllen, werden aus Sicht der Modelltheorie unter ihrem gemeinsamen theoretischen Aspekt betrachtet. Modelle befassen sich mit den mathematischen Eigenschaften von Gegenständen und sind in diesem Sinne ontologisch neutral: Es ist gleichgültig, ob es sich bei den behandelten Objekten um physische Gegenstände (wie Johann und Peter) oder um Zahlen handelt.

So wie zuvor unter anderen Umständen betrachtet Carnap die Notwendigkeit solcher Korrekturen als Anpassung seiner ursprünglichen Idee an neuere technische Gegebenheiten auf dem formalen Gebiet der Wissenschaft. Die Annahme der mengentheoretischen Begriffe der Tarskischen Semantik, die Gödel 1932 in Einklang mit Carnaps Standpunkt fordert, sowie die Annahme von Mengen, Relationen, usw. involvieren nicht etwa einen platonistischen Standpunkt. Alle diese Begriffe gelten lediglich innerhalb der bestimmten Sprache, in der sie angewandt werden. Auf diese Weise, so will es Carnap, müssen wir die verschiedenen Systeme der Semantik annehmen, die er in *Introduction to Semantics* in dem Versuch aufführt, adäquate Definitionen für L-Begriffe im Tarskischen Sinne aufzustellen. Dazu kommen wir im Folgenden.

[161] In Tarski: *The Semantical Conception of Truth and the Foundations of Semantics*.

3.2. Adäquatheit der logischen Begriffe

Trotz des sehr wichtigen Fortschrittes in Richtung der materialen Adäquatheit der L-Begriffe durch ihre formale Behandlung mit der allgemeinen semantischen Methode finden wir im letzten Teil von Tarskis *Logische Folgerung* die folgende Äußerung:

> „Ich bin gar nicht der Meinung, daß im Resultat der durchgeführten Überlegungen das Problem einer sachlich zutreffenden Definition des Folgerungsbegriffs ganz erledigt ist; im Gegenteil: ich sehe noch mehrere offene Fragen. Es soll hier nur auf eine dieser Fragen – vielleicht die wichtigste – hingewiesen werden."[162]

Im weiteren Verlauf des Textes erklärt Tarski, dass die Hauptlücke, jene der Errichtung eines formalen Kriteriums für die Unterscheidung zwischen logischen und nichtlogischen Konstanten, noch nicht geschlossen ist. In den folgenden Jahren versuchte Carnap durch verschiedene Konstruktionen semantischer Systeme adäquate Definitionen der L-Begriffe zu finden, jedoch bleiben diese nur Skizzen. Letztendlich stellte Tarski in den 60-er Jahren einen Vorschlag für die Lösung des Problems im Rahmen der Typentheorie auf. Wir werden diesen Prozess nun beschreiben und analysieren.

In den 40-er und 50-er Jahren versuchte Carnap im Rahmen verschiedener semantischer Systeme, adäquate L-Begriffe im Rahmen der speziellen Semantik zu schaffen. Diese Konstruktionen finden sich hauptsächlich in *Introduction to Semantics* und später in *Meaning and Necessity*. Der Hauptunterschied zwischen den in diesen Werken behandelten Objektsprachen und denjenigen der *Logischen Syntax* besteht darin, dass die deskriptiven Konstanten jetzt interpretiert werden und somit die Wahrheitsbedingungen (T-Konventionen) innerhalb der betreffenden Sprache gegeben werden können. Im Folgenden

[162] Tarski: *Logische Folgerung*, S. 280.

werden wir an Hand eines Beispiels einige Schwierigkeiten andeuten, die mit diesen Versuchen Carnaps in Zusammenhang stehen.

Nehmen wir eine Sprache von sehr einfacher Struktur, die wir S_1 nennen. Die Darstellung eines semantischen Systems für S_1 wird uns grundsätzlich durch dreierlei Art Regeln gegeben: Bezeichnungsregeln, Wahrheitsregeln und Deduktionsregeln. Sehen wir uns an, wie diese Regeln in Bezug auf S_1 funktionieren. Zuerst präsentieren wir eine Zeichentabelle. Die Struktur unseres Systems wird so aussehen:

1. Zeichentabelle:

Prädikatenkonstante ersten Grades: ‚W‘[163]; zweistelliger Relator: ‚W''‘; Individuelle Konstanten: ‚a‘, ‚b‘, ‚c‘; Logische Konstanten: ‚¬‘, ‚□‘; Klammern: ‚(‘, ‚)‘.

2. Formregeln. (s_i)[164] ist ein Satz von S_1 wenn und nur wenn er eine der folgenden Formen hat:

2.1. $pr_i(in_j)$[165];

2.2. $R_i(in_j, in_k)$;

2.3. (s_i) □ (s_j);

2.4. $\neg(s_i)$.

3. Wahrheitsregeln: (s) ist ein wahrer Satz von S_1:

3.1. (s) hat die Form $pr_i(in_j)$ und der Gegenstand bezeichnet durch n_j hat die Eigenschaft bezeichnet durch pr_i;

3.2 (s) hat die Form $R_i(in_j, in_k)$ und die Gegenstände bezeichnet durch in_j und in_k stehen miteinander in der Relation

---

[163] Die Buchstaben ‚W‘, ‚W''‘ einerseits und ‚a‘, ‚b‘ usw. andererseits, gehören zu den Kategorien von Prädikaten- (Relationen-) bzw. Namenkonstanten in der Objektsprache. Im Prinzip handelt es sich dabei um rein syntaktische Kategorien, denen später eine Interpretation hinzugefügt wird.

[164] (s_i) ist ein strukturell-deskriptiver Name eines beliebigen Satzes von S_n.

[165] Diese ‚pr_i‘ und andere ähnliche Zeichen gehören hier der Metasprache an. Es erweist sich als nicht nötig die Metasprache hier in einer Metametasprache zu beschreiben, da die Metasprache nicht formalisiert wird. Wir können uns vorstellen, dass die Metasprache aus Prädikaten, Variablen, logischen Konstanten und der deutschen Sprache zusammengesetzt ist.

R_i;

3.3. (s) hat die Form $(s_i) \vee (s_j)$ und (s_i) ist wahr oder (s_j) ist wahr;

3.4. (s) hat die Form $\neg(s_i)$ und (s_i) ist nicht wahr.

In (3) haben wir eine rekursive Wahrheitsdefinition für S_1. Um die Interpretation von S_1 zu vervollständigen, müssen wir noch die so genannten Bezeichnungsregeln angeben. Wir lassen diese Regeln zurzeit aber absichtlich beiseite, damit später gezeigt werden kann, inwiefern die Semantik Carnaps schon auf sehr einfache Sprachen angewandt einige Schwierigkeiten enthält. Im Folgenden betrachten wir, wie die ‚Maschine' der Carnapschen Semantik in Bezug auf ihren strukturellen Aspekt funktioniert. Das logische Mittel, mit dessen Hilfe Carnap die zentralen Begriffe der Semantik definiert, ist das der Zustandsbeschreibung (von hier an ZB)[166].

Grundsätzlich ist eine ZB eine maximale Konjunktion. Sie ist als Konjunktion K_i (relativ zu S_1) dadurch charakterisiert, dass für jeden atomaren Satz (s) aus S_1, entweder (s) oder $\neg$(s) zu K_i gehört. Wir können K_i bezüglich S_1 bilden, indem wir eine Wahrheitstafel konstruieren, deren Glieder alle atomaren Sätze von S_1 sind. Jede Reihe von Wahrheitswerten stellt einen so genannten logischen Zustand (von hier an LZ) dar, also einen möglichen Zustand der Welt. Jede dieser Reihen entspricht dadurch einer ZB, d.h., wenn ein Satz in dem LZ den Wert ‚T' hat, ist das Glied von K_i dieser Satz selbst; und wenn ein Satz im LZ den Wert ‚F' hat, dann ist das Glied die Verneinung desselben Satzes.

Für die oben für S_1 aufgestellten individuellen Konstanten und Prädikate haben wir 12 mögliche atomare

[166] Vgl. Carnap: *Meaning and Necessity*, S.9f. und Carnap: *Introduction to Semantics*, S.102f.

Sätze und infolgedessen $2^{12} = 4096$ mögliche LZ, wie wir in folgender Tabelle sehen können:

Wa	Wb	Wc	W'aa	W'ab	W'ba	W'ac	W'ca	W'bb	W'bc	W'cb	W'cc	
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	LZ_1
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	LZ_2
T	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	LZ_3

....

....

....

F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	LZ_{4096}

Wie gesagt, zu jedem dieser LZ in S_1 gibt es eine entsprechende ZB. Nehmen wir z. B. LZ_3: In diesem Fall wird K_3 so aussehen:

(Wa∧¬Wb∧Wc∧Wa,a∧W'a,b∧W'b,a∧W'a,c∧W'c,a∧W'b,b∧ W'b,c∧W'c,b∧W'c,c). Die Klasse aller ZB repräsentiert ‚alle möglichen Welten', die in S_1 ausdrückbar sind[167].

Nun sind wir in der Lage, die L-Begriffe für S_1 zu erklären. Unter den definierbaren Begriffen der Carnapschen Semantik befindet sich auch jener vom Spielraum eines Satzes. Generell verstehen wir unter dem Spielraum eines

[167] Vgl. Carnap: *Meaning and Necessity*, S. 9. Man muss darauf aufmerksam machen, dass Carnap in *Meaning and Necessity* ZB nicht als eine Konjunktion definiert, sondern als eine Klasse K von Sätzen, sodass für jeden atomaren Satz (s_i) (einer Sprache S_n), entweder (s_i) oder ¬(s_j) zur K_i gehört. Durch diese Variante bringt Carnap Sprachen unter, die unendliche Klassen von Sätzen enthalten (diese Klassen werden in einer finitistischen Metasprache definiert). Den Gebrauch von Konjunktionen vorzuführen ist aber ausreichend für unseren Zweck. Die Methode der Konjunktionen wurde in *Introduction to Semantics* benutzt. In *Foundations of Probability* benutzt Carnap später beide Methoden. Das erklärt ebenso, warum Carnap ZB und LZ unterscheidet: nicht in allen Sprachen wird jeder LZ durch eine ZB bezeichnet (Vgl. Carnap: *Introduction to Semantics*, S.107).

Satzes (s) die Klasse aller ZB, in denen (s) gültig ist. Der Begriff der Gültigkeit wird für S_1 in folgender Form rekursiv definiert: ein atomarer Satz (s_i) ist gültig in einer bestimmten $ZB_i =_{df.}$ (s_i) gehört zu ZB_i; $\neg$(s_i) ist in ZB_i gültig $=_{df.}$ (s_i) ist in ZB_i nicht gültig; (s_i) □ (s_j) ist in ZB_i gültig $=_{df.}$ *entweder* (s_i) ist gültig, oder (s_j) ist gültig, oder beide sind gültig. Im Sinne Carnaps sind logisch (analytisch, L-wahr) jene und nur jene Sätze, deren Spielraum allein durch die Regeln, das heißt ohne Tatsachenerkenntnis, determiniert werden können[168]. Zwei weitere wichtige Begriffe in diesem Zusammenhang sind jene vom universalen bzw. leeren Spielraum. Der Spielraum von (s) heißt universal, wenn (s) in allen ZB gültig ist und leer, wenn (s) in keiner ZB gültig ist. Auf dieser Basis können wir feststellen: ‚(s) ist ein L-wahrer Satz, wenn und nur wenn sein Spielraum universal ist' und ‚(s) ist ein L-falscher Satz, wenn und nur wenn sein Spielraum leer ist'. Die Verbindung zwischen dieser Charakterisierung der logischen Sätze mit den semantischen Regeln 1-3 oben wird ersichtlich durch den Wahrheitsbegriff hergestellt. Unter allen ZB gibt es dann naturgemäß eine, die den ‚wirklichen Zustand der Welt' oder ‚die wirkliche Welt' beschreibt. Nennen wir sie ‘wahre Zustandsbeschreibung' (WZB). Infolgedessen können wir sagen, dass der Wahrheitswert eines L-wahren Satzes (s_1) deswegen allein durch die semantischen Regeln determiniert wird, weil (s_l) in allen ZB gültig ist, also auch in WZB, sodass (s_1) wahr ist. Wenn (s_l) L-falsch ist, dann wird er auch in der WZB ungültig sein, was ihn falsch macht. Diese informelle Charakterisierung wird präziser in der folgenden Definition:

4. L-Regeln:

4.1. (s_i) ist L-wahr $=_{df.}$ die Wahrheit von (s_i) wird nur aufgrund

[168] In der semantischen Phase wird ‚analytisch' synonym zu ‚logisch', ‚analytischer Satz' synonym zu ‚logische Wahrheit' usf. verwendet. Siehe Carnap: *Introduction to Semantics*, S. 251-252.

von 3.3 und 3.4 festgesetzt;

4.2. (s_i) ist L-falsch $=_{df.}$ $\neg$ (s_i) ist L-wahr[169].

Ein konkretes Beispiel eines L-wahren Satzes ist die Repräsentation des ausgeschlossenen Dritten in S_1. Jeder Satz der Form (s_i) □ $\neg(s_i)$ ist L-wahr, denn (s_i) gilt in einigen bestimmten ZB und $\neg(s_i)$ gilt in allen anderen ZB, sodass (s_i) □ $\neg(s_i)$ in allen ZB gilt.

Eine Sprache dieser Art könnte, trotz ihres ziemlich elementaren Charakters, von Interesse sein, sofern kein weiteres Problem durch ihren Gebrauch entstehen würde. Wir hätten einen Fall von adäquaten Definitionen der L-Begriffe in der speziellen Semantik einer Sprache angeben können: Eine Definition der logischen Folgerung hieße in S_1 adäquat dann und nur dann, wenn jeder Fall, in dem ein Satz X Folgerung einer Klasse K von Sätzen in S_1 wäre, eine logische Folgerung aus der Definition in der Metasprache wäre. Dasselbe sollte für die weiteren L-Begriffe wie ‚analytisch', ‚kontradiktorisch' usw. gelten. Die Eigenschaften dieses Systems könnten daher studiert werden und auf diese Weise könnten die Bedingungen für die Ausdehnung der Definitionsmethode auf die allgemeine Semantik dargestellt werden. Leider stellt sich die Situation nicht so günstig dar, wie sehr einfache Gegenbeispiele von Kemeny und Bar-Hillel gezeigt haben[170]. Um unser Problem mit dem Begriff der ZB zu explizieren, führen wir nun zunächst die Bezeichnungsregeln für unsere S_1 ein:

5. Bezeichnungsregeln:

[169] Die anderen L-Begriffe, wie L-Implikation, L-Äquivalenz usw. können auch durch den Begriff der L-Wahrheit definiert werden. Vgl. Carnap: *Introduction to Semantics*, S.79f.

[170] Siehe Kemeny: *The Extensions of the Methods of Inductive Logic* und Bar-Hillel: *A Note on State-Descriptions*.

5.1. Die individuellen Konstanten ‚a', ‚b' und ‚c' bezeichnen irgendwelche physikalischen Gegenstände;
5.2. Die Prädikatkonstante ‚W' bezeichnet ‚warm' in S_1 und der Relator ‚W'' bezeichnet ‚wärmer' in S_1.

Die Nichtadäquatheit der Carnapschen Methode der ZB wird hier deutlich. Nehmen wir als Beispiel eine ZB_i, in der Wa und ¬Wb gültig sind. Natürlich wird W'(a,b) in diesem Fall eine logische Folgerung dieser Sätze sein. Jedoch werden dann viele ZB, wie K_3 oben konstruiert, nicht akzeptabel, da sie widersprüchlich sind[171]. Diese und andere verwandte Probleme innerhalb der Methode der ZB wurden von Bar-Hillel (1951) und Kemeny (1951) ausführlich diskutiert. Darauf antwortete Carnap:

> "As long as we deal with logical systems as such, aside from their application, we simply presuppose that the requirement [of independence of the elements of the state-descriptions] is fulfilled. Only when a particular interpretation of the nonlogical signs is specified it is necessary to examine whether the requirement is fulfilled."[172]

Viele Jahre später erkennt er aber an, die Unfruchtbarkeit der ZB-Methode eingesehen zu haben:

> "In my book on syntax […] and still in [Meaning][173], the values assigned by the semantical rules to variables and descriptive constants were linguistic entities, viz. expressions, classes of expressions, etc. Today I prefer to use as values extra-linguistic entities, e. g. numbers, classes of numbers, etc. In an analogous way I now represent possible states of the universe of discourse by models instead of state-descriptions, which are sentences or classes of sentences.

Wir können in diesem Fall Carnaps Entschluss genau datieren. Im Jahr 1955 schickte Carnap seinen Studenten ein Manuskript für ein Seminar zu[174]. In einem Brief aus dem

[171] Tatsächlich tauchen die Probleme schon in den isolierten atomaren Elementen auf, wie z. B. in Sätzen wie W'(a,a) u. a.
[172] Carnap: *The Problems of Relations in Inductive Logic*, S. 79.
[173] Carnap: *Meaning and Necessity*.
[174] Siehe Carnap [086-04-13].

Februar 1960 teilt er den Teilnehmern des Seminars eine Änderung im Manuskript mit. Im fraglichen Brief lesen wir:

> "Dear Friends: Some years ago I sent you a copy of Notes on Semantics (dittoed 1955 for my seminar). Herewith I am sending you revised pages $(25)_n$ – $(46)_n$ and Bibliography, which replace pp. 25-46 and Bibliography of the original version. (The new pages were written in the Fall semester, 1959; […]. The main changes are as follows. *The language L_3 (pp. 29_n ff.) is considerable simplified, especially its system of types. The class of sentences is not taken as a type (and no variables of this kind occur). The only types are 0, 1, 2, …; the values of variables are individuals and classes of various levels*."[175]

Wir können hier vollkommen klar sehen, wann Carnap die Methode der Darstellung von Typen als ‚Klassen von Sätzen' endlich aufgegeben hat und sich stattdessen für eine Konstruktion mit ‚Individuen (Koordinaten) und Klassen' entschieden hat. In der Tat scheint dies notwendig zu sein, um einen Schritt weiter in Richtung adäquater Definitionen von L-Begriffen zu machen, die für den CL brauchbar sind.

Die Verallgemeinerung der Adäquatheit der L-Semantik hängt jedoch von der Beschreibung der L-Begriffe für jede formale Sprache ab. In *Introduction to Semantics* schlägt Carnap vier Methoden zur Lösung des Problems der korrekten Definition der L-Begriffe in der allgemeinen Semantik vor: 1a und 1b, 2a und 2b. Die „2"-Methoden setzen die Unterteilung der Begriffe der allgemeinen Metasprache in „logische" und „deskriptive" voraus. So behält diese Konstruktion eine gewisse Willkürlichkeit in der Aufteilung der Begriffe bei, wie Tarski in der Pariser Diskussion betonte. Die „1"-Methoden setzen diese Unterteilung dagegen nicht voraus. Carnap war der Ansicht, dass insbesondere die Methode 1a vielversprechend ist, um das Problem der logischen Deduktion in der allgemeinen Semantik zu lösen. Sobald eine natürliche

[175] Carnap [086-04-13]. Das Datum der Änderung (‚1959') ist handschriftlich zu sehen auf der linken Seite von Carnap [086-17-02], also dem Ms für *Notes on Semantics*.

Definition der analytischen und der anderen L-Begriffe auf diese Weise erreicht worden ist, können wir im Allgemeinen eine analytische Interpretation für verschiedene Konstruktionen der Mathematik liefern, beispielsweise für die klassische Mathematik (gemäß der Methode höherer Stufe (Typentheorie)) oder der Methode erster Stufe (Zermelo-Fraenkel) oder sogar die Formulierungen der Mathematik durch konstruktive Methoden, wie im Fall von Intuitionismus und Formalismus. Dies würde durch ein System von modalen Begriffen geschehen, in dem die Metasprache M möglicherweise eine Bezeichnungsdefinition für Propositionen enthält. Diese Konstruktion hängt jedoch von der vollen Entwicklung einer intensionalen Logik ab. Lewis unternahm dies in Bezug auf das Aussagenkalkül[176]. Der nächste Schritt besteht darin, die Konstruktion einer intensionalen Sprache für die Prädikatenlogik zu entwickeln. Die ersten Entwicklungen in diese Richtung wurden von Carnap in *Meaning and Necessity*, *Modalities and Quantification* und *Notes on Semantics* vorgelegt.

Ein wichtiger Hinweis zur Erlangung adäquater L-Begriffe in der allgemeinen Semantik wurde von Tarski gegeben. Obwohl dieser Vorschlag auf eine in der Typentheorie formulierte Metasprache beschränkt ist, ist er für den CL von großem Interesse, denn in diesem Fall haben wir die Möglichkeit, eine Gesamtsprache im Carnapschen Sinne mit einem genauen Abgrenzungskriterium zwischen logischen und deskriptiven Termini zu formulieren.[177]

---

[176] Vgl. Carnap: *Introduction to Semantics*, S. 85.

[177] Eine Untersuchung der explizit an Carnap gerichteten Passagen der *Logischen Folgerung* zeigt, dass Tarski einigen Carnapschen Positionen, insbesondere denen des Toleranzprinzips, immer skeptisch gegenüberstand. Daher bezieht sich Tarski in diesem Abschnitt auf dieses Prinzip: „[…] ein Versuch, alle möglichen verworrenen manchmal widersprechenden Tendenzen, die sich an den Gebrauch dieses Begriffes knüpfen, in Einklang zu bringen, ist bestimmt undurchführbar, und man muss sich schon im voraus damit abfinden, daß jede präzise Definition des betrachteten Begriffs in höherem oder geringerem Grade willkürlich Züge

Tarskis Kriterium für die Unterscheidung zwischen logischen und deskriptiven Termini auf der Basis von ‚logischen Gegenständen' in typentheoretischen Hierarchien wurde von Tarski in einem Kolloquium in UCLA vorgestellt (die Carnapschen Notizen, in [090-15-02] enthalten, tragen das Datum vom 23.11.1965). Die Schrift zum Kolloquium wurde als *What Are Logical Notions?* 1986 veröffentlicht. Dieser Vorschlag geht auf einen Aufsatz zurück, den Tarski in Zusammenarbeit mit seinem Assistenten Adolf Lindenbaum schrieb[178]. Dessen endgültige Form ist jene, die 1935 in Karl Mengers *Mathematischem Kolloquium* von Tarski vorgetragen wurde.[179]

Unserer Meinung nach wurde der Vorschlag Tarskis in *Logical Notions* bisher nicht richtig verstanden, weil ihm nicht die ihm gebührende Aufmerksamkeit zu Teil geworden ist, die es mit Blick auf die logizistischen Unternehmungen im zwanzigsten Jahrhundert verdient hätte. Dazu sind auch Tarskis *Logische Folgerung* sowie Tarskis *Wahrheitsbegriff* und andere Aufsätze in diesem Zusammenhang heranzuziehen. Wir haben schon in einer früheren Arbeit

---

aufweisen wird." (Tarski: *Logische Folgerung*, S. 271). Es gibt auch eine weitere Anmerkung in *Logische Folgerung*, die zeigt, was Tarski als den „eigentlichen Begriff der logischen Folgerung" bezeichnet hat (nämlich jenen der klassischen Mathematik): „Der erste Versuch einer präzisen Definition des *eigentlichen Begriffes* der logischen Folgerung ist jener von Carnap". Fußnote: „Vergl. [*Logische Syntax*], S. 88f. sowie desselben Verfassers *Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik*, […], insbesondere S. 181. […]. In [*Logische Syntax*] findet sich noch eine andere Definition der Folgerung, die einer formalisierten Sprache von einem elementaren Charakter angepasst ist. *Diese Definition wird hier nicht berücksichtigt, da sie sich auf die Sprachen von komplizierterer logischer Struktur nicht übertragen lässt*." (Tarski: *Logische Folgerung*, S. 275). Hier sehen wir auch Tarskis Einstellung zum Intuitionismus. Tarski blieb immer der klassischen Logik verbunden, mit nominalistischen Tendenzen. In diesem Sinne leistete er mehrere kritische Beiträge für den CL. Die Ziele von Carnap waren weiter gefasst (siehe unten und Kapitel 4 sowie unseren Abschluss).

[178] Tarski-Lindenbaum: *Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel Deduktiver Theorien*.

[179] Beachtenswert daran ist, dass eines der bedeutendsten Theoreme, die in diesem Aufsatz vorgestellt werden, lange Zeit (nämlich schon 1927) vorher aufgestellt wurde; im nächsten Abschnitt gehen wir darauf näher ein.

einige Resultate Tarskis in diesen Logizismus eingebettet.[180] Im Besitz all dieser Informationen, die uns die Untersuchung von Carnaps Werk bisher geliefert hat, können wir nun den Boden für unsere weiteren Überlegungen bereiten.

Die erste Eigentümlichkeit, die wir aus den *Logical Notions* übernehmen sollten, ist der Begriff des *Modells*, der im Hintergrund des Aufsatzes steht. Es ist derselbe Begriff, den wir in Tarskis *Wahrheitsbegriff* und Tarskis *Logische Folgerung* ausfindig gemacht haben. Modelle sind danach nicht Strukturen im Sinne der modernen „model theory", wie zum Beispiel die Arithmetik als das Modell einer Struktur gesehen wird, die ein anfängliches Element besitzt, einen Funktor (in ihrem speziellen Fall ‚n' für ‚Nachfolger') und in der die Induktion verwendbar ist. Das Modell ist im erwähnten Aufsatz dagegen als ‚unendliche Folge von Gegenständen' zu verstehen. Vergeblich sucht man im *Wahrheitsbegriff* eine Definition von Struktur: Sie ist dort überhaupt nicht zu finden. Auf dieser Tatsache basiert der Schluss einiger Kommentatoren[181], dass die Tarskische Auffassung von Modell in den Schriften der 30-er Jahre tatsächlich eine andere als die heutige ist. Außerdem sind Begriffe wie ‚logische Folgerung' und andere L-Begriffe für einen festen Bereich definiert, nicht etwa für einen variablen Bereich von Individuen[182]. Dies ist inzwischen schon einigermaßen Konsens geworden. Trotzdem meinen diese Kommentatoren, Tarski wäre erst zu Beginn der 40-er Jahre zur modernen Modellvorstellung übergegangen. Wir halten

[180] Siehe Stival: *Alfred Tarski: Consequência Lógica, Noções Lógicas, Formas Lógicas*.

[181] Siehe Sinaceur: *Semantic Shift, Heuristic Shift in Metamathematics*.

[182] In der Tat reicht ein ganz einfaches Argument, um die Annahme eines festen Bereichs in Tarskis *Logische Folgerung* zu bestätigen. In diesem Kontext sind die Zahlen logische Konstanten; infolgedessen sind die □-Inferenzen, wie Tarski behauptete (S. 2), gültig. Schon in einer Modelltheorie mit variablen Bereichen sind solche Inferenzen nicht mehr logisch gültig; es genügt, den Bereich der rationalen Zahlen in Betracht zu ziehen.

diese Interpretation für falsch. Erstens lassen sich in dieser Hinsicht Aufsätze aus den 20-er Jahren nennen, in denen der Begriff des Modells wie der heutige aufgefasst ist oder zumindest in ähnlicher Weise. Wir sind der Meinung, dass Tarski nie mit einer einzigen Auffassung von Modell gearbeitet hat. Das Verständnis des Modells als Struktur eignet sich beispielsweise viel besser, um bestimmte Resultate zu präsentieren. Andererseits finden wir bei ihm eine einheitliche Handhabung in der Diskussion des logizistischen Projekts, wenn es um die Möglichkeit einer ‚Vereinheitlichung der Wissenschaft' im Sinne Carnaps geht. In diesem Kontext finden wir bei Tarski ebenso wie bei Carnap eine Neigung hin zum typentheoretischen Aufbau; dabei finden wir sogar die Auffassung, dass dieser für den genannten Zweck geeigneter ist. Die Affinität zwischen den beiden Autoren hat hier jedoch eine Grenze. Carnap verfolgt seine eigenen Ziele, wie wir mit unserer Analyse in dieser Arbeit zeigen wollen. Dies gegeben, wollen wir einige Aspekte von Tarskis Vorschlag zur Abgrenzung zwischen logischen und nicht logischen Begriffen betrachten.

Ein wichtiger Punkt, der jetzt und auch für unsere spätere Diskussion vor Augen geführt werden soll, betrifft Tarskis relativistische Auffassung gegenüber seinem eigenen Vorschlag für ein Kriterium der Abgrenzung der logischen Gegenstände: "I think the term [logical notion] is used in several different senses and that my suggestion gives an account of one of them."[183] Die zentrale Idee des Vorschlags von Tarski, die logischen Gegenstände abzugrenzen, ist von Kleins Erlanger Programm inspiriert.[184] Im 19. Jahrhundert hat der Mathematiker Felix Klein eine Analyse der Grundbegriffe verschiedener geometrischer Theorien durchgeführt und eine Methode gefunden, diese Theorien

[183] Tarski: *Logical Notions*, S. 145.
[184] Zu Kleins Vorschlag vgl. Tarski: *Logical Notions*, S. 146ff.

voneinander zu unterscheiden, so beispielsweise die euklidische oder metrische Geometrie, die ‚affine Geometrie' und die Topologie.

Diese Unterscheidung benötigt, wie Klein bezogen auf den Begriff der ‚Transformation' ausführt, eine besondere Version des Funktionsbegriffs. Der Terminus Funktion wird als eine zweistellige Beziehung ‚r' definiert, sodass r die folgende Eigenschaft besitzt: Für jeden Gegenstand x gibt es mindestens einen Gegenstand y zu dem x in der Beziehung r steht, also: y = r(x). In dieser Gleichung sind die möglichen Werte von x die Menge der Vorglieder der Funktion oder ihr Vorbereich, diejenigen von y die Nachglieder derselben, oder ihr Nachbereich. Nun ist: (Vorbereich □ Nachbereich) = Feld der Funktion. Nehmen wir z. B. eine Funktion, deren Vor- und Nachbereich aus Punkten besteht. Spezifisch in der Geometrie beschäftigen uns Funktionen, deren Feld aus dem gesamten geometrischen Raum besteht. Solche Arten von Funktionen werden Transformationen genannt. Eine Transformation ist eineindeutig dann und nur dann, wenn irgendeinem bestimmten Vorglied genau ein Nachglied entspricht und umgekehrt. Wenn in diesem Verhältnis die Werte von x bzw. y Punkte sind, dann haben wir eine eineindeutige Transformation des Raumes auf sich selbst. Auf diese Weise legt Klein die Gegenstände der euklidischen Geometrie fest: die starren Körper.

Ein starrer Körper wird dadurch definiert, dass er eine Art Körper ist, dessen Form sich durch die Bewegung nicht ändert. ‚Bewegung' wird hier im mathematischen Sinne verstanden: Zu jedem gesetzten Punkt einer Position zu Anfang der Bewegung gibt es eine entsprechende Position am Bewegungsende. Das bedeutet: Der Abstand während einer Transformation (zwischen den betreffenden Punkten) ändert sich nicht, oder formal ausgedrückt: Sind f(x) und f(y) Punkte am Ende der Bewegung einer Transformation, dann wird der

Abstand zwischen ihnen derselbe sein wie jener der Punkte x und y zueinander am Bewegungsanfang. Dieses Phänomen wird auch ‚isometrische Transformation' genannt. Es ist wichtig zu beachten, dass Tarski im Kontext seines Aufsatzes an Begriffe (‚notions') denkt wie an Ausdrücke für die Gegenstände im Rahmen irgendeiner Fassung der Typentheorie[185].

Im Besitz dieser Voraussetzungen können wir den zentralen Begriff für die Definition der logischen Gegenstände fassen, also den Begriff der Invarianz, der sich auf Klassen bezieht. Sei ‚K' eine Klasse irgendwelcher typentheoretischen Gegenstände. K ist invariant unter einer Transformation $f =_{df.}$ $x \in K$ dann und nur dann, wenn $f(x) \in K$. Sowohl der Vorbereich als auch der Nachbereich der Funktion besteht aus derselben Menge.

Auf diese Weise lässt sich das Verfahren umkehren: Anstatt die Transformationen zu beschränken, können wir sie ausweiten. In dieser Hinsicht definiert Klein das Feld der affinen Geometrie, in der sich der Abstand, nicht aber die Linearität ändert. Die Linearität selbst bleibt ausgeklammert, und nur die sogenannte Kontinuumstransformation besteht weiterhin: So betreten wir das Feld der Topologie.

Tarski macht folgenden Gebrauch von Kleins Ideen, um logische Gegenstände zu charakterisieren: Ein Gegenstand wird logisch genannt dann und nur dann, wenn er invariant unter allen Transformationen der ‚Welt' (d.i. der Bereich aller Individuen) gegenüber sich selbst ist. Der Reichtum des Vorschlages wird durch seine Konsequenzen aufgewiesen: Alle Begriffe, die in der Sprache der *Principia Mathematica* als L-Begriffe betrachtet werden, sind unter diesem Kriterium logisch (ein Ergebnis von Tarski und Lindenbaum, schon 30 Jahre zuvor). Weiterführend prüft Tarski die Hierarchie der

[185] Vgl. Tarski: *Logical Notions*, S. 147.

Typen: Gibt es unter den Individuen irgendeinen L-Gegenstand? Die Frage ist mit ‚nein' zu beantworten, weil wir immer eine Transformation finden können, in der ein Individuum auf andere Individuen abgebildet wird. Diese Operation, die beliebig oft wiederholt werden kann, zeigt uns bereits, dass wir im Rahmen eines festen Bereichs stehen, da wir in der gewöhnlichen Modelltheorie für irgendeine Kardinalzahl κ ein Modell mit genau κ Individuen haben. Das heißt, wir können eine Struktur denken, die nur ein Individuum besitzt. In diesem Fall wäre es denkbar, dass es auf der Ebene der Individuen logische Gegenstände gibt. Dies zeigt uns, dass dieser Aufsatz eine Verbindung zu Tarskis *Logische Folgerung* aufweist und die ganze Diskussion mit Carnap über den Logizismus tangiert. Auch die Kardinalzahlen werden – nicht zufällig, das ist klar – als logische Gegenstände aufgefasst.

Anschließend gelangen wir zur Gretchenfrage: Sind die logischen Gegenstände mathematische Gegenstände? Angenommen, die ganze Mathematik kann auf der Mengenlehre aufgebaut werden, so lassen sich alle definierbaren Begriffe auf die Mengenlehre reduzieren, genauer auf den Begriff von ‚$\in$' (Begriff des Elementseins) – und so kann die Frage auf die folgende zurückgeführt werden: Ist ‚$\in$' ein L-Begriff?

Die Antwort auf diese Frage spiegelt erneut die Tarskische Position in der Debatte mit Carnap wider: Skepsis gegenüber der Möglichkeit, die Frage nach dem Charakter des Begriffs ‚$\in$' und nach den davon abhängigen Begriffen einzeln zu beantworten, sowie einen allgemeinen Sinn des Begriffs der ‚analytischen Interpretation der Mathematik' anzugeben. Hier sind Tarskis Worte:

"So the answer is: 'As you wish!' You all know that as a result of the antinomies, basically Russell's Antinomy, which appeared in set theory at the turn of the century, it was necessary to submit the foundations of set theory to a thorough investigation. One result of this investigation, which is by no means complete at this moment, is that two methods have been developed of constructing what can be saved from set theory after the crushing blow it had suffered. One method is essentially the method of *Principia Mathematica,* the method of Whitehead and Russell – the method of types. The second method is the method of people such as Zermelo, von Neumann, and Bernays – the first order method."[186]

Wir können auf Grund dieser Passage erkennen, dass Tarski die Typentheorie und die ‚Methode erster Stufe' von Zermelo u.a. als zwei verschiedene Richtungen innerhalb der Mengenlehre betrachtet. In diesem Kontext ist der Abschluss seines Aufsatzes sehr interessant:

"This conclusion is interesting, it seems to me, because the two possible answers correspond to two different types of mind. A monistic conception of logic, set theory, and mathematics, where the whole of mathematics would be a part of logic, appeals, I think, to a fundamental tendency of modern philosophers. Mathematicians, on the other hand, would be disappointed to hear that mathematics, which they consider the highest disciplines in the world, is a part of something so trivial as logic; and they therefore prefer a development of set theory in which set-theoretical notions are not logical notions. The suggestion which I have made does not, *by itself*, imply any answer to the question whether mathematical notions are logical."[187]

Bevor wir diesen Abschnitt schließen, ist es nicht ohne Wert, diese Behauptungen Tarskis denjenigen Äußerungen gegenüberzustellen, die Carnap kurz vor seinem Tod Bohnert gegenüber getätigt hat:

"In my final 1968 conversations with Carnap, I wanted to know not only whether he still held in general to a logicist viewpoint, *which he quickly assured me he did* […].
He still thought set theory could be given an analytic interpretation. But as a basis for logic and mathematics as applied to the empirical sciences *he remained attracted by something like type theory's classification of many expressions as non-sentences rather than as odd sentences which were ruled false via an accumulating mass of set-theoretical conventions*. Furthermore, set theory no longer seemed adequate as a complete logico-mathematical setting for *a*

[186] Tarski: *Logical Notions*, S. 152.
[187] Tarski: *Logical Notions*, S. 153; meine Hervorhebung.

general language of science in view of the increasing importance he gave to the value of non-extensional languages in science."[188]

Wie aus dem Vergleich dieser beiden Aussagen hervorgeht, sucht Carnap weiter nach einer Definition, die die logischen Begriffe unter einem Aspekt der allgemeinen Metatheorie vereinheitlichen kann. Diese Position wurde von Tarski nicht geteilt. Wie wir gesehen haben, war Carnap zugegen als Tarski seinen Vortrag *Logical Notions* hielt. Leider können wir aber nicht wissen, wie er auf den neuen Schritt Tarskis innerhalb dieses langen Dialogs reagiert hätte. In Carnap [089-06-03] finden wir eine Diskussion zwischen beiden Autoren. Dort zeigen sich schon die verschiedenen Richtungen, die sie zu diesem Thema vertreten haben, seit Tarski eine negative Haltung in Hinsicht auf den Gebrauch von intensionalen und modalen Begriffen als Werkzeuge für einen Beweis der Adäquatheit der L-Begriffe einnahm. Carnap dagegen zeigte sich der Verwendung dieser Art Begriffe für den Aufbau einer Gesamtsprache der Wissenschaft immer mehr zugeneigt. Es gilt all diese Ideen zu rekonstruieren, um sich für den besten Weg entscheiden zu können. Wichtig in diesem Kontext ist es jedoch, dass trotz der Änderungen und Unterschiede in der Auffassung beider Autoren in Bezug auf den besten Weg zur Definition der L-Begriffe, die wesentliche Voraussetzung dieselbe bleibt: Die Semantik gilt als das neue Werkzeug zur technischen Implementierung des Logizismus. Für Carnap insbesondere hat diese Phase gezeigt, dass der zentrale Begriff des Analytischen oder der L-Wahrheit im Rahmen der Semantik definiert werden soll. Im nächsten Abschnitt werden wir eine historische Retrospektive anhand von Dokumenten vorlegen, mit dem Ziel, ein Bild von den sachlich wichtigen historischen Fakten zu geben, welche die Interaktion zwischen Carnap und Tarski in der Diskussion

---

[188] Bohnert: *Carnap's Logicism*, S. 210.

über den Logizismus geprägt haben. Auch die Relevanz der Ideen Tarskis für die Form des CL ab 1935 kann dadurch belegt werden. Eine korrekte historische Rekonstruktion in diesem Sinne ist unserer Meinung nach von grundlegender Bedeutung, um die Möglichkeiten des Carnapschen Programms für die Gegenwart bewerten zu können.

3.3. Die Geschichte einer Auseinandersetzung

Das Ziel dieses Abschnittes ist es unter Anderem, einen chronologischen Überblick über die Geschichte des Erklärungsprozesses der L-Begriffe (hauptsächlich der logischen Folgerung) zu liefern. Beiläufig wollen wir auch Tarskis Rolle in der Entwicklung des CL weiter aufklären. Es ist auch sehr wichtig festzuhalten, dass es in dieser Diskussion keinesfalls nur um geschichtliche Aspekte geht, auch wenn eine Rekonstruktion der Geschichte der Ideen aus ihren Quellen einen wesentlichen Teil unserer Arbeit ausmacht.

Wie bereits erwähnt, hängt der Hauptaspekt von Tarskis Kritik an den Definitionen von L-Begriffen in der allgemeinen Syntax mit dem zentralen Problem dieser Definitionen zusammen, nämlich dass sie von den Besonderheiten des Kalküls, der untersuchten Sprache, abhängen. Diese Bemerkungen decken sich mit dem Tagebucheintrag vom 15.09.1935, in dem Carnap Tarskis Kritik erwähnt. Kommen wir zum relevanten Abschnitt: „[…] Vormittags mit Tarski; interessantes Gespräch über Befreiung gewisser Syntaxbegriffe von der Bezogenheit auf die definierbaren Ausdrücke, statt dessen Bezug auf alle Ausdrücke (siehe ‚Aufzeichnungen‘)“[189].

Tarskis Rolle bei der Änderung der syntaktischen Form des Konventionalismus wurde von Carnap sehr deutlich aufgezeichnet. Wir finden dies in *Introduction to Semantics*:

“**D16-E1.** A sentential function A_j is a *logical sentential function* corresponding to a sentence $s_i =_{df.}$ A_j is constructed out of s_i by replacing all descriptive signs occurring in s_i by corresponding (logical) variables (Example. s_i: ‘R(a,b) □ R(b,c)’; A_j: ‘H(x,y) □ H(y,z)’.)
D16-E2. s_i is L-true in S $=_{df.}$ a (and hence any) *logical sentential function* corresponding to s_i is universal in S […] (in other words, everything fulfills this sentential function).

[189] Carnap [025-75-13]. Welches diese ‚Aufzeichnungen‘ sein könnten, war uns nicht möglich zu entdecken.

The definitions of the other L-terms would be analogous. Let s_j be a logical sentence (i. e. a sentence not containing descriptive signs). It follows from the definition that s_j is L-true if and only if it is true, because a sentential function of degree zero is universal if and only if it is fulfilled by the null sequence.[190]
The method of basing the definition of the L-concepts on the distinction between logical and descriptive signs with the help of the concept of the logical sentential function corresponding to a sentence was first applied in [Syntax][191] § 34d, in the definition of 'analytic in language II', rule DA $_1$CB. This definition represents a formalization of the concept of L-truth in the special syntax of a particular language system. *Tarski [Folgerung][192] has utilized this method for definitions of L-concepts in general semantics*; the definitions $\mathbf{E_I}$ and 2 above show the essential feature of his procedure. *This change of the definition from a syntactical to a semantical one is an essential improvement. In semantics we can say "for every object…", but in syntax only "for every descriptive sign";* the latter formulation is often not adequate because not all values of the variables in S are necessarily designated by signs in S. *Tarski expresses, however, some doubt whether the distinction between logical and descriptive signs and hence also between L- and F-truth is objective or more or less arbitrary*."[193]

Wir sehen hier Carnaps eigene Behauptung, dass Tarski seine Definitionsmethode im Rahmen der allgemeinen Semantik (also durch den Gebrauch von Bewertungen statt von Ersetzungen) verwendet hat, indem er Bewertungen statt Ersetzungen in der allgemeinen Metasprache benutzte. Auf diesen Vorschlag Carnaps bezieht sich Tarski vermutlich, wenn er in *Logische Folgerung* erklärt:

„Ich möchte hier eine allgemeine Methode skizzieren, die es ermöglicht, wie mir scheint, für eine umfassende Klasse von formalisierten Sprachen eine zutreffende Definition des Folgerungsbegriffs zu konstruieren. Dabei will ich betonen, daß die hier zu entwickelnde Auffassung des Folgerungsbegriffs keinen allzu hohen Anspruch auf völlige Originalität erhebt: *die ihr anhaftenden Tendenzen werden sicher als etwas wohlbekanntes oder sogar als etwas eigenes von manchem Logiker empfunden, der den Begriff der logischen Folgerung einer genaueren Untersuchung unterworfen und ihn näher zu charakterisieren versucht hat. Es scheint mir jedoch, daß erst die in letzten Jahren bei der Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik entwickelten*

[190] Achten wir auf den Begriff von „Modell" der hier im Spiel ist.
[191] Gemeint ist die englische Version von Carnap: *Logische Syntax*.
[192] Tarski: *Logische Folgerung*.
[193] Carnap: *Introduction to Semantics*, S. 86f.

Methoden und die mit ihrer Hilfe präzisierten Begriffe es gestatten, diese Tendenzen in eine exakte Form zu fassen.“[194]

Durch diese Passagen gewinnen wir ein genügend scharfes Bild der Auseinandersetzung zwischen Tarski und Carnap hinsichtlich der Klärung des Folgerungsbegriffs und anderer L-Begriffe. Auch Tarskis zentrale Rolle für den Übergang Carnaps zur Semantik ist unstrittig. Man kann erkennen, inwieweit Tarski die *Logische Syntax* las und für die englische Version wichtige Beiträge lieferte, wenn man in der englischen Version den Hinweisen Carnaps im Vorwort, im Literaturverzeichnis und im Register nachgeht[195].

Der Ausbruch des Zweiten Weltkriegs hat die intensive Tätigkeit im Rahmen des Wiener Kreises unterbrochen. Gleiches gilt jedoch nicht für Tarskis Zusammenarbeit und Kritik an Carnaps Lösungen und den Problemen bei der Implementierung des CL. Wir können dies anhand eines Dialogs in Harvard im Jahr 1939 sehen. Darin bespricht Carnap mit Tarski die Probleme bei der Definition der L-Begriffe in der allgemeinen Metasprache zur Konstruktion einer Gesamtsprache:

„Tarski, Gespräch (beim Kongress Harvard) 06.09.1939.

[…]

2. L-wahr. Er [Tarski]: „Meine Definition ist unklar wenn ich sage, es folgt aus den semantischen Regeln…“; ist in Folge gemeint im Sinne von faktischer Ableitbarkeit? Ich: Nein, einfach logische Folge, die wir in der Metasprache als bekannt voraussetzen. Er: das scheint sehr fragwürdig. Ich müsse entweder von einer Zweiteilung der Zeichen der Objektsprache in logische und deskriptive ausgehen, die aber (*wie er schon im Paris gemeint hat*) immer willkürlich sein würde;~~ andernfalls würde~~, oder im anderen Falle, würde ich mit unentscheidbaren und fraglichen Sätzen, wie z. B. Auswahlprinzip, in Schwierigkeit kommen. Ich: Ich sehe die

[194] Tarski: *Logische Folgerung*, S. 276.

[195] Die englische Fassung enthält auf den Seiten 32, 70, 80f., 172, 200 und 204 wichtige Zusätze, für die Carnap sämtlich auf Tarski verweist. So etwa: „(Note 1935) The above definition of ‘consequence’ is a correction of the German original, the need for which was pointed out to me by Dr. Tarski.“ (*Logical Syntax*, S. 172).

Schwierigkeit jetzt hauptsächlich darin, dass die jetzige Definition in der Metametasprache ist; sie kann aber in der Metasprache formuliert werden, wenn wir dort eine intensionale Sprache mit strikter Implikation usw. haben[196]. Er: Ein solches System ist nicht bekannt, denn Lewis hat sich auf Satzkalküle beschränkt. Ich: Ich glaube, ich könnte es mindestens für den [unerleserlich] Funktionskalkül aufbauen. Er: Er habe sich mit dieser Aufgabe nicht beschäftigt, würde es nicht wissen, wie es zu machen sei. Er erwähnte seine frühere Definition für ~~L-Wahr~~ ‚analytisch': Erst Zweiteilung in deskriptiv und logisch; dann für logische Sätze: analytisch, wenn wahr; für deskriptive, wenn durch die Übersetzung aus logischen wahre entstanden. Ich: aber ich möchte auch ‚a = b' L-wahr nennen, wenn ‚a' und ‚b' (primitive Zeichen) auf Grund der semantischen Regeln dasselbe bezeichnen. (Er nimmt hierzu nicht Stellung)."[197]

Mittels dieses Dialogs können wir die Diskussionen 1935 auf dem Pariser Kongress bestätigen. Carnap hatte schon damals einige Ideen in Richtung einer Konstruktion von L-Definitionen in der allgemeinen Metasprache geäußert (mit dem Gebrauch intensionaler Sprache und Modallogik), die später nach und nach zur Verwirklichung kamen.

Ein weiteres Stück, das wir zu dieser Diskussion bisher finden konnten, besteht in einem langen Gespräch von 1940, das hauptsächlich zwischen Carnap, Quine und Tarski stattgefunden hat (Russell und einige andere sind zwischenzeitlich ebenfalls dabei). Wir werden diese Konversation hier nicht vollständig analysieren, sondern direkt zu den Passagen über das uns interessierende Problem kommen – der Suche nach einem allgemeinen Kriterium für die Unterscheidung zwischen logischen und nichtlogischen Konstanten, bzw. zwischen logischen und nichtlogischen Gegenständen, wenn wir die Terminologie Tarskis übernehmen[198].

[196] In der Tat hat Carnap eine solche Konstruktion in § 16 von *Introduction to Semantics* skizziert.

[197] Siehe Carnap [089-06-03].

[198] Wenn wir hier von ‚Gegenständen' sprechen, meinen wir die typentheoretisch bezeichneten Individuen, Eigenschaften, Relationen, die in dieser Sprache in Anspruch genommen werden.

Am 10.12.1940 hielt Quine in dieser Diskussionsgruppe einen Vortrag über „allgemeine Semantik“ und verwandte Themen[199]. Dieser Vortrag wird ausführlich besprochen und mündet in eine Diskussion über eine „Universelle Sprache der Wissenschaft“. Am 20.12.1940 sehen wir die Diskussion fortgeführt in den folgenden Gesprächen[200], an denen auch der polnische Mathematiker Wundheiler teilnimmt:

„Ich: Wenn Spezifikation nicht logisch, so habe ich auch kein Gefühl mehr dagegen, auch die genannte transfinite Deduktion aus der Logik ausgeschlossen zu sehen.

Wundheiler: Nach Tarski-Lindenbaum (Über die Beschränkung der Ausdrucksmittel…) sind die logisch-wahren Sätze in einem Bereich von Individuen diejenigen, die bei jeder eineindeutigen Transformation erhalten bleiben.

Quine: Ja, und die mathematisch-wahren sind die, bei denen ‚□‘ erhalten bleibt.

Ich: Natürlich; das sagt nicht mehr, als dass die Mathematik (*in gewisser Formulierung*) durch ‚□‘ charakterisiert ist.

Wundheiler: Können wir vielleicht den Unterschied zwischen Logik, Mathematik, und Physik durch die Transformationsgruppen charakterisieren, so wie wir projektive, affine und metrische Geometrie charakterisieren durch Transformationsgruppen?

Tarski: Es ist zweifelhaft ob *in diesen Zusammenhang* der Gruppenbegriff viel hilft.“[201]

Der erste Schritt zum Verständnis dieses Gespräches hängt – wie schon gesagt – vom Verständnis seines Kontexts ab. Einige Tage vorher finden wir im Rahmen der Diskussionen über „universelle Sprache der Wissenschaft“, „allgemeine Semantik“ usf. folgende Passage vor [090-16-03]: „Dies ist die Unterscheidung zwischen Logik und Mathematik: Mathematik = Logik + ‚□‘.“ Dies ist der ‚Zusammenhang‘, auf den Tarski sich bezieht, wenn er sagt: „Es ist zweifelhaft

[199] Siehe Carnap [102-63-04]. Die Diskussion über „allgemeine Semantik“ findet schon in der vorigen Besprechung [102-63-03] statt.
[200] Siehe Carnap [102-63-06]: „Bemerkungen zu Quines Vortrag in Logikgruppe“; auch Carnap [102-63-12]: „Weitere Diskussion über Quines Bemerkungen“.
[201] Carnap [102-63-12]; Hervorhebungen in Tarskis Eintrag meine.

ob der Gruppenbegriff hilft.“ Der Grund hierfür ist ganz klar und wurde später in *Logical Notions* ausführlich geklärt: Es gibt verschiedene mögliche Konstruktionen der Mathematik, die für die Konstruktion der ‚universellen Sprache‘ (Gesamtsprache) funktionieren können. Diese möglichen Konstruktionen haben als Ausgangspunkt verschiedene Auffassungen der grundlegenden Konstanten, auf denen die Mathematik aufgebaut werden kann, also vor allem von ‚∈‘. Bei klassischen Fassungen der Typentheorie ist ‚∈‘ ein logisches Prädikat, da ‚∈‘ homogen ist: Individuen ∈ Klassen von Individuen; Klassen von Individuen ∈ Klassen von Klassen von Individuen usw.; andererseits ist ‚∈‘ in Zermelos Methode keine logische Konstante, sondern nur ein (zweistelliges) Prädikat. *Deswegen* betrachtet Tarski die Transformationsgruppe in diesem Zusammenhang als nicht hilfreich. Sie kann uns nicht helfen, die verschiedenen Auffassungen der ‚Gesamtsprache‘ in Einklang zu bringen.

Es wäre nicht nur ungerecht, sondern sogar unsinnig zu insinuieren, dass Tarski Wunderheilers ‚Vorschlag‘ missachtet hätte, um ihn später auszubeuten[202]. Erinnern wir uns, wenn dies noch nötig ist, daran, dass Wundheiler mit dem Zitieren eines sehr alten Ergebnisses von Tarski und Lindenbaum beginnt; und zwar *Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel Deduktiver Theorien*, welche eine Zusammenfassung noch älterer Ergebnisse ist, die am 12. Juni 1935 in Mengers Kolloquium vorgetragen wurden. Daraufhin zu behaupten, dass Tarski „vertraut mit solchen Resultaten aus Konversationen mit Carnap aus dem Jahre 1930“[203] sei, lässt sich nicht halten, denn bei Tarski-Lindenbaum finden wir die folgende Fußnote:

[202] Eine solche Interpretation finden wir in Awodey: *Explicating Analytic*, S. 141f.
[203] Auch bei Awodey: *Explicating Analytic*, S. 141. Er bezieht sich hier auf Carnap: *Allgemeine Axiomatik*, die 1930 geschrieben wurde.

„Über den Satz 9 hat Tarski auf dem II. Polnischen Philosophenkongress in Warschau 1927 in einem Vortrag über die Begriffe der Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit berichtet; auf Grund einer mündlichen Mitteilung erwähnt bei Fränkel: Einl. i. die Mengenlehre, 3. Auflage, 1928.“[204]

Das Theorem oder Satz 9 sagt Folgendes:

„Jedes kategorische Axiomensystem ist nicht-gabelbar.“[205]

Es ist wichtig hier auf Carnaps eigenen Wortlaut zu achten. In einem Tagebucheintrag von Carnap zur Zeit des Wiener Kongresses 1930 finden wir tatsächlich das Folgende:

„¾ 7 kommt Tarski zu mir (anstatt ½ 5; er hatte den Plan verloren und fuhr 2 Stunden in die Irre). *Über meine Axiomatik*; *sie scheint zu stimmen, aber verschiedene Begriffe treffen nicht das, was man meint; das müßte anstatt mathematisch metamathematisch definiert werden*.“[206]

Wie wir sehen gibt Carnap selbst zu, von Tarski über diese Themen belehrt worden zu sein. Kommen wir jetzt auf Tarski-Lindenbaum 1935 zurück. Nachdem Satz 9 präsentiert wurde, macht Tarski folgenden Kommentar. Dieser gehört zur veröffentlichten Version des Vortrags, und Tarski war sich Carnaps Versuch und auch dessen Scheitern mit seiner *Axiomatik* völlig bewusst. Lesen wir:

„Satz 10. Jedes nichtgabelbare logisch interpretierbare Axiomensystem ist kategorisch.

Es ist möglich, daß man eine effektive logische Interpretation für ein Axiomensystem erst an einem höheren Typus finden kann (so z. B. für das Axiomensystem der Arithmetik der reellen Zahlen): dann kann man auch – unter gewissen Bedingungen, die für gewöhnliche logische Systeme erfüllt sind – aus der Nichtgabelbarkeit auf die

[204] Tarski-Lindenbaum: *Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel Deduktiver Theorien*, S. 205. Siehe auch Fraenkel: *Einleitung in die Mengenlehre*, S. 334ff., insbesondere S. 352, Fußnote 3.
[205] Vgl. Tarski-Lindenbaum: *Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel Deduktiver Theorien*, S. 211.
[206] Carnap [025-13-04].

Kategorizität schließen. Es ist uns aber unbekannt, ob der Satz 9 ganz allgemein Umkehrbar ist.

In allen derartigen Betrachtungen ist es wichtig auf die Relativität der drei Begriffe: kategorisch, nichtgabelbar und vollständig – in Bezug auf das vorausgesetzte System der Logik zu achten. *Ist z. B. die Logik vollständig, so haben die Begriffe: nichtgabelbar und vollständig für jedes Axiomensystem den gleichen Umfang, sodass jedes kategorische System nicht nur nichtgabelbar, sondern auch vollständig ist.* – Die drei erörterten Begriffe wurden hier als *a-Begriffe* im Sinne Carnaps eingeführt; zieht man die entsprechenden *f-Begriffe* in Betracht, so ergibt sich, daß sich die *f-Vollständigkeit* mit der *f-Nichtgabelbarkeit* ihrem Umfang nach deckt; das Analogon des Satzes 9 bleibt gültig, und das Problem seiner Umkehrung ist auch hier noch nicht allgemein entschieden.“[207]

Dies sollte genügen, um eine stichhaltige Interpretation von Tarskis Rolle in der Entwicklung von Carnaps logizistischem Programm zu liefern. Um die Verhältnisse allerdings erschöpfend zu demonstrieren, zitieren wir hier ein letztes Dokument aus Carnaps Tagebuch. Es geht um die schon erwähnte, und wie es scheint erste, Darstellung des späteren Aufsatzes von Tarski: *Logical Notions*. Diese erste Darstellung ist bei Corcoran – einem der Hauptherausgeber von Tarskis Werk – nicht erwähnt. Corcoran spricht von einem ersten Vortrag am 16. Mai 1966 in Bedford College, London und einem späteren am 20. April 1973 an der Universität von Buffalo, USA[208]. Wie wir sehen können, hat Tarski jedoch die Ideen aus dem später gedruckten Aufsatz schon im November 1965 vorgetragen, im Beisein von Carnap:

„Tarski „What Are Logical Notions?“

Vortrag 23.11.65, Phil Coll., UCLA.

Es geht aus von eigenem G-Artikel Tarski und Lindenbaum, …

abgedruckt in Logik, Semantik, Metamathematik.

[207] Tarski-Lindenbaum: *Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel Deduktiver Theorien*, S. 211f.

[208] Siehe Tarski: *Logical Notions*, S. 144 („Editorial Treatment“).

Felix Klein gliederte verschiedene Geometrien durch die Eigenschaften von geometrischen Figuren, die sie fundieren, und die charakterisiert sind dadurch, daß sie *invariant* sind unter einer gewissen Art von Transformation.

[…]

Klassen werden auf Klassen abgebildet, mit denen sie „strongly set-theoretically equinumerous“ sind (d. h. X hat dieselben Kardinalzahlen wie X’, und – X’ dieselben wie X)
Die Kardinalzahlen sind invariante Eigenschaften in diesem Sinne (aber nur ge<> streng genommen, wie eben definiert).
Wirklich interessant sind erst Klassen von Typ 3 (Klassen von Klassen von Klassen von Individuen).

Aber das würde zu weit führen.“[209]

Jetzt sind wir endlich völlig im Klaren. Wenn wir uns durch eine „ausbeutende Interpretation“ verführen ließen, hätten wir zu schließen: Tarski hat Carnaps Ergebnisse, die er „in conversations“ mit diesem in der 30-er Jahren erfahren hat, als seine eigenen (und diejenigen von Lindenbaum) präsentiert. Zudem soll Carnap dies akzeptiert haben, möglicherweise weil er seine eigene Arbeit in der Logik vergessen hatte…

Dagegen haben wir in diesem Kapitel eine detaillierte Dokumentationsarbeit geleistet, all die Zitate zusammengestellt, die eine irreführende Interpretation zu vermeiden vermögen. Derartige Interpretationen sind nicht nur falsch, sondern geradezu gefährlich; sie können, hauptsächlich weil viele Details der tatsächlichen Diskussionen in Vergessenheit geraten sind, wesentliche Aspekte des logizistischen Unternehmens und das Aufzeigen von Möglichkeiten und Perspektiven für die heutige Forschung verdecken. Aus den hier zusammengetragenen dokumentarischen Daten können wir schließen, dass diese Phase des Carnapschen Wirkens das TP stärkt. Wir sehen dieses Prinzip in den Diskussionen von Carnap in den 40-er

[209] Carnap [090-15-02].

bis 60-er Jahren angewendet: Wenn wir ein System wie das von CL anvisierte errichten wollen, können wir aus praktischen Gründen den typentheoretischen Rahmen wählen. Dies geschieht aber nur aus Gründen der Zweckmäßigkeit. So können verschiedene wissenschaftliche Methoden Anwendung finden. In diesem Sinne begreifen wir, wie Carnap den Gebrauch der intensionalen Typentheorie, modaler Systeme usw. vorschlägt. Alle diese Methoden sind akzeptabel und können zur Demonstration der Thesen von CL und zum Aufbau einer Gesamtsprache hilfreich sein.

4. Logizismus und Toleranzprinzip

In diesem Kapitel soll der Zusammenhang zwischen Logizismus und Toleranzprinzip bei Carnap entwicklungsgeschichtlich dargestellt werden. Daher ist es als eine Synthese dessen zu sehen, was in den vorangegangenen Kapiteln dazu erörtert wurde, wobei aber auch neue Elemente hinzukommen. Die Darstellung erfolgt in drei Schritten. Zunächst untersuchen wir, welcher Zusammenhang zwischen Logizismus und TP in der *Logischen Syntax* besteht. Zweitens werden wir analysieren, welche Veränderungen in der sogenannten semantischen Phase des CL auftreten. Im Ausgang von der Untersuchung der beiden vorhergehenden Punkte, werden wir sodann zwei Interpretationen der Carnapschen Philosophie in dieser Hinsicht kritisch beleuchten.

In der *Logischen Syntax* und in einem verwandten Aufsatz[210], der später in der englischen Fassung des Buches enthalten ist, präsentiert Carnap eine Formalisierung des Folgerungsbegriffs und der L- oder analytischen Wahrheit der klassischen Mathematik. In gleicher Weise stellt die Sprache I des Buches die Formalisierung von L-Begriffen dar, welche sich auf konstruktive Sprachen beziehen; insbesondere auf die durch den Intuitionismus konstruierte Mathematik. In der Praxis besteht diese Synthese von Logizismus und Formalismus in der *Logischen Syntax* einerseits in der Anwendung der formalistischen Methode und andererseits in der Aufrechterhaltung dessen, was Carnap die These des Logizismus nennt[211].

---

[210] Carnap: *Logische Syntax*, S. 88 und Carnap: *Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der Klassischen Mathematik*.

[211] So schreibt Carnap in seiner Antwort auf Beths Aussage, dass er die Syntax als eine Kapitulation vor dem Formalismus auffasse: "Beth gives an analysis of my views, in particular those concerning the relation between logicism and formalism, as represented in my book "*Logical Syntax*" ("[Syntax]"). His comments, both on technical questions and also

Die Formalismusmethode impliziert Freiheit für die Konstruktion von Kalkülen, wobei axiomatische Systeme im Prinzip nicht interpretiert werden und nur durch das Erfordernis der Konsistenz geregelt werden. Die logizistische These impliziert andererseits im Kontext der *Logischen Syntax* die Möglichkeit der Interpretation der klassischen Mathematik, formuliert durch die Sprache II (einen Kalkül). Zu sagen, dass die klassische Mathematik in diesem Stadium des Denkens von Carnap analytisch ist, bedeutet zu sagen, dass sie durch die rein syntaktischen Regeln von Sprache II konstruiert und bestimmt werden kann[212]. Der analytische Charakter der Mathematik sollte in diesem Fall durch die Neutralität von Konstanten und logischen Variablen in Bezug auf die deskriptiven Konstanten des Kalküls demonstriert werden. Wie Carnap deutlich macht, hat Sprache II

---

on my motivation in the choice of methods and the forms of systems are very interesting, and in general I agree with them. *But it seems to me advisable to make a clearer distinction between formalism and the formalist method.* The formalist method, or in my terminology the syntactical method, consists of describing a language together with its rules of deduction by reference only to signs and the order of their occurrence in the expressions, thus without any reference to meaning. The application of the formalist method in the construction of a language *L* does not in itself exclude adding an interpretation for *L*, but if we do so, this interpretation does not enter into the syntactical rules of *L*. Formalism, in the sense of the conception of mathematics represented by Hilbert and his followers, consists of both the proposal to apply the formalist method, and, more essentially, the *thesis of formalism, that this is the only possible way of constructing an adequate system of mathematics, since it is impossible to give an interpretation for (classical) mathematics. In this assertion the thesis of logicism, that all terms of mathematics can be interpreted in terms of logic, is rejected.* I accepted the formalist method, and developed it in a wider domain, but I did not accept the thesis of formalism and instead maintained that of logicism." (Carnap: *Replies*, S. 928) Achten wir auf Carnaps Aussage in dieser Passage: „Ich akzeptiere die formalistische Methode und habe sie zu einem breiteren Gebiet ("wider domain") entwickelt". Carnaps Anwendung der formalistischen Methode besteht darin: a) den syntaktischen Aspekt der Logik zu betonen; b) die Möglichkeit der Verwendung nichtkonstruktiver Methoden, wobei die von Hilbert aufgezeigten Einschränkungen aufgehoben werden (im Grunde wird der Hilbertsche Finitismus aufgehoben); c) die Anwendung der syntaktischen Methode im Rahmen von P-Sprachen (insbesondere von Sprachen, die „Gesamtsprache" sein können). Diese Eigenschaften werden es Carnap ermöglichen, Logizismus und Formalismus zu vereinen, sowie verschiedene Nicht-Standard-Logiken aufzubauen.

[212] Das bedeutet, ihre Theoreme können allein durch die syntaktischen Regeln entschieden werden.

deskriptive Konstanten, aber keine P-Umformungsbestimmungen, die den Gesetzen der Naturwissenschaften entsprechen sollen.

Innerhalb der speziellen Syntax von Sprachen, die keine P-Umformungsbestimmungen haben, verursachte dieses Verfahren kein Problem: die Sprache II ist eine korrekte Formalisierung der klassischen Mathematik und die Definitionen von L-Begriffen für Sprache II entsprechen den semantischen Definitionen von Tarski für dieselben Begriffe[213]. Das Problem entsteht erst innerhalb der allgemeinen Syntax, da ein objektives Kriterium für die Abgrenzung logischer Konstanten fehlt und das relativistische Kriterium, welches Carnap in §§ 50-51 der *Syntax* angegeben hatte, versagte, wie wir gesehen haben. Tarski korrigiert dieses Problem, indem er in der allgemeinen Semantik die Definitionstechnik anwendet, die Carnap selbst in der Sprache II verwendet hatte, um L-Begriffe zu definieren. Dies wird von Carnap selbst bestätigt.[214] In diesem Fall werden die logischen Konstanten ‚willkürlich' gewählt, denn die logischen Konstanten, die für die Definition von analytischer Wahrheit, analytischer Folgerung und anderen L-Begriffen wesentlich sind, hängen von der willkürlichen Wahl der logischen Konstanten in der Metasprache ab.

Diese Situation scheint ein Problem in der Ausführung der formalistischen Methode zu sein oder zumindest etwas, das eine gewisse Spannung mit der zentralen These des Carnapschen Logizismus erzeugt: einerseits können die Regeln eines Kalküls frei konstruiert werden (solange sie die Konsistenz bewahren). Andererseits reicht dieses Erfordernis von Konsistenz aus logizistischer Sicht nicht aus: Wenn wir

[213] Wie Tarski selbst erkennt. Siehe Tarski: *Logische Folgerung*, S. 279f., Fußnote 9.
[214] Carnap: *Introduction to Semantics*, S. 86f. (siehe Zitat oben in Kapitel 3).

ein bestimmtes semantisches System formalisieren, beispielsweise die Konstruktion der Mathematik nach den Verfahren der klassischen Logik, müssen wir Begriffe konstruieren, die nicht nur konsistent sind, sondern die auch der beabsichtigten Interpretation adäquat sind. Carnap erreicht dies in der speziellen Syntax der Sprachen I und II, nicht jedoch in der allgemeinen Syntax. Er bemerkte das Problem zunächst nicht. Wie wir gesehen haben, hat Tarski zuerst auf das Problem hingewiesen, was im vorigen Kapitel dieser Arbeit ausführlich dokumentiert wurde. Die aus *Logische Syntax* stammende Situation stellt für Carnap ein formales technisches Problem bei der Umsetzung seines Programms dar. Der Kern der Carnapschen Auffassung wurde aber nicht gefährdet, da er den Logizismus und das TP im Kontext der Semantik aufrechterhält. Schauen wir uns jetzt die Reaktion von Carnap und die Situation des Projekts in der semantischen Phase an.

Carnaps Antwort auf diese Situation wird in der semantischen Periode bereits in dem Heft *Foundations of Logic and Mathematics* von 1939, später in *Introduction to Semantics* und *Formalisation of Logic* von 1942 gegeben[215]. Insbesondere in *Foundations* gibt es einen Absatz mit dem Titel „Is Logic a matter of Convention?“[216], in dem der Autor im Großen und Ganzen folgende Antwort gibt: Als Teil der logischen Aktivität haben wir die Konstruktion von Kalkülen, und dies ist eine Frage der reinen Konventionalität, d. h. es geht darum, wie wir unsere Kalküle als etwas rein Syntaktisches aus ihren Umformungsbestimmungen heraus konstruieren. Wenn wir dagegen ein semantisches System verwenden, wird diese Konventionalität durch das Erfordernis

[215] Die Ideen der Carnapschen Semantik sind bereits im Dialog über logische Wahrheit mit Tarski von 1939 dargestellt (siehe das Zitat im vorigen Kapitel).
[216] Siehe Carnap: *Foundations of Logic and Mathematics*, S. 26f.

der Adäquatheit der logischen Begriffe eingeschränkt. Folglich muss diese Anforderung von Adäquatheit des Logiksystems auch für die gewünschten Eigenschaften der logischen Begriffe erfüllt werden[217]. Die semantische Phase des CL ist hauptsächlich durch die Annahme gekennzeichnet, dass das System der Logik, d.h. die Definition logischer Begriffe, zu den semantischen Regeln des Systems gehört und nicht zu den syntaktischen Regeln. Betrachten wir nun, wie die Definition der L-Begriffe in der Semantik funktioniert und schauen wir auf einige ihrer Auswirkungen den Zusammenhang zwischen Logizismus und TP betreffend.

Diese Positionen werden in *Introduction to Semantics* dargestellt. Das Buch enthält weit mehr Vorschläge zur Lösung der verschiedenen technischen Probleme der sogenannten L-Semantik[218] als bereits konstruierte Lösungen. In Bezug auf die Definition logischer Begriffe oszilliert Carnap zwischen der Definition dieser Begriffe durch LZ und durch ZB, wie wir im vorherigen Kapitel gesehen haben[219]. Mit der ZB-Methode, die der Syntax sehr ähnlich ist, werden logische Begriffe auf der Grundlage der Idee konstruiert, dass logische Typen Mengen von Sätzen sind. Mit der Methode von LZ, bei der es sich um Zustände der Dinge selbst handelt, die unabhängig von der Ausdruckskraft der Objektsprache sind, definieren wir die L-Begriffe, die Teil der sogenannten ‚absoluten Begriffe' sind. Diese Begriffe, die in einer intensionalen Sprache (z. B. einer modalen Sprache) zu

[217] Der Punkt hier ist, dass, wenn die Bedeutung (‚meaning') der L-Begriffe zuvor gegeben wird, die Begriffe des Kalküls zu der Bedeutung dieses semantischen Begriffs passen müssen. Ein Beispiel könnte dies klarer verdeutlichen: Rein syntaktisch könnten wir die Regel ‚p □ q; q□□ p' frei bestimmen. Wenn wir jedoch die ‚wahre' Bedeutung des if-then-Ausdrucks für ein semantisches System angeben wollen (d. h. wenn dieser Begriff adäquat sein muss), dann wäre es offensichtlich die richtige: ‚if p, then q; p, hence q'. Vgl. dazu Carnap: *Foundations of Logic and Mathematics*, S. 27.

[218] D. h. die Definition des allgemeinen logischen Systems in der allgemeinen Semantik.

[219] Siehe darüber Carnap: *Introduction to Semantics*, §§16-20.

definieren sind, sind in Carnaps Worten „zum nicht-semiotischen Teil der Metasprache (oder Objektsprache)" gehörig[220]. Sie werden an das semantische System gekoppelt, mit dem Ziel, die logischen Begriffe unabhängig von der Ausdruckskraft der Objektsprache zu definieren. Es ist wichtig an dieser Stelle anzumerken, dass Carnap davon ausgeht, dass die L-Begriffe aus Sicht der Objektsprache relativ zu dieser Sprache sind (zum Beispiel wenn wir an eine intuitionistische Sprache denken). Diese logischen Ausdrücke bezeichnen[221] die sogenannten ‚absoluten Begriffe'. Die so konstruierte intensionale Sprache muss durch modale Begriffe (wie den Begriff der Notwendigkeit) die Adäquatheit der in jedem Kalkül definierten L-Begriffe gewährleisten.

Im Wesentlichen scheint der Vorschlag von Carnap für die Kombination von Logizismus und TP in der syntaktischen Phase und in der semantischen Phase derselbe zu bleiben: Der Vorschlag, einen ‚absoluten' logischen Folgerungsbegriff und eine ‚absolute' logische Wahrheit zu konstruieren, haben nur das Ziel, adäquate L-Begriffe zu definieren. In diesem Zusammenhang ist es wichtig zu wissen, dass es nach Carnaps Auffassung eine Entscheidungssache ist, beispielweise L-Begriffe nach den Vorgaben der klassischen Logik und Mathematik zu konstruieren, also etwas Praktisches, das im Wesentlichen die Anwendung der toleranten Haltung ist. Es ist wichtig, dies in Hinblick auf das TP im Auge zu behalten, wenn wir es in seinem ganzen Umfang verstehen wollen. Die Entscheidung, eine bestimmte Theorie zu konstruieren, beruht weder auf einer theoretischen Notwendigkeit, noch ist sie in diesem Sinne normativ. Das Normative ist praktisch, dies ist eine grundlegende Säule des Carnapschen Denkens, dessen Reichweite unserer Ansicht nach oft nicht hoch genug eingeschätzt oder gar analysiert wurde.

---

[220] Vgl. Carnap: *Introduction to Semantics*, S. 89.
[221] Die Bezeichnungsrelation soll hier intensionalen Charakters sein.

Damit kommen wir zum nächsten Punkt dieses Kapitels, nämlich zu den allgemeinen Linien der Carnapschen Auffassung des Verhältnisses zwischen TP und CL. Eine tiefere Rechtfertigung der bisher von uns geäußerten Position wird aus der kritischen Analyse hervorgehen, der wir einige der wichtigsten zeitgenössischen Auslegungen der Philosophie Carnaps unterziehen wollen. Wir werden die verschiedenen Auffassungen der Beziehung zwischen Logizismus und TP in Carnaps Werk untersuchen und den gemeinsamen Nenner herausarbeiten, auf den die Missverständnisse über Carnaps Auffassung bezüglich der Beziehungen zwischen Metasprache und Objektsprache zu bringen sind. Die erste Position, die wir in diesem umstrittenen Feld des TP untersuchen werden, ist diejenige Evert Beths. Zweitens werden wir Michael Friedmans Position zur angeblichen „Selbst-Erodierung" des TP erörtern, die seiner Auffassung nach eine Folge der Unverträglichkeit zwischen diesem Prinzip und dem Logizismus bei Carnap ist.

Beths Kritik am TP fasst dieser selbst in seinem Artikel über Carnap im Schilpp-Band mit folgenden Worten zusammen:

> "His neglect of the distinction between strict usage and amplified usage of a language has induced Carnap to defend assertions – and, in particular, the Principle of Tolerance, which cannot be accepted without restrictions. Moreover, Carnap has been not able to avoid every appeal to logical or mathematical intuitions, or, what amounts to the same, to ontological commitments."[222]

Das Verständnis dieser Kritik hängt grundsätzlich davon ab, wie wir die Bedeutung der Schlüsselbegriffe bei Beth verstehen. Daher werden wir die Bedeutung dieser Begriffe in groben Zügen erläutern. Dann werden wir auf dieser Grundlage versuchen zu klären, warum Beth argumentiert, das

[222] Beth: *Carnap's Views on the Advantages of Constructed Systems*, S. 501.

TP könne nicht ohne Einschränkungen akzeptiert werden. Als nächstes werden wir analysieren, warum Beth glaubt, dass Carnap es gar nicht hätte vermeiden können, auf mathematische Intuition oder auf ontologische Verpflichtungen zurückzugreifen.

Die Termini ‚strikt' („strict"[223]) und ‚amplifiziert' („amplified") beziehen sich auf eine Unterscheidung von Interpretationsarten von Begriffen, die denselben Namen besitzen. Ein Beispiel für eine strikte und amplifizierte Verwendung kann durch geometrische Begriffe wie ‚Punkt' und ‚Gerade' gegeben werden. In der euklidischen Geometrie verwenden wir diese Wörter strikt oder spezifisch. Sie sollten sich auf ‚den Raum' beziehen[224]. Im Bereich der Hilbertschen Geometrie haben Wörter wie ‚Punkt', ‚Gerade' usw. dagegen keine feste Interpretation, da alle möglichen Modelle für sie „auf dem gleichen Fundament stehen"[225]. Nach Beth werden formale Sprachen in einem amplifizierten Sinn verwendet, da sie mehrere Interpretationen zulassen. Natürliche Sprachen wiederum können sowohl strikt als auch amplifiziert verwendet werden.

Überträgt man diese Unterscheidung zwischen strikt und amplifiziert auf das Gebiet der Metatheorie im Carnapschen Sinne, so hätten wir nach Beth die folgende Situation: Bei der Ausarbeitung formaler Sprachen, beispielsweise Sprache II, würde Carnap eine bestimmte Interpretation im Auge behalten. Beth erklärt, dass „diese formale Konstruktion (der Sprache II) von einer nichtformalen Interpretation inspiriert ist, die, wenn sie sich manifestiert, eine Rückkehr zu Freges Logizismus darstellen würde". Carnap stimmt dieser Aussage zu. Er stimmt auch der Bemerkung zu, dass „ohne diese

---

[223] D. h. „fix interpretiert".

[224] Vgl. Beth: *Carnap's views on the Advantages of Constructed Systems*, S. 478, Fußnote 30.

[225] In Beths Ausdrucksweise: "all possible models of the axioms are admitted on the same footing."(Ebd.).

(logizistische) Interpretation das gesamte Syntax-Gebäude seine Bedeutung verlieren würde“[226]. An diesem Punkt beginnt Beths Kritik am TP. Aus unserer Sicht beruht diese Kritik auf einem Missverständnis darüber, wie Carnap die logizistische Methode verwendet. Schauen wir uns die Details an.

Beginnen wir in diesem Fall mit dem Begriff der strikten Interpretation. In der syntaktischen Phase bedeutet ‚Interpretation‘ für Carnap soviel wie ‚Übersetzung‘. Offensichtlich wird zum Beispiel die Sprache II grundsätzlich nicht interpretiert, da nur das Auftreten von Zeichen und ihre Reihenfolge in der rein formalen Sprache berücksichtigt wird. Obwohl sie prinzipiell nicht interpretiert wird, ist diese Sprache von einer bestimmten Interpretation inspiriert. Sogar einige ihrer Besonderheiten werden durch diese beabsichtigte Interpretation bestimmt, wie Carnap selbst klarstellte[227]. Nach Beth ist diese strikte Interpretation der Sprache II jedoch ein Problem, vielleicht sogar ein Mangel von Carnaps damaliger Methode. Das liegt daran, dass die Sprache II mehrere Interpretationsmöglichkeiten zulässt. Dies ist eine Folge der Möglichkeiten, die die Modelltheorie eröffnet, insbesondere zur Entwicklung von Nicht-Standardmodellen für verschiedene formale Theorien, die Carnap zu der Zeit, da er die *Logische Syntax* schrieb, nicht kannte. In Anbetracht dieser Punkte werden wir erklären, wie Beth den Konflikt entstehen sieht[228].

Es sei zunächst angenommen, es gebe zwei Personen, Beth nennt sie Carnap und Carnap*. Carnap* hat

[226] Über diese zwei Behauptungen Beths vgl. Beth: *Carnap’s views on the Advantages of Constructed Systems*, S. 477. Über Carnaps Zustimmung siehe Carnap: *Replies*, S. 927.

[227] Vgl. Carnap: *Replies*, S. 927.

[228] Beth gibt in seiner Diskussion ein informelles Beispiel, um die Darstellung der gesamten formalen Maschinerie der Modelltheorie zu vermeiden. Wir folgen hier dem allgemeinen Überblick über die von Beth beschriebene Situation (mit etwas anderen Beispielen).

intuitionistische Überzeugungen, während Carnap ein klassischer Mathematiker ist. Nehmen wir an, Carnap* weiß nicht, dass Sprache II klassisch ist, und in der *Logischen Syntax* gibt es keine solche Erklärung. Als er anfängt, das Buch zu lesen, findet Carnap* die erste Erklärung von ‚...' in der Reihenfolge von 0, 0', 0'', … als ‚und so weiter'[229]. Bislang sieht Carnap* kein Problem, obwohl er dem Terminus ‚alle Strichausdrücke' (d. h. den Ausdrücken, die die natürlichen Zahlen darstellen[230]) die Bedeutung zuschreibt, die er in der konstruktiven Mathematik hat; d.h. Carnap* akzeptiert das Unendliche nicht als abgeschlossene Entität, sondern nur potentiell. Angenommen, Carnap* geht direkt zum Lesen von II über und erkennt an einem bestimmten Punkt, dass einige Theoreme durch *reductio ad absurdum* bewiesen werden: Die Annahme eines mathematischen Satzes wird abgelehnt, wenn diese Annahme zur Absurdität führt. In der klassischen Mathematik beziehen sich diese Theoreme auf die (unendliche) Gesamtheit der natürlichen Zahlen. Hier kann Carnap* die Sprache II als inkonsistent betrachten,[231] und da er die Interpretation, die Carnaps Sprache II gibt, nicht erkennt, kann er von der Korrektheit von Sprache II nicht überzeugt werden.

Im Zentrum von Beths Argumentation steht, dass das TP nicht die gleichen Bedingungen für zwei Gesprächspartner bietet, die unterschiedlicher Auffassungen sind, da es möglich

[229] Siehe Carnap: *Logische Syntax*, S. 11f.

[230] Siehe Carnap: *Logische Syntax*, S. 10.

[231] Carnap* wird Sprache II zu diesem Zeitpunkt als inkonsistent betrachten, da wir für einen Intuitionisten nur vorhandenen Zahlen Eigenschaften zuweisen können, d.h. Zahlen, die tatsächlich konstruiert sind. Wenn wir also eine Eigenschaft allgemein unter der Annahme einer unendlichen Totalität zuweisen, laufen wir nach Ansicht des Intuitionisten Gefahr, eine Eigenschaft einem Objekt zuzuordnen, das nicht existiert. Wenn wir annehmen, dass ein Satz, der Namen enthält, welche nicht bezeichnen, weder wahr noch falsch ist, dann ist es falsch, diesen Satz als wahr zu bezeichnen. Wenn dagegen ein Satz, der Namen enthält, welche nicht bezeichnen, falsch ist, wird das System auch in diesem Fall dem Intuitionisten als inkonsistent erscheinen.

sein kann, dass zwei Personen, die verschiedenen philosophischen Überzeugungen anhängen, anfangs nicht dieselbe Auslegung einer formalen Sprache vertreten. Dies lässt sich auf folgende Weise formulieren: Der Intuitionist Carnap* hat eine konstruktive Interpretation im Sinne, da er in der Metasprache nur konstruktive Methoden für die Konstruktion von formalen Sprachen akzeptiert, während der klassische Mathematiker Carnap nicht-konstruktive Methoden akzeptiert. Wenn beispielsweise eine formale Sprache wie II als richtig angesehen werden soll, müssen wir, um ihre Konsistenz zu demonstrieren, eine Metasprache haben, die noch mächtiger als II ist; diese Einschränkung begrenzt jedoch das TP von Anfang an. Eine rein praktische Frage ist die Wahl einer Sprache oder ihrer Interpretation, sie wird jedoch hauptsächlich von den ontologischen Verpflichtungen desjenigen bestimmt, der die Sprache konstruiert.

Das gesamte vorgestellte Problem ergibt sich nach Beth aus der Tatsache, dass in der *Logischen Syntax* der Unterschied zwischen der strikten und der amplifizierten Verwendung der natürlichen Sprache in der Metasprache nicht wahrgenommen oder vernachlässigt werde. Im erweiterten Gebrauch seien die konstruktive und die klassische Bedeutung von ‚...' (also des ‚usw.') zwei Möglichkeiten in derselben Sprache, die der Autor der *Logischen Syntax* nicht klar erkannt hätte. Hier leidet das TP nach Beth zwangsläufig unter einer „Einschränkung" (und es würde dadurch tatsächlich zerstört bzw. aufgehoben), weil die Wahl im strikten Sinne die Festlegung einer Bedeutung in einem Sprachgebiet ist, die mit ontologischen Verpflichtungen verbunden ist; diese Wahl würde demnach nicht nur aus praktischen Gründen getroffen.

Dieses Argument wurde von einigen Autoren als Hinweis auf eine gravierende Einschränkung des TP, sogar als dessen Vernichtung akzeptiert. Dies ist beispielsweise bei Friedmann der Fall, der behauptet, Carnap akzeptiere, dass die

Notwendigkeit einer stärkeren Metasprache von Beth als Hindernis für die Ausübung des Toleranzprinzips bezeichnet worden sei, und dass Carnap Beth auf diesen Einwand nie geantwortet habe. Aus unserer Sicht resultiert diese Position aus einem mangelnden Verständnis der Carnapschen Auffassung der Funktionsweise der Beziehungen zwischen Metasprache und Objektsprache. Carnap antwortete sehr wohl auf Beths Frage nach dem TP! Das Verständnis dieser Antwort hängt von der Klärung eines eher subtilen Punktes ab. In seiner Antwort gibt Carnap nämlich an, dass wenn zwei Gesprächspartner sich in der von Beth beschriebenen Situation zwischen einem Intuitionisten und einem klassischen Mathematiker befinden, die Tatsache bekannt ist, dass sie zwar nicht über Sprache II, wohl aber in der entsprechenden Metasprache übereinstimmen. Hier liegt der springende Punkt: Wenn man die verschiedenen Bedeutungen, die bestimmte Begriffe in einer bestimmten natürlichen Sprache (die sogenannte amplifizierte Verwendung dieser Sprache) haben, als Orientierung heranziehen will, müssen alle interpretatorischen Möglichkeiten in einer Metametasprache behandelt werden. Diese Metametasprache muss „im gewöhnlichen Sinne“ von beiden Gesprächspartnern in gleicher Weise verstanden werden, wenn eine Kommunikation zwischen ihnen überhaupt möglich sein soll.

Die Pointe bei Carnap scheint uns gerade darin zu bestehen, dass auf irgendeiner Ebene eine Übereinstimmung gefunden werden muss, damit verschiedene Konstruktionen der wissenschaftlichen Sprache im Allgemeinen durchgeführt werden können; dies gilt auch für die Anerkennung der Unterschiede dieser möglichen Konstruktionen von wissenschaftlichen Sprachen. Diese Haltung Carnaps spiegelt seinen Logizismus wider. Theorien können nach Belieben formal rekonstruiert werden (das Theoretische ist in diesem Sinne nicht normativ), um jedoch überhaupt eine

Kommunikation zu ermöglichen, muss es auf einer bestimmten Ebene eine Übereinkunft geben. An dieser Stelle tritt Carnap in Gegensatz zu Hilbert und steht bei der Interpretation logischer Begriffe auf der Seite von Frege. Laut Frege haben Wörter wie ‚eins', ‚zwei', ‚existieren' usw. eine universelle Bedeutung, während sie in Hilberts Formalismus eine Bedeutung nur relativ zu dem axiomatischen System haben, für das sie definiert werden.

Bevor wir fortfahren, ziehen wir eine Bilanz der bisherigen Ergebnisse. In der syntaktischen Phase heißt Interpretation für Carnap Übersetzung, wie er in der *Logischen Syntax* hervorhebt. Die Notwendigkeit, logisch-mathematische Eigenschaften zu definieren, die über die Ausdruckskraft mehrerer formaler Sprachen hinausgehen, um ein logisches System (Definitionen von L-Begriffen) in geeigneter Weise aufzubauen, führte Carnap dazu, L-Begriffe semantisch zu definieren. Aus technischer Sicht bleibt das Problem einer zufriedenstellenden Abgrenzung von logisch und nicht-logisch (im Kontext einer allgemeinen Metatheorie semantischer Natur) ungelöst. Tarskis Abgrenzungskriterium löst dieses Problem für die klassische Mathematik mit der Einschränkung, dass sie in der Typentheorie formuliert ist. Es muss noch geprüft werden, ob dieser Vorschlag im Hinblick auf Carnaps Ziele, die an dieser Stelle viel weitreichender sind als diejenigen Tarskis, realisierbar ist. Carnap möchte, wie wir gesehen haben, ein Kriterium formulieren, das die Abgrenzung der P-Umformungsbestimmungen von den L-Umformungsbestimmungen im Rahmen einer Gesamtsprache der Wissenschaften ermöglicht. Tarskis Untersuchungen beschränken sich grundsätzlich auf die L-Sprachen. Beth selbst stellt dies in seinem Artikel fest, und Carnap bestätigt dessen Aussage[232]. In *Introduction to Semantics* wird Carnap darüber nachdenken, ein modales Kriterium für die Abgrenzung der L-Begriffe in einer allgemeinen Metasprache zu entwickeln, so dass alle Definitionsmöglichkeiten der L-Begriffe formuliert werden können. Schauen wir uns nun die zweite Kritik des Verhältnisses von Logizismus und TP an, diejenige von Michael Friedman.

Der Einwand Friedmans gegen Carnaps Kombination von Logizismus und TP findet sich in seinem Buch über den logischen Positivismus[233]. Er ist tatsächlich eine Variante der Gödelschen Argumentationslinie in dem Aufsatz *Ist die Mathematik logische Syntax der Sprache?* Gödel zufolge ist Carnaps grundsätzliches Verfahren, die logischen Konstanten konventionell zu bestimmen, mit dem zweiten Theorem Gödels inkompatibel. Der Grund hierfür ist der folgende: Um eine Versicherung dafür haben zu können, dass unsere konventionell ausgewählten logischen Konstanten keine nicht logischen Folgerungen beinhalten, brauchen wir nur einen Beweis zu liefern, der dieses widerlegt. Dieser Beweis darf aber, wenn er widerspruchsfrei sein soll, nur in einer Metasprache formuliert werden, die stärker als die untersuchte Sprache ist. Diese stärkere Metasprache beinhaltet einen Beweis desselben Sachverhalts in einer noch stärkeren Metametasprache, von der wir annehmen, dass sie keine empirischen Folgerungen einführt (es sei denn schon die Metasprache wird *intuitiv* als korrekt angenommen). Dies würde Carnaps Verfahren zirkulär werden lassen (wenn wir keinen *regressus ad infinitum* zulassen wollen). Gemäß Gödel wird somit offensichtlich, dass es keinen objektiven Unterschied zwischen logischen und nicht logischen Sätzen gibt.

[232] Siehe darüber Beth: *Carnap's views on the Advantage of Constructed Systems*, S. 485f. und Carnap: *Replies*, S. 931.
[233] Friedman: *Reconsidering Logical Positivism*.

Gegen diese Einwände haben Goldfarb und Ricketts argumentiert, dass Gödel Carnap eine „absolute" (objektivistische im Sinne von „außersprachliche") Auffassung von empirischer Wirklichkeit zugeschrieben hat, die bei letzterem keinesfalls gegeben sei. Es ist in der Tat unbestritten, dass Carnaps Auffassung zufolge der „empirische" Teil der Sprache innerhalb der Sprache selbst bestimmt wird. So relativ dies auch betrachtet werden müsse, könnten sich nach der Feststellung der L-Bestimmungen keine versehentlichen „nichtlogischen" Folgerungen ergeben. Auf die Bemerkungen Gödels könnte Carnap ein ähnliches Argument anbringen wie jenes, das er Beth präsentiert hat: Die Wahl der Zeichen, die wir innerhalb einer reinen L-Sprache benutzen (wie z. B. der Typentheorie) ist zwar nicht willkürlich, sondern durch theoretische Forderungen motiviert. Die Auswahl der Sprache selbst ist jedoch keine theoretische Sache und die Motivationen dafür sind nicht theoretisch zu beurteilen, da sie nur dem praktischen Rahmen angehören.

Betrachten wir nun die Details in Friedmans „interner Version" des Gödelschen Arguments[234]. Gemäß Friedman würde Carnap mit zwei Begriffen von Analytizität in *Logische Syntax* arbeiten. Der erste in der „reinen Syntax" (ähnlich wie die in Kapitel 2 beschriebene allgemeine Metasprache „S_A") wurde danach rein kombinatorisch und abstrakt definiert[235]. Friedman

[234] Friedman: *Reconsidering Logical Positivism*, Chapter 7; eine Zusammenfassung dieses Arguments finden wir in Chapter 9 desselben Buches auf den Seiten 204f.

235 Hier ist eine Klarstellung zur Interpretation Friedmans erforderlich. Carnap hätte danach mit seinem Programm die Frage „Wie ist klassische Mathematik möglich?" beantworten wollen. Dabei würde Carnap die Wittgensteinsche Logikauffassung als eine Erläuterung des Begriffs ‚analytisch' betrachten, wie er bei Frege aufgefasst wurde. Der Wittgensteinsche Begriff von Analytizität würde sich auf die These stützen, dass die allgemeine logische Form (die die Ausdrucksmöglichkeiten bestimmt) der Sätze jeder mögliche Sprache aus den Kategorien ‚Argument' und ‚Funktion' und dem Prinzip der Kompositionalität besteht. Daraus folgt, dass die logischen Wahrheiten keine Folge der Bedeutung der Ausdrücke „und", „oder", usw. sind.

zufolge wäre dieser erste Begriff der Analytizität für den Carnapschen Logizismus wesentlich und würde jenem minimalen Kern entsprechen, der die primitive rekursive Arithmetik enthalten würde. Carnap hätte dann mit diesem ersten Begriff versucht, die L-Begriffe aller anderen formalen Sprachen zu beschreiben, unabhängig davon, wie reich sie seien. An dieser Stelle könnte der Begriff ‚analytisch' in einem zweiten Sinne definiert werden. Diese Definition wäre relativ zu einer Objektsprache L, mithilfe der Unterscheidung zwischen logischen und deskriptiven Konstanten. Aufgrund der Unmöglichkeit, ‚analytisch' für diese reichere Sprachen aus dem minimalen Kern zu definieren (wie Gödels Ergebnisse zeigten; siehe Kapitel 2 oben), würde der CL zusammenbrechen. Ein solcher Sachverhalt würde auch dazu führen, dass der CL mit dem TP unverträglich wäre.

Weiter im Text räumt Friedman ein, dass er die Konzeption aufgegeben hat, dass Carnap aufgrund seiner kombinatorischen Auffassung der Logik einen minimalistischen Kern der allgemeinen Metasprache vorausgesetzt habe.[236] In der Tat macht Carnap zusätzlich zu allen unseren oben angegeben Punkten in *Logische Syntax* §45 deutlich, dass das TP auch für den Bereich der Metasprache gilt. Friedman erkennt an, dass das Problem der

Logische Wahrheiten würden zudem durch die allgemeinen kombinatorischen Möglichkeiten aller Sprachen bestimmt. Laut Friedman würde Carnap noch in der Zeit der *Logischen Syntax* das, was Friedman „die Wittgensteinsche Erläuterung des Begriffs der Analytizität" nennt, zur Aufrechterhaltung der zentralen Logizismus-These verwenden (also die Analytizität der Arithmetik). Siehe darüber *Friedman: Reconsidering Logical Positivsm*, S. 174ff. Diese erste Interpretation Friedmans stammt aus dem Jahr 1988. Später räumt Friedman den Fehler seiner Kritik ein, versucht aber dennoch, den Buchstaben derselben Kritik neu zu formulieren und ihren Geist zu bewahren. Dazu siehe die folgende Diskussion in diesem Kapitel.

[236] In der Tat hatte Carnap dieses Denken zur Zeit der *Logischen Syntax* längst aufgegeben, wie wir in Kapitel 2 gezeigt haben. Es ist merkwürdig, wie einige Autoren den Carnapschen Logizismus auf diese Möglichkeit hin verstanden haben, die verschiedenen Bereiche der Metasprache irgendwie auf einen minimalen logischen Kern zu reduzieren, so dass alle Inferenzen auf ein endliches funktional-veritatives Schema reduziert werden könnten. Dies ist zum Beispiel der Fall bei André Carus, der aufgrund dieser Annahme behauptet, Carnaps Logizismus wäre schon in den frühen 1930er Jahren zusammengebrochen. Siehe insbesondere den Abschnitt "The Collapse of Logicism" in Carus: *Carnap and Twentieth-Century Thought*, S. 222ff.

Unterscheidung zwischen logischen und nichtlogischen Konstanten kein grundlegendes Problem ist, welches Carnaps tolerante Haltung im Allgemeinen betrifft, sondern ein rein technisches Problem[237]. In der spezifischen Metatheorie einer formalen Sprache ist dies tatsächlich kein Problem. Das Problem tritt erst in der allgemeinen Metatheorie auf, und obwohl ihm das Kriterium auf diesem Gebiet fehlt, kann Carnap seine Praxis, formale Systeme frei zu konstruieren, befolgen, wenn auch nur begrenzt, sofern dazu Definitionen für die L-Begriffe eines zuvor gegebenen semantischen Systems gegeben werden müssen. In diesem Fall müssen, wie wir bereits gesehen haben, auch die L-Begriffe adäquat sein.

Hinzu kommt jedoch das, was Friedman für das wesentliche Problem der Carnapschen Haltung hält: Die fehlende Chancengleichheit für zwei Gesprächspartner, die unterschiedliche Positionen in der Frage der Grundlagen der Mathematik vertreten. Sehen wir uns seine eigenen Worten an:

> "The principle of tolerance, on Carnap's own understanding of it, then appears to undermine itself.
>
> In particular, the principle of tolerance *by no means yields an initial situation of equal opportunity*, *where we are then free to adopt any of the positions in question in light of how they fare with respect to one or another set of purely pragmatic virtues.* On the contrary, in the case of the philosophical debate in the foundations of mathematics that the principle was intended to dissolve, *the very decision at issue has itself been already prejudged*."[238]

Als Gründe für diese Behauptungen werden von Friedman folgende angeführt:

> "The closest Carnap comes to recognizing the problems with which we have been occupied is in his exchange with Beth in the Schilpp volume. Beth (1963, p. 479; see also pp. 499-502) uses ideas very close to our considerations to suggest that the need for a strong meta-language entails a "limitation regarding the Principle of Tolerance." In his reply, Carnap ([Replies], pp. 929-930) explains that in a dispute between two parties touching also the question of

[237] Friedman: *Reconsidering Logical Positivism*, S. 229ff.

[238] Friedman: *Reconsidering Logical Positivism*, S. 229.

the metalanguage: "It may be the case that one of them can express in his own language certain convictions which he can not translate into the common language; in this case he cannot communicate these convictions to the other man. For example, a classical mathematician in this situation with respect to an intuitionist…" *Yet Carnap never takes up Beth's theme of a "limitation regarding the Principle of Tolerance".*"[239]

Wir sehen, dass Friedmans Interpretation explizit von Beths Analyse inspiriert ist. Friedman nimmt offenbar nicht wahr, dass Carnaps Antwort auf Beth deutlich ist, worauf wir in diesem Kapitel bereits Gelegenheit hatten hinzuweisen. Das Argument erodiert das TP nicht, wie Friedman meint. Er verwechselt den theoretischen mit dem praktischen Aspekt des Problems. Die Situation kann wie folgt beschrieben werden: In einer Diskussion dürfen die Teilnehmer *frei* die Metasprache wählen, in der sie sich ausdrücken wollen[240]. Dies ist eine *praktische* Entscheidung, eine notwendige Voraussetzung der Kommunikation. Erst wenn die Teilnehmer dann im Rahmen einer gemeinsamen Sprache kommunizieren, nur dann stehen sie im *theoretischen* Gebiet und nur dann können die Konsequenzen der vorher akzeptierten Sprache studiert werden (die Motivationen für die Annahme der Sprache kommen nicht mehr ins Spiel). Das einzige, was in diesem Prozess der Anwendung des TP eliminiert wurde, sind die philosophischen Überzeugungen. Dieser Sachverhalt wurde ausführlich durch unsere Argumentation und unseren Versuch, den CL in seinem eigenen Kontext zu rekonstruieren, aufgewiesen.

Wir hoffen in diesem Kapitel gezeigt zu haben, dass das zentrale Ziel Carnaps mit all seiner theoretischen Bemühung erreicht wurde, nämlich endlose philosophische (metaphysische) Diskussionen durch ein wissenschaftliches Verfahren zu ersetzen. Dieses Verfahren stellt im Gegensatz zu Systemen, die die persönliche Überzeugung einzelner Denker zum Ausdruck bringen, eine kollektive Arbeit dar, bei der die zu erreichenden Ziele und Ergebnisse klar angegeben werden müssen. Mit diesem Standpunkt,

[239] Friedman: *Reconsidering Logical Positivism*, S. 232, Fußnote 61; meine Hervorhebung.

[240] Wie wir oben gesehen haben, können die Debattierenden in der Metametasprache die Möglichkeiten der verschiedenen Metasprachen erörtern.

der uns das Herz des Carnapschen Denkens zu sein scheint, geht eine Vorstellung einher, die wir zu Recht als philosophisch bezeichnen können, nämlich die, dass es keinen einzigen wahren Standpunkt gibt. Die Wahrheit würde sich vielmehr aus allen möglichen Positionen ergeben. In der folgenden Schlussfolgerung werden wir versuchen, eine Richtung aufzuzeigen, in die die Untersuchung einiger zentraler Probleme der wissenschaftlichen Philosophie führen kann.

5. Abschluss

Unsere Arbeit hat ihr Ziel erreicht; wir haben den Carnapschen Logizismus in seinem eigenen Kontext rekonstruiert und die Entwicklung und Hauptforderungen desselben klargestellt. Aus dieser historischen Rekonstruktion können wir folgern:

1) Carnaps größtes Verdienst ist, zu zeigen, dass Philosophie wissenschaftlich betrieben werden kann. Er tut dies, indem er die traditionelle philosophische Thematik durch eine logisch und technisch orientierte Methode in seinem System ersetzt.

2) Carnap gelang es, sein Programm extrem beweglich an die großen Transformationen im Gebiet der Logik seiner Zeit anzupassen. In diesem Sinne lässt sich der Stand, den das Carnapsche Projekt heute hat, am besten einschätzen, indem man die Komponenten (Thesen) des Carnapschen Logizismus zusammenfasst.

These I: Die Mathematik kann aus der Logik abgeleitet werden. Der Inhalt dieser These wird im Laufe der Zeit transformiert, da er angesichts der oben analysierten Ergebnisse nicht mehr den Charakter des Fregeschen bzw. Russellschen Systems hat. In der Carnapschen Charakterisierung kann die These durch die Aussage ausgedrückt werden, dass die Mathematik logisch interpretiert werden kann. In der syntaktischen Phase bedeutet dies, dass die Gültigkeit mathematischer Sätze nur auf Grund syntaktischer Regeln bestimmt werden muss. In der semantischen Phase bedeutet es, dass mathematische Wahrheiten nur durch semantische Regeln ohne sachlichen, insbesondere anschaulichen Inhalt bestimmt werden müssen. Diese These stellt keine großen Probleme dar, wenn wir von Fall zu Fall in der sogenannten speziellen Metatheorie vorgehen. Es ist immer möglich, ein Logiksystem oder sogar eine Sprache zu formalisieren, die die sogenannten P-Bestimmungen enthält. Was wir bis heute nicht haben, ist eine allgemeine systematische Definition eines logischen Systems[241] in der allgemeinen Metatheorie. Dies bringt uns zum nächsten Punkt, zum Problem der Natur der Deduktion, also zur Frage, ob These II haltbar ist.

These II: Jeder Schluss ist analytisch[242]. Zu zeigen, dass jeder Schluss tautologisch oder analytisch ist, ist tatsächlich eine immense Aufgabe. In gewissem Sinne können wir sagen, dass Carnap in seiner Definition von ‚analytisch' ein einheitliches Ergebnis erreicht: für alle Sprachen, die in diesem Zusammenhang behandelt werden, kann festgestellt werden, welche Sätze wohlgeformt sind und welche Schlussfolgerungen gültig sind. Die grundlegende Frage ist, wie wir gesehen haben, die nach der Definition eines Systems der Logik in der allgemeinen Semantik. Tarski hat eine Lösung für eine aus der klassischen Mathematik aufgebaute Gesamtsprache gefunden und sich damit auf die Formulierung der klassischen Mathematik in der Typentheorie beschränkt. Carnaps Ziel ist dagegen viel umfassender (und philosophischer). Um eine Vorstellung von der Breite und Schwierigkeit der Probleme zu vermitteln, die mit Carnaps

---

[241] Also ein Definitionssystem logischer Begriffe.

[242] Die Diskussion des Begriffs „analytisch" in der vorliegenden Arbeit bezieht sich auf die Bedeutung dieses Begriffs in formalen Systemen, „im allgemeinen Sinne von logisch wahr" (Carnap: *Intellectual Autobiography*, S. 46, S. 63 u.a.). In diesem Zusammenhang ist ein solcher Begriff hinreichend klar. In der weiteren Diskussion geht es darum, ob es ein hinreichend klares *Explicandum* als Gegenstück zum formalen Begriff (*Explicatum*) gibt (Quines Kritik). Quine wirft die Frage nach der Möglichkeit auf, nach pragmatischen Kriterien ein *Explicandum* zu formulieren (Siehe Quine: *Carnap and Logical Truth* und Carnaps Antwort in Carnap: *Replies*, S. 915-922). Wir behandeln das in der vorliegenden Arbeit nicht. Wir beschränken uns darauf, den Begriff ‚analytisch' in der formalen Semantik zu diskutieren. Diese Einschränkung gilt für die Behandlung, die Tarski, Gödel und Carnap in der hier besprochenen Zeit dieser Frage gewidmet haben (auch in der oben behandelten Diskussion von Beth ist dies die Bedeutung des Begriffs ‚analytisch'). Dies schließt natürlich nicht aus, dass die Behandlung dieses Begriffs in der Geschichte des philosophischen Denkens für aktuelle Diskussionen nützlich sein kann.

Ziel zusammenhängen, sind zwei Punkte zu betrachten. Erstens zielt Carnap darauf ab, eine allgemeine Definition der logischen Deduktion zu formulieren (dies haben wir bisher analysiert). Zweitens ist die Behauptung der These II des CL, der zufolge alle Schlussfolgerungen analytisch sind, offensichtlich mit großen Herausforderungen verbunden, von denen hier zwei hervorzuheben sind.

Ein Vorschlag Carnaps zur Definition logischer Begriffe in der allgemeinen Semantik besteht darin, ein System der Modallogik zu konstruieren, das die Definitionen von L-Begriffen mit den verschiedenen semantischen Systemen verknüpfen kann. In diesem Sinne spricht Carnap von einer intensionalen Metasprache $\mathbf{M}_i$, die ein eigens entwickeltes Bezeichnungssystem besitzt. In diesem Bezeichnungssystem wird festgestellt, dass Prädikate Eigenschaften bezeichnen, während Sätze Propositionen bezeichnen. So kann beispielsweise das Prädikat „B" die Eigenschaft Blau – in Symbolen Des_i (B, Blau) – bezeichnen[243]. Der Satz „Berlin ist eine Großstadt" bezeichnet die Proposition, dass Berlin eine Großstadt ist (in Symbolen Des_i (A, p)). Im Allgemeinen kann man mit diesem intensionalen Bezeichnungssystem logische Begriffe in der allgemeinen Metasprache charakterisieren. Carnap schlägt vor, den Begriff einer L-wahren Proposition (beispielsweise) mit dem einer notwendigen Proposition zu identifizieren (in Symbolen: Np). Daraus können in der Metasprache die Bedingungen der Adäquatheit für die L-Begriffe bestimmt werden, die in den verschiedenen semantischen Systemen definiert sind. Sehen wir, wie dies funktioniert.

Erstens gibt es zwar mehrere logisch wahre Sätze (die sich immer auf das semantische System beziehen, in dem

[243] Der Operator ‚Des' ist die Formalisierung der Bezeichnungsbeziehung in der Metasprache (abgeleitet von ‚designation'). ‚i' zeigt in diesem Fall an, dass es sich um eine intensionale, nicht eine extensionale Relation handelt.

diese Sätze gebildet werden), jedoch gibt es nur eine logische Proposition (die 'Tautologie')[244]. Folglich bezeichnen alle L-wahren Sätze dieselbe Proposition. In einem solchen Kontext sei angenommen, dass ‚p' eine logisch wahre Proposition ist, S eine Variable für semantische Systeme und *s* eine metasprachliche Variable für Sätze. So können wir die folgende Bedingung angeben: $\forall s\ \forall S$ (*s* ist L-wahr in S $=_{df.}$ Des_i (*s*, p). Die Entwicklung dieser Carnapschen Idee in Bezug auf die Bestimmung der L-Begriffe für die allgemeine Semantik setzt die Konstruktion einer intensionalen und modalen Logik voraus. (Diese intensionale Prädikatenlogik ist mindestens eine Stufe höher als jede Stufe, die in einer der Objektsprachen vorkommt, die von diesem System in der allgemeinen Semantik abgedeckt werden.[245]) Carnap hat einige Aspekte dieser Systeme der modalen Logik in *Meaning and Necessity* sowie in *Modalities and Quantification* entwickelt.

Bis zu seinem Lebensende befasste sich Carnap mit dem Versuch, adäquate Definitionen der L-Begriffe in der allgemeinen Semantik zu konstruieren und Entwicklungswege anzugeben, die in diesem Sinne vielversprechend erscheinen. Diese Wege können es uns in Zukunft (vielleicht) ermöglichen, die Natur der L-Deduktion und der L-Wahrheit zu erklären.[246] So weit so gut. Das Problem hierbei ist, dass die These II des CL, die an die neue Logik gekoppelt ist, viel

[244] Dies ist eine Folge der Tatsache, dass es keine unterschiedlichen Propositionen gibt, die L-äquivalent sind. Darüber siehe Carnap: *Introduction to Semantics,* §17 und Carnap: *Meaning and Necessity*, S.173ff.

[245] Vgl. Carnap: *Introduction to Semantics*, S. 85.

[246] In der Tat stellt Carnap dieses Problem in der folgenden Passage von *Introduction to Semantics* in den Mittelpunkt des philosophischen Interesses: "The problem of the nature of logical deduction and logical truth is one of the most important problems in the foundations of logic and perhaps in *the whole of theoretical philosophy*. Although in the development of modern logic much has been done to throw more light on this problem, especially by Frege, Russell, and Wittgenstein, it can still not be regarded as completely solved." (S. 57; meine Hervorhebung)

stärker ist. Carnap behauptet mit dieser These, wie wir gesehen haben, dass *jeder Schluss analytisch ist*. Betrachten wir hier einen problematischen Punkt in Bezug auf diese These. Das erste Problem hängt mit den induktiven Schlüssen zusammen. Die Frage bezieht sich darauf, ob die induktiven Schlüsse tatsächlich als logische (deduktive) Schlüsse rekonstruiert werden können. Die Diskussion in Carnap [110-07-35] scheint dies plausibel zu machen. Um eine Antwort hierauf geben zu können, bedarf es einer ausführlicheren Prüfung[247]. Eine weitere Aufgabe der Zukunftsphilosophie wäre laut Carnap die logische Analyse von Werten.[248] Das bringt uns zur nächsten These des CL.

These III: Einheitswissenschaftsthese. Wie wir gesehen haben, betrifft diese These die Möglichkeit einer vereinheitlichten Sprache der Wissenschaft. Deren Ziel wäre es, die Sprachen aller empirischen Wissenschaften auf einer deduktiven Basis zu konstruieren. Diese Sichtweise der Wissenschaft ist heutzutage nicht sehr in Mode. Dies bedeutet jedoch nicht, dass ein derartiges starkes Reduktionsprojekt nicht durchgeführt werden kann. Eine Vorstellung davon dient als Paradigma dafür, wie überhaupt in dieser Richtung weiter gedacht werden kann. Im *Aufbau* und in *Logische Syntax* werden gut strukturierte Versuche unternommen, diese Vereinigung der Wissenschaft zu konstruieren. Ein ähnlicher Aufbau in der semantischen Phase kann mit einer bestimmten

[247] Hier muss festgehalten werden, dass Carnap nicht für eine Rückkehr zum alten Deduktivismus plädiert. Bei induktiven Schlüssen können wir natürlich nicht mit Gewissheit schließen, was passieren wird. Wir schließen: es ist wahrscheinlich (oder unwahrscheinlich), dass aus diesen Tatsachen die und die anderen Tatsachen folgen werden. Es ist nur diese Wahrscheinlichkeit, die wir eigentlich erschließen, und der Schluss dieser Wahrscheinlichkeit ist selbst analytisch (genauer: er kann analytisch rekonstruiert werden, da wir die Wahrscheinlichkeit auf analytischem Wege zahlenmäßig angeben können). (Vgl. damit Hochkeppel, *Interview mit Rudolf Carnap,* S. 143f., auch als Film in https://www.youtube.com/watch?v=5GNzd8lDCrw.)

[248] Siehe das Interview mit Hochkeppel, welches in der vorherigen Fußnote erwähnt ist, S. 146.

Sprache (z. B. dem Aufbau der Gesamtsprache basierend auf der Typentheorie) erfolgen. Eine breitere Vereinheitlichung, z. B. verschiedene Formalisierungen der Mathematik und ihrer Modelle, hängt von einer vollständigen Entwicklung der allgemeinen Semantik ab, wie wir gesehen haben. Damit kommen wir zu These IV des CL.

These IV: Die Metaphysik kann ausgeschaltet werden. Carnaps allgemeine Haltung gegenüber der Metaphysik hat eine lange Vorgeschichte. In seinem Nachweis, dass die analytische Philosophie ihre Wurzeln in der kontinentalen Philosophie hat, zeigt Gottfried Gabriel den Zusammenhang zwischen Carnaps grundsätzlicher Haltung gegenüber der Metaphysik und der Lebensphilosophie von Wilhelm Dilthey, die Carnap durch seinen Lehrer Herman Nohl aufnahm[249]. Metaphysik wäre nach dieser Auffassung der Ausdruck eines Lebensgefühls, das sich fälschlich in Form einer logisch strukturierten Theorie darstellt. Auf Grund dieser Einstellung zu metaphysischen Systemen hat Carnap in seinem Denken durchgehend die Auffassung vertreten, dass die Metaphysik keine kognitive Bedeutung hat.

Im *Aufbau* präsentiert Carnap ein Konstitutionssystem, das in Bezug auf metaphysische Diskussionen und Themen neutral ist. In demselben Buch, Teil V[250] will Carnap zeigen, dass alles, was in metaphysischen Systemen legitim ist, konstituiert werden kann. Was über das Konstituierte hinausgeht, sei nicht rational und sollte seiner Meinung nach aus der Erkenntnissphäre ausgeschlossen werden. Diese Kritik gilt sowohl für traditionelle metaphysische Systeme (Realismus, Idealismus, Phänomenalismus) als auch für das, was Carnap „intuitive Metaphysik" nennt.

---

[249] Siehe Gabriel: *Introduction* (zu: *Carnap Brought Home)*, auch Gabriel und Schlotter: *Frege und die kontinentalen Ursprünge der analytischen Philosophie*, S. 227ff.

[250] Siehe Carnap: *Aufbau*, S. 252ff.

Betrachten wir die traditionelle metaphysische Frage, was die Dinge „unabhängig vom erkennenden Subjekt“ sind. In diesem Fall scheint es sich um eine Anschauung der Welt zu handeln, bei der danach gefragt wird, was das Wesen des Dinges ist („Ding an sich“). Diese Frage übersteigt aber die Kapazität unseres Intellekts. Im Fall der sogenannten „intuitiven Metaphysik“ Bergsons versuchen wir, den unmittelbaren Zugang (durch Intuition) zur Welt zu beschreiben, d. h. eine Art primär psychologisches Erlebnis zu beschreiben[251].

Trotz der Unterschiede zwischen diesen Formen der Metaphysik begehen beide laut Carnap den Fehler, etwas in die Erkenntnissphäre aufzunehmen, was nicht hinein gehört. Carnap erkennt an, dass die Lebenssphäre sehr breit ist und Elemente wie Kunst, religiöse Erfahrung und sogar mystische

---

[251] Siehe Carnap: *Aufbau*, § 182. In diesem Punkt ist ein Stück von Carnaps *Intellectual Autobiography* interessant, in dem Carnap von einem Gespräch mit Einstein spricht. Dort ist das Problem der Verwechslung von Erkenntnis/Erfahrung und Erlebnis erwähnt, und Bergson kommt in Spiel. Hier die Passage: “Once Einstein said that the problem of the Now worried him seriously. He explained that the experience of the Now means something special for man, something essentially different from the past and the future, but that this important difference does not and cannot occur within physics. That this experience cannot be grasped by science seemed to him a matter of painful but inevitable resignation. I remarked that all that occurs objectively can be described in science; on the one hand the temporal sequence of events is described in physics; and, on the other hand, the peculiarities of man’s experiences with respect to time, including his different attitude towards past, present, and future, can be described and (in principle) explained in psychology. But Einstein thought that these scientific descriptions cannot possibly satisfy our human needs; that there is something essential about the Now which is just outside of the realm of science. We both agreed that this was not a question of a defect for which science could be blamed, *as Bergson thought*. I did not wish to press the point, because I wanted primarily to understand his personal attitude to the problem rather than to clarify the theoretical situation. *But I definitely had the impression that Einstein’s thinking on this point involved a lack of distinction between experience and knowledge*. Since science in principle can say all that can be said, there is no unanswerable question left. But though *there is no theoretical question left, there is still the common human emotional experience, which is sometimes disturbing for special psychological reasons*.” (Carnap: *Intellectual Autobiography,* S. 37f.; meine Hervorhebungen)

Versenkung beinhalten kann. Die Erkenntnissphäre darf aber mit der Lebenssphäre nicht verwechselt werden[252].

Im Wesentlichen bleibt das im *Aufbau* angewandte Kriterium auch dann noch bestehen, nachdem Carnap das Verifikationsprinzip aufgegeben hatte: Es ist die Idee, dass alles legitime Wissen durch eine formal (logisch) korrekte Konstruktion ausgedrückt werden kann und muss. In der *Logischen Syntax* wird die Konstitutionsmethode durch die Methode der Unterscheidung von Objektsprache und Metasprache ersetzt. Betrachten wir zur Veranschaulichung der neuen Situation den Unterschied zwischen Logizismus (im Sinne Freges und Russells) und Formalismus mit Blick auf die Natur der Zahlen:

„Philosophische Sätze (Inhaltliche Redeweise.)	Syntaktische Sätze (formale Redeweise.)
21a. Die Zahlen sind Klassen von Klassen von Dingen.	21b. Die Zahlausdrücke sind Ausdrücke zweiter Stufe.
22a. Die Zahlen gehören zu einer eigenen, ursprünglichen Gegen -standsart.	22b. Die Zahlausdrücke sind Ausdrücke nullter Stufe.“[253]

Sätze wie 21a und 22a sind Beispiele für das, was Carnap „inhaltliche Redeweise“ nennt. 21a gibt die Position des Logizismus und 22a die Position des Formalisten wieder. Diese „inhaltliche“ Art der Formulierung kann zu endlosen metaphysischen Streitigkeiten darüber führen, „was die Zahlen denn eigentlich seien“. Sobald wir die formale Redeweise annehmen (also 21b und 22b), verschwindet das Problem, denn wir erkennen, dass wir uns in der Metasprache zwischen zwei Definitionsmöglichkeiten für bestimmte

[252] Siehe hierzu auch Gabriel: *Erkenntnis*, S. 68.
[253] Carnap: *Logische Syntax*, S. 227.

Ausdrücke entscheiden können, in diesem Fall für die Zahlausdrücke.

Die in *Logische Syntax* verwendete Methode wird in der semantischen Phase mit dem Argument verbessert, dass es möglich ist, ontologische (metaphysische) Probleme mit Hilfe der Unterscheidung zwischen internen und externen Fragen zu lösen[254]. Gemäß Carnap sollten sich zwei Personen, wenn sie wissen wollen, ob ihre Ansichten über eine bestimmte Art von Gegenständen übereinstimmen, zuerst darüber verständigen, dass sie sich auf denselben Gegenstand beziehen. Das bedeutet, sie müssen sich zunächst dazu entschließen, eine gemeinsame Sprache anzuwenden. Nach der Wahl der Sprache können viele Fragen, beispielweise über die Existenz, analytisch entschieden werden. Auf diese Weise haben Fragen wie „gibt es eine Primzahl zwischen 7 und 13?" eine Antwort. Andererseits sind Fragen wie „gibt es wirklich Zahlen?" bedeutungslos. Die erste Frage ist ein Beispiel für eine „interne Frage" in der Terminologie Carnaps, während die zweite als „scheintheoretisch" betrachtet werden darf, da sie keinen *kognitiven Inhalt* besitzt. Alles das, was einen kognitiven Inhalt besitzt, ist formal ausdrückbar, und nur das, was ausdrückbar ist, ist mitteilbar, gehört also zur Erkenntnissphäre.

Unsere Beschreibung des Carnapschen Standpunkts ermöglicht es auch, Carnaps Antwort auf Beth zu verstehen. Beth argumentierte[255], dass viele der Probleme und Begriffe, mit denen sich die Metaphysik befasst, eng mit den Themen der Semantik zusammenhängen. Darauf antwortet Carnap wie folgt:

"[…] Beth discusses the problem of so called *ontological commitments*. I believe today that there is a good deal of truth in his

[254] Siehe Carnap: *Empiricism, Semantics and Ontology*.
[255] Beth: *Carnap on Constructed Systems*, S. 497.

> remark that the problems of traditional metaphysics (disregarding here the often anti-scientific attitude in the movement of German idealism) are often closely related to problems of logic and semantics. […]. The earlier anti-metaphysical formulations in our movement, especially during the Vienna period, were often too general."[256]

In dieser Passage erkennen wir die Position des reifen Carnap. In metaphysischen Systemen wurden oft legitime Problemstellungen behandelt (Probleme wie die der Bezeichnung, der Wahrheit, der logischen Form usw.). Oft fehlte es jedoch innerhalb dieser Systeme an den richtigen Werkzeugen oder Methoden zur Lösung dieser Probleme. Legitime Fragen traten in Verbindung mit metaphysischen Scheinproblemen auf. Sobald die metaphysischen Aspekte isoliert werden, bleibt das übrig, was wissenschaftlichen Charakter hat: die logischen und semantischen Aspekte dieser Theorien. In diesem Sinne behalten die alten philosophischen Theorien ihren Wert bei der Klärung oder sogar bei der Lösung moderner logischer und semantischer Probleme.

[256] Carnap: *Replies*, S. 933.

Literaturverzeichnis

Awodey, S. (2009). *Explicating 'analytic'*. In: Wagner (2009), S. 131-143.

- (2007). *Carnap's Quest for Analyticity*. In: Friedman, and Creath (2007), S. 226-248.

- /Carus, A. W. (2009). *From Wittgenstein's Prison to the Boundless Ocean: Carnap's Dream of Logical Syntax*. In: Wagner (2009), S. 79-108.

Bar Hillel, Y. (1951). *A Note on State-Descriptions*; in: Philosophical Studies (Minneapolis) vol. 2 no. 5, S. 72-75.

Beth, E. W. (1963). *Carnap's Views on the Advantages of Constructed Systems Over Natural Languages in the Philosophy of Science*. In: Schilpp (1963), S. 469-502.

Bohnert, H. (1975). *Carnap's Logicism*; in: Hintikka, J. (Hg.): Rudolf Carnap, Logical Empiricist. Dordrecht: Reidel, S. 183-216.

Carnap, R. (1927). *Eigentliche und Uneigentliche Begriffe*; in: Symposium I, S. 355-374.

- (1928). Der Logische Aufbau der Welt. Leipzig: Meiner.

- (1930a). *Die Alte und die Neue Logik*; in: Erkenntnis 1, S. 12-26, Neudruck in: Carnap (2004), S. 63-80.

- (1930b). *Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik*; in: Erkenntnis 1, S. 303-307.

- (1930c). *Die Mathematik als Zweig der Logik*; in: Blätter für Deutsche Philosophie, Bd. 4, H. 3/4, S. 298-310.

- (1931a). *Die Logizistische Grundlegung der Mathematik*; in: Erkenntnis 2, S. 91-105.

- (1931b). *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik*; in: Erkenntnis 2, S. 135-149.

- (1932a). *Die Physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft*; in: Erkenntnis 2, S. 432-465.

- (1932b). *Psychologie in Physikalischer Sprache*; in: Erkenntnis 3, S. 107-142.

- (1932c). *Über Protokollsätze*; in: Erkenntnis 3, S. 215-228.
- (1934a). Die Logische Syntax der Sprache. Wien: Springer.
- (1934b). *Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik*; in: Monatshefte für Mathematik u. Physik 41, S. 263-284.
- (1935). *Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik*; in: Monatshefte für Mathematik u. Physik 42, S. 163-190.
- (1937). The Logical Syntax of Language. London: Kegan Paul. (Übersetzung von Carnap (1934a) von Smeathon A., mit Übersetzungen von Carnap (1934b) and Carnap (1935).)
- (1942). Introduction to Semantics. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- (1950a). *Empiricism, Semantics, and Ontology*; in: Revue Internationale de Philosophie, 4, S. 20-40. Neudruck in: Carnap (1956), S. 205-221.
- (1950b). The Logical Foundations of Probability. Chicago: The University of Chicago Press.
- (1951). *The Problem of Relations in Inductive Logic*; in: Philosophical Studies (Minneapolis), vol. 2, no. 5, S. 75-80.
- (1956). Meaning and Necessity. Chicago: Chicago University Press.
- (1963). Intellectual Autobiography; in: Schilpp (1963), S. 1-84.
- (2000). Untersuchungen zur Allgemeinen Axiomatik, hg. von Bonk, T./Mosterín, J. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- (2004). Scheinprobleme in der Philosophie und andere metaphysikkritische Schriften, hg. von Mormann, T. Hamburg: Meiner.

Copi, I. M. (1971). The Theory of Logical Types. London: Routledge & Kegan Paul.

Creath, R. (1990). *The Unimportance of Semantics*; in: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, Vol. 2, S. 405-416.

- (1992). *Carnap's Conventionalism*; in: Synthese 93, S. 141-165.
- (1999). *Carnap's Move to Semantics: Gains and Losses*; in: Wolénski, J. and Köhler E. (Hg.): Alfred Tarski and the Vienna Circle. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Press, S. 65-76.

Carus, A. (2007). Carnap and Twentieth-Century Thought. Cambridge: Cambridge University Press.

Dawson Jr., J. W. (1986). *Introductory notes to Gödel 1931a, 1932e, 1932f, und 1932g*; in: Gödel (1986), S. 196-199.

Fraenkel, A. (1928). Einleitung in die Mengenlehre. Berlin und Heidelberg: Springer.

Frege, G. (1879). Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle a. S: Nebert. Neudruck in: Frege (1998).
- (1884). Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau: Koebner. Neudruck in Frege (2000).
- (1891). Funktion und Begriff. Jena: Pohle. Neudruck in: Frege (1990), S. 125-142.
- (1892-1895). *Ausführungen über Sinn und Bedeutung*; in: Frege (1983), S. 128-136.
- (1893/1903). Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet, 2 Bde., Jena: Pohle. Neudruck in: Frege (1998a).
- (1976). Wissenschaftlicher Briefwechsel, hg., bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Gabriel, G./Hermes, H./Kambartel, F./Thiel, C./Veraart, A. Hamburg: Meiner.
- (1983). Nachgelassene Schriften, hg. von Hermes, H./Kambartel, F./Kaulbach, F. Hamburg: Meiner.
- (1990). Kleine Schriften, hg. und mit Nachbemerkungen zur neuen Auflage von Angelelli, I. Hildesheim: Olms.
- (1998). Begriffsschrift und andere Aufsätze. Mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen hg. von Angelelli, I. Hildesheim/Zürich/New York: Olms.

- (1998a). Grundgesetze der Arithmetik, Bde. I/II. Hildesheim/Zürich/New York: Olms.
- (2000). Die Grundlagen der Arithmetik, hg. von Joachim Schulte. Reclam: Stuttgart.

Friedman, M. (1999). Reconsidering Logical Positivism. Cambridge: Cambridge University Press.

- /Creath, R. (Hg.) (2007). The Cambridge Companion to Carnap. Cambridge: Cambridge University Press.

Frost-Arnold, G. (2006). Carnap, Tarski, and Quine's Year Together: Logic, Science, Mathematics. Doctoral Dissertation: University of Pittsburgh.

Gabriel, G. (2007). *Carnap and Frege*; in: Friedman and Creath (2007), S. 65-80.

- (2000). *Logik und Metaphysik in Freges Philosophie der Mathematik*; in: Gottlob Frege. Werk und Wirkung, hg. von Gabriel, G. und Dathe, U. Paderborn: Mentis, S. 25-38.
- (2015). Erkenntnis. Berlin/Boston: De Gruyter.
- /Schlotter, S. (2017). Frege und die kontinentalen Ursprünge der analytischen Philosophie. Münster: Mentis.

Gödel, K. (1944). *Russell's Mathematical Logic*. In: Schilpp (1944), S. 125-153.

- (1986). Collected Works, Vol I. *Publications 1929-1936*, hg. von Feferman, S./Dawson Jr., J. W./Kleene, S. C./Moore, G. H./Solovay, R. M./Van Heijenoort, J. Oxford: Oxford University Press.
- (1995). Collected Works, Vol. III. *Unpublished essays and Lectures*, hg. von Feferman, S. /Dawson Jr., J. W./Goldfarb, W./Parsons, C./Solovay, R. N. Oxford: Oxford University Press.
- (2003). Collected Works, Vol. IV. *Correspondence A-G*, hg. von Feferman, S. /Dawson Jr., J. W./Goldfarb, W./Parsons, C./Sieg, W. Oxford: Oxford University Press.

Grattan-Guinness, I. (2000). The Search for Mathematical Roots. The Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Hahn, H. u. a. (1931). *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik*; in: Erkenntnis, Bd. 2, Heft 2/3, S. 135-149.

Hardcastle, G. L., Richardson, A. (Hg.) (2000). Logical Empiricism in North America. London and Minneapolis: University of Minnesota Press.

Hilbert, D. (1903). Grundlagen der Geometrie. Leipzig: Teubner. Neudruck in: Hilbert (1956).

- (1918). *Axiomatisches Denken*; in: Mathematische Annalen 78, S. 405-415.

- (1923). *Die logischen Grundlagen der Mathematik*; in: Mathematische Annalen 88, S. 151-165.

- (1927). *Über das Unendliche*; in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 36, S. 201-215.

- (1928). *Die Grundlagen der Mathematik*; in: Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 6, S. 65-85.

- (1933). Gesammelte Abhandlungen, zweiter Band. Berlin: Julius Springer.

- (1956). Grundlagen der Geometrie (Achte Auflage, mit Revisionen und Ergänzungen von Dr. Paul Bernays). Stuttgart: Teubner.

Hochkeppel, W. (1993). *Interview mit Rudolf Carnap (1964)*; in: Carnap, Mein Weg in die Philosophie, hg. von Hochkeppel, W. Stuttgart: Reclam, S. 134-148.

Kant, I. (1988). Kritik der reinen Vernunft. Hamburg: Meiner.

Kienzler, W. (2009). Begriff und Gegenstand. Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

Kemeny, J. (1951). *Extensions of the Methods of Inductive Logic*; in: Philosophical Studies 2, S. 38-42.

Mac Lane, S. (1938). *Carnap on Logical Syntax*; in: Bulletin of the American Mathematical Society, 41, S. 171-176.

Neurath, O. (1932). *Protokollsätze*; in: Erkenntnis 3, 204-214.

Quine, W. V. O. (1951). *Two Dogmas of Empiricism*. Repr. in: W.V.O Quine (1953), S. 20-46.

- (1953). From a Logical Point of View. New York: Harper.
- *Carnap and Logical Truth*. In: Schilpp (1963), S. 385-406.

Ramsey, F. P. (1926). *The Foundations of Mathematics*; in: Proceedings of the London Mathematical Society, 25, S. 338-384.

Russell, B. (1903). The Principles of Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

- /Whitehead. A. N. (1925). Principia Mathematica. Cambridge: Cambridge University Press.

Schilpp, P. (Hg.) (1944). The Philosophy of Bertrand Russell. The Library of Living Philosophers, Bd. 5, Evanston and Chicago: Northwestern University.

- (Hg.) (1963). The Philosophy of Rudolf Carnap. The Library of Living Philosophers, Bd. 11, La Salle IL: Open Court.

Schlick, M. (2008). Kritische Gesamtausgabe, Abteilung I: Veröffentlichte Schriften, Band 6. Die Wiener Zeit. Hg. von Stadler, F./Wendell, H. J. Wien/New York: Springer.

- (1926). *Erkennen, Erleben, Metaphysik*; in: Schlick (2008), S. 33-54.
- (1935). *Sind die Naturgesetze Konventionen?*; in: Schlick (2008), S. 759-772.
- Schmidt, A. (1933). *Zu Hilberts Grundlegung der Geometrie*. In: Hilbert (1933), S. 404-414.

Sinaceur, H. (2001). *Alfred Tarski: Semantic Shift, Heuristic Shift in Metamathematics*; in: Synthese, 126, S. 49-65.

Domingues Stival, S. (2004). Alfred Tarski: Consequência Lógica, Noções Lógicas e Formas Lógicas. Master Dissertation: Puc-Rio. Adresse: http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br

Tarski, A. (1933a). *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*; in: Studia Philosophica I, S. 261-405.

- (1933b). *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit*; in: Tarski (1986a), S. 619-63

- (1935a). *Über den Begriff der Logischen Folgerung*; in: Tarski (1986b), S. 269-282.
- (1935b). *Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien*; in: Tarski (1986b), S. 203-212.
- (1983). Logic, Semantics, Metamathematics. Revision of the first edition by Woodger, J. H. (1956) by Corcoran, J., Indianapolis: Hackett Publishing Company.
- (1986). *What Are Logical Notions?*; in: History and Philosophy of Logic 7, S. 143-154.
- (1986a). Collected Papers. Vol. 1. Basel/ Boston/ Stuttgart: Birkhäuser.
- (1986b) Collected Papers. Vol. 2. Basel/ Boston/ Stuttgart: Birkhäuser.

van Heijenoort, J. (Hg.) (1999). From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic. 1879-1931. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- (1999). Introduction to the English translation of Gödel's paper *"Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I"*; in: Van Heijenoort (1999) S. 592-595.

Wagner, P. (Hg.) (2009). Carnap's Logical Syntax of Language. Houndmills, Basingstoke, Hampshire: Palgrave Macmillan.
- (2012) (Hg). Carnaps Ideal of Explication and Naturalism. Houndmills, Basingstoke, Hampshire: Palgrave Macmillan.

Wang, H. (1974). From Mathematics to Philosophy. New York: Humanities Press.

Wittgenstein, L. (1984). *Tractatus logico-philosophicus*. Werkausgabe, Band 1. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wolénski, J. and Köhler, E. (Hg.) (1999). Alfred Tarski and the Vienna Circle. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Zitierte Quellen aus Carnaps Nachlass

-[089-64-01] *Die Neue Grundlegung der Logik* (Davos), 1929.

-[089-64-02] *Die Neue Grundlegung der Logik* (Davos), 1929.

-[110-07-34] *Der tautologische Charakter des Schließens*, 20. November, 1930.

-[110-07-35] *Der tautologische Charakter des Schließens* (Warschau), 20. November 1930 (Ausarbeitung von [110-07-34]. Auf der rechte Seite des Blattes steht: für Vortrag in Warschau 1. Dezember 1930).

-[090-15-03-1,2]. *Gespräch mit Tarski über Monomorphie*, 22.2.1930.

-[081-07-14, 15] *Zirkelprotokolle, 1931. Diskussionen vom 7. bis 21. Mai*.

-[081-07, 17, 18, 19] *Referate über Metalogik* (Wien), 1931.

-[081-07-20] *Diskussion von ‚Referate über Metalogik‘* (Wien), 1931.

-[110-03-22] *Die Physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaften*, 1930-1932.

-[110-04-08, 09] *Manuskript über Metalogik* (Schemata). 1931-1933.

-[102-70-11-1,2] Brief von Schlick an Carnap vom 14. November 1935.

-[102-70-10-1,2] Antwort von Carnap auf [102-70-11-1,2] vom 04. Dezember 1935.

-[089-06-03] *L-Truth, Älteres, auch Gespräch mit Tarski*. Notizen vom 06.09.1939.

-[102-63-09] *Für die Diskussion mit Russell*. *In Logikgruppe 18.10.40*.

-[086-17-02] Manuskript von *Notes on Semantics* mit Änderung in dem Typensystem zwischen den Seiten 25-46, 1956 und 1959.

-[086-04-13] Brief von Carnap an die Teilnehmer seines Seminars mit Notizen über Änderungen in dem System seines Manuskripts *Notes on Semantics* [086-17-02], 1960.

-[090-15-02] Notizen von Carnap zu Tarskis Vortrag *What Are*

Logical Notions?, mit der Datierung: Vortrag 23.11.65, Phil. Coll., UCLA.

Name/Anschrift
Stefano Domingues Stival
wohnhaft in: Rua das Begônias, 67A, Jardim Holanda, Holambra, São Paulo, Brasil.

Ehrenwörtliche Erklärung zu meiner Dissertation
mit dem Titel: „Logizismus und Toleranzprinzip“

Hiermit erkläre ich, dass ich die beigefügte Dissertation selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel genutzt habe. Alle wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen habe ich als solche gekennzeichnet.

Ich versichere außerdem, dass ich die beigefügte Dissertation nur in diesem und keinem anderen Promotionsverfahren eingereicht habe und, dass diesem Promotionsverfahren keine endgültig gescheiterten Promotionsverfahren vorausgegangen sind.

Holambra, 16.01.2020

Ort, Datum

Unterschrift