



Technische Universität Ilmenau  
Institut für Mathematik

---

# Operatortheorie für $\mathcal{PT}$ -symmetrische Quantenmechanik

---

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktor  
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften  
der Technischen Universität Ilmenau

**von M. Sc. Florian Leben**

1. Gutachter: Prof. Dr. Carsten Trunk
2. Gutachter: Prof. Dr. Volodymyr Derkach
3. Gutachter: Prof. Dr. Petr Siegl

Tag der Einreichung: 13. September 2019

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 08. November 2019

urn:nbn:de:gbv:ilm1-2019000405



# Zusammenfassung

Eine Verallgemeinerung der klassischen Quantenmechanik stammt von C. M. Bender und S. Boettcher welche alle Axiome der Quantenmechanik übernahmen, außer der Bedingung, dass der Hamiltonoperator Hermitesch ist. Sie fordern stattdessen, dass der Hamiltonoperator  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch sein soll. Hier sind  $\mathcal{P}$  beziehungsweise  $\mathcal{T}$  die Parität und die Zeitumkehr. Besonderes Augenmerk liegt auf den speziellen Hamiltonoperatoren

$$H = p^2 - (iz)^{N+2}, \quad z \in \Gamma$$

auf einer Kontur  $\Gamma$  und mit einer natürlichen Zahl  $N$ . In der vorliegenden Arbeit behandeln wir die Operatoren  $H$ , sowie Hamiltonoperatoren mit einem allgemeineren  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Potential  $q$ , erklärt auf einer keilförmigen Kontur  $\Gamma$ . Das dazugehörige Eigenwertproblem hat nach einer Parametrisierung der Kontur die Gestalt

$$-e^{\mp 2i\phi} w''(x) + q_{\pm}(x)w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}.$$

Für das zu  $H$  gehörige Problem gilt  $q_{\pm}(x) = -(ix)^{N+2} e^{\pm(N+2)i\phi}$ . Dies sind Sturm-Liouville Differentialgleichung auf  $(-\infty, 0]$  und  $[0, \infty)$ , welche wir mit operatortheoretischen Methoden behandeln. Wir geben, mittels WKB-Analyse ein Grenzpunktfallkriterium an und für das spezielle Potential aus  $H$  eine vollständige Klassifikation bezüglich der Weyl'schen Grenzpunkt-/Grenzkreisfall Alternative. Wir definieren die zu den obigen Differentialgleichungen gehörenden minimalen und maximalen Operatoren, welche zueinander adjungiert bezüglich der komplexen Konjugation sind. Diese Operatoren sind auf den reellen Halbachsen definiert und wir fügen diese zu dem minimalen und maximalen Operator auf der ganzen Achse zusammen, die wiederum zueinander adjungiert bezüglich des neuen inneren Produktes  $[\cdot, \cdot] := (\mathcal{P}\cdot, \cdot)$  sind. Mithilfe einer Kopplungsbedingung  $G \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  in Null erhalten wir den Operator  $A_G$ , eine Einschränkung des maximalen Operators. Diese Bedingung besitzt Freiheitsgrade und wir geben Bedingungen an  $G$  an, sodass  $A_G$   $\mathcal{PT}$ -symmetrisch oder  $[\cdot, \cdot]$ -selbstadjungiert ist. Dafür konstruieren wir ein Randtripel. Außerdem berechnen wir die Weyl-Funktion und erhalten somit eine Bedingung für die Existenz und Lage der Eigenwerte von  $A_G$ . Mithilfe der WKB-Analyse untersuchen wir diese Bedingung und können Bereiche der komplexen Ebene ausschließen, in denen sich kein Spektrum befindet. Ferner besitzt  $A_G$  strukturell dieselben Spektraleigenschaften wie die entsprechenden Operatoren auf den Halbachsen.



# Abstract

A generalisation of conventional quantum mechanics was coined by C. M. Bender and S. Boettcher. They adopted all axioms of quantum mechanics except the one that assumes the Hamiltonian to be Hermitian. Instead, it is assumed that the Hamiltonian is  $\mathcal{PT}$ -symmetry, where  $\mathcal{P}$  is the spatial reflection and  $\mathcal{T}$  is the time reversal. The authors consider a non-Hermitian Hamiltonian corresponding to

$$H = p^2 - (iz)^{N+2}, \quad z \in \Gamma,$$

where  $N$  is a natural number and  $z$  runs along a complex contour  $\Gamma$ . In the present thesis, we consider the operator  $H$  and more general  $\mathcal{PT}$ -symmetric Hamiltonians defined on a wedge-shaped contour  $\Gamma$ . After a parametrisation of  $\Gamma$ , the associated eigenvalue problems

$$-e^{\mp 2i\phi} w''(x) + q_{\pm}(x)w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}$$

are Sturm-Liouville differential equations on  $(-\infty, 0]$  and on  $[0, \infty)$ , in which the corresponding potential of  $H$  yields to  $q_{\pm}(x) = -(ix)^{N+2}e^{\pm(N+2)i\phi}$ . With the help of asymptotic analysis we give a limit point criterion and for the potential of  $H$  a complete limit point/limit circle classification. Corresponding to the above differential equations we define the minimal and the maximal operator, which are adjoint with respect to complex conjugation. These operators are defined on the real semi-axis and we merge them to the minimal operator and the maximal operator on the full axis, which are adjoint with respect to the new inner product  $[\cdot, \cdot] := (\mathcal{P}\cdot, \cdot)$ . With a coupling condition  $G \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  in zero we obtain an operator  $A_G$ , which is a restriction of the maximal operator. We give conditions on  $G$ , such that  $A_G$  is  $\mathcal{PT}$ -symmetric or  $[\cdot, \cdot]$ -self-adjoint. To this end, we construct a boundary triple. Moreover we calculate the Weyl function and thus obtain a condition for the existence and position of eigenvalues of  $A_G$ . With asymptotic analysis we also can exclude areas of the complex plane, where  $A_G$  has no eigenvalues. Furthermore, characteristics of the spectrum of  $A_G$  match structurally with the characteristics of the operators defined on the semi axis.



# Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt und motiviert haben.

Zuerst gebührt mein Dank Herrn Professor Carsten Trunk für die Betreuung und Begutachtung meiner Arbeit. Herzlichen Dank für die hilfreichen Anregungen, die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit und für die ausgiebige Unterstützung, Zeit und Mühen.

Ich bedanke mich bei der Carl-Zeiss-Stiftung und der TU Ilmenau für die finanzielle Unterstützung meiner Forschung.

Ebenfalls möchte ich mich bei meinen Kommilitonen und Kollegen, insbesondere M. Sc. Hannes Gernandt, M. Sc. Philipp Schmitz und M. Sc. Jonas Witschel bedanken, die mir mit viel Geduld, Ideen und Hilfsbereitschaft zur Seite standen.

Ich danke meiner Familie, allen voran meinen Eltern Wolfgang und Iris Müller und meinen Großeltern Peter und Gudrun Kretschmar, die mir mein Studium durch ihre Unterstützung ermöglicht, mich gefördert und mich immer ermutigt haben. Abschließend möchte ich mich bei meiner Frau Dr. Leslie Leben für die Geduld, den Rückhalt und ihr stets offenes Ohr von ganzem Herzen bedanken.

Oebisfelde, September 2019

Florian Leben



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Kreinräume</b>	<b>17</b>
2.1	Kreinräume und Operatoren . . . . .	17
2.2	Lineare Relationen und Randtripel . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Differentialoperatoren zweiter Ordnung</b>	<b>25</b>
3.1	Das reguläre Problem . . . . .	27
3.2	Ein regulärer Endpunkt . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Asymptotik von Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung</b>	<b>35</b>
4.1	Die Funktionen $s$ hat nur Werte in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . . . . .	35
4.2	Die Funktionen $s$ hat nur Werte in $(-\infty, 0)$ . . . . .	47
<b>5</b>	<b><math>\mathcal{PT}</math>symmetrische Hamiltonoperatoren auf <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>51</b>
5.1	Maximale und minimale Operatoren auf den Halbachsen . . . . .	55
5.2	Maximale und minimale Operatoren auf der ganzen Achse . . . . .	59
5.3	Operatortheoretischer Ansatz zu $\mathcal{PT}$ symmetrischen Hamiltonoperatoren	62
5.4	Berechnung der Weyl-Funktion . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Bender-Boettcher Potentiale</b>	<b>71</b>
6.1	Grenzpunkt- und Grenzkreisfallklassifikation für Bender-Boettcher Potentiale . . . . .	73
6.2	Abschätzung des Spektrums . . . . .	76
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>85</b>



# 1. Einleitung

In der klassischen Quantenmechanik sind die Hamiltonoperatoren hermitesche beziehungsweise selbstadjungierte Operatoren. Diese Eigenschaft wird in der neueren Forschung als zu restriktiv angesehen. In Jahr 1998 untersuchten C.M. Bender und S. Boettcher in ihrer wegweisenden Arbeit [12] eine große Klasse nicht-hermitescher Hamiltonoperatoren und erkannten mithilfe numerischer Berechnung, dass diese reelles Spektrum besitzen. Dies war der Beginn einer nicht-hermiteschen Quantenmechanik, siehe [12, 13, 19, 49] oder für einen Überblick [9, 11, 15, 42]. Es wurden dabei alle Axiome der klassischen Quantenmechanik übernommen, außer jenes, welches die Hermitizität des Hamiltonoperators forderte. Stattdessen sollten die Hamiltonoperatoren  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch sein. In [12] wird der nicht-hermitesche Operator bezüglich

$$p^2 - (iz)^{N+2}, \quad z \in \Gamma \tag{1.1}$$

betrachtet, wobei  $N$  eine natürliche Zahl größer als Null ist. Im Gegensatz zur klassischen Quantenmechanik durchläuft  $z$  eine komplexe Kontur  $\Gamma$ . Im Allgemeinen kann man nicht erwarten, dass der Operator zu (1.1) hermitesch im Hilbertraum  $L^2$  ist und somit reelles Spektrum besitzt.

Hamiltonoperatoren der Form (1.1) sind nicht hermitesch, erfüllen jedoch eine antilineare  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie, welches die gemeinsame Invarianz unter gleichzeitiger Raumreflektion  $\mathcal{P}$  und Zeitumkehr  $\mathcal{T}$  darstellt. Die Bedingung, dass der Hamiltonoperator  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch sein soll, ist eine physikalische Voraussetzung, da sowohl  $\mathcal{P}$  als auch  $\mathcal{T}$  Elemente der homogenen Lorentzgruppe, als Lorentz-Boost und Raumreflektion sind. Heutzutage existieren eine Vielzahl von Arbeiten in diversen Forschungsbereichen über  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren, unter anderem [10, 11, 16, 19, 30, 39, 43, 48, 49]. Zum Beispiel wurde eine enge Verbindung zwischen Metamaterialien und  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Operatoren entdeckt, da diese Operatoren in der Lage sind negative Permeabilität und Permittivität miteinzubeziehen, vergleiche [30, 39, 43].

In (1.1) liegt die Kontour  $\Gamma$  in Regionen der komplexen Ebene, sodass die Eigenfunktionen  $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  von (1.1) exponentiell gegen null gehen, wenn  $|z| \rightarrow \infty$  entlang  $\Gamma$ . Die Regionen der komplexen Ebene, in denen die Lösungen von (1.1) exponentiell verschwinden sind Sektoren, so genannte *Stokes-Sektoren*. Der Öffnungswinkel dieser Sektoren,

## 1 Einleitung

und somit die Anzahl der Sektoren, hängt nur von der Zahl  $N$  ab, siehe Abbildung 1.1. Die Sektoren werden von Strahlen, genannt *Stokes-Linien* begrenzt, siehe [9, 12, 13]. Die Kontur  $\Gamma$  ist so gewählt, dass sie in zwei Sektoren liegt, so dass mit  $z \in \Gamma$  auch  $-\bar{z} \in \Gamma$  erfüllt ist, das heißt  $\Gamma$  ist symmetrisch bezüglich der Wirkung von  $\mathcal{PT}$  in dem Sinne, dass für die Funktion  $f$ , die auf  $\Gamma$  erklärt ist, auch die Funktion  $\mathcal{PT}f$  über  $\Gamma$  erklärt ist. Sowohl die Stokes-Sektoren, als auch die Stokes-Linien sind symmetrisch bezüglich der Wirkung von  $\mathcal{PT}$ .

Wir wollen diese Zweiteilung in Stokes-Sektoren und Stokes-Linien mit der klassischen Grenzpunkt-/Grenzkreisfall Alternative aus der Sturm-Liouville Theorie mit komplexen Potential in Beziehung zu setzen.

Aus Gründen der Vereinfachung nutzen wir die spezielle Kontur (siehe [6])

$$\Gamma := \{z = xe^{i\phi \operatorname{sgn}(x)} : x \in \mathbb{R}\}, \quad \phi \in (-\pi/2, \pi/2),$$

siehe Abbildung 1.1.

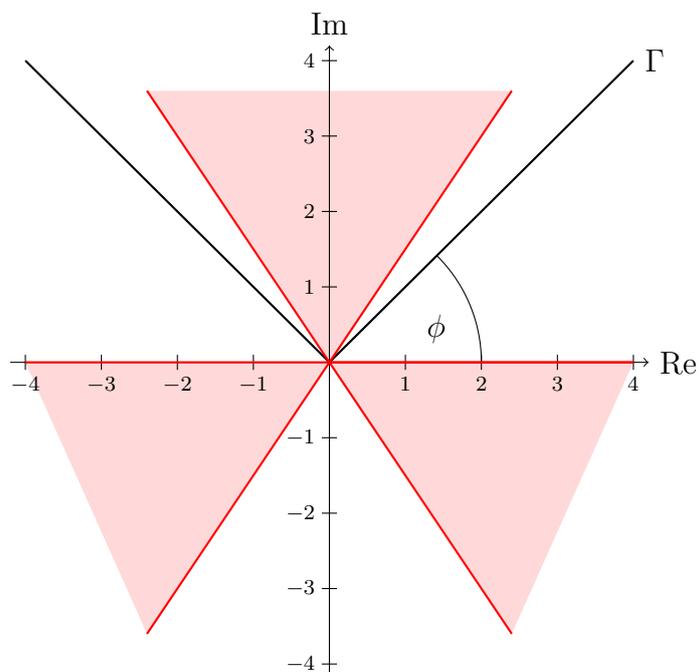


Abbildung 1.1: Kontour  $\Gamma$  in der komplexen Ebene mit Öffnungswinkel  $\phi$  und je 6 Stokes-Sektoren und Stokes-Linien für  $N = 2$

Somit führt (1.1) auf das zugehörige Eigenwertproblem

$$-y''(z) - (iz)^{N+2}y(z) = \lambda y(z), \quad z \in \Gamma.$$

Mit der Parametrisierung

$$z(x) := xe^{i\phi \operatorname{sgn}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

erhalten wir Sturm-Liouville Differentialgleichungen auf  $[0, \infty)$  und auf  $(-\infty, 0]$ ,

$$\tau_+ w(x) := -e^{-2i\phi} w''(x) - (ix)^{N+2} e^{(N+2)i\phi} w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (1.3)$$

$$\tau_- w(x) := -e^{2i\phi} w''(x) - (ix)^{N+2} e^{-(N+2)i\phi} w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \mathbb{R}_-. \quad (1.4)$$

Es ist unser Ziel (1.3) und (1.4) mit operatortheoretischen Methoden zu behandeln. Dies stellt einen neuen Ansatz verglichen mit der oben zitierten Literatur aus der theoretischen Physik dar. Darüberhinaus lassen wir allgemeinere Potentiale  $\mathbf{q} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ , als jenes  $-(iz)^{N+2}$  in (1.1) zu, sodass wir mit  $q_{\pm}(x) := \mathbf{q}(xe^{i\phi \operatorname{sgn}(x)})$ ,  $x \in \mathbb{R}$  analog zu oben die Sturm-Liouville Differentialgleichungen auf  $[0, \infty)$  beziehungsweise auf  $(-\infty, 0]$ ,

$$\tau_+ w(x) := -e^{-2i\phi} w''(x) + q_+(x)w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (1.5)$$

$$\tau_- w(x) := -e^{2i\phi} w''(x) + q_-(x)w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \mathbb{R}_- \quad (1.6)$$

erhalten.

Die Gleichungen (1.5) und (1.6) entsprechen einem Sturm-Liouville Problem  $-(py')' + qy = \lambda y$  mit **nicht-reellem**  $p$  und **nicht-reellem**  $q$  auf einer Halbachse. Bevor wir diesen Fall näher betrachten, rufen wir uns die klassische Sturm-Liouville Theorie auf einer Halbachse (siehe zum Beispiel [34, 54]) für **reellwertige**, lokal summierbare Koeffizienten  $p$ ,  $q$  und regulärem Randpunkt 0 ins Gedächtnis. Die klassische Sturm-Liouville Theorie für **reelle**  $p, q$  folgt (grob) dem folgenden Schema:

- (a) Man bestimme die Anzahl der  $L^2$ -Lösungen von  $-(py')' + qy = \lambda y$  mit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Nach der bekannten Weyl'schen Alternative erhalten wir entweder eine oder zwei linear unabhängige  $L^2$ -Lösungen. Die entsprechenden Fälle nennt man dann Grenzpunktfall (falls genau eine Lösung existiert) oder Grenzkreisfall (für zwei Lösungen).
- (b) Man definiere den maximalen und minimalen Operator bezüglich des entsprechenden Differentialausdruckes  $-(py')' + qy$ . Grob gesagt verschwinden die Elemente des Definitionsbereiches des minimalen Operators am (regulären) Randpunkt Null und die Elemente des Definitionsbereiches des maximalen Operators benötigen keine Randbedingungen.
- (c) Man zeigt, dass der minimale Operator symmetrisch ist und sein Adjungierter der maximale Operator ist. Im Grenzpunktfall hat der minimale Operator Defekt eins, im Grenzkreisfall ist sein Defekt zwei.
- (d) Beschreibe alle selbstadjungierten Erweiterungen  $A_{\theta}$  des minimalen Operators mittels eines geeigneten Parameters  $\theta$  (abhängig von der gewählten Beschreibung) und

## 1 Einleitung

löse das Spektralproblem  $A_\theta y = \lambda y$ . So ist zum Beispiel in [53] im Grenzpunktfall  $\theta$  eine reelle Zahl, während im Grenzkreisfall  $\theta$  ein Paar  $2 \times 2$  Matrizen ist.

Dieses Vorgehen ist seit dem bahnbrechenden Paper von A. Weyl [54] überaus erfolgreich und führt zu dem noch immer sehr aktiven mathematischen Forschungsgebiet der Erweiterungstheorie, siehe zum Beispiel die Monographien [27, 29, 36, 47, 55].

Eine analoge Theorie wurde für **nicht-reelles** Potential  $q$  von A.R. Sims [51] bewiesen. Zuerst wurde Punkt (a) von A.R. Sims [51] für  $\text{Im } q \leq 0$  erweitert. Diese Erweiterung besagt, dass zumindest eine Lösung von (1.5) im mit dem Gewicht  $\text{Im}(\lambda - q)$  gewichteten Raum  $L^2(0, \infty, \text{Im}(\lambda - q))$  existiert. Außerdem ist diese Lösung für  $\lambda$  aus der oberen komplexen Halbebene in  $L^2(0, \infty)$ . Im Gegensatz zur obigen Alternative von Weyl aus Punkt (a), gibt es nun drei mögliche Fälle:

1. Grenzpunktfall I: Es existiert (bis auf eine komplexe Konstante) genau eine Lösung von  $-(py')' + qy = \lambda y$ , welche sowohl in  $L^2(0, \infty, \text{Im}(\lambda - q))$  als auch in  $L^2(0, \infty)$  ist.
2. Grenzpunktfall II: Es existiert eine Lösung in  $L^2(0, \infty, \text{Im}(\lambda - q))$ , aber alle Lösungen sind in  $L^2(0, \infty)$ .
3. Grenzkreisfall: Alle Lösungen sind sowohl in  $L^2(0, \infty, \text{Im}(\lambda - q))$  als auch in  $L^2(0, \infty)$ .

Der obige Ansatz von A.R. Sims [51] beschränkt sich auf Potentiale  $q$  mit  $\text{Im } q \leq 0$ . Wir nutzen jedoch eine weitere Verallgemeinerung, welche weniger Voraussetzungen an das Potential  $q$  und die komplexwertige Funktion  $p$  stellt, siehe [20]. Es existieren auch hier drei Fälle, welche den obigen Fällen Grenzpunktfall I, Grenzpunktfall II und Grenzkreisfall entsprechen (und welche in [20, Theorem 2.1] mit case I, II und III bezeichnet werden). Mithilfe dieses Resultates geben wir eine komplette Klassifikation in Grenzpunktfall beziehungsweise Grenzkreisfall der Differentialgleichungen (1.3) und (1.4) an. Dies geschieht mit Hilfe der sogenannten *WKB-Analysis*, siehe [28], die eine Näherung der Lösungen von Differentialgleichung bereitstellt. Abhängig von der Lage der Kontur  $\Gamma$ , in Form des Winkels  $\phi$ , bestimmen wir den Grenzpunktfall I,II oder den Grenzkreisfall. Im Grenzpunktfall I sind keine Randbedingungen bei  $\pm\infty$  nötig, dies bedeutet, dass die Funktionen  $\psi$  aus dem Definitionsbereich des maximalen Operators  $|\psi(x)| \rightarrow 0$  erfüllen, falls  $|x| \rightarrow \infty$  und falls  $\psi$  eine Lösung von (1.3) oder (1.4) ist, verschwindet  $|\psi|$  sogar exponentiell für  $|x| \rightarrow \infty$ . Somit reduzieren wir die (physikalische) Notation von Stokes-Sektoren und Stokes-Linien auf die Grenzpunkt-/Grenzkreisfall Klassifikation für (1.3) und (1.4) im folgenden Sinne.

Gleichungen (1.3), (1.4) im Grenzpunktfall I  $\Leftrightarrow \Gamma$  liegt in zwei Stokes-Sektoren.

Grenzpunktfall II ist nicht möglich.

Gleichungen (1.3), (1.4) im Grenzkreisfall  $\Leftrightarrow \Gamma$  liegt auf zwei Stokes-Linien.

Der Zusammenhang zwischen  $\mathcal{PT}$ -symmetrischer Quantenmechanik und der bekannten Notation aus der Sturm-Liouville Theorie mit komplexen Potential ist ein wichtiges Resultat dieser Arbeit. Für die allgemeineren Gleichungen (1.5) und (1.6) geben wir ein Kriterium an, welches garantiert, dass sich diese Gleichungen im Grenzpunktfall I befinden. Dies ist ein Novum, denn Kriterien für Grenzpunkt-/ Grenzkreisfälle für Sturm-Liouville-Ausdrücke mit komplexen Koeffizienten sind bislang kaum vorhanden.

Anschließend entwickeln wir für den nicht-hermiteschen Hamiltonoperator (1.1) eine Spektraltheorie, welche der Anleitung (b)–(d) von oben folgt. Wir beschränken uns hierbei auf den physikalisch relevanten Fall, den Grenzpunktfall I beziehungsweise, dass  $\Gamma$  in zwei Stokes-Sektoren liegt (für einige Resultate zum Grenzkreisfall siehe [4, 5]). Wir beschränken uns dabei nicht nur auf die nicht-hermiteschen Hamiltonoperatoren mit der speziellen Klasse von Potentialen  $-(iz)^{N+2}$  aus (1.1), sondern entwickeln eine Spektraltheorie für Operatoren mit einem allgemeineren Potential  $\mathbf{q}(z)$  an, sodass der zugehörige Operator  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch bleibt. Die maximalen beziehungsweise minimalen Operatoren  $A_{max+}(\tau_+)$  und  $A_{0+}(\tau_+)$  gehören zu dem Differentialausdruck  $\tau_+$  auf der positiven reellen Achse, siehe (1.5), wohingegen  $A_{max-}(\tau_-)$  und  $A_{0-}(\tau_-)$  zu  $\tau_-$  auf  $\mathbb{R}_-$  gehören, siehe (1.6). Analog wie in Punkt (b) bestimmen wir zunächst die Definitionsbereiche der minimalen Operatoren  $A_{0\pm}(\tau_{\pm})$  und der maximalen Operatoren  $A_{max\pm}(\tau_{\pm})$  als

$$\text{dom } A_{max\pm}(\tau_{\pm}) := \{w \in L^2(\mathbb{R}_{\pm}) : \tau_{\pm}w \in L^2(\mathbb{R}_{\pm}), w, w' \in AC_{loc}(\mathbb{R}_{\pm})\}$$

und

$$\text{dom } A_{0\pm}(\tau_{\pm}) := \{w \in \text{dom } A_{max\pm}(\tau_{\pm}) : w(0) = w'(0) = 0\}$$

(im Grenzpunktfall I). Es stellt sich heraus, dass die minimalen Operatoren  $\mathcal{T}$ -symmetrisch sind (in der Literatur, zum Beispiel [29], besser bekannt als  $J$ -symmetrisch, dies bedeutet symmetrisch unter der komplexen Konjugation), und deren Adjungierte sind die maximalen Operatoren. Mittels der *formal Adjungierten*

$$\tau_{\pm}^{\dagger}w(x) := -e^{\pm 2i\phi}w''(x) + \overline{q_{\pm}}(x)w(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm},$$

zeigen wir zudem

$$A_{max\pm}(\tau_{\pm})^* = A_{0\pm}(\tau_{\pm}^{\dagger}).$$

Wir nutzen die maximalen und minimalen Operatoren  $A_{max\pm}(\tau_{\pm})$  und  $A_{0\pm}(\tau_{\pm})$  als Grundbausteine für die Operatoren auf der ganzen reellen Achse. Den maximalen Operator auf der ganzen Achse definieren wir als die direkte Summe der maximalen Operatoren auf den Halbachsen,

$$A_{max} := A_{max-}(\tau_-) \oplus A_{max+}(\tau_+)$$

mit Definitionsbereich

$$D_{max} = \{w \in L^2(\mathbb{R}) : Aw \in L^2(\mathbb{R}), w|_{\mathbb{R}_{\pm}}, w'|_{\mathbb{R}_{\pm}} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_{\pm})\}.$$

## 1 Einleitung

Auf dieselbe Art und Weise erhalten wir den minimalen Operator

$$A_0 := A_{0-}(\tau_-) \oplus A_{0+}(\tau_+)$$

mit Definitionsbereich

$$\text{dom } A_0 = \{w \in D_{max} : w(0+) = w(0-) = w'(0+) = w'(0-) = 0\}.$$

Es zeigt sich, dass die Operatoren  $A_{max}$  und  $A_0$  adjungiert bezüglich eines inneren Produkts  $[\cdot, \cdot]$  sind, siehe zum Beispiel [40, 41, 42, 52], wobei das neue innere Produkt  $[\cdot, \cdot]$  als

$$[\cdot, \cdot] := (\mathcal{P}\cdot, \cdot)$$

definiert ist. Hierbei steht  $(\cdot, \cdot)$  für das klassische Skalarprodukt in  $L^2$ . Im nächsten Schritt erweitern wir  $A_0$ . Dazu nimmt man Verknüpfungsbedingungen für die beiden Halbachsenoperatoren in Null an, das heißt mittels Randbedingungen in Null schränkt man den maximalen Operator  $A_{max}$  ein (beziehungsweise erweitert den minimalen Operator  $A_0$ ). Wir führen eine invertierbare Matrix  $G$  ein und erhalten so den gewünschten Operator  $A_G$ ,

$$\text{dom}(A_G) := \left\{ w \in D_{max} : \begin{pmatrix} w(0+) \\ w'(0+) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} w(0-) \\ w'(0-) \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$A_G w(x) := \begin{cases} -e^{-2i\phi} w''(x) + q_+(x)w(x), & x \geq 0 \\ -e^{2i\phi} w''(x) + q_-(x)w(x), & x \leq 0 \end{cases}.$$

Wir geben Bedingungen an  $G$  an, sodass der Operator  $A_G$  selbstadjungiert im neuen inneren Produkt  $[\cdot, \cdot]$  beziehungsweise  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch ist:

- Für

$$(e^{2i\phi} K G)^* = e^{2i\phi} K G, \text{ mit } K := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ist  $A_G$  selbstadjungiert bezüglich des inneren Produktes  $[\cdot, \cdot]$ .

- Für

$$G J \bar{G} = J, \text{ mit } J := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ist  $A_G$   $\mathcal{PT}$ -symmetrisch.

Schlussendlich untersuchen wir das Spektrum von  $A_G$ . Für nicht selbstadjungierte Operatoren wie  $A_G$  existiert dafür im Allgemeinen keine Standardtheorie. Deshalb nutzen wir eine bestimmte Erweiterung des minimalen Operators  $A_0$ . Dafür führen wir die Operatoren  $A_{\pm}$ , welche Erweiterungen der minimalen Halbachsenoperatoren (oder Ein-

schränkungen der maximalen Halbachsenoperatoren) mit Definitionsbereich

$$\text{dom } A_{\pm} := \{w \in \text{dom } A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) : w(0) = 0\}$$

sind, ein. Aus [20] ist bekannt, dass die Operatoren  $A_{\pm}$   $\mathcal{T}$ -selbstadjungiert sind. Ferner existieren Abschätzungen für die Lage des Spektrums und des essentiellen Spektrums. Insbesondere besitzen diese Operatoren eine nichtleere Resolventenmenge und außerhalb des essentiellen Spektrums besteht das Spektrum nur aus isolierten Eigenwerten mit endlicher algebraischer Vielfachheit. Für die spezielle Wahl des Potentials  $q(z) = -(iz)^{N+2}$  beziehungsweise  $q_{\pm}(x) = -(ix)^{N+2}e^{\pm(N+2)i\phi}$  können wir sogar zeigen, dass das essentielle Spektrum leer ist.

Offensichtlich unterscheiden sich  $A_G$  und die direkte Summe von  $A_- \oplus A_+$  nur in zwei Dimensionen. Als zweites großes Resultat dieser Arbeit zeigen wir, dass  $A_G$  strukturell dieselben Spektraleigenschaften wie die direkte Summe  $A_- \oplus A_+$  besitzt, das heißt für das Potential aus (1.1) besteht das Spektrum des dazugehörigen Operators  $A_G$  nur aus isolierten Eigenwerten mit endlicher algebraischer Vielfachheit, das essentielle Spektrum ist leer und die Resolventenmenge  $\rho(A)$  ist nichtleer. Mithilfe der oben beschriebenen WKB-Analyse können wir die Lage der Eigenwerte abschätzen, beziehungsweise Regionen der komplexen Ebene bestimmen, in denen keine Eigenwerte liegen können. Dazu bestimmen wir die sogenannte *Weyl-Funktion*, welche einen Zusammenhang zwischen den Spektren von  $A_G$  und  $A_- \oplus A_+$  herstellt.

Es ist überraschend, dass in der physikalischen Literatur, beginnend mit dem Paper von C.M. Bender und S. Boettcher [12], die oben genannten Techniken aus der Sturm-Liouville Theorie für komplexwertige Potentiale nicht genutzt werden. Es ist das Ziel dieser Arbeit einen mathematischen Aufbau der (heutzutage) klassischen Bender-Boettcher-Theorie im Sinne der spektralen Erweiterungstheorie für Sturm-Liouville Ausdrücke mit komplexen Potential bereitzustellen. Allerdings gibt es mehrere Arbeiten, welche basierend auf den Asymptotiken aus [50] und Argumenten aus der Funktionentheorie zeigen, dass für bestimmte Potentiale und Konturen reelles Spektrum vorliegt. So wird in [49] bewiesen, dass das Eigenwertproblem

$$-u''(z) - (iz)^{N+2}u(z) = \lambda u(z)$$

auf der Kontur  $\Gamma$  mit Öffnungswinkel  $\phi = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{N+4}$ ,  $N > 0$  nur einfache, isolierte, unendlich viele Eigenwerte besitzt, die reell und positiv sind. Der imaginäre kubische Oszillator

$$H = p^2 + ix^3$$

auf der reellen Achse wird in [31] behandelt. Hier wird mit [50] und Ergebnissen aus der Funktionentheorie ebenfalls gezeigt, dass dieser Hamiltonoperator nur diskretes Spektrum mit unendlichen vielen reellen und positiven Eigenwerten besitzt. Auch in [26] wird

## 1 Einleitung

die Schrödingergleichung auf der reellen Achse mit  $N > 1$

$$-u''(x) - (ix)^{2N}u(x) = \lambda u(x)$$

(sogar mit einem leicht allgemeineren Potential) betrachtet und gezeigt, dass die Eigenwerte reell sind. In den beschriebenen Arbeiten werden funktionstheoretische Methoden mit einer festgelegten Verknüpfungsbedingung bei Null genutzt, während wir einen operatortheoretischen Zugang benutzen. Alle drei Arbeiten legen sich außerdem auf eine ganz bestimmte Kontur (eventuell in Abhängigkeit des Parameters  $N$ ) beziehungsweise den dazugehörigen Öffnungswinkel  $\phi$  fest, während wir in der vorliegenden Arbeit eine größere Auswahl für den Winkel  $\phi$  zulassen. Darüberhinaus erlauben wir allgemeinere Potentiale als jenes in (1.1) aus [12] und allgemeinere Verknüpfungsbedingungen bei Null.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 geben wir eine kurze Einführung in Kreinräume und Operatoren in Kreinräumen und führen das Konzept von linearen Relationen und Randtripeln in Kreinräumen in Abschnitt 2.2, sowie die dazugehörige Weyl-Funktion ein. Kapitel 3 behandelt Differentialoperatoren zweiter Ordnung und bildet das Grundgerüst dieser Arbeit. Dabei orientieren wir uns an [29, Chapter III] und beginnen mit dem regulären Sturm-Liouville Problem. Darauf aufbauend behandelt Kapitel 3.2 Differentialausdrücke mit einem regulären Endpunkt, welche wir zur Konstruktion der Halbachsenoperatoren  $A_{0\pm}(\tau_{\pm})$  und  $A_{max\pm}(\tau_{\pm})$  nutzen. Außerdem bereiten wir die Weyl'sche Grenzpunkt-/Grenzkreisfall Alternative aus [20] auf. Die WKB-Asymptotiken, welche sowohl für die Bestimmung der Grenzpunktfälle und des Grenzkreisfalles, als auch zur Abschätzung der Lage der Eigenwerte essentiell sind, führen wir im Kapitel 4 ein. Kapitel 5 behandelt den operatortheoretische Aufbau der  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantenmechanik. Dazu führen wir Abschnitt 5.1 die oben erwähnten Halbachsenoperatoren  $A_{max\pm}(\tau_{\pm})$  und  $A_{0\pm}$  ein. Diese setzen wir in Kapitel 5.2 zu den maximalen und minimalen Operatoren  $A_{max}$  und  $A_0$  auf der gesamten reellen Achse zusammen. Anschließend führen wir in Kapitel 5.3 die entsprechenden Erweiterungen  $A_G$  des minimalen Operators  $A_0$  ein, wobei die Matrix  $G$  die Verknüpfungsbedingungen in Null beschreibt. Dabei charakterisieren wir für welche Wahl von  $G$  wir stetige Randbedingungen generieren beziehungsweise der Operator  $A_G$   $\mathcal{PT}$ -symmetrisch oder selbstadjungiert im inneren Produkt  $[\cdot, \cdot]$  ist. Wir schließen dieses Kapitel indem wir die Weyl-Funktion berechnen und erhalten so eine Gleichung, die für Eigenwerte von  $A_G$  erfüllt ist. Im letzten Kapitel geben wir für das spezielle Potential  $q(z) = -(iz)^{N+2}$  eine vollständige Klassifikation in Grenzpunkt- und Grenzkreisfall an. Anschließend nutzen wir die Weyl-Funktion und die Gleichung zur Abschätzung der Eigenwerte aus Kapitel 5 zum Abschätzen des Spektrums beziehungsweise der Lage der Eigenwerte. Somit können wir mithilfe der WKB-Analyse aus Kapitel 4 Bereiche der komplexen Ebene bestimmen, in der keine Eigenwerte liegen können.

## 2. Kreinräume

In diesem Kapitel führen wir Kreinräume, lineare Relationen und Randtripel ein, welche die Grundlagen der Arbeit bilden. Desweiteren betrachten wir Operatoren in Kreinräumen ein und geben einige Aussagen über deren Symmetrieeigenschaften und Spektrum an. Für eine umfassendere Darstellung verweisen wir auf [1, 3, 18, 37].

### 2.1 Kreinräume und Operatoren

Wir beginnen mit der Definition eines Kreinraums, dessen Struktur durch ein inneres Produkt gegeben ist.

**Definition 2.1.** Es sei  $\mathcal{K}$  ein Vektorraum mit einer hermiteschen Sesquilinearform  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ . Für zwei Unterräume  $L, M$  von  $\mathcal{K}$  schreiben wir  $\mathcal{K} = L[+]M$ , falls die Summe direkt ist und  $[l, m] = 0$  gilt für alle  $l \in L$  und  $m \in M$ .

$\mathcal{K}$  beziehungsweise das Tupel  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$  heißt *Kreinraum*, falls zwei Unterräume  $\mathcal{K}_+$  und  $\mathcal{K}_-$  existieren mit

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+[+]\mathcal{K}_-,$$

wobei  $(\mathcal{K}_+, [\cdot, \cdot])$  und  $(\mathcal{K}_-, -[\cdot, \cdot])$  Hilberträume sind. Eine solche Zerlegung heißt *Fundamentalzerlegung* von  $\mathcal{K}$ .

Es sei  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$  ein Kreinraum und  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+[+]\mathcal{K}_-$  eine Fundamentalzerlegung von  $\mathcal{K}$ . Eine solche Fundamentalzerlegung ist nicht eindeutig, es gilt jedoch für eine beliebige andere Fundamentalzerlegung  $\mathcal{K} = \mathcal{K}'_+[+]\mathcal{K}'_-$

$$\dim \mathcal{K}'_{\pm} = \dim \mathcal{K}_{\pm},$$

siehe [37, §1.1]. Für jedes  $x \in \mathcal{K}$  existieren  $x_{\pm} \in \mathcal{K}_{\pm}$  mit  $x = x_+ + x_-$ . Wir definieren durch

$$(\cdot, \cdot) : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) := [x_+, y_+] - [x_-, y_-]$$

## 2 Kreinräume

ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{K}$ . Offensichtlich bildet  $(\mathcal{K}; (\cdot, \cdot))$  einen Hilbertraum. Die Unterräume  $\mathcal{K}_+$  und  $\mathcal{K}_-$  stehen bezüglich  $(\cdot, \cdot)$  orthogonal aufeinander. Es seien  $P_{\pm}$  die orthogonalen Projektionen bezüglich  $(\cdot, \cdot)$  auf  $\mathcal{K}_{\pm}$ . Man nennt den Operator

$$J : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}, \quad J := P_+ - P_-$$

*Fundamentalsymmetrie* und es gilt

$$[x, y] = (Jx, y) \text{ und } (x, y) = [Jx, y], \quad x, y \in \mathcal{K}.$$

Die Skalarprodukte zu verschiedenen Fundamentalzerlegungen induzieren zueinander äquivalente Normen und erzeugen somit die gleiche Topologie, siehe [37] oder [18, Chapter V.1].

Wir nennen einen Vektor  $x \in \mathcal{K}$  *positiv*, *neutral* beziehungsweise *negativ*, falls  $[x, x] > 0$ ,  $[x, x] = 0$  beziehungsweise  $[x, x] < 0$  gilt. Sind alle Elemente  $x \neq 0$  eines Teilraumes  $\mathcal{N}$  von  $\mathcal{K}$  positiv, neutral oder negativ, so heißt  $\mathcal{N}$  *positiv*, *neutral* beziehungsweise *negativ*. Mit  $\mathcal{N}^{[\perp]}$  bezeichnen wir das *orthogonale Komplement* von  $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$  bezüglich  $[\cdot, \cdot]$ , das heißt  $\mathcal{N}^{[\perp]} := \{x \in \mathcal{K} : [x, y] = 0 \text{ für alle } y \in \mathcal{N}\}$ . Ist  $\mathcal{N}$  ein abgeschlossener Teilraum von  $\mathcal{K}$  existieren nach [3, Chapter I.6] abgeschlossene Teilräume  $\mathcal{N}_+$ ,  $\mathcal{N}_-$  und  $\mathcal{N}_0$  mit

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_+ [ + ] \mathcal{N}_- [ + ] \mathcal{N}_0, \quad (2.1)$$

wobei  $\mathcal{N}_+$  positiv,  $\mathcal{N}_0$  neutral und  $\mathcal{N}_-$  negativ ist. Es gilt  $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}^{[\perp]}$ . Wir nennen  $\mathcal{N}_+$  den *positiven Teil*,  $\mathcal{N}_0$  den *isotropen Teil* und  $\mathcal{N}_-$  den *negativen Teil* von  $\mathcal{N}$  und  $\kappa_+(\mathcal{N})$ ,  $\kappa_0(\mathcal{N})$  und  $\kappa_-(\mathcal{N})$  seien die entsprechenden Dimensionen von  $\mathcal{N}_+$ ,  $\mathcal{N}_0$  beziehungsweise  $\mathcal{N}_-$ . Obwohl die Zerlegung (2.1) nicht eindeutig ist, sind  $\kappa_+(\mathcal{N})$ ,  $\kappa_0(\mathcal{N})$  und  $\kappa_-(\mathcal{N})$  unabhängig von der Wahl der Zerlegung, siehe [3, Chapter 1, §6].

Der Adjungierte eines Operators im Kreinraum wird analog wie im Hilbertraum definiert, siehe [3, Definition 2.1.1] oder [37, §I.3].

**Definition 2.2.** Es sei  $T$  ein abgeschlossener, dicht definierter Operator im Kreinraum  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$  mit Definitionsbereich  $\text{dom } T$ . Die Adjungierte  $T^+$  von  $T$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} \text{dom } T^+ &:= \{y \in \mathcal{K} : \text{es existiert } z \in \mathcal{K} \text{ mit } [Tx, y] = [x, z] \text{ für alle } x \in \text{dom } T\}, \\ T^+y &:= z, \text{ für } y \in \text{dom } T^+. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $T^+$  linear. Ebenso ist  $T^+$  abgeschlossen, da für eine Folge  $(y_n)_n$  in  $\text{dom } T^+$  mit  $y_n \rightarrow y$  und  $T^+y_n \rightarrow z$  gilt

$$[Tx, y] = \lim [Tx, y_n] = \lim [x, T^+y_n] = [x, z]$$

und somit  $y \in \text{dom } T^+$  und  $z = T^+y$  gilt. Der Operator  $T$  heißt *symmetrisch* im Krein-

raum  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$ , falls  $T \subset T^+$  und *selbstadjungiert* im Kreinraum, falls  $T = T^+$ .

Mit  $\sigma(T)$  bezeichnen wir das *Spektrum* eines abgeschlossenen Operators in  $\mathcal{K}$ . Für eine Menge  $A \subset \mathbb{C}$  bezeichne  $A^* := \{\bar{z} : z \in A\}$ . Die folgende Proposition zeigt, dass das Spektrum eines selbstadjungierten Operators im Kreinraum gewisse Symmetrieeigenschaften besitzt, siehe [37, Proposition I.3.2].

**Proposition 2.3.** *Es sei  $T$  ein selbstadjungierter Operator in  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$ . Dann ist  $\sigma(T)$  symmetrisch bezüglich der reellen Achse, das heißt*

$$\sigma(T) = \sigma(T)^*.$$

## 2.2 Lineare Relationen und Randtripel

Wir wiederholen einige Grundlagen für lineare Relationen, vergleiche [2, 21, 25, 32, 33]. Im Folgenden bezeichne  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$  einen separablen Kreinraum. Ein Untervektorraum  $T$  von  $\mathcal{K}^2$  heißt *lineare Relation* in  $\mathcal{K}$ . Für eine lineare Relation  $T$  führen wir folgende Begriffe ein

$$\begin{aligned} \text{dom}(T) &= \{f \in \mathcal{K} \mid \{f, f'\} \in T \text{ für ein } f' \in \mathcal{K}\} \text{ ist der } \textit{Definitionsbereich} \text{ von } T, \\ \text{ran}(T) &= \{f' \in \mathcal{K} \mid \{f, f'\} \in T \text{ für ein } f \in \mathcal{K}\} \text{ ist der } \textit{Wertebereich} \text{ von } T, \\ \text{ker}(T) &= \{f \in \mathcal{K} \mid \{f, 0\} \in T\} \text{ ist der } \textit{Kern} \text{ von } T, \text{ und} \\ \text{mul}(T) &= \{f' \in \mathcal{K} \mid \{0, f'\} \in T\} \text{ ist der } \textit{mehrwertige Teil} \text{ von } T. \end{aligned}$$

Falls wir einen linearen Operator  $T$  in  $\mathcal{K}$  mit seinem *Graphen*  $\text{graph}(T) := \{\{x, Tx\} : x \in \text{dom}(T)\}$  identifizieren, kann man  $T$  auch als lineare Relation auffassen. Diese Identifikation werden wir im Folgenden immer voraussetzen. In diesem Sinne ist eine lineare Relation genau dann ein linearer Operator, falls  $\text{mul}(T) = \{0\}$ .

Es seien  $S, T \subset \mathcal{K}^2$  lineare Relationen und  $\alpha \in \mathbb{C}$ , dann definiert man *Vielfaches*, *Summe* und *Produkt* analog zu den entsprechenden Operationen bei linearen Operatoren, nämlich

$$\begin{aligned} \alpha T &= \{\{f, \alpha f'\} \mid \{f, f'\} \in T\}, \\ T + S &= \{\{f, f' + g'\} \mid \{f, f'\} \in T, \{f, g'\} \in S\} \text{ und} \\ TS &= \{\{f, f'\} \mid \{f, h\} \in S \text{ und } \{h, f'\} \in T \text{ für ein } h \in \mathcal{K}\}. \end{aligned}$$

Die Inverse  $T^{-1}$  einer linearen Relation  $T$  existiert immer und ist definiert als

$$T^{-1} := \{\{x', x\} : \{x, x'\} \in T\}.$$

## 2 Kreinräume

Außerdem wird zusätzlich zur Summe  $T + S$  von linearen Relationen, die Summe der Untervektorräume als

$$T \widehat{+} S := \{\{x + y, x' + y'\} : \{x, x'\} \in T, \{y, y'\} \in S\}$$

eingeführt. Ist diese Summe direkt, d. h.  $T \cap S = \emptyset$ , schreiben wir  $T \widehat{\oplus} S$ . Eine lineare Relation  $T$  ist *abgeschlossen*, wenn sie ein abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{K}^2$  ist.

Mit  $\rho(T)$  bezeichnen wir die *Resolventenmenge* der abgeschlossenen linearen Relation  $T$ , das sind alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ , sodass  $(T - \lambda)^{-1}$  ein linearer stetiger Operator ist und  $\text{dom}(T - \lambda)^{-1} = \mathcal{K}$  gilt. Das *Spektrum*  $\sigma(T)$  ist das Komplement der Resolventenmenge,  $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ . Die Menge der *regulären Punkte* von  $T$  ist

$$r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda) = \{0\}, \text{ran}(T - \lambda) \text{ ist abgeschlossen}\}.$$

Für Operatoren ist wohlbekannt, dass  $r(T)$  auch geschrieben werden kann als

$$r(T) = \{\lambda : \exists k(\lambda) > 0 \text{ mit } \|(T - \lambda)u\| \geq k(\lambda)\|u\| \text{ für alle } u \in \text{dom } T\}$$

und für lineare Relationen lässt sich dies analog beweisen, siehe [7].

**Definition 2.4.** Die *adjungierte Relation*  $T^+$  einer linearen Relation  $T$  bezüglich  $[\cdot, \cdot]$  ist durch

$$T^+ := \{\{y, y'\} \in \mathcal{K}^2 : [y', x] = [y, x'] \text{ für alle } \{x, x'\} \in T\}$$

gegeben. Eine lineare Relation heißt *symmetrisch*, falls  $T^+ \subset T$  beziehungsweise *selbstadjungiert*, falls  $T^+ = T$ .

Es gilt mit [25, Proposition 3.1], dass  $T^+$  abgeschlossen ist und  $T^{++} = \overline{T}$ . Außerdem gilt  $\text{mul}(T^+) = \text{dom}(T)^{\perp}$ , insbesondere ist  $T^+$  genau dann ein Operator, wenn  $T$  dicht definiert ist.

Schließlich führen wir Randtripel ein, siehe auch [22, Definition 2.1].

**Definition 2.5.** Es seien  $T$  eine abgeschlossene symmetrische Relation im Kreinraum  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$ ,  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}})$  ein Hilbertraum und  $\Gamma_0, \Gamma_1 : T^+ \rightarrow \mathcal{H}$  lineare Abbildungen. Ein Tripel  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  heißt *Randtripel* der Relation  $T^+$ , wenn für alle  $\widehat{x} = \{x, x'\}, \widehat{y} = \{y, y'\} \in T^+$  die abstrakte Greensche Identität

$$[x', y] - [x, y'] = (\Gamma_1 \widehat{x}, \Gamma_0 \widehat{y})_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 \widehat{x}, \Gamma_1 \widehat{y})_{\mathcal{H}}$$

gilt und die lineare Abbildung  $\Gamma := (\Gamma_0, \Gamma_1)^{\top} : T^+ \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  surjektiv ist.

Im Folgenden sei  $T$  eine abgeschlossene symmetrische Relation und  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  ein Randtripel für  $T^+$ . Dann (siehe [24, Remark 1.1]) sind die Abbildungen  $\Gamma, \Gamma_0$  und

$\Gamma_1$  stetig und  $\ker \Gamma = T$ . Außerdem ist  $r(T)$  symmetrisch bezüglich der reellen Achse, vergleiche [22, Section 1.2]. Für  $\lambda \in r(T)$  ist der *Defektraum* von  $T$  definiert durch  $\mathcal{N}_\lambda(T^+) := \ker(T^+ - \lambda) = (\text{ran}(T - \bar{\lambda}))^{[\perp]}$  und durch

$$\widehat{\mathcal{N}}_\lambda(T^+) := \{ \{x_\lambda, \lambda x_\lambda\} : x_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda(T^+) \}$$

ist die *Defektrelation* gegeben.

Eine lineare Relation  $S$  mit  $T \subseteq S \subseteq T^+$  heißt *Erweiterung* von  $T$ . Eine symmetrische Relation  $T$  hat *Defekt*  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , falls eine selbstadjungierte Erweiterung  $S$  mit  $\dim(S/T) = m$  existiert, [8, Section 2]. Die nächste Proposition zitieren wir aus [22, Proposition 2.1]. Diese stellt eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Erweiterungen  $S$  und der abgeschlossenen linearen Relation im Randraum  $\mathcal{H}$  dar.

**Proposition 2.6.** *Es sei  $T$  eine abgeschlossene symmetrische Relation in  $\mathcal{K}$  und  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  ein Randtripel für  $T^+$ . Dann gilt das Folgende.*

- (i) *Die Abbildung  $\Gamma$  induziert eine Bijektion zwischen der Menge der abgeschlossenen Erweiterungen  $A_\theta$  von  $T$  und der Menge der abgeschlossenen linearen Relationen  $\theta$  in  $\mathcal{H}$  mittels*

$$\theta \mapsto A_\theta := \{ \widehat{x} \in T^+ : \Gamma \widehat{x} \in \theta \} = \ker(\Gamma_1 - \theta \Gamma_0).$$

- (ii) *Die Erweiterung  $A_\theta$  von  $T$  ist eine symmetrische (beziehungsweise selbstadjungierte) Relation im Kreinraum  $\mathcal{K}$  genau dann, wenn die Relation  $\theta$  symmetrisch (beziehungsweise selbstadjungiert) im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  ist.*

Man sieht leicht, dass die beiden Erweiterungen  $A_0 := \ker \Gamma_0$  und  $A_1 := \ker \Gamma_1$  von  $T$  selbstadjungiert sind, da die dazugehörigen Relationen  $\theta$  in  $\mathcal{H}$  gegeben durch  $\theta_0 := \{0\} \times \mathcal{H}$  beziehungsweise  $\theta_1 := \mathcal{H} \times \{0\}$  selbstadjungiert sind.

Gibt es eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T$  mit nichtleerer Resolventenmenge, dann existiert auch ein Randtripel für  $T^+$ , vergleiche [22, Proposition 2.2].

**Proposition 2.7.** *Es sei  $T$  eine abgeschlossene symmetrische Relation in  $\mathcal{K}$  und  $A_0 = A_0^+$  eine Erweiterung von  $T$  mit  $\rho(A_0) \neq \emptyset$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (i) *Für alle  $\lambda \in \rho(A_0)$  gilt*

$$T^+ = A_0 \widehat{\oplus} \widehat{\mathcal{N}}_\lambda(T^+).$$

- (ii) *Es existiert ein Randtripel  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  für die Relation  $T^+$ , sodass  $\ker \Gamma_0 = A_0$ .*

Die Abbildung  $\Gamma_0|_{\widehat{\mathcal{N}}_\lambda(T^+)} : \widehat{\mathcal{N}}_\lambda(T^+) \rightarrow \mathcal{H}$  ist mit Proposition 2.7 für  $\lambda \in \rho(A_0)$  injektiv, da  $\ker \Gamma_0 = A_0$ . Nach Definition ist außerdem  $\Gamma_0 = T^+ \rightarrow \mathcal{H}$  surjektiv und demzufolge

## 2 Kreinräume

ist  $\Gamma_0 : \widehat{N}_\lambda(T^+) \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $\lambda \in \rho(A_0)$ , bijektiv. Somit bildet auch die Umkehrabbildung

$$\lambda \in \rho(A_0), \quad \lambda \mapsto \widehat{\gamma}(\lambda) := \left( \Gamma_0|_{\widehat{N}_\lambda(T^+)} \right)^{-1}$$

$\mathcal{H}$  bijektiv auf  $\widehat{N}_\lambda(T^+)$  ab. Das heißt insbesondere ist  $\dim \mathcal{H} = \dim \widehat{N}_\lambda(T^+)$  konstant auf  $\rho(A_0)$ . Weiter sind  $T^+/A_0$  und  $\widehat{N}_\lambda(T^+)$  isomorph zueinander, das heißt

$$\dim(T^+/A_0) = \dim \mathcal{H} = \dim \widehat{N}_\lambda(T^+),$$

was gerade der Defekt von  $T$  ist. Da  $\Gamma$  surjektiv und  $\ker \Gamma = T$  ist, folgt das  $T^+/T$  isomorph zu  $\mathcal{H}^2$  ist und damit  $\dim(A_0/T) = \dim(T^+/A_0) = \dim \mathcal{H}$ .

Es sei  $\pi_i$  die Projektion auf die  $i$ -te Komponente von  $\mathcal{K}^2$ ,  $i = 1, 2$ . Dann bildet  $\pi_1$  den Raum  $\widehat{N}_\lambda(T^+)$  bijektiv auf  $N_\lambda(T^+)$  ab. Die Abbildung

$$\lambda \mapsto \gamma(\lambda) := \pi_1 \circ \widehat{\gamma}(\lambda)$$

heißt  $\gamma$ -Feld zum Randtripel  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ . Mit [22, Proposition 2.2] gilt

$$\gamma(\lambda) = \gamma(\omega) + (\lambda - \omega)(A_0 - \lambda)^{-1}\gamma(\omega), \quad \lambda, \omega \in \rho(A_0).$$

Zu einem Randtripel gehört außerdem eine holomorphe operatorwertige *Weyl-Funktion*, vergleiche [22, Definition 2.2].

**Definition 2.8.** Es sei  $T$  eine abgeschlossene symmetrische Relation in  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$  und  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  ein Randtripel für  $T^+$ . Setze  $A_0 := \ker \Gamma_0$  und es sei  $\rho(A_0) \neq \emptyset$ . Die Abbildung

$$\lambda \mapsto M(\lambda) := \Gamma_1 \left( \Gamma_0|_{\widehat{N}_\lambda(T^+)} \right)^{-1} = \left\{ \left\{ \Gamma_0 \widehat{f}_\lambda, \Gamma_1 \widehat{f}_\lambda \right\} : \widehat{f}_\lambda \in \widehat{N}_\lambda(T^+) \right\}, \quad \lambda \in \rho(A_0)$$

heißt *Weyl-Funktion* zum Randtripel  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ .

Mit einigen der grundlegenden Eigenschaften der Weyl-Funktion befasst sich die nächste Proposition, siehe [22, Section 2.2 und Proposition 2.3]

**Proposition 2.9.** *Es sei  $T$  eine abgeschlossene symmetrische Relation in  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$ ,  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  ein Randtripel für  $T^+$  und  $A_0 := \ker \Gamma_0$ . Dann gelten für das  $\gamma$ -Feld  $\gamma$  und die Weyl-Funktion  $M$  folgende Aussagen.*

- (i)  $M(\lambda)$  ist ein linearer beschränkter Operator für alle  $\lambda \in \rho(A_0)$ .
- (ii) Für alle  $\lambda \in \rho(A_0)$  gilt für jedes  $\widehat{f}_\lambda \in \widehat{N}_\lambda(T^+)$ , dass  $M(\lambda)\Gamma_0\widehat{f}_\lambda = \Gamma_1\widehat{f}_\lambda$ .
- (iii) Für alle  $\lambda, \mu \in \rho(A_0)$  gilt die Gleichung

$$M(\lambda) - M(\mu)^* = (\lambda - \bar{\mu})\gamma(\mu)^+\gamma(\lambda),$$

insbesondere gilt für  $\lambda \in \rho(A_0)$   $M(\lambda)^* = M(\bar{\lambda})$ .

Das nächste Theorem ist die Kreinsche Resolventenformel, siehe [22, Theorem 2.1]. Diese beschreibt, wie die Differenz der Resolventen von  $A_0 = \ker \Gamma_0$  und einer abgeschlossenen Erweiterung  $A_\theta$  (vergleiche Proposition 2.6) in Abhängigkeit der Weyl-Funktion und des  $\gamma$ -Feldes ausgedrückt werden kann.

**Theorem 2.10.** *Es sei  $T$  eine abgeschlossene symmetrische Relation in  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$ ,  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  ein Randtripel für  $T^+$  und  $A_0 := \ker \Gamma_0$ . Weiter sei  $M$  die Weyl-Funktion und  $\theta \subset \mathcal{H}^2$  eine abgeschlossene lineare Relation in  $\mathcal{H}$  und  $\lambda \in \rho(A_0)$ . Dann gilt  $\lambda \in \rho(A_\theta)$  genau dann, wenn  $0 \in \rho(M(\lambda) - \theta)$  ist und für alle  $\lambda \in \rho(A_\theta) \cap \rho(A_0)$  gilt*

$$(A_0 - \lambda)^{-1} - (A_\theta - \lambda)^{-1} = \gamma(\lambda)(M(\lambda) - \theta)^{-1}\gamma(\bar{\lambda})^+.$$

Im Allgemeinen gibt es mehrere mögliche Randtripel für eine symmetrische Relation (sofern überhaupt eines existiert). So kann ein gegebenes Randtripel in ein anderes transformiert werden. Eine Möglichkeit beschreibt das folgende Lemma, siehe auch [23, Proposition 1.7].

**Lemma 2.11.** *Es sei  $T$  eine abgeschlossene symmetrische Relation und  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  ein Randtripel für  $T^+$ . Definiere  $\bar{\Gamma}_0 := \Gamma_1$  und  $\bar{\Gamma}_1 := -\Gamma_0$ . Dann ist  $\{\mathcal{H}, \bar{\Gamma}_0, \bar{\Gamma}_1\}$  ebenfalls ein Randtripel für  $T^+$ .*



### 3. Differentialoperatoren zweiter Ordnung

Wir untersuchen im folgenden Kapitel Differentialoperatoren zweiter Ordnung, insbesondere Differentialoperatoren die symmetrisch beziehungsweise selbstadjungiert bezüglich der komplexen Konjugation sind. Dabei orientieren wir uns an [29, Kapitel III]. Wir interessieren uns vor allem für Differentialoperatoren, welche auf den Halbachsen  $\mathbb{R}_-$  und  $\mathbb{R}_+$  definiert sind. Außerdem behandeln wir eine entsprechende Verallgemeinerung der Weyl'schen Grenzpunkt-Grenzkreisalternative, vergleiche [20], welche charakterisiert wieviele Lösungen der Eigenwertgleichung quadratintegrierbar sind.

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein, nicht notwendigerweise beschränktes, Intervall. Mit  $AC_{loc}(I)$  bezeichnen wir die Menge aller Funktionen, die auf jedem kompakten Teilintervall von  $I$  absolut stetig sind. Mit  $L^1_{loc}(I)$  bezeichnen wir dabei die (Äquivalenzklassen von) lokal integrierbaren Funktionen  $f$ . Dies sind alle (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , die für alle kompakten Mengen  $K \subset I$

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

erfüllen, so ist zum Beispiel  $L^1_{loc}[a, b)$  der Raum aller Funktionen  $f$  mit

$$\int_a^X |f(x)| dx < \infty \text{ für alle } X \in [a, b).$$

Wir betrachten den Differentialausdruck zweiter Ordnung der Form

$$\tau w := -(pw')' + qw = \lambda w, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{3.1}$$

auf einem Intervall  $I = (a, b)$  mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und komplexwertigen Funktionen  $p : I \rightarrow \mathbb{C}$  und  $q : I \rightarrow \mathbb{C}$ . Desweiteren setzen wir für die gesamte Arbeit folgende Bedingungen voraus

- $p(x) \neq 0$  fast überall auf  $(a, b)$  und  $\frac{1}{p} \in L^1_{loc}(a, b)$

### 3 Differentialoperatoren zweiter Ordnung

- $q \in L_{loc}^1(a, b)$ .

Diese Voraussetzungen variieren von den Voraussetzungen in [29, Chapter III.10], da wir im Gegensatz zu [29] eine komplexwertige Funktion  $p$  zulassen.

Eine Funktion  $y$  heißt Lösung der Gleichung  $\tau w = f$ ,  $f$  messbar, wenn  $y, py' \in AC_{loc}(a, b)$  und  $\tau y = f$  fast überall gilt. Wir zitieren nun (vergleiche [44, §16.2] und [53, Korollar 13.3]) den Existenz- und Eindeutigkeitsatz für die Gleichung  $\tau w = f$ .

**Theorem 3.1.** *Es sei  $f \in L_{loc}^1(a, b)$ , dann gibt es für beliebige  $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$  und jedes  $x_0 \in (a, b)$  eine eindeutige Lösung  $\varphi$  von  $\tau w = f$  in  $(a, b)$  mit  $\varphi(x_0) = c_0$ ,  $p\varphi'(x_0) = c_1$  und  $\tau\varphi = f$  fast überall, das heißt die Lösungen von (3.1) bilden einen 2-dimensionalen Vektorraum über  $\mathbb{C}$ .*

**Definition 3.2.** Die Gleichung (3.1) heißt *regulär* in  $a$ , falls

$$a \text{ endlich und } \frac{1}{p}, q \in L_{loc}^1[a, b),$$

sonst *singulär* in  $a$ . Analog definieren wir *singulär* in  $b$ . Falls (3.1) regulär in  $a$  und  $b$  ist, ist (3.1) *regulär* auf  $[a, b]$  und es gilt

$$a, b \text{ endlich und } \frac{1}{p}, q \in L^1[a, b]. \quad (3.2)$$

Ist  $a = \infty$  oder  $b = \infty$ , so heißt (3.1) *singulär* in  $a$  (beziehungsweise  $b$ ).

Wenn (3.1) regulär in  $a$  ist, gilt Theorem 3.1 auch für  $x_0 = a$ .

Es sei die *formal Adjungierten* von  $\tau$  definiert als

$$\tau^+ w := -(\bar{p}w')' + \bar{q}w.$$

Man beachte, wenn Gleichung (3.1) regulär (singulär) bei  $a$  oder  $b$  ist, dann auch die Gleichung  $\tau^+ w = \lambda w$ . Mit

$$[w, v](x) := w(x)p(x)\bar{v}'(x) - \bar{v}(x)p(x)w'(x)$$

gilt das folgende Lemma.

**Lemma 3.3** (Greensche Formel). *Es seien  $\varphi$  und  $\psi$  sowie  $p\varphi'$  und  $\bar{p}\psi'$  absolut stetig auf  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ , dann gilt*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \bar{\psi}\tau\varphi - \varphi\overline{\tau^+\psi} dt = [\varphi, \psi](\beta) - [\varphi, \psi](\alpha).$$

*Beweis.* Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \bar{\psi} \tau \varphi - \varphi \overline{\tau^+ \psi} dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \bar{\psi} (-(p\varphi)' + q\varphi) - \varphi \overline{-(\bar{p}\psi)' + \bar{q}\psi} dt \\ &= -\bar{\psi} p \varphi' \Big|_{\alpha}^{\beta} + \varphi p \bar{\psi}' \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} \bar{\psi}' p \varphi' - \varphi' \bar{p} \psi' dt = [\varphi, \psi](\beta) - [\varphi, \psi](\alpha). \end{aligned}$$

□

Der Ausdruck  $\tau$  heißt *formal  $\mathcal{T}$ -symmetrisch*, wobei  $\mathcal{T} : L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$ ,  $\mathcal{T}u = \bar{u}$ , falls  $\tau^+ = \bar{\tau}$  mit  $\bar{\tau}w := -(\bar{p}w)' + \bar{q}w$ . Beachte, dass in [29]  $\mathcal{T}$  gleich  $J$  ist. Man sieht leicht, dass

$$\tau^{++} = \tau.$$

**Definition 3.4.** Ein dicht definierter Operator  $T$  in  $L^2(a, b)$  heißt  *$\mathcal{T}$ -symmetrisch*, falls

$$\mathcal{T}T\mathcal{T} \subset T^*$$

und  *$\mathcal{T}$ -selbstadjungiert*, falls

$$\mathcal{T}T\mathcal{T} = T^*,$$

siehe auch [29, Definition III 5.2.].

## 3.1 Das reguläre Problem

Die Gleichung (3.1) sei in diesem Abschnitt regulär, das heißt es gilt (3.2). Wir definieren den Operator  $T(\tau)$  in  $L^2(a, b)$  mit Definitionsbereich

$$D(\tau) := \{w : w, pw' \in AC_{loc}[a, b], \tau w \in L^2(a, b)\}$$

und

$$T(\tau)w = \tau w \text{ für } w \in D(\tau).$$

Der Operator  $T(\tau)$  ist auf dem größtmöglichen Definitionsbereich erklärt und heißt *maximaler* Operator. Analog definieren wir  $D(\tau^+)$  und  $T(\tau^+)$ .

**Lemma 3.5.** *Es sei (3.1) regulär und  $f \in L^2(a, b)$ , dann besitzt die Gleichung  $\tau w = f$  eine Lösung  $\varphi \in D(\tau)$  mit  $\varphi(a) = p\varphi'(a) = \varphi(b) = p\varphi'(b) = 0$  genau dann, wenn  $f$  orthogonal auf den Lösungen von  $\tau^+ w = 0$  in  $L^2(a, b)$  steht.*

Den Beweis für das Lemma 3.5 und das folgende Lemma findet man in [29, Lemmata III 10.3. und 10.4.].

### 3 Differentialoperatoren zweiter Ordnung

**Lemma 3.6.** *Es sei (3.1) regulär. Für beliebige komplexe Konstanten  $\lambda, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  existiert eine Funktion  $\varphi \in \ker(T(\tau^+) - \bar{\lambda})(T(\tau) - \lambda) \subset D(\tau)$ , mit*

$$\varphi(a) = \alpha_0, \quad p\varphi'(a) = \alpha_1, \quad \varphi(b) = \beta_0, \quad p\varphi'(b) = \beta_1.$$

Man beachte, dass das Lemma auch gilt, wenn man  $\tau$  durch  $\tau^+$  ersetzt.

Es bezeichne  $T_0(\tau)$  die Einschränkung von  $T(\tau)$  auf

$$D_0(\tau) := \{w \in D(\tau) : w(a) = pw'(a) = w(b) = pw'(b) = 0\},$$

dann gilt folgendes Theorem [29, Theorem III 10.5.].

**Theorem 3.7.** *Es sei (3.1) regulär, dann ist  $D_0(\tau)$  ein dichter Teilraum von  $L^2(a, b)$ ,  $T_0(\tau)$  abgeschlossen und*

$$T_0(\tau)^* = T(\tau^+), \quad T_0(\tau^+) = T(\tau)^*. \quad (3.3)$$

Für jedes  $\lambda \in r(T_0(\tau))$  ist  $\text{def}(T_0(\tau) - \lambda) := \text{codim} \text{ran}(T_0(\tau) - \lambda) = 2$ . Der Operator  $T_0(\tau)$  ist insbesondere  $\mathcal{T}$ -symmetrisch und daher ist  $T(\tau)$  ein abgeschlossener Operator.

*Beweis.* Aus [29, Theorem III 10.5.] folgt die Abgeschlossenheit von  $T_0(\tau)$ , dass  $D_0(\tau)$  ein dichter Teilraum von  $L^2(a, b)$  ist und (3.3). Aus  $\lambda \in r(T_0(\tau))$  folgt, dass  $\dim \ker(T_0(\tau) - \lambda) = 0$  und  $\text{ran}(T_0(\tau) - \lambda)$  abgeschlossen ist. Somit gilt

$$L^2(a, b) = \text{ran}(T_0(\tau) - \lambda) \oplus \ker(T_0(\tau)^* - \bar{\lambda}) = \text{ran}(T_0(\tau) - \lambda) \oplus \ker(T(\tau^+) - \bar{\lambda}).$$

Das heißt  $\text{def}(T_0(\tau) - \lambda) = \dim \ker(T(\tau^+) - \bar{\lambda}) = 2$ .

Für  $u$  mit  $\mathcal{T}u \in \text{dom} T_0(\tau)$  folgt  $u, p\bar{u}' \in AC_{loc}(a, b)$  und  $\mathcal{T}\tau\mathcal{T}u = \tau^+u \in L^2(a, b)$  und somit  $u \in \text{dom} T(\tau^+) = \text{dom} T_0(\tau)^*$ . Mit Lemma 3.3 sieht man, dass  $T_0(\tau)$   $\mathcal{T}$ -symmetrisch ist.  $\square$

Wir können nun ebenfalls alle  $\mathcal{T}$ -selbstadjungierten Erweiterungen von  $T_0(\tau)$  beziehungsweise die Einschränkungen von  $T(\tau)$  bestimmen (dies ist ein Spezialfall von [29, Theorem III 10.6.]).

**Theorem 3.8.** *Es sei (3.1) regulär und für  $\lambda \in r(T_0(\tau))$   $\text{def}(T_0(\tau) - \lambda) = 2$ . Jeder  $\mathcal{T}$ -selbstadjungierte Operator  $S$  mit  $T_0(\tau) \subset S \subset T(\tau)$  und*

$$r(T_0(\tau)) \cap \{\lambda : (S - \lambda) \text{ ist Fredholm mit } \text{ind}(S - \lambda) = 0\} \neq \emptyset$$

*ist die Einschränkung von  $T(\tau)$  auf die Menge aller Funktionen  $u \in D(\tau)$  mit*

$$\alpha_{j1}u(a) + \alpha_{j2}p(a)u'(a) + \beta_{j1}u(b) + \beta_{j2}p(b)u'(b) = 0, \quad j = 1, 2,$$

mit

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}$$

und

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = 2.$$

## 3.2 Ein regulärer Endpunkt

Wir betrachten nun den Fall, dass (3.1) und demzufolge auch  $\tau^+w = \lambda w$  regulär in  $a$  und singular in  $b$  sind. Man beachte, dass die Resultate ähnlich sind, wenn  $a$  ein singularer und  $b$  ein regulärer Endpunkt ist. Außerdem sei  $\tau$  formal  $\mathcal{T}$ -symmetrisch. Der maximale Operator  $T(\tau)$  ist nun definiert durch  $T(\tau)w := \tau w$  für alle  $w$  aus dem Definitionsbereich  $D(\tau)$  von  $T(\tau)$ , gegeben durch

$$D(\tau) := \{w \in L^2(a, b) : w, pw' \in AC_{loc}[a, b], \tau w \in L^2(a, b)\}.$$

Es sei  $T'_0(\tau)$  die Einschränkung von  $T(\tau)$  auf

$$D'_0(\tau) := \{w \in D(\tau) : w(a) = pw'(a) = 0, w = 0 \text{ außerhalb einer kompakten Teilmenge von } [a, b]\}$$

**Theorem 3.9.** *Der Operator  $T'_0(\tau)$  ist dicht definiert und abschließbar in  $L^2(a, b)$  und  $T_0(\tau)$  bezeichne den Abschluss. Dann gilt*

$$T_0(\tau)^* = T(\tau^+), \quad T_0(\tau^+) = T(\tau)^*.$$

Für jedes  $\lambda \in r(T_0(\tau))$  ist  $\text{def}(T_0(\tau) - \lambda) := \text{codim} \text{ran}(T_0(\tau) - \lambda)$  entweder 1 oder 2. Der Operator  $T_0(\tau)$  ist insbesondere  $\mathcal{T}$ -symmetrisch und somit ist  $T(\tau)$  abgeschlossen.

*Beweis.* Der Beweis der  $\mathcal{T}$ -Symmetrie wird analog wie in Theorem 3.7 geführt. Der Rest folgt aus [29, Theorem III 10.7.].  $\square$

Das folgende Theorem (siehe auch [29, Theorem III 10.13.]) stellt das Hauptresultat dieses Kapitels dar.

**Theorem 3.10.** *Für jedes  $\lambda \in r(T_0(\tau))$  ist  $\text{def}(T_0(\tau) - \lambda) = 1$  genau dann, wenn*

$$[\varphi, \psi](b) = \lim_{x \rightarrow b^-} [\varphi, \psi](x) = 0, \quad \text{für alle } \varphi \in D(\tau), \psi \in D(\tau^+).$$

### 3 Differentialoperatoren zweiter Ordnung

Dann gilt außerdem

$$D_0(\tau) = \text{dom } T_0(\tau) = \{w \in D(\tau) : w(a) = pw'(a) = 0\}.$$

Wir können nun ebenfalls alle  $\mathcal{T}$ -selbstadjungierten Erweiterungen von  $T_0(\tau)$  beziehungsweise die Einschränkungen von  $T(\tau)$  bestimmen (dies ist ein Spezialfall von [29, Theorem III 10.14.]).

**Theorem 3.11.** *Es sei für  $\lambda \in r(T_0(\tau))$  def  $(T_0(\tau) - \lambda) = 1$ . Jeder  $\mathcal{T}$ -selbstadjungierte Operator  $S$  mit  $T_0(\tau) \subset S \subset T(\tau)$  und*

$$r(T_0(\tau)) \cap \{\lambda : (S - \lambda) \text{ ist Fredholm mit } \text{ind}(S - \lambda) = 0\} \neq \emptyset$$

ist die Einschränkung von  $T(\tau)$  auf die Menge aller Funktionen  $u \in D(\tau)$  mit

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a)u'(a) = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0.$$

Die Anzahl der quadratintegrierbaren Lösungen der Gleichung

$$\tau w(x) = -(p(x)w'(x))' + q(x)w(x) = \lambda w(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.4)$$

entspricht gerade dem Defekt des Operators  $T_0(\tau) - \lambda$ . Im Folgenden untersuchen wir die Abhängigkeit des Defektes vom Spektralparameter  $\lambda$ , siehe auch [51] für den Fall  $\text{Im } q \leq 0$ . Wir werden uns jedoch an [20] orientieren. Sowohl bei [51] als auch bei [20] existieren drei Fälle, zwei Grenzpunktfälle und einen Grenzkreisfall, welche wir im nächsten Theorem angeben. Wir setzen dafür zusätzlich voraus, dass  $p$  und  $q$  stetig sind. Wir betrachten dazu die Menge

$$Q := \text{clconv}\{rp(x) + q(x) : 0 < r < \infty, x \in [a, b]\}, \quad (3.5)$$

wobei  $\text{clconv}$  der Abschluss der konvexen Hülle ist. Wir fordern, dass

$$Q \neq \mathbb{C}.$$

Für  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus Q$  sei  $K$  der (eindeutig bestimmte) Punkt in  $Q$  mit dem kleinsten Abstand zu  $\lambda_0$ . Die Gerade  $L$  mit

$$L := \{z \in \mathbb{C} : z = i \cdot (K - \lambda_0)s + K, s \in \mathbb{R}\}$$

steht senkrecht auf der Verbindungsstrecke von  $K$  und  $\lambda_0$  und geht durch  $K$ , siehe Abbildung 3.1. Wir führen eine Translation durch und verschieben  $K$  in den Ursprung. Anschließend rotieren wir um den Winkel  $\eta \in (-\pi, \pi]$  so, dass  $L$  mit der imaginären Achse zusammen fällt und  $\lambda_0$  in der linken komplexen Halbebene liegt. Die Gerade

### 3.2 Ein regulärer Endpunkt

$L' := \{e^{i\eta}l : l \in L\} = \{is : s \in \mathbb{R}\}$  trennt  $e^{i\eta}(\lambda_0 - K)$  und  $Q' := \{e^{i\eta}(q - K) : q \in Q\}$ , in dem Sinn, dass die Menge  $Q'$  in der rechten abgeschlossenen komplexen Halbebene liegt und  $\lambda'_0 := e^{i\eta}(\lambda_0 - K)$  in der linken komplexen Halbebene. Da  $L'$  auf der imaginären Achse liegt, folgt  $\lambda'_0 = e^{i\eta}(K - \lambda_0) \in \mathbb{R}$  und somit folgt  $\lambda'_0 \in \mathbb{R}_-$ , siehe Abbildung 3.2. Gäbe es einen Punkte  $q' \in Q'$  in der linken Halbebene, das heißt mit  $\operatorname{Re} q' < 0$ , aufgrund der Konvexität von  $Q$  und somit auch von  $Q'$ , läge die gesamte Verbindungslinie zwischen  $q'$  und dem Ursprung  $\{xq' : x \in [0, 1]\}$  in  $Q'$ . Insbesondere der Punkt  $x'q'$  mit  $x' := \min\{1, \frac{\lambda'_0 \operatorname{Re} q'}{|q'|^2}\}$  liegt auf dieser Verbindungsstrecke. Es gilt jedoch  $|\lambda'_0 - x'q'|^2 = |\lambda'_0|^2 - 2x'\lambda'_0 \operatorname{Re} q' + x'^2|q'|^2$  und da  $x'|q'|^2 < 2\lambda'_0 \operatorname{Re} q'$ , folgt  $|\lambda'_0 - x'q'|^2 < |\lambda'_0|^2$  im Widerspruch dazu, dass  $K \in Q$  der nächste Punkt zu  $\lambda_0$  ist. Somit trennt  $L'$  die Menge  $Q'$  und den Punkt  $\lambda'_0$  voneinander. Das heißt (man beachte, dass wir in [20] den

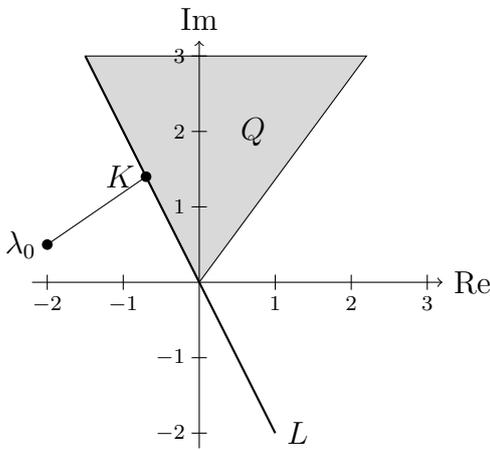


Abbildung 3.1: Die Gerade  $L$  trennt  $\lambda_0$  und  $Q$

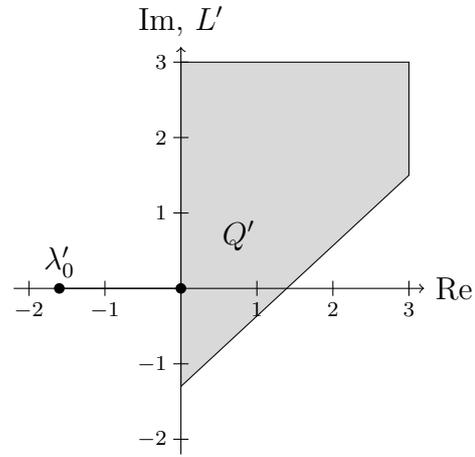


Abbildung 3.2: Rotation um den Winkel  $\eta$  und  $Q'$  liegt in der rechten Halbebene

Parameter für die Randbedingungen  $\alpha = 0$  setzen)

$$\operatorname{Re} e^{i\eta}(rp(x) + q(x) - K) \geq 0 \text{ und } \operatorname{Re} e^{i\eta}(\lambda_0 - K) < 0. \quad (3.6)$$

Wir definieren die Halbebene

$$\Lambda_{K,\eta} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} e^{i\eta}(\lambda - K) < 0\}$$

und damit folgt für alle  $\lambda \in \Lambda_{K,\eta}$

$$\operatorname{Re} e^{i\eta}(\lambda - K) = -\delta_{K,\eta} < 0,$$

wobei  $\delta_{K,\eta}$  der Abstand von  $\lambda$  zur Halbebene  $\Lambda_{K,\eta}$  ist. Wie nennen  $\eta$  und  $K$  *zulässig*, falls wir obige Konstruktion durchführen können. Somit ist  $\mathbb{C} \setminus Q$  die Vereinigung aller

### 3 Differentialoperatoren zweiter Ordnung

Halbebenen  $\Lambda_{K,\eta}$  mit zulässigen  $K$  und  $\eta$ . Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnittes, siehe [20, Theorem 2.1]. Dieses gibt drei verschiedene Fälle für die Gleichung

$$\tau w = \lambda w \quad (3.7)$$

an, je nachdem welche der Bedingungen

$$\int_a^b \operatorname{Re} e^{i\eta} (p(t)|y'(t)|^2 + (q(t) - K)|y(t)|) dt + \int_a^b |y(t)|^2 dt < \infty \quad (3.8)$$

und

$$y \in L^2(a, b) \quad (3.9)$$

erfüllt sind.

**Theorem 3.12.** *Für zulässige  $K$ ,  $\eta$  und  $\lambda \in \Lambda_{K,\eta}$  ist genau einer der folgenden drei Fälle möglich.*

*Grenzfunktfall I: Es gibt genau eine (bis auf multiplikative Vielfache) Lösung von (3.7) welche (3.8) erfüllt und dies ist auch die einzige Lösung, welche (3.9) erfüllt.*

*Grenzfunktfall II: Es gibt genau eine (bis auf multiplikative Vielfache) Lösung von (3.7) welche (3.8) erfüllt, aber alle Lösungen erfüllen (3.9).*

*Grenzkreisfall: Alle Lösungen von (3.7) erfüllen (3.8) und damit auch (3.9).*

Die Klassifikation ist unabhängig von  $\lambda$  im Sinne der folgenden Bemerkung, siehe [20, Remark 2.2].

**Bemerkung 3.13.** • Falls alle Lösungen von (3.7) die Bedingung (3.8) für ein  $\lambda \in \Lambda_{K,\eta}$  erfüllen, dann erfüllen alle Lösungen von (3.7) die Bedingung (3.8) für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- Falls alle Lösungen von (3.7) die Bedingung (3.9) für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  erfüllen, dann erfüllen alle Lösungen von (3.7) die Bedingung (3.9) für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Bemerkung 3.14.** Der Grenzfunktfall I, II und der Grenzkreisfall sind äquivalent zu den Fällen I, II und III aus [51] und [20].

Abschließend tragen wir Resultate über das Spektrum des zu (3.4) gehörenden Operators zusammen. Dafür definieren wir die Menge

$$Q_b := \bigcap_{c \in (a,b)} \operatorname{clconv}\{rp(x) + q(x) : 0 < r < \infty, x \in [c, b)\}. \quad (3.10)$$

Diese ist der Schnitt über alle Mengen, die analog zu (3.5) definiert sind, wobei das zugrundeliegende Intervall  $[c, b)$ , mit  $a < c < b$ , anstelle von  $[a, b)$  ist. Damit erhalten

wir mit [20, Theorem 4.4, Theorem 4.5 und Theorem 4.7] und Theorem 3.11 (mit  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ) folgendes Resultat.

**Theorem 3.15.** *Im Grenzpunktfall I ist der Operator  $A$  mit*

$$\begin{aligned}\text{dom } A &:= \{u \in D(\tau) : u(0) = 0\} \\ Au &:= \tau u\end{aligned}$$

*$\mathcal{T}$ -selbstadjungiert und für sein Spektrum  $\sigma(A)$  gilt*

$$\sigma(A) \subset Q,$$

*und für sein essentielles Spektrum  $\sigma_{\text{ess}}(A)$  gilt*

$$\sigma_{\text{ess}}(A) \subset Q_b.$$

*In  $Q \setminus Q_b$  besteht das Spektrum aus isolierten Eigenwerten mit endlicher algebraischer Vielfachheit, welche sich höchstens gegen unendlich häufen.*



## 4. Asymptotik von Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

Im folgenden Kapitel stellen wir Ergebnisse zu einer asymptotischen Näherung von Lösungen spezieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit komplexen Koeffizienten zusammen, auch bekannt als *WKB-Analysis*. Unsere Näherungen der Lösungen basieren vorrangig auf [28, Theorem 1.3.1] und [50, Chapter 4, Lemma 19.1]. Darüber hinaus findet man ähnliche Aussagen zum Beispiel in [17, 45, 46]. Hierfür betrachten wir die Differentialgleichung

$$y''(x) = (s(x) + t(x))y(x), \quad x \in [a, \infty) \quad (4.1)$$

mit einer Konstanten  $a \in [0, \infty)$  und komplexwertigen, stetigen Funktionen  $s : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  und  $t : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ . Darüber hinaus soll  $s$  zweimal stetig differenzierbar sein. Im Folgenden wollen wir die vierte Wurzel aus  $s$  ziehen. Dies ist in zwei Fällen problemlos möglich: Entweder nimmt  $s$  keine Werte auf  $(-\infty, 0)$  an oder  $s$  nimmt ausschließlich Werte auf  $(-\infty, 0)$  an. Wir werden diese beiden Situationen in den Abschnitten 4.1 beziehungsweise 4.2 getrennt untersuchen.

### 4.1 Die Funktionen $s$ hat nur Werte in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Wir setzen für diesen Abschnitt voraus, dass  $s(x) \notin (-\infty, 0]$  für alle  $x \in [a, \infty)$  gilt. Wir definieren die  $n$ -te Wurzel einer komplexen Zahl  $z = re^{i\arg(z)}$  mit  $-\pi < \arg(z) \leq \pi$  als  $z^{1/n} = r^{1/n}e^{i\arg(z)/n}$  und somit ist die Funktion  $x \mapsto \sqrt[n]{s(x)}$  stetig. Im folgenden Theorem transformieren wir die Differentialgleichung (4.1) in geeigneter Weise in ein System von Differentialgleichungen.

**Theorem 4.1.** *Die Differentialgleichung  $y''(x) = (s(x) + t(x))y(x)$  ist äquivalent zum Differentialgleichungssystem*

$$V'(x) = \begin{pmatrix} 2u(x)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V(x) + \frac{1}{2}(t(x)u(x)^2 - u(x)u''(x)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} V(x), \quad (4.2)$$

#### 4 Asymptotik von Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

mit  $u(x) := \sqrt[4]{s(x)}^{-1}$ .

*Beweis.* Zunächst transformieren wir  $y''(x) = (s(x) + t(x))y(x)$  in ein System  $Y'(x) = A(x)Y(x)$  mit

$$Y(x) := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \text{ und } A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s(x) + t(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann setzen wir  $z(x) := u(x)^{-1}y(x) = \sqrt[4]{s(x)}y(x)$  und für alle  $x \in [a, \infty)$

$$Z(x) := \begin{pmatrix} z(x) \\ u(x)^2 z'(x) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Somit erhalten wir

$$Y(x) = \begin{pmatrix} u(x) & 0 \\ u'(x) & u(x)^{-1} \end{pmatrix} Z(x) \text{ beziehungsweise } Z(x) = \begin{pmatrix} u(x)^{-1} & 0 \\ -u'(x) & u(x) \end{pmatrix} Y(x). \quad (4.4)$$

Diese Transformation überführt  $Y'(x) = A(x)Y(x)$  in

$$Z'(x) = \begin{pmatrix} 0 & u(x)^{-2} \\ u(x)^{-2} - u(x)u''(x) + t(x)u^2(x) & 0 \end{pmatrix} Z(x).$$

Anschließend transformieren wir ein weiteres mal

$$W(x) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Z(x) \text{ beziehungsweise } Z(x) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} W(x) \quad (4.5)$$

und dies führt auf

$$W'(x) = \begin{pmatrix} u(x)^{-2} & 0 \\ 0 & -u(x)^{-2} \end{pmatrix} W(x) + \frac{1}{2} (t(x)u(x)^2 - u(x)u''(x)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} W(x).$$

Schließlich setzen wir  $V(x) := W(x)e^{\int_a^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} = W(x)e^{\int_a^x u(\sigma)^{-2} d\sigma}$  und erhalten für alle  $x \in [a, \infty)$  Gleichung (4.2).  $\square$

Im nächsten Theorem transformieren wir (4.2) in eine Integralgleichung und zeigen, dass diese eine Lösung besitzt.

**Theorem 4.2.** *Unter den Voraussetzungen  $s(x) \notin (-\infty, 0]$  für alle  $x \in [a, \infty)$  und*

$$M := \int_a^\infty |t(\sigma)u(\sigma)^2 - u(\sigma)u''(\sigma)| d\sigma < \frac{1}{4} \quad (4.6)$$

4.1 Die Funktionen  $s$  hat nur Werte in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

besitzt die Gleichung (4.2) eine Lösung  $V(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$  mit

$$v_1(x) = G_1(x), \quad v_2(x) = 1 + G_2(x), \quad x \in [a, \infty),$$

und mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  gilt

$$\|G_1\|_\infty \leq e^{2M} - 1 \quad \text{und} \quad \|G_2\|_\infty \leq e^{2M} - 1. \quad (4.7)$$

Außerdem gilt

$$|G_1(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad |G_2(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

*Beweis.* Zunächst setzen wir

$$S(x) := \frac{t(x)u(x)^2 - u(x)u''(x)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten  $\int_a^\infty \|S(\sigma)\|_2 d\sigma \leq M$ , (wobei  $\|\cdot\|_2$  die Operatornorm bezüglich der euklidischen Metrik in  $\mathbb{C}^2$  darstellt). Somit lässt sich (4.2) schreiben als

$$V'(x) = \begin{pmatrix} 2u(x)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V(x) + S(x)V(x).$$

Das Fundamentalsystem für das System

$$V'(x) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{s(x)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V(x), \quad (4.9)$$

können wir sofort als

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{\int_a^x 2\sqrt{s(\sigma)} d\sigma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Da  $\operatorname{Re}(s(\sigma))^{1/2} \geq 0$  für  $a \leq x \leq \sigma \leq \tilde{x} < \infty$  gilt, folgt

$$\left\| \begin{pmatrix} \exp(-2 \int_x^{\tilde{x}} (s(\sigma))^{1/2} d\sigma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = 1$$

und somit  $\|\Phi(x)\Phi(\tilde{x})^{-1}\|_2 = 1$ .

Im Banachraum der beschränkten, stetigen Funktionen  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^2$  mit der Supremumsnorm erhalten wir eine beschränkte, stetige Lösung von (4.9) mit  $h_1(x) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

#### 4 Asymptotik von Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

und definieren  $F : B \rightarrow B$  durch

$$(Ff)(x) := h_1(x) - \Phi(x) \int_x^\infty \Phi^{-1}(\sigma) S(\sigma) f(\sigma) d\sigma. \quad (4.10)$$

Da  $\|F(f)\|_\infty \leq 1 + M\|f\|_\infty$ , bildet  $F$  beschränkte Funktionen auf beschränkte Funktionen ab. Da  $f \in B$  stetig ist, ist die Funktion  $Ff$  differenzierbar, das heißt  $\frac{d}{d\sigma}(Ff)(\sigma)$  existiert für alle  $\sigma \in [a, \infty)$ . Außerdem ist  $F$  eine Kontraktion, da für  $f_1$  und  $f_2$  in  $B$  die Abschätzung  $\|F(f_1) - F(f_2)\|_\infty \leq M\|f_1 - f_2\|_\infty < \|f_1 - f_2\|_\infty$  gilt. Deshalb existiert, nach dem Banachschen Fixpunktsatz, ein eindeutiges  $y \in B$ , mit  $y = F(y)$ .

Wir erhalten die Lösung von  $y = F(y)$  durch Fixpunktiteration mit  $h_1$  als Startwert. Dafür sei

$$h_{k+1}(x) := (Fh_k)(x), k \in \mathbb{N}.$$

Weiter gilt für  $x \geq a$

$$\begin{aligned} |h_2(x) - h_1(x)| &= \left| -\Phi(x) \int_x^\infty \Phi^{-1}(\sigma) S(\sigma) h_1(\sigma) d\sigma \right| \\ &\leq \int_x^\infty \|S(\sigma)\|_2 d\sigma \leq M. \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion erhalten wir

$$\begin{aligned} |h_{k+1}(x) - h_k(x)| &\leq \left| \int_x^\infty \|S(\sigma)\|_2 |h_k(\sigma) - h_{k-1}(\sigma)|_\infty d\sigma \right| \\ &\leq \left| \int_x^\infty \|S(\sigma)\|_2 \frac{\left(\int_\sigma^\infty \|S(\mu)\|_2 d\mu\right)^{k-1}}{(k-1)!} d\sigma \right| \\ &= \left| -\int_x^\infty \frac{d}{d\sigma} \frac{\left(\int_\sigma^\infty \|S(\mu)\|_2 d\mu\right)^k}{k!} d\sigma \right| \\ &= \frac{1}{k!} \left( \int_x^\infty \|S(\sigma)\|_2 d\sigma \right)^k \leq \frac{M^k}{k!}. \end{aligned}$$

Somit gilt für alle  $n \geq m \geq 1$

$$\sup_{x \in [a, \infty)} |h_n(x) - h_m(x)| = \sup_{x \in [a, \infty)} \left| \sum_{k=m}^{n-1} h_{k+1}(x) - h_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{M^k}{k!}$$

und  $(h_n)_n$  ist gleichmäßig konvergent. Wir setzen  $h(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$  und dies ist eine stetige Funktion auf  $[a, \infty)$ .

Wir zeigen, dass mit einer beschränkten Lösung  $h_1$  von (4.9) die eindeutig bestimmte Funktion  $y \in B$  mit  $y(x) = (Fy)(x) = h_1(x) - \Phi(x) \int_x^\infty \Phi^{-1}(\sigma) S(\sigma) y(\sigma) ds$  eine Lösung

von (4.2) ist. Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{d}{dx}(Fy)(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{s(x)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h_1(x) - \Phi'(x) \int_x^\infty \Phi(\sigma)^{-1} S(\sigma) y(\sigma) d\sigma + S(x)y(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{s(x)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left( h_1(x) - \Phi(x) \int_x^\infty \Phi(\sigma)^{-1} S(\sigma) y(\sigma) d\sigma \right) + S(x)y(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{s(x)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (Fy)(x) + S(x)y(x) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{s(x)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(x) + S(x)y(x), \end{aligned}$$

das heißt  $y$  erfüllt (4.2).

Außerdem erfüllt  $h$   $h(x) = (Fh)(x)$  und ist eine Lösung von (4.2). Da  $h_1$  eine Lösung von (4.9) und  $h$  von (4.2) ist, ist  $h - h_1$  ebenfalls eine Lösung von (4.2). Wir bezeichnen mit  $G_1$  und  $G_2$  die zwei Komponenten von  $h - h_1$  und erhalten

$$\|h - h_1\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = e^M - 1$$

und somit

$$\|G_j\|_\infty \leq e^M - 1, \quad j = 1, 2.$$

Schließlich zeigen wir, dass (4.8) gilt. Wir wählen zu  $\varepsilon > 0$  ein  $X \in [a, \infty)$  so, dass

$$M(X) := \int_X^\infty \|S(\sigma)\|_\infty d\sigma < \ln(1 + \varepsilon).$$

Damit folgt für alle  $x \geq X$  analog zur obigen Rechnung, indem man  $M$  durch  $M(X)$  ersetzt

$$|h(x) - h_1(x)| = \left| \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \end{pmatrix} \right| \leq e^{M(X)} - 1 < \varepsilon$$

□

Wir erhalten nun folgende Aussagen für eine Lösung von (4.1).

**Proposition 4.3.** *Die Differentialgleichung (4.1) besitzt unter den Voraussetzungen von Theorem 4.2 eine Lösung  $y_+$  mit*

$$\begin{aligned} y_+(x) &= s(x)^{-1/4} e^{-\int_a^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} (1 + F_1(x)), \quad x \in [a, \infty) \\ (s(x)^{1/4} y_+(x))' &= s(x)^{1/2} e^{-\int_a^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} (-1 + F_2(x)), \quad x \in [a, \infty) \end{aligned}$$

#### 4 Asymptotik von Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

wobei

$$\|F_1\|_\infty \leq 2e^M - 2 \text{ und } \|F_2\|_\infty \leq 2e^M - 2$$

mit  $M$  wie in (4.6).

Es gilt außerdem

$$|F_1(x)| \rightarrow 0, \text{ für } x \rightarrow \infty \text{ und } |F_2(x)| \rightarrow 0, \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* Aus dem obigen Theorem 4.2 wissen wir, dass (4.2) eine Lösung

$$V(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ 1 + G_2(x) \end{pmatrix}$$

besitzt, die (4.7) erfüllt. Aus (4.5) und dem Zusammenhang von  $V$  und  $W$  (vergleiche Beweis von Theorem 4.1) folgt

$$Z(x) = \begin{pmatrix} 1 + G_1(x) + G_2(x) \\ -1 + G_1(x) - G_2(x) \end{pmatrix} e^{-\int_a^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma}.$$

Daraus folgt mit (4.4),  $F_1 := G_1 + G_2$  und  $F_2 := G_1 - G_2$

$$y(x) = s(x)^{-1/4} e^{-\int_a^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} (1 + F_1(x))$$

und aus (4.3)

$$(s(x)^{1/4} y(x))' = s(x)^{1/2} e^{-\int_a^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} (-1 + F_2(x)).$$

□

Die Gleichung (4.1) besitzt zwei linear unabhängige Lösungen. Das asymptotische Verhalten einer dieser Lösungen wird in Proposition 4.3 beschrieben. Um das der zweiten zu beschreiben, benutzt man die Transformation  $V(x) := W(x)e^{-\int_a^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma}$  (vergleiche Ende des Beweises von Theorem 4.1) und stellt fest, dass Gleichung (4.1) auch äquivalent zum Differentialgleichungssystem

$$V'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2u(x)^{-2} \end{pmatrix} V(x) + \frac{1}{2}(t(x)u(x)^2 - u(x)u''(x)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} V(x), \quad (4.11)$$

ist. Nun kann man analog zum Beweis von Theorem 4.2 argumentieren:

$$V'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2u(x)^{-2} \end{pmatrix} V(x) + S(x)V(x).$$

Das (4.9) entsprechende System lautet

$$V'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{s(x)} \end{pmatrix} V(x)$$

und die Funktion die konstant  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist, ist eine Lösung. Die Kontraktion  $F$  ist nun genauso wie in (4.10) (siehe Seite 38) erklärt, nur ersetzt man  $h_1$  durch die Konstante Funktion  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Ganz offensichtlich hängt die Argumentation im Beweis von Theorem 4.2 nicht von  $h_1$  ab und so erhalten wir unter der Voraussetzung  $M < \frac{1}{4}$  eine Lösung  $v$  von (4.11), die ebenso (4.7) und (4.8) erfüllt. Anschließend verfährt man wie im Beweis von Proposition 4.3 und erhält folgende Aussage.

**Proposition 4.4.** *Die Differentialgleichung (4.1) besitzt unter den Voraussetzungen von Theorem 4.2 eine Lösung  $\hat{y}_+$  mit*

$$\begin{aligned} \hat{y}_+(x) &= s(x)^{-1/4} e^{\int_a^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} \left( 1 + \hat{F}_{1+}(x) \right), \quad x \in [a, \infty), \\ (s(x)^{1/4} \hat{y}_+(x))' &= s(x)^{1/2} e^{\int_a^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} \left( 1 + \hat{F}_{2+}(x) \right), \quad x \in [a, \infty), \end{aligned}$$

wobei

$$\|\hat{F}_{1+}\|_\infty \leq 2e^{M_+} - 2, \quad \|\hat{F}_{2+}\|_\infty \leq 2e^{M_+} - 2,$$

$M_+$  wie in (4.6) und

$$|\hat{F}_{1+}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \quad \text{und} \quad |\hat{F}_{2+}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

**Bemerkung 4.5.** Durch die einfache Transformation  $z : [a, \infty) \rightarrow (-\infty, -a]$ ,  $x \mapsto -x$  erhalten wir die folgende Aussage:

Für  $t : (-\infty, -a] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $s : (-\infty, -a] \rightarrow \mathbb{C}$  zweimal stetig differenzierbar mit  $s(x) \notin (-\infty, 0]$  für alle  $x \in (-\infty, -a]$ ,  $u(x) := \sqrt[4]{s(x)}^{-1}$  und

$$M_- := \int_{-\infty}^{-a} |t(\sigma)u(\sigma)^2 - u(\sigma)u''(\sigma)| d\sigma < \frac{1}{4}$$

hat die Differentialgleichung

$$y''(x) = (s(x) + t(x))y(x), \quad x \in (-\infty, -a]$$

mittels Proposition 4.3 und Proposition 4.4 Lösungen  $y_-$  und  $\hat{y}_-$  mit

$$y_-(x) = s(x)^{-1/4} e^{\int_{-a}^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} (1 + F_{1-}(x)), \quad x \in (-\infty, -a],$$

#### 4 Asymptotik von Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$(s(x)^{1/4}y_-(x))' = s(x)^{1/2}e^{\int_{-a}^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} (-1 + F_{2-}(x)), \quad x \in (-\infty, -a],$$

$$\|F_{1-}\|_{\infty} \leq 2e^{M^-} - 2 \text{ und } \|F_{2-}\|_{\infty} \leq 2e^{M^-} - 2$$

und

$$|F_{1-}(x)| \rightarrow 0, \text{ für } x \rightarrow -\infty \text{ und } |F_{2-}(x)| \rightarrow 0, \text{ für } x \rightarrow -\infty.$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \widehat{y}_-(x) &= s(x)^{-1/4} e^{-\int_{-a}^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} \left(1 + \widehat{F}_{1-}(x)\right), \quad x \in (-\infty, -a], \\ (s(x)^{1/4}\widehat{y}_-(x))' &= s(x)^{1/2} e^{-\int_{-a}^x \sqrt{s(\sigma)} d\sigma} \left(1 + \widehat{F}_{2-}(x)\right), \quad x \in (-\infty, -a], \end{aligned}$$

$$\|\widehat{F}_{1-}\|_{\infty} \leq 2e^{M^-} - 2 \text{ und } \|\widehat{F}_{2-}\|_{\infty} \leq 2e^{M^-} - 2$$

und

$$|\widehat{F}_{1-}(x)| \rightarrow 0, \text{ für } x \rightarrow -\infty \text{ und } |\widehat{F}_{2-}(x)| \rightarrow 0, \text{ für } x \rightarrow -\infty.$$

Als Beispiel sowie als Vorbereitung auf Kapitel 5 betrachten wir zwei Differentialgleichungen, eine auf  $[a, \infty)$  und eine auf  $(-\infty, -a]$ , mit speziell gewählten Koeffizienten. Wir haben auf  $(-\infty, -a]$  zwei Asymptotiken  $y_-$  und  $\widehat{y}_-$  und auf  $[a, \infty)$  zwei Asymptotiken  $y_+$  und  $\widehat{y}_+$  für die Lösungen dieser Differentialgleichungen. Außerdem können wir auch angeben, wie sich deren Ableitungen asymptotisch verhalten.

**Theorem 4.6.** *Die Differentialgleichungen*

$$w''(x) = e^{\pm 2i\phi} q_{\pm}(x)w(x) - e^{\pm 2i\phi} \lambda w(x), \quad \pm x \in [a, \infty) \quad (4.12)$$

mit Konstanten  $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  und zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $q_+ : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  beziehungsweise  $q_- : (-\infty, -a] \rightarrow \mathbb{C}$  haben unter den Voraussetzungen

- $\text{clconv}\{e^{\mp 2i\phi} r + q_{\pm}(x) : 0 < r < \infty, \pm x \in [a, \infty)\} \neq \mathbb{C}$ ,
- $\lambda \notin \text{clconv}\{e^{\mp 2i\phi} r + q_{\pm}(x) : 0 < r < \infty, \pm x \in [a, \infty)\}$  und
- mit  $s_{\pm}(x) := e^{\pm 2i\phi} q_{\pm}(x) - e^{\pm 2i\phi} \lambda$  gilt  $M_+ := \int_{[a, \infty)} \left| \frac{5s'_+(x)^2}{16s_+(x)^{5/2}} - \frac{s''_+(x)}{4s_+(x)^{3/2}} \right| dx < \frac{1}{4}$   
und  $M_- := \int_{(-\infty, -a]} \left| \frac{5s'_-(x)^2}{16s_-(x)^{5/2}} - \frac{s''_-(x)}{4s_-(x)^{3/2}} \right| dx < \frac{1}{4}$

Lösungen  $y_{\pm}$  mit

$$y_{\pm}(x) = s_{\pm}(x)^{-1/4} e^{\mp \int_{\pm a}^x \sqrt{s_{\pm}(\sigma)} d\sigma} (1 + F_{1\pm}(x)), \quad \pm x \in [a, \infty),$$

4.1 Die Funktionen  $s$  hat nur Werte in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$(s_{\pm}(x)^{1/4}y_{\pm}(x))' = s_{\pm}(x)^{1/2}e^{\mp \int_{\pm a}^x \sqrt{s_{\pm}(\sigma)} d\sigma} (-1 + F_{2\pm}(x)), \quad \pm x \in [a, \infty),$$

wobei  $|F_{1\pm}(x)| \rightarrow 0$  und  $|F_{2\pm}(x)| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  und  $\|F_{1\pm}\|_{\infty} \leq 2e^{M_{\pm}} - 2$  und  $\|F_{2\pm}\|_{\infty} \leq 2e^{M_{\pm}} - 2$ . Außerdem besitzen die Differentialgleichungen (4.12) Lösungen  $\hat{y}_{\pm}$  mit

$$\hat{y}_{\pm}(x) = s_{\pm}(x)^{-1/4}e^{\mp \int_{\pm a}^x \sqrt{s_{\pm}(\sigma)} d\sigma} \left(1 + \hat{F}_{1\pm}(x)\right), \quad \pm x \in [a, \infty),$$

$$(s_{\pm}(x)^{1/4}\hat{y}_{\pm}(x))' = s_{\pm}(x)^{1/2}e^{\mp \int_{\pm a}^x \sqrt{s_{\pm}(\sigma)} d\sigma} \left(1 + \hat{F}_{2\pm}(x)\right), \quad \pm x \in [a, \infty),$$

wobei  $|\hat{F}_{1\pm}(x)| \rightarrow 0$  und  $|\hat{F}_{2\pm}(x)| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  und  $\|\hat{F}_{1\pm}\|_{\infty} \leq 2e^{M_{\pm}} - 2$  und  $\|\hat{F}_{2\pm}\|_{\infty} \leq 2e^{M_{\pm}} - 2$ . Gilt darüberhinaus

$$M_{+} = \int_{[a, \infty)} \left| \frac{5s'_{+}(x)^2}{16s_{+}(x)^{5/2}} - \frac{s''_{+}(x)}{4s_{+}(x)^{3/2}} \right| dx \rightarrow 0, \quad \text{für } |\lambda| \rightarrow \infty$$

und

$$M_{-} = \int_{(-\infty, -a]} \left| \frac{5s'_{-}(x)^2}{16s_{-}(x)^{5/2}} - \frac{s''_{-}(x)}{4s_{-}(x)^{3/2}} \right| dx \rightarrow 0, \quad \text{für } |\lambda| \rightarrow \infty$$

folgt  $\|F_{1\pm}\|_{\infty} \rightarrow 0$  und  $\|F_{2\pm}\|_{\infty} \rightarrow 0$  für  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , sowie  $\|\hat{F}_{1\pm}\|_{\infty} \rightarrow 0$  und  $\|\hat{F}_{2\pm}\|_{\infty} \rightarrow 0$  für  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Wir haben nur zu zeigen, dass  $s_{\pm}(x) \notin (-\infty, 0]$  für alle  $\pm x \in [a, \infty)$ . Die Aussage folgt dann aus Theorem 4.2, Proposition 4.3 und Bemerkung 4.5.

Angenommen, es existieren ein  $A \in \mathbb{R}_{+}$  und ein  $|x| \in [a, \infty)$  mit  $s_{\pm}(x) = -A$ , beziehungsweise  $q_{\pm}(x) - \lambda = -e^{\mp 2i\phi} A$ . Dies führt auf  $\lambda = q_{\pm}(x) + e^{\mp 2i\phi} A$  und damit ist  $\lambda \in \text{clconv}\{e^{\mp 2i\phi} r + q_{\pm}(x) : 0 < r < \infty, \pm x \in [a, \infty)\}$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Als Anwendung von Lemma 4.6 betrachten wir das Potential

$$q_{\pm}(x) = -(ix)^{N+2}e^{\pm(N+2)i\phi}, \quad (4.13)$$

mit  $x \in \mathbb{R}_{\pm}$  und  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > 2$ . Wir zeigen, dass das Potential in (4.13) die Voraussetzungen des Lemmas 4.6 erfüllt. Dafür haben wir nur

$$\text{clconv}\{e^{\mp 2i\phi} r - (ix)^{N+2}e^{\pm(N+2)i\phi} : 0 < r < \infty, \pm x \in [a, \infty)\} \neq \mathbb{C}$$

und

$$M_{\pm} = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \left| \frac{5s'_{\pm}(x)^2}{16s_{\pm}(x)^{5/2}} - \frac{s''_{\pm}(x)}{4s_{\pm}(x)^{3/2}} \right| dx < \frac{1}{4},$$

#### 4 Asymptotik von Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

mit  $s_{\pm}(x) := e^{\pm 2i\phi} q_{\pm}(x) - e^{\pm 2i\phi} \lambda$  zu zeigen. Der erste Teil gilt, da die Menge

$$\{e^{\mp 2i\phi} r - (ix)^{N+2} e^{\pm(N+2)i\phi} : 0 < r < \infty, \pm x \in [a, \infty)\}$$

aus zwei (nicht notwendigerweise verschiedenen) Strahlen in der komplexen Ebene besteht und deren konvexe Hülle nicht die gesamte komplexe Ebene sein kann. Wir zeigen, dass  $M_{\pm} = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \left| \frac{5s'_{\pm}(x)^2}{16s_{\pm}(x)^{5/2}} - \frac{s''_{\pm}(x)}{4s_{\pm}(x)^{3/2}} \right| dx \rightarrow 0$ , für  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , mithin alle Bedingungen von Lemma 4.6 für große  $\lambda$  erfüllt sind. Dies geschieht im folgenden Lemma. Wir definieren dafür

$$\lambda_{\pm} := -(-i)^{N+2} e^{\mp(N+2)i\phi} \lambda$$

und damit folgt

$$s_{\pm}(x) = -e^{\pm 2i\phi} i^{N+2} e^{\pm(N+2)i\phi} (x^{N+2} - \lambda_{\pm}).$$

**Lemma 4.7.** Für

$$|\lambda| \geq 1$$

und für ein  $\rho$  mit  $0 < \rho < \frac{\pi}{4}$  und

$$|\arg \lambda_{+}| \geq \rho \text{ und } |\arg (-1)^N \lambda_{-}| \geq \rho$$

folgt

1.  $|(x^{N+2} - \lambda_{\pm})| \geq \frac{1}{2}|x|^{N+2}$  für alle  $\pm x \geq \sqrt[N+2]{2|\lambda|}$ ,
2.  $|(x^{N+2} - \lambda_{\pm})| \geq \sin(\rho)|\lambda|$ ,  $\pm x < \sqrt[N+2]{2|\lambda|}$ , und
3.  $M_{\pm} = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \left| \frac{5s'_{\pm}(x)^2}{16s_{\pm}(x)^{5/2}} - \frac{s''_{\pm}(x)}{4s_{\pm}(x)^{3/2}} \right| dx \leq \frac{21(N+2)^2}{4(\sin \rho)^{5/2}} |\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}$

*Beweis.* Zunächst gilt

$$\left| \frac{5s'_{\pm}(x)^2}{16s_{\pm}(x)^{5/2}} - \frac{s''_{\pm}(x)}{4s_{\pm}(x)^{3/2}} \right| \leq \frac{5}{16} \frac{|q'_{\pm}(x)|^2}{|q_{\pm}(x) - \lambda|^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{|q''_{\pm}(x)|}{|q_{\pm}(x) - \lambda|^{3/2}}.$$

Mit  $q_{\pm}$  wie in (4.13) lautet die rechte Seite der Ungleichung

$$\frac{5}{16} \frac{(N+2)^2 |x^{2(N+1)}|}{|(ix)^{N+2} e^{\pm i(N+2)\phi} + \lambda|^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{(N+2)(N+1) |x^N|}{|(ix)^{N+2} e^{\pm i(N+2)\phi} + \lambda|^{3/2}}$$

beziehungsweise

$$\frac{5}{16} \frac{(N+2)^2 |x^{2(N+1)}|}{|x^{N+2} - \lambda_{\pm}|^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{(N+2)(N+1) |x^N|}{|x^{N+2} - \lambda_{\pm}|^{3/2}}.$$

Wir zeigen die Aussage des Lemmas für  $x \in \mathbb{R}_{+}$ .

1. Wir setzen  $A := \sqrt[N+2]{2|\lambda_+|}$ . Falls  $x \geq A$  und  $\operatorname{Re} \lambda_+ \leq 0$  folgt

$$|x^{N+2} - \lambda_+| = \sqrt{(x^{N+2} - \operatorname{Re} \lambda_+)^2 + \operatorname{Im}^2 \lambda_+} \geq x^{N+2}.$$

Falls  $x \geq A$  und  $\operatorname{Re} \lambda_+ > 0$  gilt

$$\frac{x^{N+2}}{2} \geq |\lambda_+| \geq \operatorname{Re} \lambda_+$$

und somit

$$|x^{N+2} - \lambda_+| = \sqrt{(x^{N+2} - \operatorname{Re} \lambda_+)^2 + \operatorname{Im}^2 \lambda_+} \geq \sqrt{\left(\frac{x^{N+2}}{2}\right)^2 + \operatorname{Im}^2 \lambda_+} \geq \frac{x^{N+2}}{2}.$$

2. Wir nehmen an, dass  $x < A$  ist. Gilt  $\operatorname{Re} \lambda_+ \leq 0$  folgt

$$|x^{N+2} - \lambda_+| = \sqrt{(x^{N+2} - \operatorname{Re} \lambda_+)^2 + \operatorname{Im}^2 \lambda_+} \geq |\lambda_+|.$$

Gilt hingegen  $\operatorname{Re} \lambda_+ > 0$  folgt mit  $|\arg \lambda_+| \geq \rho$ , dass

$$|x^{N+2} - \lambda_+| = \sqrt{(x^{N+2} - \operatorname{Re} \lambda_+)^2 + \operatorname{Im}^2 \lambda_+} \geq |\operatorname{Im} \lambda_+| \geq |\lambda_+| \sin \rho.$$

3. Somit gilt mit

$$\left| \frac{5s'_+(x)^2}{16s_+(x)^{5/2}} - \frac{s''_+(x)}{4s_+(x)^{3/2}} \right| \leq \frac{5}{16} \frac{(N+2)^2 |x^{2(N+1)}|}{|x^{N+2} - \lambda_+|^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{(N+2)(N+1)|x^N|}{|x^{N+2} - \lambda_+|^{3/2}},$$

für  $0 \leq x < A$

$$\begin{aligned} & \int_0^A \left| \frac{5s'_+(x)^2}{16s_+(x)^{5/2}} - \frac{s''_+(x)}{4s_+(x)^{3/2}} \right| dx \\ & \leq \int_0^A \frac{5}{16} \frac{(N+2)^2 A^{2(N+1)}}{(\sin \rho)^{5/2} |\lambda|^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{(N+2)(N+1)A^N}{(\sin \rho)^{3/2} |\lambda|^{3/2}} dx \\ & = \frac{5}{16} \frac{(N+2)^2 A^{2(N+1)+1}}{(\sin \rho)^{5/2}} |\lambda|^{-5/2} + \frac{1}{4} \frac{(N+2)(N+1)A^{N+1}}{(\sin \rho)^{3/2}} |\lambda|^{-3/2} \\ & \leq \frac{5}{16} \frac{(N+2)^2 (2|\lambda|)^{(2N+3)/(N+2)}}{(\sin \rho)^{5/2}} |\lambda|^{-5/2} + \frac{(N+2)^2 (2|\lambda|)^{(N+1)/(N+2)}}{4(\sin \rho)^{3/2}} |\lambda|^{-3/2} \\ & \leq \frac{5}{16} \frac{4(N+2)^2 (|\lambda|)^{(2N+3)/(N+2)}}{(\sin \rho)^{5/2}} |\lambda|^{-5/2} + \frac{(N+2)^2 (|\lambda|)^{(N+1)/(N+2)}}{2(\sin \rho)^{5/2}} |\lambda|^{-3/2} \end{aligned}$$

#### 4 Asymptotik von Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\leq \frac{7(N+2)^2}{4(\sin \rho)^{5/2}} |\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}.$$

Für  $A \leq x$  gilt

$$\begin{aligned} & \int_A^\infty \left| \frac{5s_+^{\prime 2}(x)}{16s_+^{5/2}(x)} - \frac{s_+''(x)}{4s_+^{3/2}(x)} \right| dx \\ & \leq \int_A^\infty \frac{5}{16} \frac{(N+2)^2 x^{2(N+1)}}{(x^{N+2}/2)^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{(N+2)(N+1)x^N}{(x^{N+2}/2)^{3/2}} dx \\ & = \int_A^\infty \frac{5}{16} 2^{5/2} (N+2)^2 x^{-N/2-3} + \frac{1}{4} 2^{3/2} (N+2)(N+1) x^{-N/2-3} dx \\ & = \left( \frac{5}{16} 2^{5/2} (N+2)^2 \frac{2}{N+4} + \frac{1}{4} 2^{3/2} \frac{2}{N+4} (N+2)(N+1) \right) A^{-N/2-2} \\ & \leq \left( \frac{5\sqrt{2}}{2} \frac{(N+2)^2}{N+4} + \frac{\sqrt{2}(N+2)^2}{N+4} \right) \sqrt{2}^{-1} |\lambda|^{-1/2-1/(N+2)} \\ & = \left( \frac{5(N+2)^2}{2(N+4)} + \frac{(N+2)^2}{N+4} \right) |\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left| \frac{5s_+^{\prime 2}(x)}{16s_+^{5/2}(x)} - \frac{s_+''(x)}{4s_+^{3/2}(x)} \right| dx \\ & = \int_0^A \left| \frac{5s_+^{\prime 2}(x)}{16s_+^{5/2}(x)} - \frac{s_+''(x)}{4s_+^{3/2}(x)} \right| dx + \int_A^\infty \left| \frac{5s_+^{\prime 2}(x)}{16s_+^{5/2}(x)} - \frac{s_+''(x)}{4s_+^{3/2}(x)} \right| dx \\ & \leq \left( \frac{7(N+2)^2}{4(\sin \rho)^{5/2}} + \frac{7(N+2)^2}{2(N+4)} \right) |\lambda|^{-1/2-1/(N+2)} \leq \frac{21(N+2)^2}{4(\sin \rho)^{5/2}} |\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}. \end{aligned}$$

Analog gilt dann auch

$$\int_{-\infty}^0 \left| \frac{5s_-^{\prime 2}(x)}{16s_-^{5/2}(x)} - \frac{s_-''(x)}{4s_-^{3/2}(x)} \right| dx \leq \frac{21(N+2)^2}{4(\sin \rho)^{5/2}} |\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}.$$

□

Wir fassen die erhaltenden Resultate aus Lemma 4.6 und Lemma 4.7 in folgendem Theorem zusammen.

## 4.2 Die Funktionen $s$ hat nur Werte in $(-\infty, 0)$

**Theorem 4.8.** *Die Differentialgleichungen*

$$w''(x) = e^{\pm 2i\phi}(-ix)^{N+2}e^{\pm(N+2)i\phi} - \lambda)w(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm} \quad (4.14)$$

mit Konstanten  $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\arg -(\pm 1)^{N+2}(-i)^{N+2}e^{\mp(N+2)i\phi}\lambda| \geq \rho > 0$ , für  $\rho < \frac{\pi}{4}$  und  $\lambda \notin \text{clconv}\{e^{\mp 2i\phi}r + q_{\pm}(x) : 0 < r < \infty, x \in \mathbb{R}_{\pm}\}$  besitzen mit  $s_{\pm}(x) := -e^{\pm 2i\phi}(ix)^{N+2}e^{\pm(N+2)i\phi} - e^{\pm 2i\phi}\lambda$  und  $M_{\pm} < \frac{1}{4}$  Lösungen  $y_{\pm}$  mit

$$\begin{aligned} y_{\pm}(x) &= s_{\pm}(x)^{-1/4}e^{\mp \int_0^x \sqrt{s_{\pm}(\sigma)} d\sigma} (1 + F_{1\pm}(x)), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}, \\ (s_{\pm}(x)^{1/4}y_{\pm}(x))' &= s_{\pm}(x)^{1/2}e^{\mp \int_0^x \sqrt{s_{\pm}(\sigma)} d\sigma} (-1 + F_{2\pm}(x)), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}, \end{aligned}$$

wobei  $|F_{1\pm}(x)| \rightarrow 0$  und  $|F_{2\pm}(x)| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  und  $\|F_{1\pm}\|_{\infty} \leq 2e^{M_{\pm}} - 2$  und  $\|F_{2\pm}\|_{\infty} \leq 2e^{M_{\pm}} - 2$  mit

$$M_{\pm} := \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \left| \frac{5s'_{\pm}(x)}{16s_{\pm}^{5/2}(x)} - \frac{s''_{\pm}(x)}{4s_{\pm}^{3/2}(x)} \right| dx.$$

Darüberhinaus folgt aus

$$M_{\pm} = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \left| \frac{5s'_{\pm}(x)}{16s_{\pm}^{5/2}(x)} - \frac{s''_{\pm}(x)}{4s_{\pm}^{3/2}(x)} \right| dx \leq \frac{21(N+2)^2}{4(\sin \rho)^{5/2}} |\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}$$

$\|F_{1\pm}\|_{\infty} \rightarrow 0$  und  $\|F_{2\pm}\|_{\infty} \rightarrow 0$  für  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

## 4.2 Die Funktionen $s$ hat nur Werte in $(-\infty, 0)$

Zum Schluss dieses Kapitels entwickeln wir Asymptotiken für die Lösungen der Differentialgleichung (4.1) mit einer reellwertigen, negativen Funktion  $s$ . Diese Asymptotiken benötigen wir im folgenden Kapitel für die genauere Untersuchung der Differentialgleichung (4.14) für den Fall, dass für die Konstante  $e^{\pm 2i\phi}i^{N+2}e^{\pm(N+2)i\phi} = 1$  gilt. Somit betrachten wir die Differentialgleichung

$$y''(x) = (-r(x) + t(x))y(x), \quad x \in [a, \infty) \quad (4.15)$$

mit einer Konstanten  $a \geq 0$  und einer komplexwertigen stetigen Funktion  $t : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  und einer positiven reellwertigen und zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $r : [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ . Analog zu Theorem 4.1 transformieren wir diese Differentialgleichung in ein System.

**Theorem 4.9.** *Die Differentialgleichung (4.15) ist äquivalent zum Differentialgleichungs-*

#### 4 Asymptotik von Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

system (vergleiche Theorem 4.1)

$$V'(x) = \begin{pmatrix} 2iu(x)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V(x) + \frac{i}{2}(t(x)u(x)^2 - u(x)u''(x)) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} V(x), \quad (4.16)$$

mit  $u(x) := \sqrt[4]{r(x)}^{-1}$ .

*Beweis.* Die Differentialgleichung ist äquivalent zum System  $Y'(x) = A(x)Y(x)$  mit

$$Y(x) := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \text{ und } A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r(x) + t(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen  $z(x) := e^{\frac{\pi}{4}i}u(x)^{-1}y(x)$  und  $Z(x) := \begin{pmatrix} z(x) \\ -iu(x)^2z'(x) \end{pmatrix}$  für alle  $x \in [a, \infty)$  und erhalten

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi}{4}i}u(x) & 0 \\ e^{-\frac{\pi}{4}i}u'(x) & e^{\frac{\pi}{4}i}u(x)^{-1} \end{pmatrix} Z(x)$$

beziehungsweise

$$Z(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{4}i}u(x)^{-1} & 0 \\ -e^{-\frac{\pi}{4}i}u'(x) & e^{-\frac{\pi}{4}i}u(x) \end{pmatrix} Y(x).$$

Diese Transformation überführt  $Y'(x) = A(x)Y(x)$  in

$$Z'(x) = \begin{pmatrix} 0 & iu(x)^{-2} \\ iu(x)^{-2} + iu(x)u''(x) - it(x)u(x)^2 & 0 \end{pmatrix} Z(x).$$

Anschließend transformieren wir ein weiteres Mal

$$W(x) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Z(x) \text{ beziehungsweise } Z(x) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} W(x)$$

und dies führt auf

$$W'(x) = \begin{pmatrix} iu(x)^{-2} & 0 \\ 0 & -iu(x)^{-2} \end{pmatrix} W + \frac{i}{2}(t(x)u(x)^2 - u(x)u''(x)) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} W(x).$$

Schließlich setzen wir

$$V(x) := W(x)e^{i \int_a^x \sqrt{r(\sigma)} d\sigma} = W(x)e^{i \int_a^x u(\sigma)^{-2} d\sigma} \quad (4.17)$$

und erhalten für alle  $x \in [a, \infty)$  Gleichung (4.16).  $\square$

## 4.2 Die Funktionen $s$ hat nur Werte in $(-\infty, 0)$

Wir erhalten somit das folgende Theorem, wobei wir auf den Beweis verzichten, da er dem von Theorem 4.2 entspricht.

**Theorem 4.10.** *Unter den Voraussetzungen  $r(x) \in (0, \infty)$  für alle  $x \in [a, \infty)$  und*

$$M := \int_a^\infty |t(\sigma)u(\sigma)^2 - u(\sigma)u''(\sigma)| d\sigma < \frac{1}{4},$$

*besitzt die Gleichung (4.16) eine Lösung  $V(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$  mit*

$$v_1(x) = G_1(x), \quad v_2(x) = 1 + G_2(x), \quad x \in [a, \infty),$$

*und*

$$\|G_1\|_\infty \leq e^M - 1 \quad \text{und} \quad \|G_2\|_\infty \leq e^M - 1.$$

*Außerdem gilt*

$$|G_1(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad |G_2(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Wie in Proposition 4.3 erhalten wir aus dem Zusammenhang (4.17) von  $V$  und  $W$  und  $Y$  und  $Z$  die Asymptotik einer Lösung  $y_+$  von (4.15),

$$\begin{aligned} y_+(x) &= e^{-\frac{\pi}{4}i} r(x)^{-1/4} e^{-i \int_a^x \sqrt{r(\sigma)} d\sigma} (1 + F_1(x)), \\ (r(x)^{1/4} y_+(x))' &= e^{\frac{\pi}{4}i} r(x)^{1/2} e^{-i \int_a^x \sqrt{r(\sigma)} d\sigma} (-1 + F_2(x)), \end{aligned}$$

wobei  $F_1 := G_1 + G_2$  und  $F_2 := G_1 - G_2$  dieselben Eigenschaften wie in Proposition 4.3 haben. Um die Asymptotik der zweiten Lösung  $y_-$  zu erhalten, benutzt man nun die Transformation

$$V(x) := W(x) e^{-i \int_a^x \sqrt{r(\sigma)} d\sigma} = W(x) e^{-i \int_a^x u(\sigma)^{-2} d\sigma},$$

und erhält, ähnlich wie in Proposition 4.4, folgende Proposition.

**Proposition 4.11.** *Die Differentialgleichung (4.15) besitzt unter der Voraussetzung*

$$M_+ := \int_a^\infty |t(\sigma)u(\sigma)^2 - u(\sigma)u''(\sigma)| d\sigma < \frac{1}{4}$$

*eine Lösung  $\hat{y}_+$  mit*

$$\hat{y}_+(x) = e^{-\frac{\pi}{4}i} r(x)^{-1/4} e^{i \int_a^x \sqrt{r(\sigma)} d\sigma} \left( 1 + \hat{F}_{1+}(x) \right), \quad x \in [a, \infty),$$

#### 4 Asymptotik von Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$(r(x)^{1/4}\widehat{y}_+(x))' = e^{\frac{\pi}{4}i}r(x)^{1/2}e^{i\int_a^x\sqrt{r(\sigma)}d\sigma}\left(1+\widehat{F}_{2+}(x)\right), \quad x \in [a, \infty),$$

wobei  $\|\widehat{F}_{1+}\|_\infty \leq 2e^{M^+} - 2$ , und  $\|\widehat{F}_{2+}\|_\infty \leq 2e^{M^+} - 2$ . Es gilt außerdem

$$|\widehat{F}_{1+}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad |\widehat{F}_{2+}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Analog erhalten wir die entsprechenden Lösungen, falls die Differentialgleichung auf der negativen reellen Achse  $(-\infty, -a]$  erklärt ist, siehe auch Bemerkung 4.5.

**Proposition 4.12.** *Die Differentialgleichung*

$$y''(x) = (-r(x) + t(x))y(x), \quad x \in (-\infty, -a]$$

hat für  $r(x) > 0$  für alle  $x \in (-\infty, a]$  und  $M_- := \int_{-\infty}^{-a} |t(\sigma)u(\sigma)^2 - u(\sigma)u''(\sigma)| d\sigma < \frac{1}{4}$  Lösungen  $y_-$  und  $\widehat{y}_-$  mit

$$\begin{aligned} y_-(x) &= e^{-\frac{\pi}{4}i}r(x)^{-1/4}e^{i\int_a^x\sqrt{r(\sigma)}d\sigma}(1+F_{1-}(x)), \quad x \in (-\infty, -a] \\ (r(x)^{1/4}y_-(x))' &= e^{\frac{\pi}{4}i}r(x)^{1/2}e^{i\int_a^x\sqrt{r(\sigma)}d\sigma}(-1+F_{2-}(x)), \quad x \in (-\infty, -a], \\ \widehat{y}_-(x) &= e^{-\frac{\pi}{4}i}r(x)^{-1/4}e^{-i\int_a^x\sqrt{r(\sigma)}d\sigma}\left(1+\widehat{F}_{1-}(x)\right), \quad x \in (-\infty, -a] \\ (r(x)^{1/4}\widehat{y}_-(x))' &= e^{\frac{\pi}{4}i}r(x)^{1/2}e^{-i\int_a^x\sqrt{r(\sigma)}d\sigma}\left(1+\widehat{F}_{2-}(x)\right), \quad x \in (-\infty, -a], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|F_{1-}\|_\infty &\leq 2e^{M^-} - 2 \quad \text{und} \quad \|F_{2-}\|_\infty \leq 2e^{M^-} - 2, \\ \|\widehat{F}_{1-}\|_\infty &\leq 2e^{M^-} - 2 \quad \text{und} \quad \|\widehat{F}_{2-}\|_\infty \leq 2e^{M^-} - 2 \end{aligned}$$

und

$$|F_{1-}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \quad \text{und} \quad |F_{2-}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow -\infty,$$

sowie

$$|\widehat{F}_{1-}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \quad \text{und} \quad |\widehat{F}_{2-}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow -\infty.$$

## 5. $\mathcal{PT}$ symmetrische Hamiltonoperatoren auf $\mathbb{R}$

In diesem Kapitel wollen wir spezielle Differentialausdrücke und die dazugehörigen Operatoren der Form (3.1) aus Kapitel 3 untersuchen. Dieses Kapitel basiert auf der Arbeit [38]. Zunächst betrachten wir die Differentialausdrücke auf den reellen Halbachsen und setzen sie anschließend zusammen und erhalten dann Differentialausdrücke und Operatoren, die auf der gesamten reellen Achse erklärt sind. Dabei wollen wir bestimmte Symmetrieeigenschaften ausnutzen, genauer wollen wir  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Operatoren behandeln.

Dies ist physikalisch die Invarianz eines Hamiltonoperators unter der Parität  $\mathcal{P}$  und der Zeitumkehr  $\mathcal{T}$ . Die Zeitumkehr  $\mathcal{T}$  ist dabei mathematisch betrachtet der Konjugationsoperator aus Kapitel 3. In der Literatur, siehe zum Beispiel [9, 12, 52], ist die Parität  $\mathcal{P}$  oftmals stark vereinfacht durch  $x \mapsto -x$  definiert. Darunter ist das Folgende zu verstehen. Für eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $f_+ := f|_{\mathbb{R}_+}$  und  $f_- := f|_{\mathbb{R}_-}$  bedeutet dies

$$(\mathcal{P}f)(x) := \begin{cases} f_-(-x) & \text{falls } x \geq 0, \\ f_+(-x) & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Durch die Parität  $\mathcal{P}$  erhält man auf natürliche Weise ein neues inneres Produkt, welches bereits in vielen Arbeiten in der theoretischen Physik erwähnt wird, siehe zum Beispiel [40, 41, 42, 52]. Somit definiert  $\mathcal{P}$  ein inneres Produkt  $[\cdot, \cdot]$  (vergleiche [4]), via

$$[\cdot, \cdot] := (\mathcal{P}\cdot, \cdot) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\mathcal{P}g(x)} dx \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad (5.1)$$

und der Raum  $(L^2(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$  ist somit ein Kreinraum, vergleiche Kapitel 2. Wie wir zeigen werden, ist dies das geeignete innere Produkt, mit welchem die Operatoren entsprechende Symmetrieeigenschaften besitzen. Wir können nun den zentralen Begriff der  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie eines Operators angeben und definieren ihn wie folgt.

**Definition 5.1.** Ein abgeschlossener, dicht definierter Operator  $A$  auf  $L^2(\mathbb{R})$  heißt  $\mathcal{PT}$ -

## 5 $\mathcal{PT}$ symmetrische Hamiltonoperatoren auf $\mathbb{R}$

symmetrisch genau dann, wenn für alle  $f \in \text{dom } A$  die Beziehung  $\mathcal{PT}f \in \text{dom } A$  und

$$\mathcal{PT}Af = A\mathcal{PT}f$$

gilt, siehe [36, III. §5.6].

Motiviert aus der theoretischen Physik, insbesondere [12], betrachten wir den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \mathbf{q} \quad (5.2)$$

auf  $\Gamma$  mit einem Potential  $\mathbf{q}$ , wobei wir die Konstante  $\frac{1}{2m}$  aus Gründen der Übersicht gleich 1 setzen. In [12] wird dabei die spezielle Klasse von Potentialen  $\mathbf{q}(z) = -(iz)^{N+2}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  betrachtet, wohingegen wir zunächst allgemeinere Potentiale untersuchen. Wir wählen eine keilförmige Kontur,

$$\Gamma := \{z = xe^{i\phi \text{sgn}(x)} : x \in \mathbb{R}\}$$

mit einem Winkel  $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ , siehe [6]. Wir verweisen außerdem auf [35],[40] und [43], wo eine ähnliche Kontur verwendet wird. Nun setzen wir  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ ,  $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$  und  $q_{\pm}(x) := \mathbf{q}(xe^{\pm i\phi})$ , für  $x \in \mathbb{R}_{\pm}$ , wobei  $q_{\pm}$  stückweise stetig sein sollen. Darüber hinaus definieren wir die Mengen

$$Q_+ := \text{clconv} \{e^{-2i\phi}r + q_+(x), 0 < r < \infty, x \in \mathbb{R}_+\}$$

und

$$Q_- := \text{clconv} \{e^{+2i\phi}r + q_-(x), 0 < r < \infty, x \in \mathbb{R}_-\}.$$

Das zu (5.2) gehörige Eigenwertproblem lautet

$$-y''(z) + \mathbf{q}(z)y(z) = \lambda y(z), \quad z \in \Gamma, \quad (5.3)$$

und ist auf der Kontur  $\Gamma = \{z = xe^{i\phi \text{sgn}(x)} : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$  in der komplexen Ebene definiert. Da die Kontur in 0 zwar stetig, aber keine differenzierbare Kurve ist, verstehen wir unter einer Lösung der Eigenwertgleichung (5.3) eine auf  $\{z = xe^{-i\phi} : x \in \mathbb{R}_-\}$  und  $\{z = xe^{i\phi} : x \in \mathbb{R}_+\}$  absolut stetige Funktion  $y : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Ableitung  $y'$  dort ebenfalls absolut stetig ist und welche die Gleichung (5.3) für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt. Insbesondere ist die Lösung von (5.3) in Null nicht notwendigerweise stetig. Analoges gilt auch für die Ableitung der Lösung von (5.3).

Zunächst transformieren wir das Problem zurück zur reellen Achse mithilfe der Parame-

trisierung

$$z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z(x) := xe^{i\phi \operatorname{sgn}(x)}. \quad (5.4)$$

Daher löst  $y$  (5.3) genau dann, wenn  $w$ ,  $w(x) := y(z(x))$ ,

$$-e^{\mp 2i\phi} w''(x) + q_{\pm}(x)w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}$$

beziehungsweise

$$w''(x) = e^{\pm 2i\phi} q_{\pm}(x)w(x) - e^{\pm 2i\phi} \lambda w(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm} \quad (5.5)$$

löst. Weiter setzen wir mit einem geeignetem (hinreichend großem)  $x_0 > 0$  folgenden Bedingungen an  $q_{\pm}$  voraus.

- (1) Die Funktionen  $q_{\pm} : \mathbb{R}_{\pm} \rightarrow \mathbb{C}$  sind zweimal stetig differenzierbar.
- (2) Die Menge  $Q_+$  liegt in einem Sektor mit Öffnungswinkel kleiner als  $\pi$ .
- (3) Es sei

$$\bar{q}_+(-x) = q_-(x), \quad x \in \mathbb{R}_-,$$

beziehungsweise

$$\mathcal{PT}\mathbf{q}(z) = \mathbf{q}(z), \quad z \in \Gamma.$$

- (4) Es gelte

$$0 \notin \operatorname{clconv} \{e^{-2i\phi} r + q_+(x), 0 < r < \infty, x \in [x_0, \infty)\}.$$

- (5) Es sei

$$\int_{[x_0, \infty)} \left| \frac{5(e^{2i\phi} q_+'(x))^2}{16(e^{2i\phi} q_+(x))^{5/2}} - \frac{e^{2i\phi} q_+''(x)}{4(e^{2i\phi} q_+(x))^{3/2}} \right| dx < \ln \frac{5}{4}$$

und

$$\int_{(-\infty, -x_0]} \left| \frac{5(e^{-2i\phi} q_-'(x))^2}{16(e^{-2i\phi} q_-(x))^{5/2}} - \frac{e^{-2i\phi} q_-''(x)}{4(e^{-2i\phi} q_-(x))^{3/2}} \right| dx < \ln \frac{5}{4}.$$

- (6) Es gelte

$$|q_+(x)|' \leq 2 \left( 2\operatorname{Re} \sqrt{e^{2i\phi} q_+(x)} + \frac{1}{x} \right) |q_+(x)|, \quad \text{für alle } x \geq x_0.$$

## 5 $\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren auf $\mathbb{R}$

und

$$-|q_-(x)|' \leq 2 \left( 2\operatorname{Re} \sqrt{e^{-2i\phi} q_-(x)} - \frac{1}{x} \right) |q_-(x)|, \text{ für alle } x \leq -x_0.$$

Man beachte, dass aus Bedingung (2) und der Definition von  $Q_\pm$  die Beziehung  $Q_+ = Q_-^*$  folgt und somit die Mengen  $Q_\pm$  jeweils in einem Sektor mit Öffnungswinkel kleiner als  $\pi$  liegen, woraus

$$Q_+ \cup Q_- \neq \mathbb{C} \quad (5.6)$$

folgt. Desweiteren folgt aus den Bedingungen (3) und (4), dass

$$0 \notin \operatorname{clconv} \{e^{+2i\phi} r + q_-(x), 0 < r < \infty, x \in (-\infty, -x_0]\}.$$

Die Bedingung (4) garantiert darüber hinaus, dass  $q_\pm \neq 0$  für alle  $|x| \geq x_0$ . Der Ausdruck  $\sqrt{e^{\pm 2i\phi} q_\pm(x)}$  in den Bedingungen (5) und (6) ist erklärt. Falls nämlich ein  $A \in \mathbb{R}_+$  und  $\pm x \geq x_0$  existiert mit  $e^{\pm 2i\phi} q_\pm(x_0) = -A$  beziehungsweise  $q_\pm(x_0) = -e^{\mp 2i\phi} A$ , liegen die bezüglich des Ursprunges punktsymmetrischen Punkte  $q_\pm(x_0)$  und  $e^{\mp 2i\phi} A$  in  $Q_\pm$ , womit Bedingung (2) (beziehungsweise Bedingung (4), falls  $A = 0$ ) verletzt wäre. Somit gilt  $e^{\pm 2i\phi} q_\pm(x) \notin \mathbb{R}_-$  und  $\operatorname{Re} \sqrt{e^{\pm 2i\phi} q_\pm(x)} > 0$  für alle  $|x| \geq x_0$ .

Die obigen Bedingungen garantieren, dass die beiden Gleichungen (5.5) im Grenzpunktfall I sind, was wir im folgenden Theorem zeigen.

**Theorem 5.2.** *Falls  $q_\pm$  die Bedingungen (1) bis (6) erfüllt, liegt der Grenzpunktfall I vor.*

*Beweis.* Die Bedingungen garantieren, dass mit Theorem 4.6 je eine Lösung der Gleichung (5.5) mit  $\lambda = 0$  auf dem Intervall  $[x_0, \infty)$  beziehungsweise  $(-\infty, -x_0]$  asymptotisch wie

$$\begin{aligned} \widehat{y}_+(x) &= (e^{2i\phi} q_+(x))^{-1/4} e^{\int_{x_0}^x \sqrt{e^{2i\phi} q_+(\sigma)} d\sigma} \left( 1 + \widehat{F}_{1+}(x) \right), & x \in [x_0, \infty), \\ \widehat{y}_-(x) &= (e^{-2i\phi} q_-(x))^{-1/4} e^{-\int_{-x_0}^x \sqrt{e^{-2i\phi} q_-(\sigma)} d\sigma} \left( 1 + \widehat{F}_{1-}(x) \right), & x \in (-\infty, -x_0], \end{aligned} \quad (5.7)$$

verhält. Aufgrund der Voraussetzung (5) gilt

$$\|\widehat{F}_{1\pm}\|_\infty \leq 2e^M - 2 < 2e^{\ln \frac{5}{4}} - 2 = \frac{1}{2}.$$

Mit Bedingung (6) gilt auf der positiven Achse (man beachte, dass nach Bedingung (4)

$|q_+(x)| \neq 0$ )

$$\frac{1}{2} (\ln |q_+(x)| - \ln |q_+(x_0)|) \leq \int_{x_0}^x \left( 2\operatorname{Re} \sqrt{e^{2i\phi} q_+(t)} + \frac{1}{x} \right) dt, \text{ für alle } x \geq x_0$$

beziehungsweise

$$\frac{\sqrt{|q_+(x)|}}{\sqrt{|q_+(x_0)|}} \leq e^{2 \int_{x_0}^x \operatorname{Re} \sqrt{e^{2i\phi} q_+(t)} dt} \cdot \frac{x}{x_0}, \text{ für alle } x \geq x_0.$$

Dies führt auf

$$\frac{x_0}{x} \leq \frac{\sqrt{|q_+(x_0)|}}{\sqrt{|q_+(x)|}} e^{2 \int_{x_0}^x \operatorname{Re} \sqrt{e^{2i\phi} q_+(t)} dt}, \text{ für alle } x \geq x_0.$$

Somit ist die Funktion

$$\widehat{y}_+(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{e^{2i\phi} q_+(x)}} e^{\int_{x_0}^x \operatorname{Re} \sqrt{e^{2i\phi} q_+(t)} dt} (1 + \widehat{F}_{1+}(x))$$

nicht in  $L^2([x_0, \infty))$ . Demzufolge existiert eine Lösung von (5.5) für  $\lambda = 0$ , welche nicht in  $L^2(\mathbb{R}_+)$  liegt und analog existiert eine Lösung von (5.5) welche nicht in  $L^2(\mathbb{R}_-)$  liegt. Mit Theorem 3.12 und Bemerkung 3.13 sind die beiden Gleichungen in (5.5) im Grenzpunktfall I.  $\square$

## 5.1 Maximale und minimale Operatoren auf den Halbachsen

Wir beschränken uns im Folgenden auf den Grenzpunktfall I aus Theorem 3.12, das heißt (5.5) besitzt genau eine Lösung, welche in  $L^2(\mathbb{R}_\pm)$  liegt. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn das Potential die Bedingungen (1) bis (6) erfüllt. Wir werden drei verschiedene Arten von Operatoren auf  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}_-$  definieren: den maximalen, den minimalen und den präminimalen Operator. Dies ist durch das klassische Vorgehen bei Sturm-Liouville-Ausdrücken im Grenzpunktfall motiviert. Bei klassischen Sturm-Liouville-Problemen mit reellen Koeffizienten ist der minimale Operator der Abschluss des präminimalen Operator, er ist symmetrisch im Hilbertraum und sein Adjungierter ist der maximale Operator.

In unserem Fall ist die Situation leicht unterschiedlich. Dennoch sind die Definitionen der entsprechenden Operatoren formal gleich wie in den klassischen Sturm-Liouville-Problemen, aber aufgrund der komplexwertigen Koeffizienten verhalten sich die Adjungierten anders.

## 5 $\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren auf $\mathbb{R}$

Wir betrachten die folgenden Differentialausdrücke

$$\tau_{\pm}w(x) := -e^{\mp 2i\phi}w''(x) + q_{\pm}(x)w(x) \quad (5.8)$$

und die formal Adjungierte

$$\tau_{\pm}^+w(x) = -e^{\pm 2i\phi}w''(x) + \bar{q}_{\pm}(x)w(x)$$

auf  $\mathbb{R}_{\pm}$ . Das Potential  $q_{\pm}$  erfülle dabei die Bedingungen (1) bis (6). Es gilt

$$\tau_{\pm}^+ = \mathcal{T}\tau_{\pm}\mathcal{T}. \quad (5.9)$$

Dann gilt folgendes Lemma.

**Lemma 5.3.** *Falls  $\tau_{\pm}$  im Grenzpunktfall I ist, so ist auch  $\tau_{\pm}^+ = \mathcal{T}\tau_{\pm}\mathcal{T}$  im Grenzpunktfall I.*

*Beweis.* Mit dem Beweis von Theorem 5.2 erhalten wir für  $\lambda = 0$  eine Lösung von  $\tau_{\pm}w = \lambda w = 0$  auf dem Intervall  $(-\infty, -x_0]$  beziehungsweise  $[x_0, \infty)$  der Gestalt (5.7) welche nicht im  $L^2((-\infty, -x_0])$  beziehungsweise  $L^2([x_0, \infty))$  ist. Dies stellt sicher, dass eine Lösung  $\hat{y}_{\pm}$  von  $\tau_{\pm}w = 0$  existiert, die nicht im  $L^2(\mathbb{R}_{\pm})$  liegt.

Die Funktion  $\mathcal{T}\hat{y}_{\pm}$  löst die Gleichung  $\tau_{\pm}^+w = 0$ , da

$$\tau_{\pm}^+\mathcal{T}\hat{y}_{\pm} = \mathcal{T}\tau_{\pm}\hat{y}_{\pm} = 0.$$

Mit  $|\hat{y}_{\pm}(x)| = |\mathcal{T}\hat{y}_{\pm}(x)|$  für alle  $\pm x \geq x_0$  ist somit die Funktion  $\mathcal{T}\hat{y}_{\pm}(x)$  ebenfalls nicht im  $L^2((-\infty, -x_0])$  beziehungsweise  $L^2([x_0, \infty))$ . Demzufolge existiert eine Lösung von  $\tau_{\pm}^+w = 0$ , welche nicht im  $L^2(\mathbb{R}_{\pm})$  ist und somit ist  $\tau_{\pm}^+$  für  $\lambda = 0$  und mit Bemerkung 3.13 für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  im Grenzpunktfall I.  $\square$

Wir definieren die folgenden Operatoren mit

$$\begin{aligned} \text{dom } A'_{0\pm}(\tau_{\pm}) := \{ & w \in L^2(\mathbb{R}_{\pm}) : \tau_{\pm}w \in L^2(\mathbb{R}_{\pm}), w, w' \in AC_{loc}(\mathbb{R}_{\pm}), \\ & w(0) = w'(0) = 0, w \text{ hat kompakten Träger in } \mathbb{R}_{\pm} \} \end{aligned}$$

$$A'_{0\pm}(\tau_{\pm})w(x) := \tau_{\pm}w(x).$$

Mit  $A_{0\pm}(\tau_{\pm})$  bezeichnen wir den Abschluss von  $A'_{0\pm}(\tau_{\pm})$  ( $A'_{0\pm}(\tau_{\pm})$  ist nach Theorem 3.9 abschließbar). Die Operatoren  $A'_{0\pm}(\tau_{\pm})$  entsprechen den präminimalen Operatoren in der klassischen Sturm-Liouville-Theorie, siehe zum Beispiel [53, Kapitel 13], wobei  $A_{0\pm}(\tau_{\pm})$  den minimalen Operatoren entsprechen.

## 5.1 Maximale und minimale Operatoren auf den Halbachsen

Außerdem definieren wir die maximalen Operatoren

$$\begin{aligned} \text{dom } A_{max\pm}(\tau_{\pm}) &:= \{w \in L^2(\mathbb{R}_{\pm}) : \tau_{\pm}w \in L^2(\mathbb{R}_{\pm}), w, w' \in AC_{loc}(\mathbb{R}_{\pm})\} \\ A_{max\pm}(\tau_{\pm})w(x) &:= \tau_{\pm}w(x). \end{aligned}$$

**Theorem 5.4.** *Die Funktionen erfüllen (1) bis (6). Dann gilt*

$$A_{max\pm}(\tau_{\pm})^* = A_{0\pm}(\tau_{\pm}^+) \text{ und } A_{0\pm}(\tau_{\pm})^* = A_{max\pm}(\tau_{\pm}^+). \quad (5.10)$$

Weiter gilt  $\mathcal{T}A_{0\pm}(\tau_{\pm})\mathcal{T} \subset A_{0\pm}(\tau_{\pm})^*$  und  $\text{def}(A_{0\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda) = \text{def}(A_{0\pm}(\tau_{\pm}^+) - \bar{\lambda})$  ist entweder 1 oder 2 für alle  $\lambda \in r(A_{0\pm}(\tau_{\pm}))$ .

Im Grenzpunktfall I erhalten wir  $\text{def}(A_{0\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda) = 1$  für alle  $\lambda \in r(A_{0\pm}(\tau_{\pm}))$  und

$$\dim \text{dom } A_{max\pm}(\tau_{\pm}) / \text{dom } A_{0\pm}(\tau_{\pm}) = 2. \quad (5.11)$$

Außerdem ist im Grenzpunktfall I  $r(A_{0\pm}(\tau_{\pm})) \neq \emptyset$ ,

$$\mathbb{C} \setminus Q_{\pm} \subset r(A_{0\pm}(\tau_{\pm})) \text{ und } r(A_{0-}(\tau_-)) \cap r(A_{0+}(\tau_+)) \neq \emptyset. \quad (5.12)$$

*Beweis.* Wir nutzen Theorem 3.9. Es bleibt nur (5.12) zu zeigen und dass im Grenzpunktfall  $\text{def}(A_{0\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda) = 1$  und (5.11) gilt.

Beachte, dass  $Q_-^* = Q_+$  und mit (5.6) gilt  $Q_+ \cup Q_- \neq \mathbb{C}$ . Für  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Q_{\pm}$  erhalten wir nach der Konstruktion aus Sektion 3.2 (siehe auch die Abbildungen 3.1 und 3.2) analog zu (3.6) folgende Ungleichungen

$$\text{Re } e^{i\eta_{\pm}} (e^{\mp 2i\phi} r + q_{\pm}(x) - K_{\pm}) \geq 0 \text{ und } \text{Re } e^{i\eta_{\pm}} (\lambda - K_{\pm}) < 0, \text{ für } 0 < r < \infty, x \in \mathbb{R}_{\pm}. \quad (5.13)$$

Für  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Q_{\pm}$ ,  $u \in \text{dom } A'_{0\pm}(\tau_{\pm})$  und  $\|u\| = 1$  folgt

$$\begin{aligned} & \| (A'_{0\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda)u \| \geq | (A'_{0\pm}(\tau_{\pm})u, u) - \lambda | \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}_{\pm}} -e^{\mp 2i\phi} u'' \bar{u} + q_{\pm}(x) |u|^2 dx - \lambda \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}_{\pm}} e^{\mp 2i\phi} |u'|^2 + q_{\pm}(x) |u|^2 dx - \lambda \right| \\ &\geq \text{Re } e^{i\eta_{\pm}} \left( \int_{\mathbb{R}_{\pm}} e^{\mp 2i\phi} |u'|^2 + q_{\pm}(x) |u|^2 - K_{\pm} |u|^2 dx + K_{\pm} - \lambda \right) \end{aligned}$$

## 5 $\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren auf $\mathbb{R}$

Mit (5.13) gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \operatorname{Re} e^{i\eta_{\pm}} (e^{\mp 2i\phi} |u'|^2 + q_{\pm}(x) |u|^2 - K_{\pm} |u|^2) dx + \operatorname{Re} e^{i\eta_{\pm}} (K_{\pm} - \lambda) \\ & \geq \delta_{\pm}(\lambda) > 0. \end{aligned}$$

Da  $A_{0\pm}(\tau_{\pm})$  der Abschluss von  $A'_{0\pm}(\tau_{\pm})$  ist, gilt ebenso für  $w \in \operatorname{dom} A_{0\pm}(\tau_{\pm})$  mit  $\|w\| = 1$

$$\|(A_{0\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda)w\| \geq \delta_{\pm}(\lambda)$$

und mit (5.6) ist (5.12) gezeigt.

Jetzt nutzen wir [29, Theorem III 5.6.] und erhalten mit  $\lambda \in r(A_{0\pm}(\tau_{\pm}))$

$$\dim \operatorname{dom} (\mathcal{T} A_{0\pm}(\tau_{\pm})^* \mathcal{T}) / \operatorname{dom} A_{0\pm}(\tau_{\pm}) = 2 \operatorname{def} (A_{0\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda) \quad (5.14)$$

sowie

$$\begin{aligned} & \operatorname{dom} (\mathcal{T} A_{0\pm}(\tau_{\pm})^* \mathcal{T}) \\ & = \operatorname{dom} A_{0\pm}(\tau_{\pm}) \dot{+} \ker ((A_{0\pm}(\tau_{\pm})^* - \bar{\lambda})(\mathcal{T} A_{0\pm}(\tau_{\pm})^* \mathcal{T} - \lambda)). \end{aligned}$$

Mit  $A_{0\pm}(\tau_{\pm})^* = A_{\max\pm}(\tau_{\pm}^{\pm})$ , (5.9) und

$$\mathcal{T} A_{0\pm}(\tau_{\pm})^* \mathcal{T} = A_{\max\pm}(\tau_{\pm})$$

folgt mit (5.14)

$$\dim \operatorname{dom} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) / \operatorname{dom} A_{0\pm}(\tau_{\pm}) = 2 \operatorname{def} (A_{0\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda) \quad (5.15)$$

und

$$\begin{aligned} & \operatorname{dom} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) \\ & = \operatorname{dom} A_{0\pm}(\tau_{\pm}) \dot{+} \dim \ker ((\mathcal{T} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) \mathcal{T} - \bar{\lambda})(A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda)). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Da  $\tau_{\pm}$  und  $\mathcal{T}\tau_{\pm}\mathcal{T}$  im Grenzpunktfall I sind, siehe Lemma 5.3, haben die Gleichungen  $(\tau_{\pm} - \lambda)u = 0$  und  $(\mathcal{T}\tau_{\pm}\mathcal{T} - \bar{\lambda})u = 0$  genau eine Lösung in  $L^2(\mathbb{R}_{\pm})$ . Das heißt, es existiert genau eine Funktion  $u$  mit  $(A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda)u = 0$  und genau eine Funktion  $v$  mit  $(\mathcal{T} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) \mathcal{T} - \bar{\lambda})v = 0$ . Mit (5.15) und (5.16) folgt, dass  $\dim \ker ((\mathcal{T} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) \mathcal{T} - \bar{\lambda})(A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda))$  gerade ist. Da  $\dim \ker (\mathcal{T} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) \mathcal{T} - \bar{\lambda}) = \dim \ker (A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda) = 1$  ist die Dimension des Kernes des Produktes dieser beiden Operatoren höchstens 2, somit folgt

$$\dim \ker ((\mathcal{T} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) \mathcal{T} - \bar{\lambda})(A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda)) = 2$$

und

$$2 = \dim \operatorname{dom} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) / \operatorname{dom} A_{0\pm}(\tau_{\pm}) = 2 \operatorname{def} (A_{0\pm}(\tau_{\pm}) - \lambda).$$

□

Mit Theorem 3.10 folgt sofort die folgende Proposition.

**Proposition 5.5.** *Im Grenzpunktfall I erhalten wir*

$$\operatorname{dom} A_{0\pm}(\tau_{\pm}) = \{w \in \operatorname{dom} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) : w(0) = w'(0) = 0\}$$

und für  $u \in \operatorname{dom} A_{\max\pm}(\tau_{\pm})$  und  $v \in \operatorname{dom} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}^{\pm})$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (u\bar{v}' - u'\bar{v})(x) = 0.$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit der folgenden Bemerkung, welche sich aus Theorem 3.15 ergibt.

**Bemerkung 5.6.** Im Grenzpunktfall sind die Operatoren  $A_{\pm}$  mit

$$\operatorname{dom} A_{\pm} := \{w \in \operatorname{dom} A_{\max\pm}(\tau_{\pm}) : w(0) = 0\}$$

und

$$A_{\pm}w(x) := \tau_{\pm}w(x)$$

sind  $\mathcal{T}$ -selbstadjungiert und es gilt mit  $Q_{b\pm}$  wie in (3.10)

$$\sigma(A_{\pm}) \subset Q_{\pm} \text{ und } \sigma_{\text{ess}}(A_{\pm}) \subset Q_{b\pm}.$$

Ferner besteht das Spektrum in  $\sigma(A_{\pm}) \setminus \sigma_{\text{ess}}(A_{\pm})$  nur aus isolierten Eigenwerten mit endlicher algebraischer Vielfachheit.

## 5.2 Maximale und minimale Operatoren auf der ganzen Achse

In diesem Abschnitt definieren und analysieren wir den maximalen und minimalen Operator auf der reellen Achse. Dies geschieht durch geeignetes Zusammenfügen der entsprechenden Operatoren auf den Halbachsen aus Abschnitt 5.1.

## 5 $\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren auf $\mathbb{R}$

Der maximale Operator auf  $\mathbb{R}$  ist durch

$$\begin{aligned} D_{max} &:= \{w \in L^2(\mathbb{R}) : \tau_{\pm} w|_{\mathbb{R}_{\pm}} \in L^2(\mathbb{R}), w|_{\mathbb{R}_{\pm}}, w'|_{\mathbb{R}_{\pm}} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_{\pm})\} \\ &= \text{dom } A_{max-}(\tau_-) \oplus \text{dom } A_{max+}(\tau_+) \end{aligned}$$

und

$$A_{max} w(x) := \begin{cases} \tau_+ w(x), & x \geq 0, \\ \tau_- w(x), & x \leq 0. \end{cases}$$

gegeben, oder kurz

$$A_{max} = A_{max-}(\tau_-) \oplus A_{max+}(\tau_+).$$

Insbesondere erfüllen die Funktionen und deren Ableitungen aus  $D_{max}$  keine Stetigkeitsbedingungen in 0.

**Lemma 5.7.** *Der Operator  $A_{max}$  ist  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch, falls Bedingung (3) gilt.*

*Beweis.* Mit Bedingung (3) und  $w \in \text{dom } A_{max}$  mit  $w_{\pm} := w|_{\mathbb{R}_{\pm}}$  folgt für  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{PT} A_{max} w(x) &= \mathcal{PT} (A_{max-}(\tau_-) w_-(x) \oplus A_{max+}(\tau_+) w_+(x)) \\ &= \overline{A_{max+}(\tau_+) w_+(-x)} \oplus \overline{A_{max-}(\tau_-) w_-(-x)} = A_{max} \mathcal{PT} w(x). \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.8.** *Für  $v, w \in D_{max}$  gilt*

$$\begin{aligned} &[A_{max} w, v] - [w, A_{max} v] \\ &= e^{2i\phi} (w'(0+) \bar{v}(0-) + w(0+) \bar{v}'(0-)) - e^{-2i\phi} (w'(0-) \bar{v}(0+) + w(0-) \bar{v}'(0+)), \end{aligned}$$

*falls Bedingung (3) gilt.*

*Beweis.* Mit  $\tau_{\pm}^{\pm} = \mathcal{T} \tau_{\pm} \mathcal{T}$  (siehe (5.9)) gilt  $\bar{v}|_{\mathbb{R}_{\pm}} \in \text{dom } A_{max\pm}(\tau_{\pm}^{\pm})$ . Mithilfe von

$$\tau_{\pm} \mathcal{PT} w(x) = \tau_{\pm} \overline{w(-x)} = \overline{\tau_{\mp} w(-x)} = \mathcal{PT} (\tau_{\pm} w(x))$$

sieht man, dass die Funktion  $x \mapsto \overline{w(-x)}$  für  $x \in \mathbb{R}_{\pm}$  in  $\text{dom } A_{max\pm}(\tau_{\pm})$  liegt. Dann folgt mit Proposition 5.5

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \overline{w(-x)} v'(x) + \overline{w'(-x)} v(x) = 0. \quad (5.17)$$

## 5.2 Maximale und minimale Operatoren auf der ganzen Achse

weiter gilt

$$\begin{aligned}
& [A_{max}w, v] - [w, A_{max}v] = (\mathcal{P}A_{max}w, v) - (\mathcal{P}w, A_{max}v) \\
&= \int_{-\infty}^0 \tau_+ w(-x) \bar{v}(x) dx + \int_0^{\infty} \tau_- w(-x) \bar{v}(x) dx \\
&\quad - \int_{-\infty}^0 w(-x) \overline{\tau_- v(x)} dx - \int_0^{\infty} w(-x) \overline{\tau_+ v(x)} dx \\
&= \int_0^{\infty} (-e^{2i\phi} w''(-x) + q_-(-x) w(-x)) \bar{v}(x) dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 (-e^{-2i\phi} w''(-x) + q_+(-x) w(-x)) \bar{v}(x) dx \\
&\quad - \int_0^{\infty} w(-x) \overline{(-e^{-2i\phi} v''(x) + q_+(x) v(x))} dx \\
&\quad - \int_{-\infty}^0 w(-x) \overline{(-e^{2i\phi} v''(x) + q_-(x) v(x))} dx \\
&= e^{2i\phi} \int_0^{\infty} w(-x) \bar{v}''(x) - w''(-x) \bar{v}(x) dx \\
&\quad + e^{-2i\phi} \int_{-\infty}^0 w(-x) \bar{v}''(x) - w''(-x) \bar{v}(x) dx
\end{aligned}$$

und mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
& [A_{max}w, v] - [w, A_{max}v] \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2i\phi} (w'(-x) \bar{v}(x) + w(-x) \bar{v}'(x)) - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2i\phi} (w'(-x) \bar{v}(x) + w(-x) \bar{v}'(x)) \\
&\quad + e^{-2i\phi} (w'(0+) \bar{v}(0-) + w(0+) \bar{v}'(0-)) - e^{2i\phi} (w'(0-) \bar{v}(0+) + w(0-) \bar{v}'(0+)).
\end{aligned}$$

Dann beweist (5.17) (nach komplexer Konjugation) die Aussage des Lemmas.  $\square$

Analog zum maximalen Operator auf der reellen Achse, definieren wir den minimalen Operator  $A_0$  auf der reellen Achse als direkte Summe der entsprechenden minimalen Operatoren auf den Halbachsen,

$$A_0 = A_{0-}(\tau_-) \oplus A_{0+}(\tau_+).$$

Beachte, dass mit Proposition 5.5 für den Definitionsbereich von  $A_0$

$$\text{dom } A_0 = \{w \in D_{max} : w(0+) = w(0-) = w'(0+) = w'(0-) = 0\}$$

## 5 $\mathcal{PT}$ symmetrische Hamiltonoperatoren auf $\mathbb{R}$

gilt. Theorem 5.4 liefert  $r(A_0) = r(A_{0-}(\tau_-)) \cap r(A_{0+}(\tau_+)) \neq \emptyset$  und für  $\lambda \in r(A_0)$  gilt

$$\operatorname{def}(A_0 - \lambda) = \operatorname{def}(A_{0-}(\tau_-) - \lambda) + \operatorname{def}(A_{0+}(\tau_+) - \lambda) = 2.$$

**Proposition 5.9.** *Es gelten die Bedingungen (1) bis (6).  $A_0$  ist symmetrisch bezüglich  $[\cdot, \cdot]$ , beziehungsweise symmetrisch im Kreinraum  $(L^2\mathbb{R}, [\cdot, \cdot])$ , wobei  $[\cdot, \cdot]$  das Kreinraumprodukt (5.1) ist. Außerdem gilt  $A_0^+ = A_{max} = A_{max-}(\tau_-) \oplus A_{max+}(\tau_+)$ .*

*Beweis.* Die Symmetrie im Kreinraum folgt mit Lemma 5.8. Es bleibt noch  $A_0^+ = A_{max}$  zu zeigen.

Mit [18, Lemma VI.2.1.] gilt  $A_0^+ = \mathcal{P}A_0^*\mathcal{P}$ . Wir werden zunächst  $A_0^* = A_{0-}(\tau_-)^* \oplus A_{0+}(\tau_+)^*$  zeigen.

Es gilt für beliebiges  $v \in \operatorname{dom} A_0^*$  mit  $v_{\pm} := v|_{\mathbb{R}_{\pm}}$  und für alle  $w \in \operatorname{dom} A_0$  mit  $w_{\pm} := w|_{\mathbb{R}_{\pm}}$

$$\begin{aligned} (w, A_0^*v) &= (A_0w, v) = (A_{0-}w_-, v_-)_{\mathbb{R}_-} + (A_{0+}w_+, v_+)_{\mathbb{R}_+} \\ &= (w_-, A_{0-}^*v_-)_{\mathbb{R}_-} + (w_+, A_{0+}^*v_+)_{\mathbb{R}_+} = (w, (A_{0-}^* \oplus A_{0+}^*)v). \end{aligned}$$

Somit gilt mit (5.10) und mit  $A_{max\pm}(\tau_{\pm}^+) = \mathcal{T}A_{max\pm}(\tau_{\pm})\mathcal{T}$

$$\begin{aligned} A_0^+ &= \mathcal{P}A_0^*\mathcal{P} = \mathcal{P}(A_{0-}(\tau_-)^* \oplus A_{0+}(\tau_+)^*)\mathcal{P} \\ &= \mathcal{PT}(A_{max-}(\tau_-) \oplus A_{max+}(\tau_+))\mathcal{TP} = \mathcal{PT}A_{max}\mathcal{TP} = A_{max}, \end{aligned}$$

da nach Lemme 5.7  $\mathcal{PT}A_{max} = A_{max}\mathcal{PT}$ . □

## 5.3 Operatortheoretischer Ansatz zu $\mathcal{PT}$ symmetrischen Hamiltonoperatoren

Zu den in Abschnitt 5.2 erklärten minimalen Operatoren werden in diesem Abschnitt Erweiterungen  $A_G$  betrachtet, die Einschränkungen von  $A_{max}$  sind,

$$A_0 \subset A_G \subset A_{max}. \tag{5.18}$$

Diese Erweiterungen sind über Verknüpfungsbedingungen bei 0 bestimmt, die mittels einer invertierbaren Matrix

$$G := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

beschrieben werden. Wir beschränken uns hier wieder auf den Grenzpunktfall I und setzen (5.6) voraus. Dies ist unter anderem erfüllt, falls die Bedingungen (1) bis (6) erfüllt sind.

### 5.3 Operatortheoretischer Ansatz zu $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Hamiltonoperatoren

Der Definitionsbereich von  $A_G$  wird definiert als

$$\begin{aligned} \text{dom } A_G &:= \left\{ w \in D_{max} : \begin{pmatrix} w(0+) \\ w'(0+) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} w(0-) \\ w'(0-) \end{pmatrix} \right\} \\ A_G u &:= A_{max} u. \end{aligned} \quad (5.19)$$

$A_G$  erfüllt nun (5.18). Im Folgenden beschreiben wir in den Lemmata 5.10 bis 5.12 wie die Eigenschaften von  $A_G$  von  $G$  abhängen.

**Lemma 5.10.** *Für  $w \in \text{dom } A_G$  gilt, dass mit  $w(x) = y(z(x))$ ,  $z \in \Gamma$  und der Parametrisierung  $z$  wie in (5.4)  $y$  und  $y'$  stetig sind, falls  $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\phi} \end{pmatrix}$ .*

*Beweis.* Durch die Parametrisierung von  $z$  in (5.4)

$$w(x) = y(z(x))$$

erhalten wir

$$w'(x) = z'(x)y'(z(x)) = e^{i\phi \text{sgn}(x)} y'(z(x)),$$

für  $x \neq 0$ . Dann ist  $y'(0+) = y'(0-)$  äquivalent zu

$$e^{-i\phi} w'(0+) = y'(0+) = y'(0-) = e^{i\phi} w'(0-).$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} w(0+) \\ w'(0+) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} w(0-) \\ w'(0-) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} w(0+) \\ e^{-2i\phi} w'(0+) \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$G \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

**Lemma 5.11.** *Es sei Bedingung (3) erfüllt. Der Operator  $A_G$  ist genau dann  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch, wenn  $GJ\bar{G} = J$ , wobei  $\bar{G}$  die komplexe Konjugation von  $G$  bezeichnet und  $J := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Für  $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$  müssen in diesem Fall die folgenden Gleichungen*

## 5 $\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren auf $\mathbb{R}$

erfüllt sein.

$$\begin{aligned} g_{11}\overline{g_{11}} - g_{12}\overline{g_{21}} &= 1 \\ g_{12}\overline{g_{22}} - g_{11}\overline{g_{12}} &= 0 \\ g_{22}\overline{g_{22}} - g_{21}\overline{g_{12}} &= 1 \\ g_{21}\overline{g_{11}} - g_{22}\overline{g_{21}} &= 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Es sei  $A_G$   $\mathcal{PT}$ -symmetrisch. Dann gilt für  $w \in \text{dom } A_G$ , dass  $\mathcal{PT}w \in \text{dom } A_G$  nach Definition 5.1 und es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{PT}(w(0+)) &= g_{11}\mathcal{PT}(w(0-)) + g_{12}\mathcal{PT}(w'(0-)) \\ &= g_{11}\overline{w}(0+) - g_{12}\overline{w'}(0+) \\ &= g_{11}(\overline{g_{11}w}(0-) + \overline{g_{12}w'}(0-)) - g_{12}(\overline{g_{21}w}(0-) + \overline{g_{22}w'}(0-)) \\ &= g_{11}\overline{g_{11}}\mathcal{PT}(w(0+)) - g_{11}\overline{g_{12}}\mathcal{PT}(w'(0+)) \\ &\quad - g_{12}\overline{g_{21}}\mathcal{PT}(w(0+)) + g_{12}\overline{g_{22}}\mathcal{PT}(w'(0+)). \end{aligned}$$

Dies zeigt die ersten beiden Gleichungen. Die letzten beiden Gleichungen folgen aus

$$\begin{aligned} \mathcal{PT}(w'(0+)) &= g_{21}\mathcal{PT}(w(0-)) + g_{22}\mathcal{PT}(w'(0-)) \\ &= g_{21}\overline{w}(0+) - g_{22}\overline{w'}(0+) \\ &= g_{21}(\overline{g_{11}w}(0-) + \overline{g_{12}w'}(0-)) - g_{22}(\overline{g_{21}w}(0-) + \overline{g_{22}w'}(0-)) \\ &= g_{21}\overline{g_{11}}\mathcal{PT}(w(0+)) - g_{21}\overline{g_{12}}\mathcal{PT}(w'(0+)) \\ &\quad - g_{22}\overline{g_{21}}\mathcal{PT}(w(0+)) + g_{22}\overline{g_{22}}\mathcal{PT}(w'(0+)). \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.12.** *Es seien die Bedingungen (1) bis (6) erfüllt. Der Operator  $A_G$  ist  $[\cdot, \cdot]$ -symmetrisch genau dann, wenn*

$$(e^{2i\phi}KG)^* = e^{2i\phi}KG,$$

wobei  $K := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Beweis.* Zunächst setzen wir  $W_{\pm} := \begin{pmatrix} w(0\pm) \\ w'(0\pm) \end{pmatrix}$  und  $V_{\pm} := \begin{pmatrix} v(0\pm) \\ v'(0\pm) \end{pmatrix}$  mit  $w \in \text{dom } A_G$

### 5.3 Operatortheoretischer Ansatz zu $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Hamiltonoperatoren

und  $v \in \text{dom } A_G^+$ . Wir erhalten somit mit Lemma 5.8 und da  $W_+ = GW_-$

$$\begin{aligned} [A_G w, v] - [w, A_G^+ v] &= e^{2i\phi} w'(0+) \bar{v}(0-) + e^{2i\phi} w(0+) \bar{v}'(0-) \\ &\quad - e^{-2i\phi} w'(0-) \bar{v}(0+) - e^{-2i\phi} w(0-) \bar{v}'(0+) \\ &= \begin{pmatrix} W_+ \\ W_- \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{2i\phi} \\ 0 & 0 & e^{2i\phi} & 0 \\ 0 & -e^{-2i\phi} & 0 & 0 \\ -e^{-2i\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_+ \\ \bar{v}_- \end{pmatrix} \\ &= e^{2i\phi} W_-^\top G^\top K \bar{v}_- - e^{-2i\phi} W_-^\top K \bar{v}_+. \end{aligned}$$

Nun ist  $A_G$  genau dann  $[\cdot, \cdot]$ -symmetrisch, wenn  $e^{2i\phi} G^\top K \bar{v}_- - e^{-2i\phi} K \bar{v}_+ = 0$ . Dies ist wegen  $K = K^{-1}$  äquivalent zu

$$V_+ = e^{-4i\phi} K G^* K V_-$$

beziehungsweise wegen  $V_+ = G V_-$  zu

$$e^{-4i\phi} K G^* K V_- = G V_-$$

und damit zu

$$(e^{2i\phi} K G)^* = e^{2i\phi} K G.$$

□

Das folgende Theorem ist die Hauptaussage dieses Kapitels. Wir zeigen, dass der Operator  $A_G$  sogar  $[\cdot, \cdot]$ -selbstadjungiert ist, wenn

$$(e^{2i\phi} K G)^* = e^{2i\phi} K G.$$

Wir fassen dazu die Operatoren  $A_0$  und  $A_{max}$  als lineare Relationen auf und erhalten mit Proposition 5.9  $A_0^+ = A_{max}$  nun im Sinne von Definition 2.4. Wir konstruieren zunächst ein Randtripel zur linearen Relation  $A_0^+ = A_{max}$ , siehe Definition 2.5. Wir definieren die linearen Abbildungen

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} : D_{max} \rightarrow \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2, \quad (5.20)$$

via

$$\Gamma_0(f) := \begin{pmatrix} f(0-) \\ f(0+) \end{pmatrix}$$

5  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren auf  $\mathbb{R}$

und

$$\Gamma_1(f) := \begin{pmatrix} e^{2i\phi} f'(0+) \\ -e^{-2i\phi} f'(0-) \end{pmatrix}.$$

**Theorem 5.13.** *Es seien die Bedingungen (1) bis (6) erfüllt. Der Operator  $A_G$  ist  $[\cdot, \cdot]$ -selbstadjungiert genau dann, wenn  $(e^{2i\phi} KG)^* = e^{2i\phi} KG$ , wobei  $K := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Dies bedeutet, dass  $A_G$  genau dann  $[\cdot, \cdot]$ -selbstadjungiert ist, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind.*

$$\begin{aligned} e^{2i\phi} g_{11} &= e^{-2i\phi} \overline{g_{22}} \\ e^{2i\phi} g_{12} &= e^{-2i\phi} \overline{g_{12}} \\ e^{2i\phi} g_{21} &= e^{-2i\phi} \overline{g_{21}}. \end{aligned}$$

Darüber hinaus ist  $\{\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  ein Randtripel für  $A_0^+ = A_{max}$ .

*Beweis.* Es gilt  $\text{ran}(\Gamma) = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$  und für alle  $f, g \in D_{max}$  gilt mit Lemma 5.8

$$[A_{max}f, g] - [f, A_{max}g] = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g).$$

Daher ist  $\{\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  ein Randtripel für  $A_0^+ = A_{max}$ . Das die Bedingung notwendig ist, folgt direkt aus Lemma 5.12.

Wir zeigen, dass die lineare Relation

$$\theta := \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ g_{11}x + g_{12}y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2i\phi} g_{21}x + e^{2i\phi} g_{22}y \\ -e^{-2i\phi} y \end{pmatrix} \right\} : x, y \in \mathbb{C} \right\} \quad (5.21)$$

selbstadjungiert ist und somit auch die dazugehörige Erweiterung  $A_\theta = A_G$ , vergleiche Proposition 2.6. Um zu zeigen, dass  $\theta$  selbstadjungiert ist, zeigen wir zunächst, dass  $\theta$  symmetrisch ist. Für alle  $\{f, f'\}, \{g, g'\} \in \theta$  existieren  $f_x, f_y, g_x, g_y \in \mathbb{C}$  mit

$$\{f, f'\} = \left\{ \begin{pmatrix} f_x \\ g_{11}f_x + g_{12}f_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2i\phi} g_{21}f_x + e^{2i\phi} g_{22}f_y \\ -e^{-2i\phi} f_y \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\{g, g'\} = \left\{ \begin{pmatrix} g_x \\ g_{11}g_x + g_{12}g_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2i\phi} g_{21}g_x + e^{2i\phi} g_{22}g_y \\ -e^{-2i\phi} g_y \end{pmatrix} \right\}$$

und somit gilt mit  $(e^{2i\phi} KG)^* = e^{2i\phi} KG$

$$\left( \begin{pmatrix} e^{2i\phi} g_{21}g_x + e^{2i\phi} g_{22}g_y \\ -e^{-2i\phi} g_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_x \\ g_{11}f_x + g_{12}f_y \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2}$$

$$- \left( \begin{pmatrix} g_x \\ g_{11}g_x + g_{12}g_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2i\phi}g_{21}f_x + e^{2i\phi}g_{22}f_y \\ -e^{-2i\phi}f_y \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2} = 0$$

und  $\theta$  ist symmetrisch. Jetzt wählen wir  $\{f, f'\} \in \theta^*$  beliebig mit

$$\{f, f'\} = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{pmatrix} \right\}$$

und  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ g_{11}x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2i\phi}g_{21}x \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \theta$  mit  $x \neq 0$ , dann folgt

$$0 = \left( \begin{pmatrix} e^{2i\phi}g_{21}x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2} - \left( \begin{pmatrix} x \\ g_{11}x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2}.$$

genau dann, wenn  $f'_1 = e^{2i\phi}g_{21}f_1 + e^{2i\phi}g_{22}(-e^{2i\phi}f'_2)$ . Analog erhalten wir  $f_2 = g_{11}f_1 - e^{2i\phi}g_{12}f'_2$ . Somit ist  $\{f, f'\} \in \theta$  und deshalb ist  $\theta$  selbstadjungiert.  $\square$

**Bemerkung 5.14.** Der Operator bezüglich  $\ker \Gamma_0$  ist selbstadjungiert bezüglich  $[\cdot, \cdot]$  und  $A_D := A_- \oplus A_+$ . Aus [20, Theorem 4.5] folgt  $\text{def}(A_+ - \lambda) = \text{def}(A_- - \lambda) = 0$  und  $\text{def} A_D = \text{def}(A_+ - \lambda) + \text{def}(A_- - \lambda) = 0$ . Darüber hinaus folgt mit [29, Theorem III 3.5.] und  $\text{def}(A_0 - \lambda) = \text{def}(A_{0-}(\tau_-) - \lambda) + \text{def}(A_{0+}(\tau_+) - \lambda) = 2$ , dass  $\dim A_D \setminus A_0 = 2$ .

Die Operatoren  $A_{\pm}$  besitzen mit Bemerkung 5.6 in  $Q_{\pm} \setminus Q_{b_{\pm}}$  nur Spektrum aus isolierten Eigenwerten mit endlicher algebraischer Vielfachheit und nichtleerer Resolventenmengen. Somit gilt  $\sigma(A_D) \subset \sigma(A_-) \cup \sigma(A_+)$ ,  $\sigma_{\text{ess}}(A_D) \subset \sigma_{\text{ess}}(A_-) \cup \sigma_{\text{ess}}(A_+) \subset Q_{b-} \cup Q_{b+}$  und  $\rho(A_D) = \rho(A_-) \cap \rho(A_+)$  (vergleiche [29, Seite 426]). Aus Bemerkung 5.6 folgt  $\sigma(A_D) \subset \sigma(A_-) \cup \sigma(A_+) \subset Q_- \cup Q_+$  und mit (5.6), dass  $\rho(A_D) \neq \emptyset$ .

## 5.4 Berechnung der Weyl-Funktion

Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir im folgenden Theorem zunächst die Weyl-Funktion zu dem Randtripel (5.20) berechnen und erhalten anschließend eine Bedingung für die Lage des Spektrums beziehungsweise der Resolventenmenge. Es sollen in diesem Abschnitt stets die Bedingungen (1) bis (6) erfüllt sein.

**Theorem 5.15.** *Die Weyl-Funktion  $M(\lambda)$ , siehe Definition 2.8, zum Randtripel  $\{\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ , mit  $\Gamma_0, \Gamma_1$  wie in (5.20) und  $\lambda \in \rho(A_D)$  unter den Bedingungen (1) bis (6), hat die Gestalt*

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\phi} \frac{\varphi'_+(0)}{\varphi_+(0)} \\ -e^{-2i\phi} \frac{\varphi'_-(0)}{\varphi_-(0)} & 0 \end{pmatrix}.$$

## 5 $\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren auf $\mathbb{R}$

*Beweis.* Nach Theorem 5.13 ist  $\{\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  ein Randtripel für  $A_0^+ = A_{max}$  und wegen Bemerkung 5.14 gilt  $\rho(A_D) \neq \emptyset$ .

Da  $\tau_{\pm}$ , definiert als (siehe (5.8))

$$\tau_{\pm}w(x) := -e^{\mp 2i\phi}w''(x) + q_{\pm}(x)w(x)$$

jeweils im Grenzpunktfall sind (Theorem 5.2), existiert je genau eine Lösung  $\varphi_{\pm, \lambda} \in \text{dom } A_{max\pm}(\tau_{\pm})$  von  $\tau_{\pm}w = \lambda w$  welche in  $L^2(\mathbb{R}_{\pm})$  ist. Diese Lösungen  $\varphi_{\pm, \lambda}$  setzen wir auf der jeweils anderen Halbachse  $\mathbb{R}_{\mp}$  identisch 0 fort und erhalten somit  $\varphi_{\pm, \lambda} \in D_{max}$ . Offensichtlich gilt

$$\varphi_{\pm, \lambda} \in \widehat{N}_{\lambda}(A_{max}) = \{\{x, \lambda x\} : x \in \ker(A_{max} - \lambda)\}.$$

Somit gilt mit der Abbildung  $\Gamma$  (siehe (5.20)) aus Abschnitt 5.3, dass

$$\begin{aligned} \Gamma_0(\varphi_{+, \lambda}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{+, \lambda}(0) \end{pmatrix}, & \Gamma_1(\varphi_{+, \lambda}) &= \begin{pmatrix} e^{2i\phi}\varphi'_{+, \lambda}(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_0(\varphi_{-, \lambda}) &= \begin{pmatrix} \varphi_{-, \lambda}(0) \\ 0 \end{pmatrix}, & \Gamma_1(\varphi_{-, \lambda}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-2i\phi}\varphi'_{-, \lambda}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Wir setzen  $M(\lambda) = \begin{pmatrix} m_1(\lambda) & m_2(\lambda) \\ m_3(\lambda) & m_4(\lambda) \end{pmatrix}$  und es gilt mit Proposition 2.9 (ii) und (5.22)

$$M(\lambda)\Gamma_0(\varphi_{+, \lambda}) = \begin{pmatrix} m_2(\lambda)\varphi_{+, \lambda}(0) \\ m_4(\lambda)\varphi_{+, \lambda}(0) \end{pmatrix} = \Gamma_1(\varphi_{+, \lambda}) = \begin{pmatrix} e^{2i\phi}\varphi'_{+, \lambda}(0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

also  $m_4(\lambda) = 0$  und  $m_2(\lambda) = e^{2i\phi} \frac{\varphi'_{+, \lambda}(0)}{\varphi_{+, \lambda}(0)}$ . Analog folgt  $m_1(\lambda) = 0$  und  $m_3(\lambda) = -e^{-2i\phi} \frac{\varphi'_{-, \lambda}(0)}{\varphi_{-, \lambda}(0)}$ .  $\square$

Als nächstes berechnen wir mithilfe von Theorem 2.10 unter welchen Bedingungen der Operator  $A_G$  Spektrum beziehungsweise Resolventenmenge besitzt.

**Theorem 5.16.** *Der Operator  $A_G$  besitzt unter den Bedingungen (1) bis (6) einen Eigenwert  $\lambda$ ,  $\lambda \in \rho(A_D)$ , falls für  $\lambda \in \mathbb{C}$  die Gleichung*

$$\frac{\varphi'_{+, \lambda}(0)}{\varphi_{+, \lambda}(0)} = \frac{g_{21}\varphi_{-, \lambda}(0) + g_{22}\varphi'_{-, \lambda}(0)}{g_{11}\varphi_{-, \lambda}(0) + g_{12}\varphi'_{-, \lambda}(0)}. \quad (5.23)$$

erfüllt ist, wobei  $\varphi_{\pm, \lambda}$  die im Beweis des vorherigen Theorems definierten Funktionen darstellen.

*Beweis.* Man beachte, dass  $A_G = A_\theta$  mit der selbstadjungierten Relation  $\theta$  aus (5.21) ist. Wir wissen, dass  $\lambda \in \rho(A_G)$  genau dann gilt, wenn  $0 \in \rho(M(\lambda) - \theta)$  (siehe Theorem 2.10). Zuerst bestimmen wir  $M(\lambda) - \theta$ , via

$$\begin{aligned} M(\lambda) - \theta &= \{ \{f, f' - g'\} : \{f, f'\} \in M(\lambda), \{f, g'\} \in \theta \} \\ &= \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ g_{11}x + g_{12}y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_2(\lambda)(g_{11}x + g_{12}y) \\ m_3(\lambda)x \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} e^{2i\phi}g_{21}x + e^{2i\phi}g_{22}y \\ -e^{-2i\phi}y \end{pmatrix} \right\} : x, y \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Man beachte, dass dabei  $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$  ist. Weiter folgt

$$\begin{aligned} &(M(\lambda) - \theta)^{-1} \\ &= \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} m_2(\lambda)(g_{11}x + g_{12}y) \\ m_3(\lambda)x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{2i\phi}g_{21}x + e^{2i\phi}g_{22}y \\ -e^{-2i\phi}y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ g_{11}x + g_{12}y \end{pmatrix} \right\} : x, y \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} m_2(\lambda)g_{11} - e^{2i\phi}g_{21} & m_2(\lambda)g_{12} - e^{2i\phi}g_{22} \\ m_3(\lambda) & e^{-2i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_{11} & g_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} : x, y \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

und dies ist ein linearer Operator, wenn der mehrwertige Teil  $\text{mul}(M(\lambda) - \theta)^{-1} = \{0\}$  und  $\text{dom}(M(\lambda) - \theta)^{-1} = \mathbb{C}^2$  gilt. In diesem Fall liegt  $\lambda$  in der Resolventenmenge von  $A_G$ . Aufgrund der Gestalt von  $(M(\lambda) - \theta)^{-1}$  müssen wir nur die erste Bedingung zeigen, da dies die Invertierbarkeit von

$$\begin{pmatrix} m_2(\lambda)g_{11} - e^{2i\phi}g_{21} & m_2(\lambda)g_{12} - e^{2i\phi}g_{22} \\ m_3(\lambda) & e^{-2i\phi} \end{pmatrix}$$

impliziert und somit auch  $\text{dom}(M(\lambda) - \theta)^{-1} = \mathbb{C}^2$ . Wir betrachten die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_2(\lambda)(g_{11}x + g_{12}y) - e^{2i\phi}g_{21}x - e^{2i\phi}g_{22}y &= 0 \\ m_3(\lambda)x + e^{-2i\phi}y &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt  $y = -e^{2i\phi}m_3(\lambda)x$  und

$$0 = m_2(\lambda)(g_{11}x - g_{12}e^{2i\phi}m_3(\lambda)x) - e^{2i\phi}g_{21}x + e^{2i\phi}g_{22}e^{2i\phi}m_3(\lambda)x.$$

Falls  $x = 0$  folgt  $y = 0$  und die Behauptung ist bewiesen. Wir nehmen demzufolge  $x \neq 0$  an und somit gilt

$$0 = m_2(\lambda)(e^{-2i\phi}g_{11} - g_{12}m_3(\lambda)) - g_{21} + e^{2i\phi}g_{22}m_3(\lambda)$$

## 5 $\mathcal{PT}$ -symmetrische Hamiltonoperatoren auf $\mathbb{R}$

und falls  $e^{-2i\phi}g_{11} - g_{12}m_3(\lambda) \neq 0$  folgt

$$m_2(\lambda) = \frac{g_{21} - e^{2i\phi}g_{22}m_3(\lambda)}{e^{-2i\phi}g_{11} - g_{12}m_3(\lambda)}$$

beziehungsweise mit Theorem 5.15

$$\frac{\varphi'_{+,\lambda}(0)}{\varphi_{+,\lambda}(0)} = e^{-2i\phi} \frac{g_{21}\varphi_{-,\lambda}(0) + g_{22}\varphi'_{-,\lambda}(0)}{e^{-2i\phi}g_{11}\varphi_{-,\lambda}(0) + e^{-2i\phi}g_{12}\varphi'_{-,\lambda}(0)} = \frac{g_{21}\varphi_{-,\lambda}(0) + g_{22}\varphi'_{-,\lambda}(0)}{g_{11}\varphi_{-,\lambda}(0) + g_{12}\varphi'_{-,\lambda}(0)}.$$

Gilt hingegen  $e^{-2i\phi}g_{11} - g_{12}m_3(\lambda) = 0$ , das heißt  $g_{11} - e^{2i\phi}g_{12}m_3(\lambda) = 0$  und demzufolge  $g_{11}x + g_{12}y = 0$ , kann dies mit  $m_2(\lambda)(g_{11}x + g_{12}y) - e^{2i\phi}g_{21}x - e^{2i\phi}g_{22}y = -e^{2i\phi}g_{21}x - e^{2i\phi}g_{22}y = 0$  nur gelten falls  $G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und demzufolge  $x = y = 0$ , da  $G$  invertierbar ist.

Daraus folgt, dass wir genau dann einen nichttrivialen mehrwertigen Teil  $\text{mul}(M(\lambda) - \theta)^{-1}$  haben, falls (5.23) gilt.  $\square$

Wir schließen dieses Kapitel mit einer einfachen Beobachtung über das Spektrum von  $A_G$ .

**Proposition 5.17.** *Es sei  $\lambda \in \sigma_p(A_G)$  und  $y$  die Eigenfunktion. Dann ist  $\mathcal{PT}y$  ebenfalls eine Eigenfunktion zu  $\bar{\lambda}$ , falls  $A_G$   $\mathcal{PT}$ -symmetrisch ist.*

*Beweis.* Aus  $y \in \text{dom } A_G$  folgt  $\mathcal{PT}y \in \text{dom } A_G$  and  $A_G\mathcal{PT}y = \mathcal{PT}A_Gy = \mathcal{PT}\lambda y = \bar{\lambda}\mathcal{PT}y$ .  $\square$

## 6. Bender-Boettcher Potentiale

Schließlich nutzen wir die bisherigen Ergebnisse und wenden sie auf den Hamiltonoperator aus [12] an. Dies bedeutet, dass wir den Hamiltonoperator (5.2) mit dem speziellen Potential  $\mathbf{q}(z) = -(iz)^{N+2}$  betrachten. Somit gilt mit den Bezeichnungen von Kapitel 6

$$q_{\pm}(x) = -(ix)^{N+2} e^{\pm i(N+2)\phi} \quad (6.1)$$

und die Gleichung (5.5) hat die Gestalt

$$w''(x) = -e^{\pm 2i\phi} (ix)^{N+2} e^{\pm i(N+2)\phi} w(x) - e^{\pm 2i\phi} \lambda w(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}. \quad (6.2)$$

Wir werden zunächst eine vollständige Klassifikation dieser Gleichung in Grenzpunktbeziehungweise Grenzkreisfall angeben und im letzten Abschnitt mithilfe der Resultate aus Abschnitt 5.4 die Lage des Spektrums des zugehörigen Operators  $A_G$ , siehe (5.19), abschätzen. Zunächst stellen wir sicher, dass die Bedingungen (1) bis (6) erfüllt sind, was wir im folgenden Lemma zeigen.

**Lemma 6.1.** *Für das Potential (6.1) mit*

$$\phi \neq -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi, \quad k = 0, \dots, N+3 \quad (6.3)$$

*sind die Bedingungen (1) bis (6) erfüllt.*

*Beweis.* zu (1) Die Funktionen  $q_{\pm}$  sind offensichtlich zweimal stetig differenzierbar.

zu (2) Die Menge  $Q_+$ , gegeben mittels

$$Q_+ := \text{clconv} \{e^{-2i\phi} r - (ix)^{N+2} e^{i(N+2)\phi} : x \in [0, \infty), 0 < r < \infty\},$$

besteht aus den zwei Strahlen

$$\{e^{-2i\phi} r : r \in \mathbb{R}_+\} \text{ und } \{-i^{N+2} e^{i(N+2)\phi} s : s \in \mathbb{R}_+\}.$$

Somit liegt  $Q_+$  in einem Sektor mit Öffnungswinkel kleiner als  $\pi$ , falls sich die Strahlen nicht gegenüber liegen. Angenommen die Strahlen lägen auf einer Gerade,

## 6 Bender-Boettcher Potentiale

dann gilt

$$e^{-2i\phi} = i^{N+2} e^{i(N+2)\phi} = e^{i\pi(N+2)/2 + i(N+2)\phi}.$$

Dies bedeutet wiederum, dass

$$\phi = -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{N+4}\pi, \quad k = 0, \dots, N+3,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung (6.3).

zu (3) Für  $x \in \mathbb{R}_-$  gilt

$$\bar{q}_+(-x) = -(ix)^{N+2} e^{-i(N+2)\phi} = q_-(x).$$

zu (4) Da für alle  $x_0 > 0$  und mit (6.3)  $0 \notin \{-i^{N+2} e^{i(N+2)\phi} s : s \geq x_0\}$  gilt, folgt somit Bedingung (4)

$$0 \notin \text{clconv}\{e^{-2i\phi} r - (ix)^{N+2} e^{i(N+2)\phi} : 0 < r < \infty, x_0 \leq x < \infty\}.$$

zu (5) Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_{[x_0, \infty)} \left| \frac{5(e^{2i\phi} q'_+(x))^2}{16(e^{2i\phi} q_+(x))^{5/2}} - \frac{e^{2i\phi} q''_+(x)}{4(e^{2i\phi} q_+(x))^{3/2}} \right| dx \\ & \leq \int_{[x_0, \infty)} \frac{5(N+2)^2}{16x^{3+N/2}} + \frac{(N+2)(N+1)}{4x^{3+N/2}} dx \\ & = \left( \frac{5(N+2)^2}{8(N+4)} + \frac{(N+2)(N+1)}{2(N+4)} \right) x_0^{-2-N/2} \leq \frac{9(N+2)^2}{8(N+4)} x_0^{-2-N/2} \end{aligned}$$

und damit ist für  $x_0 > \left( \frac{9(N+2)^2}{8(N+4) \ln \frac{5}{4}} \right)^{2/(N+4)}$

$$\int_{[x_0, \infty)} \left| \frac{5(e^{2i\phi} q'_+(x))^2}{16(e^{2i\phi} q_+(x))^{5/2}} - \frac{e^{2i\phi} q''_+(x)}{4(e^{2i\phi} q_+(x))^{3/2}} \right| dx < \ln \frac{5}{4}.$$

Analog gilt auch

$$\int_{(-\infty, -x_0]} \left| \frac{5(e^{-2i\phi} q'_-(x))^2}{16(e^{-2i\phi} q_-(x))^{5/2}} - \frac{e^{-2i\phi} q''_-(x)}{4(e^{-2i\phi} q_-(x))^{3/2}} \right| dx < \ln \frac{5}{4}.$$

zu (6) Es gilt

$$e^{\pm 2i\phi} q_{\pm}(x) = -(ix)^{N+2} e^{\pm(N+4)i\phi} = e^{i\pi \pm (N+2)i\pi/2 \pm (N+4)i\phi} |x|^{N+2}.$$

## 6.1 Grenzpunkt- und Grenzkreisfallklassifikation für Bender-Boettcher Potentiale

Angenommen, dass Argument  $e^{i\pi\pm(N+2)i\pi/2\pm(N+4)i\phi}$  ist  $\pi$  (und somit  $e^{\pm 2i\phi}q_{\pm}(x)$  auf der negativen reellen Achse), dann gilt

$$\pi \pm (N+2)\pi/2 \pm (N+4)\phi = \pi + 2k\pi,$$

beziehungsweise

$$\phi = \frac{1}{N+4} \left( -\frac{N+2}{2}\pi \pm 2k\pi \right),$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sqrt{e^{\pm 2i\phi}q_{\pm}(x)} &= e^{i\pi/2\pm(N+2)i\pi/4\pm(N+4)i\phi/2}|x|^{(N+2)/2} \\ &= \left| \sin \left( \frac{N+2}{4}\pi + \frac{N+4}{2}\phi \right) \right| |x|^{(N+2)/2}, \end{aligned}$$

mit  $\frac{N+2}{4}\pi + \frac{N+4}{2}\phi \neq k\pi$ . Wir erhalten  $\pm|q_{\pm}|' = \pm(\pm x^{N+2})' = (N+2)|x|^{N+1}$  und somit folgt für  $x_0 \geq \left( \frac{N+1}{2 \left| \sin \left( \frac{N+2}{4}\pi + \frac{N+4}{2}\phi \right) \right|} \right)^{2/(N+2)}$  und alle  $|x| \geq x_0$

$$\pm(N+2)|x|^{N+1} \leq 2 \left( 2 \left| \sin \left( \frac{N+2}{4}\pi + \frac{N+4}{2}\phi \right) \right| \left| |x|^{(N+2)/2} \pm \frac{1}{x} \right| \right) |x|^{N+2}.$$

□

## 6.1 Grenzpunkt- und Grenzkreisfallklassifikation für Bender-Boettcher Potentiale

Im folgenden Theorem geben wir eine vollständige Klassifikation der Gleichung (6.2) in Grenzpunkt- beziehungsweise Grenzkreisfall. Da die Bedingungen (1) bis (6) mit Lemma 6.1 erfüllt sind, impliziert diese Klassifikation, dass der Grenzpunktfall II aus Theorem 3.12 für das spezielle Potential (6.1) nicht möglich ist.

**Theorem 6.2.** *Für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt genau eine der folgenden Bedingungen.*

- (I) *Falls  $\phi \neq -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi$ ,  $k = 0, \dots, N+3$ , existiert eine, bis auf eine Konstante, eindeutige Lösung  $w$  von (6.2) mit  $w \in L^2(\mathbb{R}_{\pm})$ . Insbesondere existiert ein Lösung von (6.2), welche nicht im  $L^2(\mathbb{R}_{\pm})$  ist.*
- (II) *Falls  $\phi = -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi$ ,  $k = 0, \dots, N+3$  erfüllen alle Lösungen  $w$  von (6.2)  $w \in L^2(\mathbb{R}_{\pm})$ .*

## 6 Bender-Boettcher Potentiale

Fall (I) ist der Grenzpunktfall I und Fall (II) ist der Grenzkreisfall.

*Beweis.* Für

$$\phi \neq -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi, \quad k = 0, \dots, N+3$$

sind mit Lemma 6.1 die Bedingungen (1) bis (6) erfüllt und somit liegt nach Theorem 5.2 der Grenzpunktfall I vor.

Wir müssen somit noch den Fall  $\phi = -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  betrachten. Wir erhalten

$$q_+(x) = -(ix)^{N+2} e^{-(N+2)i\pi/2+2ki\pi} = -x^{N+2}$$

und die Schrödingergleichung ist somit

$$-w''(x) - x^{N+2}w(x) = e^{2i\phi}\lambda w(x).$$

Aus Theorem 4.10 und Proposition 4.11 wissen wir, dass wir mit  $\kappa > 0$ ,  $r(x) := x^{N+2} + \kappa$  und  $\lambda = e^{-2i\phi}\kappa$  beide (linear unabhängigen) Lösungen von (6.2) erhalten und diese die Gestalt

$$w_{\pm}(x) = e^{-\frac{\pi}{4}i} r(x)^{-1/4} e^{\pm i \int_0^x \sqrt{r(\sigma)} d\sigma} (1 + F_{1+}(x))$$

haben. Diese Lösungen liegen wiederum beide in  $L^2(\mathbb{R}_+)$  und fallen polynomiell gegen 0 für  $x$  gegen  $\infty$  ab, weil

$$|w_{\pm}(x)|^2 = r(x)^{-1/2} |1 + F_{1+}(x)|^2 = (x^{N+2} + \kappa)^{-1/2} |1 + F_{1+}(x)|^2$$

für  $N > 0$  integrierbar ist, da für alle  $x \geq x_0 > 0$

$$\int_{x_0}^{\infty} |w_{\pm}(x)|^2 dx \leq \int_{x_0}^{\infty} x^{-(N+2)/2} |1 + F_{1+}(x)|^2 dx \leq -\frac{2}{N} (1 + \|F_{1+}\|)^2 x^{-N/2} \Big|_{x_0}^{\infty}$$

gilt.

Wir werden Theorem 3.12 benutzen. Dazu sei die Menge  $Q$  gegeben mittels

$$Q := \text{clconv} \{r - x^{N+2} : x \in [0, \infty), 0 < r < \infty\}.$$

Wir bestimmen die Zahlen  $K$  und  $\eta$  aus Theorem 3.12.  $K$  ist die Zahl in  $Q$  mit dem kleinsten Abstand zu  $\lambda$  und daher  $K = \text{Re } \lambda$ . Die Zahl  $\eta$  ist der Winkel, welcher  $Q$  in die (abgeschlossene) rechte komplexe Halbebene rotiert, sodass  $\lambda$  in der linken Halbebene

## 6.1 Grenzpunkt- und Grenzkreisfallklassifikation für Bender-Boettcher Potentiale

liegt, das heißt  $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Daher gilt

$$\pm \int_0^\infty \operatorname{Re} i (|w'(x)|^2 + (-x^{N+2} - \operatorname{Re} \lambda)|w(x)|^2) dx = 0.$$

Die Bedingung (3.8) wird daher von beiden Lösungen erfüllt und wir sind im Grenzkreisfall, vergleiche Theorem 3.12. Analog erhalten wir die Aussage auf der negativen reellen Achse.  $\square$

Im Grenzpunktfall existiert genau eine Lösung von (6.2), welche in  $L^2(\mathbb{R}_+)$  beziehungsweise  $L^2(\mathbb{R}_-)$  ist und mithilfe der Asymptotiken aus Theorem 4.8 wissen wir sogar, dass diese Lösungen exponentiell gegen 0 gehen für  $|x| \rightarrow \infty$ . Die Regionen in der komplexen Ebene, für die  $\Gamma$  diese Bedingung erfüllt sind Sektoren, siehe auch [12, 40, 42].

Wir unterteilen, gemäß Theorem 6.2, die komplexe Ebene bezüglich des Winkels  $\theta = -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi$  in  $N+4$  Sektoren

$$S_k := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k-2}{4+N}\pi < \arg(z) < -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi \right\},$$

$k = 0, \dots, N+3.$

Die Ränder jedes  $S_k$  bestehen aus zwei Strahlen  $L_k$

$$L_k := \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg(z) = -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi \right\}, \quad k = 0, \dots, N+3.$$

In den Sektoren  $S_k$ ,  $k = 0, \dots, N+3$  fällt eine Lösung von (6.2) exponentiell, wohingegen auf den Strahlen  $L_k$  beide Lösungen polynomiell fallen, vergleiche Theorem 6.2. Die Regionen  $S_k$  heißen *Stokes-Sektoren*  $S_k$  (vergleiche [9, 12, 14]) und die Strahlen  $L_k$  heißen *Stokes-Linien*. Somit haben wir  $N+4$  Stokes-Linien und Stokes-Sektoren.

Nach Definition ist  $\Gamma$  entweder in zwei Stokes-Sektoren enthalten oder liegt auf zwei Stokes-Linien. Dies bedeutet, dass wir die Gleichung (6.2) in Abhängigkeit des Winkels  $\phi$  der Kontur  $\Gamma$  klassifizieren können.

**Theorem 6.3.** (i) Falls  $\Gamma$  in zwei Stokes-Sektoren, welche symmetrisch zur imaginären Achse liegen, enthalten ist, dann ist (6.2) im Grenzpunktfall für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dass heißt Fall (I) in Theorem 6.2. Insbesondere impliziert dies, dass eine Lösung von (6.2) in  $L^2(\mathbb{R}_+)$  beziehungsweise  $L^2(\mathbb{R}_-)$  ist.

(ii) Falls  $\Gamma$  auf zwei Stokes-Linien liegt, ist (6.2) im Grenzkreisfall für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dass heißt Fall (II) in Theorem 6.2. Dies impliziert insbesondere, dass beide Lösungen von (6.2) in  $L^2(\mathbb{R}_+)$  beziehungsweise  $L^2(\mathbb{R}_-)$  liegen.

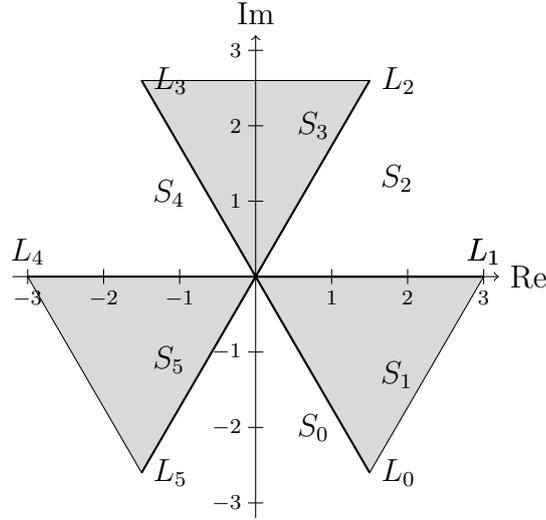


Abbildung 6.1: Stokes-Linien  $L_k$  und Stokes-Sektoren  $S_k$  für  $N = 2$

## 6.2 Abschätzung des Spektrums

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit, werden wir die Lage des Spektrums beziehungsweise der Eigenwerte des Operators  $A_G$  mit dem Potential  $q_{\pm}(x) = -(ix)^{N+2}e^{\pm(N+2)i\phi}$ ,  $x \in \mathbb{R}_{\pm}$  im Grenzpunktfall I, das heißt  $\phi \neq -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi$ ,  $k = 0, \dots, N+3$  abschätzen. Dabei werden wir auf die in Abschnitt 5.4 erhaltene Gleichung (5.23) zurückgreifen und Regionen der komplexen Ebene bestimmen, in denen kein Spektrum liegt. Wir betrachten die Differentialgleichung, siehe (6.2)

$$w''(x) = \left( -(ix)^{N+2}e^{\pm(N+4)i\phi} - e^{\pm 2i\phi}\lambda \right) w(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}.$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit definieren wir die Konstanten

$$\mu_{\pm} := -i^{N+2}e^{\pm(N+4)i\phi} = -e^{(N+2)i\pi/2 \pm (N+4)i\phi}, \quad \lambda_{\pm} := \mu_{\pm}^{-1}e^{\pm 2i\phi}\lambda$$

und erhalten

$$w''(x) = \mu_{\pm} \left( x^{N+2} - \lambda_{\pm} \right) w(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}. \quad (6.4)$$

Wir wollen im folgenden Theorem Gebiete bestimmen, in denen keine Eigenwerte liegen.

**Theorem 6.4.** *Unter der Bedingung  $\phi \neq -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi$ ,  $k = 0, \dots, N+3$ , (das heißt im Grenzpunktfall I) ist für den Operator  $A_G$ ,  $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ , mit  $g_{12} \neq 0$  oder  $g_{12} = 0$  und  $g_{11}e^{i\phi} \neq g_{22}e^{-i\phi}$  und dem speziellen Potential  $q_{\pm}(x) = -(ix)^{N+2}e^{\pm(N+2)i\phi}$ ,  $x \in \mathbb{R}_{\pm}$ ,*

$\lambda$  kein Eigenwert von  $A_G$ , wenn  $\lambda$  die drei folgenden Bedingungen erfüllt

(i)  $\lambda \notin Q_- \cup Q_+$ , (und somit  $\lambda \in \rho(A_D)$ , siehe Bemerkung 5.14)

(ii)  $|\lambda| \geq 1$ , für ein  $0 < \rho < \frac{1}{4}$  gelte

$$|\arg \mu_+^{-1} e^{2i\phi} \lambda| \geq \rho > 0 \text{ und } |\arg (-1)^N \mu_-^{-1} e^{-2i\phi} \lambda| \geq \rho > 0,$$

(iii) und für  $g_{12} \neq 0$  und  $C := \frac{21(N+2)^2}{4(\sin \rho)^{5/2}}$

$$|\lambda| \geq \left( \frac{4}{|g_{12}|} \max\{|g_{11}|, |g_{21}|, |g_{22}|\} \right)^2 \text{ und } |\lambda| > \left( \frac{1}{C} \ln \frac{3\sqrt{2} + 4}{8} \right)^{-\frac{N+4}{2(N+2)}}$$

und für  $g_{12} = 0$  und  $g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi} \neq 0$  und  $C := \frac{21(N+2)^2}{4(\sin \rho)^{5/2}}$

$$|\lambda| \geq \left( \frac{2|g_{21}|}{|g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi}|} \right)^2 \text{ und}$$

$$|\lambda| > \left( \frac{1}{C} \ln \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{|g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi}|}{2(|g_{11}| + |g_{21}| + |g_{22}|)}} + 1 \right) \right)^{-\frac{N+4}{2(N+2)}}.$$

Insbesondere ist die Resolventenmenge  $\rho(A_G)$  nichtleer.

*Beweis.* Man beachte zunächst, dass mit der speziellen Wahl des Potentials die Bedingung (5.6) erfüllt ist und somit  $\lambda \notin Q_- \cup Q_+$  existieren, genauer existieren Sektoren in der komplexen Ebene, die nicht in

$$\begin{aligned} & \text{clconv} \{ e^{2i\phi} r - (ix)^{N+2} e^{-i(N+2)\phi} : x \in (-\infty, 0], 0 < r < \infty \} \\ \cup & \text{clconv} \{ e^{-2i\phi} r - (ix)^{N+2} e^{i(N+2)\phi} : x \in [0, \infty), 0 < r < \infty \} \end{aligned}$$

liegen. Mit Theorem 4.8 erhalten wir asymptotische Abschätzungen für die Lösungen der Differentialgleichung (6.4) mit der Gestalt  $s_{\pm}(x) := \mu_{\pm}(x^{N+2} - \lambda_{\pm})$

$$\begin{aligned} y_{\pm}(x) &= s_{\pm}(x)^{-1/4} e^{\mp \int_0^x \sqrt{s_{\pm}(\sigma)} d\sigma} (1 + F_{1\pm}(x)), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}, \\ (s_{\pm}(x)^{1/4} y_{\pm}(x))' &= s_{\pm}(x)^{1/2} e^{\mp \int_0^x \sqrt{s_{\pm}(\sigma)} d\sigma} (-1 + F_{2\pm}(x)), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}, \end{aligned}$$

wobei  $\|F_{1\pm}\|_{\infty}, \|F_{2\pm}\|_{\infty} \rightarrow 0$  für  $|\lambda| \rightarrow \infty$  gilt. Da wir mit  $\phi \neq -\frac{N+2}{2N+8}\pi + \frac{2k}{4+N}\pi, k \in \mathbb{Z}$  nach Theorem 6.2 im Grenzpunktfall I sind, sind diese Lösungen quadratintegrierbar.

## 6 Bender-Boettcher Potentiale

Insbesondere für  $x = 0$  erhalten wir somit

$$\begin{aligned} y_{\pm}(0) &= s_{\pm}(0)^{-1/4} (1 + F_{1\pm}(0)), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}, \\ (s_{\pm}(0)^{1/4} y_{\pm}(0))' &= s_{\pm}(0)^{1/2} (-1 + F_{2\pm}(0)), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} y_{\pm}(0\pm) &= (-\mu_{\pm}\lambda_{\pm})^{-1/4} (1 + F_{1\pm}(0)), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}, \\ y'_{\pm}(0\pm) &= (-\mu_{\pm}\lambda_{\pm})^{1/4} (-1 + F_{2\pm}(0)), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.7 folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}} \left| \frac{5s_{\pm}^{\prime 2}(x)}{16s_{\pm}^{5/2}(x)} - \frac{s_{\pm}^{\prime\prime}(x)}{4s_{\pm}^{3/2}(x)} \right| dx \leq \frac{21(N+2)^2}{4(\sin \rho)^{5/2}} |\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}.$$

Mit Theorem 4.8 erhalten wir

$$\|F_{1\pm}\|_{\infty} \leq 2e^{C|\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}} - 2 \quad \text{und} \quad \|F_{2\pm}\|_{\infty} \leq 2e^{C|\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}} - 2, \quad (6.5)$$

$C = \frac{21(N+2)^2}{4(\sin \rho)^{5/2}}$  und für beliebiges  $\varepsilon > 0$  erhalten wir für große  $\lambda$  somit

$$|F_{1\pm}(0)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |F_{2\pm}(0)| < \varepsilon. \quad (6.6)$$

Dies können wir auf Gleichung (5.23) anwenden. Man beachte, dass wir strenggenommen anstelle von  $\phi_{\pm}$  mit deren Vielfache  $y_{\pm}$  arbeiten, die Konstanten sich aber aufgrund der Gestalt von Gleichung (5.23) kürzen.

Angenommen die Gleichung (5.23) ist erfüllt, dann folgt

$$\begin{aligned} &(-\mu_{+}\lambda_{+})^{1/4} (-1 + F_{2+}(0)) (g_{11}(-\mu_{-}\lambda_{-})^{-1/4} (1 + F_{1-}(0)) \\ &\quad + g_{12}(-\mu_{-}\lambda_{-})^{1/4} (-1 + F_{2-}(0))) \\ &= (-\mu_{+}\lambda_{+})^{-1/4} (1 + F_{1+}(0)) (g_{21}(-\mu_{-}\lambda_{-})^{-1/4} (1 + F_{1-}(0)) \\ &\quad + g_{22}(-\mu_{-}\lambda_{-})^{1/4} (-1 + F_{2-}(0))) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} &(-e^{2i\phi}\lambda)^{1/4} (g_{12}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4} - g_{11}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}) \\ &\quad + (-e^{2i\phi}\lambda)^{-1/4} (g_{22}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4} - g_{21}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}) \\ &= (-e^{2i\phi}\lambda)^{-1/4} (g_{22}F_{2-}(0)(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4} + g_{22}F_{1+}(0)(-1 + F_{2-}(0))(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4} \\ &\quad + g_{21}F_{1-}(0)(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4} + g_{21}F_{1+}(0)(1 + F_{1-}(0))(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (-e^{2i\phi}\lambda)^{1/4} \left( -g_{11}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}F_{1-}(0) - g_{12}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4}F_{2-}(0) \right. \\
 & \left. + g_{11}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}F_{2+}(0)(1 + F_{1-}(0)) + g_{12}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4}F_{2+}(0)(-1 + F_{2-}(0)) \right).
 \end{aligned}$$

Wir nehmen den Betrag auf beiden Seiten und erhalten

$$\begin{aligned}
 & |(-e^{2i\phi}\lambda)^{1/4}(g_{12}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4} - g_{11}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}) \\
 & + (-e^{2i\phi}\lambda)^{-1/4}(g_{22}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4} - g_{21}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4})| \\
 & \leq |(-e^{2i\phi}\lambda)^{-1/4}g_{22}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4}|\varepsilon + |(-e^{2i\phi}\lambda)^{-1/4}g_{22}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4}|\varepsilon(1 + \varepsilon) \\
 & + |(-e^{2i\phi}\lambda)^{-1/4}g_{21}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}|\varepsilon + |(-e^{2i\phi}\lambda)^{-1/4}g_{21}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}|\varepsilon(1 + \varepsilon) \\
 & + |(-e^{2i\phi}\lambda)^{1/4}g_{11}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}|\varepsilon + |(-e^{2i\phi}\lambda)^{1/4}g_{12}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4}|\varepsilon \\
 & + |(-e^{2i\phi}\lambda)^{1/4}g_{11}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}|\varepsilon(1 + \varepsilon) + |(-e^{2i\phi}\lambda)^{1/4}g_{12}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4}|\varepsilon(1 + \varepsilon)
 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
 & |g_{12}(-e^{2i\phi}\lambda)^{1/4}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4} - g_{11}e^{i\phi} + g_{22}e^{-i\phi} - g_{21}(-e^{2i\phi}\lambda)^{-1/4}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}| \\
 & \leq |g_{22}|\varepsilon + |g_{22}|\varepsilon(1 + \varepsilon) + |\lambda|^{-1/2}|g_{21}|\varepsilon + |\lambda|^{-1/2}|g_{21}|\varepsilon(1 + \varepsilon) \\
 & + |g_{11}|\varepsilon + |\lambda|^{1/2}|g_{12}|\varepsilon + |g_{11}|\varepsilon(1 + \varepsilon) + |\lambda|^{1/2}|g_{12}|\varepsilon(1 + \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned}
 & \frac{|g_{12}(-e^{2i\phi}\lambda)^{1/4}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4} - g_{11}e^{i\phi} + g_{22}e^{-i\phi} - g_{21}(-e^{2i\phi}\lambda)^{-1/4}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}|}{|g_{22}| + |g_{11}| + |\lambda|^{-1/2}|g_{21}| + |\lambda|^{1/2}|g_{12}|} \\
 & \leq \varepsilon(2 + \varepsilon)
 \end{aligned}$$

Falls  $g_{12} \neq 0$  und mit  $|\lambda|^{1/2} \geq \frac{4}{|g_{12}|} \max\{|g_{11}|, |g_{21}|, |g_{22}|\}$  folgt

$$|g_{22}| + |g_{11}| + |\lambda|^{-1/2}|g_{21}| + |\lambda|^{1/2}|g_{12}| \leq 2|g_{12}||\lambda|^{1/2}$$

und

$$\begin{aligned}
 & |g_{12}(-e^{2i\phi}\lambda)^{1/4}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{1/4} - g_{11}e^{i\phi} + g_{22}e^{-i\phi} - g_{21}(-e^{2i\phi}\lambda)^{-1/4}(-e^{-2i\phi}\lambda)^{-1/4}| \\
 & \geq |g_{12}||\lambda|^{1/2} - |g_{11}| - |g_{22}| - |g_{21}| \geq \frac{1}{4}|g_{12}||\lambda|^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\frac{1}{8} \leq \varepsilon(2 + \varepsilon)$$

## 6 Bender-Boettcher Potentiale

was für  $\varepsilon < \frac{3\sqrt{2}-4}{4}$  einen Widerspruch darstellt. Mit (6.5) und (6.6) folgt somit

$$2e^{C|\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}} - 2 < \frac{3\sqrt{2}-4}{4},$$

$$|\lambda|^{1/2+1/(N+2)} > \left( \frac{1}{C} \ln \frac{3\sqrt{2}+4}{8} \right)^{-1}$$

beziehungsweise

$$|\lambda| > \left( \frac{1}{C} \ln \frac{3\sqrt{2}+4}{8} \right)^{-\frac{N+4}{2(N+2)}}.$$

Falls hingegen  $g_{12} = 0$  und  $g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi} \neq 0$  folgt mit  $|g_{21}||\lambda|^{-1/2} \leq \frac{|g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi}|}{2}$ , dass

$$\frac{|g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi}|}{2(|g_{22}| + |g_{11}| + |g_{21}|)} \leq \varepsilon(2 + \varepsilon)$$

und dies ist für

$$\varepsilon < -1 + \sqrt{1 + \frac{|g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi}|}{2(|g_{22}| + |g_{11}| + |g_{21}|)}}$$

ein Widerspruch. Mit (6.5) und (6.6) folgt somit

$$2e^{C|\lambda|^{-1/2-1/(N+2)}} - 2 < -1 + \sqrt{1 + \frac{|g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi}|}{2(|g_{22}| + |g_{11}| + |g_{21}|)}},$$

$$|\lambda|^{1/2+1/(N+2)} > \left( \frac{1}{C} \ln \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{|g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi}|}{2(|g_{22}| + |g_{11}| + |g_{21}|)}} \right) \right)^{-1}$$

beziehungsweise

$$|\lambda| > \left( \frac{1}{C} \ln \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{|g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi}|}{2(|g_{11}| + |g_{21}| + |g_{22}|)}} + 1 \right) \right)^{-\frac{N+4}{2(N+2)}}.$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen. □

Schließlich geben wir zwei Beispiele an. Im ersten setzen wir  $N = 3$ ,  $\phi = \frac{\pi}{10}$ ,  $\rho = \frac{\pi}{100}$  und  $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi}{5}i} \end{pmatrix}$ . Der dazugehörige Operator ist nach Lemma 5.11  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch und nach Theorem 5.13  $[\cdot, \cdot]$ -selbstadjungiert. Mit Theorem 6.2 befinden wir uns im Grenzpunktfall I. Somit ergibt sich

$$Q_{\pm} = \text{clconv} \{e^{\mp \frac{\pi}{5}i} + |x|^5 : r \in (0, \infty), x \in \mathbb{R}_{\pm}\}$$

und folgende Werte

$$\begin{aligned} C &= \frac{21 \cdot 25}{4 \cdot (\sin \rho)^{5/2}} > 750591, \\ |g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi}| &= |e^{i\pi/10} + i| < 1,618, \\ \mu_{\pm}^{-1}e^{\pm 2i\phi} &= -ie^{\pm 5\pi/10} = \pm 1. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{C} \ln \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{|g_{11}e^{i\phi} - g_{22}e^{-i\phi}|}{2(|g_{11}| + |g_{21}| + |g_{22}|)}} + 1 \right) \right)^{-\frac{N+4}{2(N+2)}} \\ &< \left( \frac{1}{107227} \ln \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{5,618}{4}} + 1 \right) \right)^{-\frac{7}{10}} < 70770. \end{aligned}$$

Nach Theorem 6.4 besitzt der Operator  $A_G$  für

$$\lambda \notin \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \geq \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{100}\}$$

und

$$|\lambda| \geq 70770$$

keine Eigenwerte. Eigenwerte können somit nur im roten Bereich aus Abbildung 6.2 liegen. Die roten Punkte sollen mögliche Eigenwerte symbolisieren.

Im zweiten Beispiel setzen wir  $N = 2$ ,  $\phi = \frac{\pi}{6}$ ,  $\rho = \frac{\pi}{100}$  und  $G = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\frac{\pi}{3}i} \\ 0 & e^{-\frac{2\pi}{3}i} \end{pmatrix}$ . Der dazugehörige Operator ist nach Lemma 5.11  $\mathcal{PT}$ -symmetrisch und nach Theorem 5.13  $[\cdot, \cdot]$ -selbstadjungiert. Mit Theorem 6.2 befinden wir uns im Grenzpunktfall I. Wir erhalten

$$\begin{aligned} Q_{\pm} &= \text{clconv} \{e^{\mp \pi i/3}r - x^4e^{\pm 2\pi i/3} : r \in (0, \infty), x \in \mathbb{R}_{\pm}\} \\ &= \{e^{\mp \pi i/3}|x| : x \in \mathbb{R}_{\pm}\} \end{aligned}$$

## 6 Bender-Boettcher Potentiale

und

$$C = \frac{21 \cdot 16}{4 \cdot (\sin \rho)^{5/2}} > 480379,$$

$$\mu_{\pm}^{-1} e^{\pm 2i\phi} = e^{\pm \pi i/3}.$$

Weiter gilt

$$\left( \frac{1}{C} \ln \frac{3\sqrt{2} + 4}{8} \right)^{-\frac{N+4}{2(N+2)}} < \left( \frac{1}{480379} \ln \frac{3\sqrt{2} + 4}{8} \right)^{-\frac{3}{4}} < 64464716800.$$

Nach Theorem 6.4 besitzt der Operator  $A_G$  für

$$\lambda \notin \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg(z) \pm \frac{\pi}{3} \right| \geq \frac{\pi}{100} \right\}$$

und

$$|\lambda| \geq 64464716800$$

keine Eigenwerte. Die Eigenwerte können somit nur im roten Bereich aus Abbildung 6.3. Die roten Punkte sollen mögliche Eigenwerte symbolisieren. In Abbildung 6.2 sind, im Gegensatz zu Abbildung 6.3, reelle Eigenwerte die sich gegen unendlich häufen möglich.

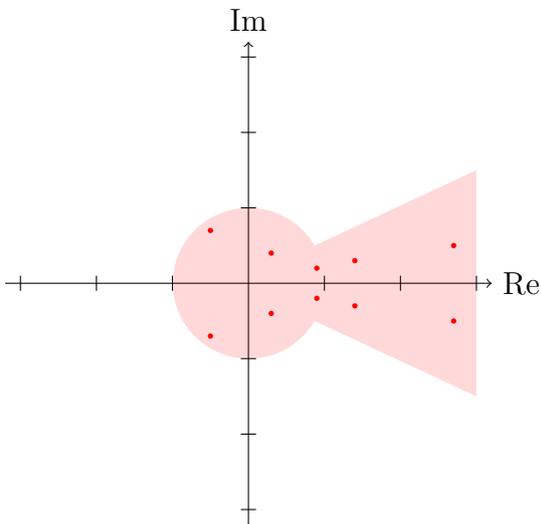


Abbildung 6.2: Für  $N = 3$  und  $\phi = \frac{\pi}{10}$

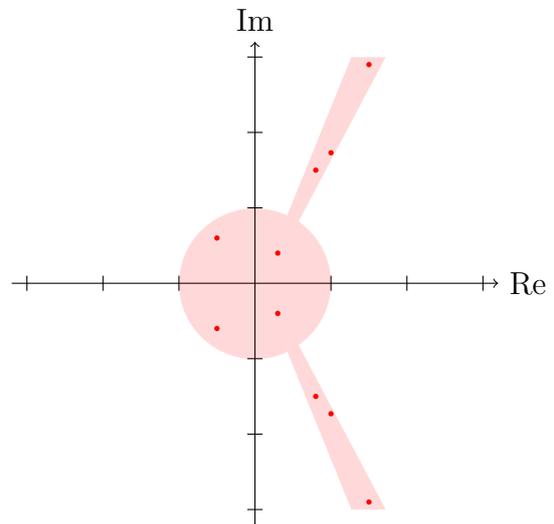


Abbildung 6.3: Für  $N = 2$  und  $\phi = \frac{\pi}{6}$

Aus Theorem 2.10 und [29, Theorem IX 2.4.] folgt die folgende Beobachtung.

**Proposition 6.5.** *Die essentiellen Spektra von  $A_D$  und  $A_G$  stimmen überein und sind somit leer,*

$$\sigma_{ess}(A_D) = \sigma_{ess}(A_G) = \emptyset,$$

*da  $Q_{b\pm} = \emptyset$  (siehe Bemerkung 5.14 und (3.10)).*



# Literaturverzeichnis

- [1] T. ANDO, *Linear operators on Krein spaces*. Sapporo: Hokkaido University, Division of Applied Mathematics. Research Institute of Applied Electricity, 1979.
- [2] R. ARENS, *Operational calculus of linear relations*, Pac. J. Math., **11** (1961), 9–23.
- [3] T. AZIZOV UND I. IOKHVIDOV, *Linear operators in space with an indefinite metric*, Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1989.
- [4] T. AZIZOV UND C. TRUNK, *On domains of  $\mathcal{PT}$  symmetric operators related to  $-y''(x) + (-1)^n x^{2n}y(x)$* , J. Phys. A, Math. Theor., **43** (2010), 13.
- [5] T. AZIZOV UND C. TRUNK,  *$\mathcal{PT}$  symmetric, Hermitian and  $\mathcal{P}$ -self-adjoint operators related to potentials in  $\mathcal{PT}$  quantum mechanics*, J. Math. Phys., **53** (2012), 012109, 18.
- [6] T. AZIZOV UND C. TRUNK, *On a class of Sturm-Liouville operators which are connected to  $\mathcal{PT}$ -symmetric problems*, Proc. Appl. Math. Mech., **14** (2014), 991–992.
- [7] T. Y. AZIZOV, J. BEHRNDT, P. JONAS UND C. TRUNK, *Spectral points of definite type and type  $\pi$  for linear operators and relations in Krein spaces.*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser., **83** (2011), 768–788.
- [8] J. BEHRNDT UND C. TRUNK, *Sturm-Liouville operators with indefinite weight functions and eigenvalue depending boundary conditions*, J. Differ. Equations, **222** (2006), 297–324.
- [9] C. BENDER, *Making sense of non-Hermitian Hamiltonians*, Rep. Prog. Phys. , **70** (2007), 947–10118.
- [10] C. BENDER,  *$\mathcal{PT}$ -symmetric quantum theory*, J. of Phys.: Conference Series, **613** (2015), 1–12.
- [11] C. BENDER,  *$\mathcal{PT}$  symmetry in quantum physics: From a mathematical curiosity to optical experiments*, Europhysics News, **42** (2016), 17–20.
- [12] C. BENDER UND S. BOETTCHER, *Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having  $\mathcal{PT}$  symmetry*, Phys. Rev. Lett., **80** (1998), 5243–5246.

- [13] C. BENDER, D. C. BRODY UND H. F. JONES, *Complex extension of quantum mechanics*, Phys. Rev. Lett., **89** (2002), 4.
- [14] C. BENDER, D. C. BRODY, H. F. JONES, A. MILTON UND M. OGILVIE, *Equivalence of a Complex  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Quartic Hamiltonian and a Hermitian Quartic Hamiltonian with an Anomaly*, J. of Phys. A – Math. and Gen., **39** (2006), 1657–1668.
- [15] C. M. BENDER,  *$PT$  symmetry in quantum and classical physics*, Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2018.
- [16] M. V. BERRY, *Optical lattices with  $\mathcal{PT}$  symmetry are not transparent*, J. Phys. A: Math. Theor., **41** (2008), 1–7.
- [17] S. BODINE UND D. LUTZ, *Asymptotic integration of differential and difference equations*, Heidelberg New York Dordrecht London Cham: Springer, 2015.
- [18] J. BOGNAR, *Indefinite inner product spaces*, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1974.
- [19] D. BORISOV UND D. KREJČIŘÍK,  *$\mathcal{PT}$ -symmetric waveguides*, Integral Equations Oper. Theory, **62** (2008), 489–515.
- [20] B. BROWN, D. MCCORMACK, W. EVANS UND M. PLUM, *On the spectrum of second-order differential operators with complex coefficients*, Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., **455** (1999), 1235–1257.
- [21] R. CROSS, *Multivalued linear operators*, New York: Marcel Dekker, 1998.
- [22] V. DERKACH, *On generalized resolvents of Hermitian relations in Krein spaces*, J. Math. Sci., **97** (1999), 4420–4460.
- [23] V. DERKACH UND M. MALAMUD, *The extension theory of Hermitian operators and the moment problem*, J. Math. Sci., **73** (1995), 141–242.
- [24] V. DERKACH UND M. MALAMUD, *Non-self-adjoint extensions of a Hermitian operator and their characteristic functions*, J. Math. Sci., **97** (1999), 4461–4499.
- [25] A. DIJKSMA UND H. DE SNOO, *Symmetric and selfadjoint relations in Krein spaces I*, Oper. Theory Adv. Appl., **24** (1987), 145–166.
- [26] P. DOREY, C. DUNNING UND R. TATEO, *Spectral equivalences, Bethe ansatz equations, and reality properties in  $\mathcal{PT}$ -symmetric quantum mechanics*, J. Phys. A, Math. Gen., **34** (2001), 5679–5704.
- [27] N. DUNFORD UND J. T. SCHWARTZ, *Linear operators. Part II: Spectral theory, self adjoint operators in Hilbert space*, New York: John Wiley & Sons Ltd., 1988.
- [28] M. EASTHAM, *The asymptotic solution of linear differential systems. Applications of the Levinson theorem*, Oxford: Clarendon Press, 1989.

- [29] D. EDMUNDS UND W. EVANS, *Spectral theory and differential operators*, Oxford: Oxford University Press, 1987.
- [30] R. EL-GANAINY, K. MAKRIS, M. KHAJAVIKHAN, Z. MUSSLIMANI, S. ROTTER UND D. CHRISTODOULIDES, *Non-Hermitian physics and  $\mathcal{PT}$ -symmetry*, Nat. Phys., **14** (2018), 11–19.
- [31] I. GIORDANELLI UND G. M. GRAF, *The real spectrum of the imaginary cubic oscillator: an expository proof*, Ann. Henri Poincaré, **16** (2015), 99–112.
- [32] M. GORBACHUK UND V. GORBACHUK, *Boundary value problems for operator differential equations*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [33] M. HAASE, *The functional calculus for sectorial operators*, Basel: Birkhäuser Verlag, 2006.
- [34] E. HILLE, *Lectures on ordinary differential equations*. Addison-Wesley Publishing Company, London, 1969.
- [35] H. JONES UND J. MATEO, *An equivalent Hermitian Hamiltonian for the non-Hermitian  $-x^4$  potential*, Phys. Rev. D, **73** (2006), 085002.
- [36] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1976.
- [37] H. LANGER, *Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces*, Lect. Notes Math., **948** (1982), 1–46.
- [38] F. LEBEN UND C. TRUNK, *Operator based approach to  $\mathcal{PT}$ -symmetric problems on a wedge-shaped contour*, Quantum Stud.: Math. Found., (2019), 1–19.
- [39] K. G. MAKRIS, R. EL-GANAINY, D. N. CHRISTODOULIDES UND Z. H. MUSSLIMANI,  *$\mathcal{PT}$ -symmetric periodic optical potentials*, Int. J. Theor. Phys., **50** (2011), 1019–1041.
- [40] A. MOSTAFAZADEH, *Pseudo-Hermitian description of  $\mathcal{PT}$ -symmetric systems defined on a complex contour*, J. Phys. A, Math. Gen., **38** (2005), 3213–3234.
- [41] A. MOSTAFAZADEH, *Krein-space formulation of  $\mathcal{PT}$  symmetry,  $CPT$ -inner products, and pseudo-Hermiticity*, Czech. J. Phys., **56** (2006), 919–933.
- [42] A. MOSTAFAZADEH, *Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **7** (2010), 1191–1306.
- [43] A. MOSTAFAZADEH, *Point interactions, metamaterials, and  $\mathcal{PT}$ -symmetry*, Ann. Phys., **368** (2016), 56–69.
- [44] M. NAIMARK, *Linear differential operators, part II*, London, Harrap, 1968.
- [45] F. OLVER, *Error bounds for the Liouville-Green (or WKB) approximation*, Proc. Camb. Philos. Soc., **57** (1961), 790–810.

*Literaturverzeichnis*

- [46] F. OLVER, *Asymptotics and special functions*. Computer Science and Applied Mathematics. New York - London: Academic Press, 1974.
- [47] M. REED UND B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics. I: Functional analysis*. New York: Academic Press, 1980.
- [48] C. RÜTER, K. MAKRIS, R. EL-GANAINY, D. CHRISTODOULIDES, M. SEGEV UND D. KIP, *Observation of parity-time symmetry in optics*, Nat. Phys., **6** (2010), 192–195.
- [49] K. C. SHIN, *On the reality of the eigenvalues for a class of  $\mathcal{PT}$ -symmetric oscillators*, Commun. Math. Phys., **229** (2002), 543–564.
- [50] Y. SIBUYA, *Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient*. North-Holland Mathematics Studies, Oxford, 1975.
- [51] A. R. SIMS, *Secondary conditions for linear differential operators of the second order*, J. Math. Mech., **6** (1957), 247–285.
- [52] T. TANAKA,  *$\mathcal{PT}$ -symmetric quantum theory defined in a Krein space*, J. Phys. A, Math. Gen., **39** (2006), 369–376.
- [53] J. WEIDMANN, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil II: Anwendungen*, Stuttgart: Teubner, 2003.
- [54] H. WEYL, *Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen*, Math. Ann., **68** (1910), 220–269.
- [55] A. ZETTL, *Sturm-Liouville theory*, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2005.