

3/2018

Integration von Gewichtsrestriktionen in das DEA-Modell nach Charnes, Cooper und Rhodes

Exemplarische Optionen und Auswirkungen

Florian Ströhl, Erik Borsch, Rainer Souren

Ilmenauer Schriften zur
Betriebswirtschaftslehre

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übertragung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, bleiben vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© VERLAG proWiWi e. V., Ilmenau, 2018

Ilmenauer Schriften zur Betriebswirtschaftslehre
www.tu-ilmenau.de/is-ww

Herausgeber:

Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Norbert Bach, Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Anja Geigenmüller,
Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Michael Grüning, Univ.-Prof. Dr. rer. pol. Rainer Souren

ISSN 2192-4643

ISBN 978-3-940882-53-0

URN urn:nbn:de:gbv:ilm1-2018200197

Ilmenauer Schriften zur
Betriebswirtschaftslehre
3/2018

Integration von Gewichtsrestriktionen in das DEA-Modell
nach Charnes, Cooper und Rhodes

Exemplarische Optionen und Auswirkungen

Florian Ströhl¹, Erik Borsch², Rainer Souren³

¹ Florian Ströhl B. Sc., Masterstudent Wirtschaftsingenieurwesen an der TU Ilmenau.

² Erik Borsch M. Sc., Wissenschaftlicher Mitarbeiter des Fachgebiets Nachhaltige Produktionswirtschaft und Logistik der TU Ilmenau.

³ Univ.-Prof. Dr. rer. pol. Rainer Souren, Leiter des Fachgebiets Nachhaltige Produktionswirtschaft und Logistik der TU Ilmenau.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	III
Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	IV
1. Einleitung	1
2. DEA als Verfahren zur Effizienzmessung	2
2.1 Effizienzverständnis und Konzept der DEA	2
2.2 DEA-Basismodell nach Charnes, Cooper und Rhodes	3
2.3 Diskussion des Problems fehlender Gewichtsrestriktionen	6
2.4 Ausgangspunkt: Ein fiktives Beispiel	7
3. Gestaltungsmöglichkeiten von Gewichtsrestriktionen	9
3.1 Absolute Restriktionen der Gewichtungsfaktoren	9
3.2 Relative Restriktionen der Gewichtungsfaktoren	10
3.3 Restriktionen virtueller Inputs und Outputs	11
3.4 Negative Folgen der Gewichtsrestriktionen	12
4. Exemplarische Darstellung des Einflusses unterschiedlicher Gewichtsrestriktionen ...	15
4.1 Auswirkungen auf Effizienzwerte und Gewichtungsfaktoren	15
4.2 Sensitivität der Effizienzergebnisse	20
5. Zusammenfassung und Ausblick	23
Literaturverzeichnis	25

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Effizienzwerte in Abhängigkeit eines unteren Grenzwerts a	21
Abbildung 2: Effizienzwerte in Abhängigkeit eines unteren Grenzwerts b	22
Abbildung 3: Effizienzwerte in Abhängigkeit eines unteren Grenzwerts c	23

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Input- und Outputquantitäten des fiktiven Beispiels.....	7
Tabelle 2: Ergebnisse der Multiplier-Form des inputorientierten CCR-Basismodells	7
Tabelle 3: Ergebnisse der Envelopment-Form des inputorientierten CCR-Basismodells	8
Tabelle 4: Exemplarische absolute Gewichtsrestriktionen	15
Tabelle 5: Ergebnisse des CCR-Modells unter absoluten Gewichtsrestriktionen.....	16
Tabelle 6: Ergebnisse des CCR-Modells unter einer ordinalen Gewichtsrestriktion.....	17
Tabelle 7: Ergebnisse des CCR-Modells unter Assurance Regions vom Typ I.....	18
Tabelle 8: Ergebnisse des CCR-Modells unter virtuellen Gewichtsrestriktionen.....	19

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungen

CCR	Charnes/Cooper/Rhodes
DEA	Data Envelopment Analysis
DMU	Decision Making Unit

Variablen

\underline{a}	Minimales Verhältnis μ_1/μ_2
\underline{b}	Minimales Verhältnis μ_2/μ_1
\underline{c}	Minimales Verhältnis ϑ_2/ϑ_1
m	Anzahl der Inputobjektarten
n	Anzahl der DMUs
s	Anzahl der Outputobjektarten
u	Gewichtungsfaktor eines Outputs im Quotientenprogramm
v	Gewichtungsfaktor eines Inputs im Quotientenprogramm
x	Inputquantität einer DMU
y	Outputquantität einer DMU
$\underline{\alpha}$	Minimal zulässiges Verhältnis der Gewichtung von zwei Outputs
$\overline{\alpha}$	Maximal zulässiges Verhältnis der Gewichtung von zwei Outputs
$\underline{\beta}$	Minimal zulässiges Verhältnis der Gewichtung von zwei Inputs
$\overline{\beta}$	Maximal zulässiges Verhältnis der Gewichtung von zwei Inputs
$\underline{\gamma}$	Minimal zulässiges Verhältnis der Gewichtung von einem Output und einem Input
$\overline{\gamma}$	Maximal zulässiges Verhältnis der Gewichtung von einem Output und einem Input
$\underline{\delta}$	Minimal zulässiger Anteil eines Outputs am aggregierten Output
$\overline{\delta}$	Maximal zulässiger Anteil eines Outputs am aggregierten Output
ε	Infinitesimal kleine Zahl
θ	Effizienzwert der Multiplier-Form
ϑ	Gewichtungsfaktor eines Inputs
$\underline{\vartheta}$	Mindestgewicht eines Inputs
$\overline{\vartheta}$	Höchstgewicht eines Inputs
λ	Skalenniveaufaktor einer DMU
μ	Gewichtungsfaktor eines Outputs

$\underline{\mu}$	Mindestgewicht eines Outputs
$\bar{\mu}$	Höchstgewicht eines Outputs
ϕ	Effizienzwert der Envelopment-Form
$\underline{\varphi}$	Minimal zulässiger Anteil eines Inputs am aggregierten Input
$\bar{\varphi}$	Maximal zulässiger Anteil eines Inputs am aggregierten Input

Indizes

i	Inputobjektart
j	Bezeichnung einer DMU
o	Untersuchte DMU
r	Outputobjektart
*	Kennzeichnung eines optimalen Effizienzwertes bzw. Gewichtungsfaktors

1. Einleitung

Die Data Envelopment Analysis (DEA) ist ein nicht-parametrisches Verfahren zur relativen Effizienzmessung vergleichbarer Aktivitäten bzw. Organisationseinheiten (Decision Making Units), das sich in den letzten Jahrzehnten insbesondere im Non-Profit-Bereich großer Beliebtheit erfreut. Im Gegensatz zu traditionellen Verfahren der Effizienzmessung benötigt die DEA keine externen Gewichtungsfaktoren, um In- und Outputs verschiedener Maßeinheiten zu einer eindimensionalen Effizienzkennzahl zu aggregieren; sämtliche Gewichtungsfaktoren werden vielmehr im Verfahren selbst ermittelt.¹ Die Flexibilität der Gewichtungsfaktoren, die in breiten Teilen der Literatur als ein Hauptvorteil gegenüber anderen Verfahren der Effizienzmessung angesehen wird,² führt aber auch zu unerwünschten Folgen, insbesondere zur inadäquaten Berücksichtigung einzelner In- und Outputs bei der Effizienzmessung. Aus diesem Grund wurden in den letzten Jahrzehnten zahlreiche Ansätze zur Integration von Gewichtsrestriktionen in DEA-Basismodelle veröffentlicht.³

Ziel dieses Arbeitsberichts ist es, die Integration von Gewichtsrestriktionen in das DEA-Basismodell nach Charnes, Cooper und Rhodes (CCR-Modell) zu untersuchen. Demgemäß lautet die Forschungsfrage: „Welche Auswirkungen können infolge der Integration von Gewichtsrestriktionen im DEA-Basismodell nach Charnes, Cooper und Rhodes entstehen?“ Für ein fiktives Beispiel werden die Ergebnisse der um verschiedene Gewichtsrestriktionen erweiterten DEA-Modelle präsentiert. Zur praktischen Durchführung der Effizienzmessung und nachfolgender Untersuchungen wird das Softwarepaket Mathematica des Unternehmens Wolfram Research verwendet.

In Kapitel 2 werden zunächst die DEA als Verfahren zur Effizienzmessung und die Probleme, die durch fehlende Gewichtsrestriktionen entstehen können, dargestellt und an einem fiktiven Beispiel veranschaulicht. Im Anschluss erfolgt in Kapitel 3 eine Erläuterung verschiedener Möglichkeiten zur Integration von Gewichtsrestriktionen in das CCR-Basismodell. Um einer unbedachten Integration dieser Gewichtsrestriktionen entgegenzuwirken, thematisiert das Kapitel auch die Folgen, die durch die Integration von Gewichtsrestriktionen im CCR-Basismodell entstehen können. Anschließend wird in Kapitel 4 der Einfluss verschiedener Gewichtsrestriktionen auf die Effizienzergebnisse des Beispiels untersucht. Dabei werden die Effizienzergebnisse in Abhängigkeit von verschiedenen Gewichtsrestriktionen visualisiert und untersucht. Den Abschluss des Arbeitsberichts bilden eine Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse sowie ein Ausblick auf zukünftige Forschungsarbeiten.

¹ Vgl. Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 13.

² Vgl. Pedraja-Chaparro/Salinas-Jimenez/Smith 1997, S. 219.

³ Eine ältere Übersicht findet sich in Allen et al. 1997, S. 17ff.

2. DEA als Verfahren zur Effizienzmessung

2.1 Effizienzverständnis und Konzept der DEA

Die Data Envelopment Analysis⁴ ist ein produktions- und entscheidungstheoretisch fundiertes Instrument zur Beurteilung der Effizienz von Entscheidungseinheiten, den sog. Decision Making Units (DMUs). Sie basiert auf der Aktivitätsanalyse⁵ und unterstellt einen (technischen) Effizienz-begriff nach Pareto-Koopmans.⁶ Eine Aktivität (bzw. hier DMU) gilt dabei als effizient, wenn sie von keiner anderen Aktivität der zugrunde liegenden Technik dominiert wird.⁷ Ziel der DEA ist es nicht nur, effiziente von ineffizienten (also dominierten) DMUs zu separieren, sondern auch den Grad der (In-)Effizienz zu bestimmen sowie real existierende oder virtuelle Vergleichseinheiten zu identifizieren, mit denen sich ineffiziente DMUs vergleichen können.

Der Effizienzbegriff basiert dabei auf dem Konzept der Produktivität,⁸ die durch den Quotienten aus Outputs und Inputs einer DMU bestimmt wird. Sämtliche In- und Outputs der DMUs werden durch nichtnegative, kardinal messbare Werte angegeben. Dabei werden hier ausschließlich Güter betrachtet, woraus folgt, dass geringere Input- und höhere Outputquantitäten ceteris paribus die Effizienzkennzahl begünstigen.⁹ Für den Fall, dass nur ein Input und ein Output betrachtet werden, kann die Produktivität unmittelbar als Verhältnis des (einzigen) Outputs zum (einzigen) Input berechnet werden.

Für realistischere Fälle, bei denen mehrere Inputs und Outputs in den Effizienzvergleich einbezogen werden sollen, ist zur Ermittlung einer eindimensionalen Produktivitätskennzahl eine Aggregation der Input- und Outputquantitäten mithilfe von Gewichtungsfaktoren erforderlich. Liegt hierzu ein objektiver (z. B. monetärer) Erfolgsmaßstab¹⁰ vor, so kann die beste (erfolgsmaximale) DMU unmittelbar bestimmt werden. Oftmals fehlt jedoch ein solcher objektiver Erfolgsmaßstab und der Entscheider muss die Gewichtung der einzelnen In- und Outputs subjektiv vornehmen. Dies fällt ihm bzw. ihr meist schwer und führt bei Entscheidungen, an denen mehrere Akteure (etwa die für einzelne DMUs verantwortlichen Manager) beteiligt sind, oftmals zu Diskussionen über die faire Beurteilung einzelner DMUs.

⁴ Als Data Envelopment Analysis wird dieses Verfahren seit dem Erscheinen von Charnes/Cooper/Rhodes 1978 bezeichnet. Gedanklich geht die DEA jedoch auf Farrell 1957 zurück.

⁵ Vgl. ausführlich zur Aktivitätsanalyse Koopmans 1951; Wittmann 1968, S. 1–20 sowie Dyckhoff 2006, S. 19ff.

⁶ Vgl. Wilken 2007, S. 11.

⁷ Vgl. Dyckhoff 2006, S. 139.

⁸ Vgl. Allen 2002, S. 63.

⁹ Vgl. Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 22, und Dyckhoff 2006, S. 177. Vgl. zur Berücksichtigung von Übeln in der DEA Wojcik/Dyckhoff/Gutgesell 2017.

¹⁰ Vgl. Dyckhoff 2006, S. 212f.

Die DEA ist als nicht-parametrisches Verfahren in der Lage, dieses Problem zu lösen. Im Rahmen einer vergleichenden Betrachtung der DMUs wird eine relative Effizienzmessung durchgeführt, und die (unbekannten) Gewichtungsfaktoren werden modellendogen ermittelt. Dabei wird unter Einbeziehung der Inputs und Outputs aller DMUs einzeln für jede DMU ein lineares Optimierungsproblem gelöst. Neben dem bestmöglichen Effizienz- bzw. Produktivitätswert werden die Gewichtungsfaktoren zur Aggregation der In- bzw. Outputs so bestimmt, dass die betrachtete DMU gegenüber allen anderen DMUs „ins beste Licht gerückt“ wird. Ausgehend von den tatsächlich beobachteten und als effizient ausgewiesenen DMUs konstruiert die DEA einen effizienten Rand¹¹, der die nicht effizienten DMUs umhüllt¹² „und der Data **Envelopment** Analysis ihren Namen gibt.“¹³ Eine DMU, die nicht auf dem effizienten Rand liegt, wird von mindestens einer anderen DMU bzw. einer Linearkombination mehrerer DMUs dominiert. Dabei kann ihr Abstand vom effizienten Rand als das Ausmaß ihrer Ineffizienz interpretiert werden.¹⁴

2.2 DEA-Basismodell nach Charnes, Cooper und Rhodes

Das in diesem Abschnitt vorgestellte DEA-Basismodell geht auf einen Aufsatz von Charnes, Cooper und Rhodes aus dem Jahr 1978 zurück und wird in der Literatur auch als CCR-Basismodell bezeichnet.¹⁵ Unter der Annahme konstanter Skalenerträge¹⁶ ist für $j = 1, \dots, n$ DMUs, welche anhand von $i = 1, \dots, m$ verschiedenen Inputs und $r = 1, \dots, s$ verschiedenen Outputs beschrieben werden, das Quotientenprogramm:

$$\max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \quad (1)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$u_r, v_i \geq 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

¹¹ Die verschiedenen Methoden, wie ausgehend von den effizienten DMUs der Verlauf des effizienten Randes ermittelt werden kann, sollen in dieser Arbeit nicht thematisiert werden. Zur Betrachtung verschiedener Skalenertragsformen sei der interessierte Leser z. B. auf Banker et al. 2011 verwiesen.

¹² Aus dem Englischen für to envelop (umhüllen, einhüllen).

¹³ Richter/Borsch 2017, S. 23.

¹⁴ Vgl. Wilken 2007, S. 13f.

¹⁵ Vgl. Charnes/Cooper/Rhodes 1978.

¹⁶ Die Annahme konstanter Skalenerträge bedeutet, dass beliebige größenproportionale Änderungen der Input- bzw. Outputquantitäten der DMUs möglich sind.

für jede DMU $o \in \{1, \dots, n\}$ individuell zu lösen. Dabei stellt u_r das Aggregationsgewicht von Output r und v_i das Aggregationsgewicht von Input i der DMU o dar. Durch die Nebenbedingung (2) wird gewährleistet, dass keine DMU, unter Verwendung der für DMU o optimalen Gewichtungsfaktoren u_r^* und v_i^* , einen Effizienzwert von 1 überschreitet.

Mittels Charnes-Cooper-Transformation¹⁷ kann dieses Quotientenprogramm in ein äquivalentes lineares Programm überführt werden:

$$\max \theta_o = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} \quad (4)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^m \vartheta_i x_{io} = 1 \quad (5)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} \leq \sum_{i=1}^m \vartheta_i x_{ij}, \quad j = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$\mu_r, \vartheta_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \quad (7)$$

Diese Variante des CCR-Basismodells wird als inputorientiertes CCR-Basismodell bezeichnet, da bei gegebenem Outputniveau der Faktor gesucht wird, mit dem alle Inputs mindestens radial reduziert werden müssen, damit die betrachtete DMU effizient wird.¹⁸ Dieses lineare Programm lässt sich beispielsweise mit dem Simplex-Algorithmus lösen und ermittelt dabei optimale Lösungen für die Aggregationsgewichte des Ausgangsproblems ($\mu_r^* = u_r^*$; $\vartheta_i^* = v_i^*$)¹⁹, die sowohl das Verhältnis von gewichtetem Output zu gewichtetem Input der betrachteten DMU (absolute Effizienz) als auch das Verhältnis von gewichtetem Output zu gewichtetem Input der betrachteten DMU im Vergleich zu allen anderen DMUs (relative Effizienz) maximieren.²⁰ Die Gewichtungsfaktoren ϑ_i und μ_r stellen ein relatives Wertsystem dar und können als Stückkosten bzw. -erlöse der einzelnen Kriterien interpretiert werden.²¹ Allerdings muss bei ihrer Interpretation stets berücksichtigt werden, dass sie kein allgemein gültiges Preissystem bilden, sondern nur für die betrachtete DMU o gelten.²²

¹⁷ Vgl. Charnes/Cooper 1962.

¹⁸ Umgekehrt wird bei der outputorientierten Variante und gegebenem Inputniveau ein Faktor gesucht, mit dem die Outputs radial ausgeweitet werden müssen, damit die betrachtete DMU effizient wird. Siehe dazu ausführlicher Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 58ff.

¹⁹ Vgl. Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 23f.

²⁰ Vgl. Podinovski 2001, S. 221, und Podinovski/Athanassopoulos 1998, S. 500.

²¹ Vgl. Allen 2002, S. 66, Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 172, und Richter/Borsch 2017, S. 21.

²² Zudem spiegelt durch die Normierung der gewichteten Inputsumme (\triangleq virtueller Gesamtinput) auf den Wert 1 (vgl. Formel (5)) $\vartheta_i^* x_{io}$ den relativen Wert des Inputs i am gesamten virtuellen Input aus Sicht der DMU o wider.

Die primale Form des CCR-Modells wird auch als Multiplier-Form bezeichnet, da die optimalen Multiplikationsgewichte der Kriterien bestimmt werden.²³ Das dazugehörige duale Minimierungsproblem, auch als Envelopment-Form bezeichnet, kann wie folgt dargestellt werden:²⁴

$$\min \phi_o \quad (8)$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\phi_o x_{io} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \quad (10)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (11)$$

Dieses Minimierungsproblem sucht für die betrachtete DMU o den minimalen Faktor ϕ_o^* , mit dem die Inputquantitäten der betrachteten DMU o radial reduziert werden können, sodass eine Linearkombination der DMUs existiert, die unter Gewährleistung des Outputniveaus der DMU o keine mit ϕ_o^* multiplizierte Inputquantität der DMU o überschreitet.²⁵ Aus den Dualvariablen λ_j geht hervor, wie sich die Referenzeinheit auf dem effizienten Rand der Technik für die betrachtete DMU zusammensetzt. Dabei gibt der Wert λ_j an, wie stark die DMU j in die Bildung der Referenzeinheit für DMU o einfließt.

Über die Multiplier- und Envelopment-Form wird derselbe optimale Effizienzwert ($\theta_o^* = \phi_o^*$) für die betrachtete DMU o berechnet. Erreicht die DMU o einen Effizienzwert $\theta_o^* < 1$, gilt sie als ineffizient, da es eine Referenzeinheit auf dem effizienten Rand gibt, welche mindestens das gleiche Outputniveau unter Verwendung eines mit θ_o^* proportional reduzierten Inputniveaus erreicht. Der Wert $(1 - \theta_o^*)$ kann dabei als radialer Abstand der DMU o von ihrer Referenzeinheit auf dem effizienten Rand interpretiert werden. Eine effiziente DMU mit $\theta_o^* = 1$ stellt demgemäß ihre eigene Referenzeinheit auf dem effizienten Rand der Technik dar.²⁶

²³ Vgl. Hagenloch 2008, S. 1378.

²⁴ Vgl. Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 43f., und Wilken 2007, S. 39.

²⁵ Vgl. Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 43f., und Wilken 2007, S. 39.

²⁶ Ein Nachteil der im CCR-Basismodell verwendeten radialen Distanzfunktion besteht darin, dass eine als effizient ausgewiesene DMU o ($\theta_o^* = 1$) nicht zwangsläufig Pareto-Koopmans- bzw. stark effizient ist, da sie Verbesserungspotenziale bzgl. einzelner, aber nicht aller Kriterien aufweisen kann. Diese DMUs werden deshalb auch als Farrell- bzw. schwach effizient bezeichnet. Zur Ermittlung dieser weiteren, nicht-radialen Ineffizienzen werden Slacks bestimmt. Üblicherweise erfolgt dies im Anschluss an die Berechnung des optimalen Effizienzwertes θ_o^* bzw. ϕ_o^* in einem zweiten Schritt. Siehe dazu ausführlicher Allen 2002, S. 69, Hagenloch 2008, S. 1380f., Wilken 2007, S. 23 und S. 40, sowie Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 58f.

2.3 Diskussion des Problems fehlender Gewichtsrestriktionen

Die Flexibilität in der Bestimmung der Gewichtungsfaktoren stellt sowohl eine Stärke als auch eine Schwäche der DEA dar.²⁷ Durch die objektive Ermittlung der Gewichtungsfaktoren wird jede DMU im Vergleich zu allen anderen DMUs „ins beste Licht“ gerückt. Technisch ineffiziente DMUs können ihre Ineffizienz deshalb nicht über eine „falsche“ Priorisierung der Kriterien rechtfertigen.²⁸ Die Flexibilität der Gewichtungsfaktoren kann allerdings auch dazu führen, dass einige Kriterien durch eine sehr geringe Gewichtung (oder gar ein Gewicht von 0) von der Berechnung des Effizienzwertes ausgeblendet werden und der Effizienzwert nur von wenigen Kriterien (maßgeblich) beeinflusst wird.²⁹ Anders ausgedrückt verfügen die DMUs somit über die Möglichkeit, ihre relativen Schwächen über Null-Gewichte auszublenden;³⁰ der Effizienzwert repräsentiert dann nicht mehr die Performance der DMU über alle Kriterien.³¹ Einzelne Kriterien völlig auszuschließen erscheint jedoch fragwürdig, da ihre (vorherige) Auswahl als Vergleichsmaßstab doch impliziert, dass sie als nicht vernachlässigbar erachtet werden.³² Auch die sich oft ergebende stark unterschiedliche Gewichtung derselben Kriterien bei unterschiedlichen DMUs schmälert die Akzeptanz des Verfahrens.³³

Insbesondere in praktischen Anwendungen werden dem Entscheider nur in seltenen Fällen gar keine Informationen über die Relevanz der Bewertungskriterien zur Verfügung stehen. Es erscheint daher vernünftig, eine Möglichkeit zu schaffen, um zusätzliche Informationen in das CCR-Modell zu integrieren.³⁴ Üblicherweise erfolgt die Integration über verschiedene Arten von Gewichtsrestriktionen, die die Flexibilität der Gewichtungsfaktoren einschränken. Dadurch verliert die DEA zwar einen Teil ihrer Objektivität,³⁵ gewinnt aber zugleich an Realitätsbezug, da sie „richtige“ subjektive Kenntnisse einfließen lässt.

²⁷ Vgl. Thompson et al. 1990, S. 94.

²⁸ Vgl. Allen et al. 1997, S. 14, Dyson/Thanassoulis 1988, S. 564, und Thompson et al. 1990, S. 94.

²⁹ Vgl. Dyson/Thanassoulis 1988, S. 563f., Estelita Lins/Moreira da Silva/Lovell 2007, S. 956, Khalili et al. 2010, S. 761, und Podinovski/Athanassopoulos 1998, S. 500.

³⁰ Vgl. Roll/Cook/Golany 1991, S. 3.

³¹ Vgl. Dyson/Thanassoulis 1988, S. 564, und Pedraja-Chaparro/Salinas-Jimenez/Smith 1997, S. 218f. Im Extremfall beruht der Effizienzwert einer DMU dadurch nur auf dem Verhältnis von einem Output zu einem Input.

³² Vgl. Pedraja-Chaparro/Salinas-Jimenez/Smith 1997, S. 215, und Roll/Cook/Golany 1991, S. 3.

³³ Vgl. Pedraja-Chaparro/Salinas-Jimenez/Smith 1997, S. 219, Roll/Cook/Golany 1991, S. 4, und Roll/Golany 1993, S. 99.

³⁴ Vgl. Tracy/Chen 2005, S. 390f.

³⁵ Vgl. Pedraja-Chaparro/Salinas-Jimenez/Smith 1997, S. 220.

2.4 Ausgangspunkt: Ein fiktives Beispiel

Zur Veranschaulichung der DEA wird unter Verwendung von zehn DMUs, die anhand der in Tabelle 1 dargestellten Input- und Outputquantitäten beschrieben werden, eine Effizienzmessung durchgeführt. Die fiktiven DMUs A, ..., J nutzen zwei verschiedene Inputs, um zwei verschiedene Outputs zu produzieren. Am Beispiel der DMU A bedeutet dies, dass 9 Einheiten des Inputs x_1 und 16 Einheiten des Inputs x_2 zur Produktion von 15 Einheiten des Outputs y_1 und 8 Einheiten des Outputs y_2 verwendet werden.

Tabelle 1: Input- und Outputquantitäten des fiktiven Beispiels

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Input x_1	9	10	12	20	9	22	10	17	25	15
Input x_2	16	14	19	15	22	17	15	11	15	13
Output y_1	15	8	13	5	15	8	14	16	10	9
Output y_2	8	14	5	20	8	15	7	3	10	13

Es wird angenommen, dass alle In- und Outputs Güter darstellen, aber kein eindeutiger Erfolgsmaßstab, z. B. ein vollständiges Preissystem anhand von Marktpreisen, zur objektiven Bewertung existiert. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass dem Produktionsprozess konstante Skalenerträge zugrunde liegen. Unter diesen Voraussetzungen kann das (inputorientierte) CCR-Modell zur Effizienzmessung genutzt werden.

Die Ergebnisse des unbeschränkten (inputorientierten) CCR-Modells in Multiplier-Form sind in Tabelle 2 zusammengefasst.³⁶

Tabelle 2: Ergebnisse der Multiplier-Form des inputorientierten CCR-Basismodells

DMU	Effizienzwert θ	g_1	g_2	μ_1	μ_2
A	1,0000	0,0351	0,0428	0,0667	0,0000
B	1,0000	0,0385	0,0440	0,0000	0,0714
C	0,7026	0,0284	0,0347	0,0540	0,0000
D	1,0000	0,0000	0,0667	0,0000	0,0500
E	1,0000	0,1111	0,0000	0,0667	0,0000
F	0,8031	0,0000	0,0588	0,0332	0,0358
G	0,9520	0,0160	0,0560	0,0480	0,0400
H	1,0000	0,0329	0,0401	0,0625	0,0000
I	0,7845	0,0000	0,0667	0,0383	0,0401
J	1,0000	0,0000	0,0769	0,0435	0,0468

Die DMUs A, B, D, E, H und J gelten als effizient. Die DEA liefert allerdings keine Aussage darüber, welche dieser DMUs die „Beste“ ist. Die restlichen vier DMUs können dagegen anhand

³⁶ Die in diesem Arbeitsbericht dargestellten Modellergebnisse wurden mit der Software Mathematica berechnet. Die erstellten Programmcodes werden auf Anfrage per E-Mail (pil-wm@tu-ilmenau.de) durch das Fachgebiet Nachhaltige Produktionswirtschaft und Logistik bereitgestellt.

des Ausmaßes ihrer Ineffizienz geordnet werden, sodass DMU C die schlechteste Produktivität aufweist.³⁷

Die Ergebnisse des (inputorientierten) CCR-Modells in Envelopment-Form (Formeln (8)–(11)) sind in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3: Ergebnisse der Envelopment-Form des inputorientierten CCR-Basismodells

DMU	Effizienzwert ϕ	Benchmark	Zusammensetzung der Referenzeinheit		
A	1,0000	A	$\lambda_A = 1,0000$		
B	1,0000	B	$\lambda_B = 1,0000$		
C	0,7026	A, H	$\lambda_A = 0,7757$	$\lambda_H = 0,0853$	
D	1,0000	D	$\lambda_D = 1,0000$		
E	1,0000	E	$\lambda_E = 1,0000$		
F	0,8031	D, J	$\lambda_D = 0,2696$	$\lambda_J = 0,7391$	
G	0,9520	A, B, H	$\lambda_A = 0,7778$	$\lambda_B = 0,0272$	$\lambda_H = 0,1322$
H	1,0000	H	$\lambda_H = 1,0000$		
I	0,7845	H, J	$\lambda_H = 0,2210$	$\lambda_J = 0,7182$	
J	1,0000	J	$\lambda_J = 1,0000$		

Die Effizienzwerte in beiden Modellformen sind identisch. Die Envelopment-Form liefert jedoch zusätzliche Informationen darüber, wie sich die Referenzeinheit (Benchmark) der DMUs, die sich auf dem effizienten Rand der Technik befindet, zusammensetzt. Effiziente DMUs befinden sich auf dem Rand der Technik und bilden selbst Referenzeinheiten (siehe z. B. DMU A in Tabelle 3).

Exemplarisch seien die Ergebnisse für die ineffiziente DMU C interpretiert: Beide Tabellen weisen für sie einen Effizienzwert von 70,26 % aus. Unter Beibehaltung ihres Outputniveaus ($y_{1C} = 13$, $y_{2C} = 5$) dürfte sie also nur 70,26 % des aktuellen Inputniveaus (d. h. $x_{1C,opt} \approx 8,4$, $x_{2C,opt} \approx 13,4$) einsetzen, um im gewählten Modell als effizient zu gelten. Wie Tabelle 2 zeigt, wird der zweite Output bei der Effizienzbestimmung allerdings vernachlässigt ($\mu_{2C} = 0$), so dass auch niedrigere Quantitäten dieses Outputs keine Verringerung des Effizienzwerts bewirken würden.

Wie Tabelle 3 zeigt, setzt sich die (virtuelle) Referenzeinheit für DMU C aus den beiden effizienten DMUs A und H zusammen. Die Input- und Outputquantitäten der Referenzeinheit bestehen jeweils aus der Summe des 0,7757-fachen der Input-/Outputquantitäten der DMU A und des 0,0853-fachen der DMU H (z. B. für Input 1: $x_{1REF,C} = 0,7757x_{1A} + 0,0853x_{1H} \approx 8,4$).

Nicht nur DMU C ist von Null-Gewichten betroffen: Die umfangreiche Flexibilität der Gewichtungsfaktoren des CCR-Basismodells führt dazu, dass neun von zehn DMUs mindestens einen Input oder Output über ein Null-Gewicht von der Effizienzmessung ausschließen (vgl. nochmals Tabelle

³⁷ Ein ausschließlich auf den Effizienzwerten basierendes Ranking vernachlässigt evtl. vorhandene nicht-radiale Verbesserungspotentiale. Siehe dazu ausführlicher Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 45ff.

2). Das erscheint paradox, da – wie in Abschnitt 2.3 bereits thematisiert – eine fehlende Relevanz eines Inputs oder Outputs für die Beurteilung des Leistungserstellungsprozesses dazu geführt haben müsste, dass er bei der Festlegung des Datensets ausgeschlossen wird. Abgesehen von Null-Gewichten muss auch die hohe Varianz der Gewichtungsfaktoren zwischen den DMUs kritisch gesehen werden. So gewichtet beispielsweise DMU E den Input x_1 fast siebenmal so hoch wie DMU G.

3. Gestaltungsmöglichkeiten von Gewichtsrestriktionen

3.1 Absolute Restriktionen der Gewichtungsfaktoren

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden verschiedene Gestaltungsmöglichkeiten von Gewichtsrestriktionen am inputorientierten CCR-Basismodell erläutert. Als einfachste und sehr häufig vorzufindende Erweiterung gilt die Festlegung strikt positiver Gewichtungsfaktoren.³⁸ Dies geschieht häufig wie in Formel (12) dargestellt durch zusätzliche Restriktionen, wonach die Gewichtungsfaktoren mindestens so groß wie eine positive, infinitesimal kleine Zahl ε gewählt werden:

$$\mu_r, \vartheta_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \quad (12)$$

Die Festlegung absoluter Grenzen stellt eine Erweiterung der Forderung nach strikt positiven Gewichtungsfaktoren dar. Eine Möglichkeit zu ihrer Integration besteht darin, das CCR-Basismodell in Formel (4)–(7) um die Nebenbedingungen (13)–(15) zu erweitern.³⁹

$$\underline{\mu}_r \leq \mu_r \leq \overline{\mu}_r, \quad r = 1, \dots, s \quad (13)$$

$$\underline{\vartheta}_i \leq \vartheta_i \leq \overline{\vartheta}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (14)$$

$$\underline{\mu}_r, \overline{\mu}_r, \underline{\vartheta}_i, \overline{\vartheta}_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \quad (15)$$

$\underline{\mu}_r$ ($\underline{\vartheta}_i$) stellt das Mindestgewicht von Output r (Input i) und $\overline{\mu}_r$ ($\overline{\vartheta}_i$) das Höchstgewicht von Output r (Input i) dar. Durch diese vier Restriktionstypen lässt sich das Ignorieren und Überbetonen von Kriterien verhindern.⁴⁰ Während die gewählten Gewichtungsfaktoren unter den DMUs variieren können, sind die Grenzen für alle DMUs gleich. Sie können beispielsweise als Mindest- bzw. Höchstpreise der Kriterien interpretiert werden. Ein Nachteil dieser Gewichtsrestriktionen besteht allerdings darin, dass sie von den Maßeinheiten der Kriterien abhängen.⁴¹

³⁸ Die Forderung von strikt positiven statt nichtnegativen Gewichtungsfaktoren zur Effizienzmessung mittels DEA wurde erstmals in Charnes/Cooper/Rhodes 1979, S. 339, vorgestellt.

³⁹ Absolute Gewichtsrestriktionen wurden erstmalig in Dyson/Thanassoulis 1988 für einen Anwendungsfall mit einem Input und mehreren Outputs verwendet. Darauf aufbauend entwickelten Roll/Cook/Golany 1991 eine allgemeine Vorgehensweise zur Integration absoluter Gewichtsrestriktionen.

⁴⁰ Vgl. Allen et al. 1997, S. 19. Durch Angabe mehrerer absoluter Gewichtsrestriktionen liegt zugleich eine implizite relative Gewichtung vor.

⁴¹ Vgl. Cook/Seiford 2009, S. 8, Joro/Viitala 2004, S. 815, und Sarrico/Dyson 2004, S. 18.

3.2 Relative Restriktionen der Gewichtungsfaktoren

Mit der Integration relativer Gewichtsrestriktionen werden die Verhältnisse der Gewichtungsfaktoren zueinander eingeschränkt. Dadurch können zusätzliche Informationen in die Effizienzmessung integriert und unrealistische Verhältnisse sowie stark variierende Gewichtungsfaktoren vermieden werden. Die verschiedenen Arten relativer Gewichtsrestriktionen zur Erweiterung des (inputorientierten) CCR-Basismodells werden im Folgenden kurz dargestellt.

Ordinale Gewichtsrestriktionen stellen die einfachste Form relativer Gewichtsrestriktionen dar.⁴² Eine Möglichkeit zur Formulierung ordinaler Gewichtsrestriktionen ist in den Formeln (16) und (17) dargestellt:⁴³

$$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_s \quad (16)$$

$$0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \vartheta_m \quad (17)$$

Assurance Regions legen Ober- und Untergrenzen für die Verhältnisse der Gewichtungsfaktoren fest. Dabei kann zwischen Assurance Regions vom Typ I und Typ II unterschieden werden. Bei Assurance Regions vom Typ I werden ausschließlich Restriktionen zwischen Inputs oder Outputs integriert. Üblicherweise werden dabei die Verhältnisse auf einen In- bzw. Output normiert.⁴⁴ Bei Normierung auf den ersten In- bzw. Output können die Gewichtsrestriktionen wie folgt dargestellt werden:

$$\underline{\alpha}_r \mu_1 \leq \mu_r \leq \overline{\alpha}_r \mu_1, \quad r = 2, \dots, s \quad (18)$$

$$\underline{\beta}_i \vartheta_1 \leq \vartheta_r \leq \overline{\beta}_i \vartheta_1, \quad r = 2, \dots, s \quad (19)$$

$$\underline{\alpha}_r, \overline{\alpha}_r, \underline{\beta}_i, \overline{\beta}_i \geq 0, \quad r = 2, \dots, s, \quad i = 2, \dots, m \quad (20)$$

Dabei stellt $\underline{\alpha}_r$ ($\underline{\beta}_i$) das minimal und $\overline{\alpha}_r$ ($\overline{\beta}_i$) das maximal zulässige Verhältnis der Gewichtung von Output r (Input i) zum Output 1 (Input 1) dar. Ein Vorteil der Assurance Regions vom Typ I ist, dass sie als Grenzraten der Substitution interpretierbar sind.⁴⁵

Assurance Regions vom Typ II legen Restriktionen zwischen den Gewichtungsfaktoren von In- und Outputs fest. Diese können wie in den Formeln (21) und (22) formuliert werden:

$$\underline{\gamma}_{ri} \leq \frac{\mu_r}{\vartheta_i} \leq \overline{\gamma}_{ri}, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \quad (21)$$

⁴² Vgl. Joro/Viitala 2004, S. 815.

⁴³ Dabei kann zwischen schwachen (wie in den Formeln (16) und (17)) und strengen ordinalen Beziehungen unterschieden werden, vgl. Ali/Cook/Seiford 1991. Bei Letzteren wird der Operator \leq durch $<$ ersetzt.

⁴⁴ Vgl. Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 166, Pedraja-Chaparro/Salinas-Jimenez/Smith 1997, S. 222, und Roll/Golany 1993, S. 99 und S. 108.

⁴⁵ Vgl. Allen et al. 1997, S. 20, Joro/Viitala 2004, S. 815, und Sarrico/Dyson 2004, S. 18.

$$\underline{\gamma}_{ri}, \overline{\gamma}_{ri} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \quad (22)$$

Dabei stellt $\underline{\gamma}_{ri}$ das minimal und $\overline{\gamma}_{ri}$ das maximal zulässige Verhältnis der Gewichtung von Output r zum Input i dar. Ein Vorteil der Assurance Regions vom Typ II besteht darin, dass sie die relativen Werte zwischen In- und Outputs abbilden können.⁴⁶ Allerdings sind Assurance Regions vom Typ I und Typ II ebenfalls von den Maßeinheiten der Kriterien abhängig.⁴⁷

3.3 Restriktionen virtueller Inputs und Outputs

Ein Vorteil der nachfolgend erläuterten Restriktionen virtueller In- und Outputs besteht darin, dass sie nicht von den Maßeinheiten der Kriterien abhängen.⁴⁸ Die von Wong/Beasley entwickelten Restriktionen sind zudem für den Entscheider oftmals intuitiver bestimmbar,⁴⁹ da sie nicht die Gewichtungsfaktoren an sich, sondern mit den virtuellen In- und Outputs den Anteil beschränken, den ein In- bzw. Output am aggregierten Aufwand bzw. Ertrag haben kann.⁵⁰ Eine Möglichkeit zur Integration von Restriktionen der virtuellen In- und Outputs der betrachteten DMU o besteht darin, das CCR-Basismodell in den Formeln (4)–(7) um die Nebenbedingungen (23)–(25) zu erweitern:

$$\underline{\delta}_r \leq \frac{\mu_r y_{ro}}{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}} \leq \overline{\delta}_r, \quad r = 1, \dots, s \quad (23)$$

$$\underline{\varphi}_i \leq \frac{g_i x_{io}}{\sum_{i=1}^m g_i x_{io}} \leq \overline{\varphi}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (24)$$

$$\underline{\delta}_r, \overline{\delta}_r, \underline{\varphi}_i, \overline{\varphi}_i \in [0, 1], \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \quad (25)$$

Dabei ist $\underline{\delta}_r$ ($\underline{\varphi}_i$) der minimal und $\overline{\delta}_r$ ($\overline{\varphi}_i$) der maximal zulässige Anteil des Outputs r (Inputs i) am aggregierten Output (Input) der DMU o . Der Anteil des Outputs r (Inputs i) am aggregierten Output (Input) stellt somit die relative Bedeutung von Output r (Input i) aus Sicht der betrachteten DMU o dar.⁵¹

Eine weitere Möglichkeit der Integration besteht darin – im Gegensatz zu den Formeln (23) und (24) – die zulässigen Anteile der Kriterien **auf alle DMUs gleichzeitig** zu beziehen. Dies kann wie in den Formeln (26)–(28) formuliert werden:

⁴⁶ Vgl. Joro/Viitala 2004, S. 815.

⁴⁷ Vgl. Allen et al. 1997, S. 19, und Sarrico/Dyson 2004, S. 18.

⁴⁸ Vgl. Estellita Lins/Moreira da Silva/Lovell 2007, S. 957, und Sarrico/Dyson 2004, S. 18.

⁴⁹ Vgl. Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 174; Estellita Lins/Moreira da Silva/Lovell 2007, S. 957, und Sarrico/Dyson 2004, S. 18.

⁵⁰ Vgl. Wong/Beasley 1990.

⁵¹ Vgl. Sarrico/Dyson 2004, S. 20, und Wong/Beasley 1990, S. 831.

$$\underline{\delta}_r \leq \frac{\mu_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj}} \leq \overline{\delta}_r, \quad r = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n \quad (26)$$

$$\underline{\varphi}_i \leq \frac{g_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^m g_i x_{ij}} \leq \overline{\varphi}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (27)$$

$$\underline{\delta}_r, \overline{\delta}_r, \underline{\varphi}_i, \overline{\varphi}_i \in [0, 1], \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \quad (28)$$

Der Nachteil dieser Variante äußert sich in der verhältnismäßig hohen Anzahl zusätzlicher Nebenbedingungen, die in jedem linearen Programm integriert werden müssen.⁵² Als Mittelweg zwischen den beiden Varianten schlagen Wong und Beasley deshalb eine weitere Variante vor, gemäß derer die betrachtete DMU o ins Verhältnis zu einer „durchschnittlichen“ DMU gesetzt werden.⁵³ Dabei werden zusätzlich zu den Formeln (26)–(28) die Nebenbedingungen (29) und (30) zur Abbildung der „durchschnittlichen“ DMU im CCR-Basismodell integriert:⁵⁴

$$\underline{\delta}_r \leq \frac{\mu_{ro} \sum_{j=1}^n \frac{y_{rj}}{n}}{\sum_{r=1}^s \left(\mu_{ro} \sum_{j=1}^n \frac{y_{rj}}{n} \right)} \leq \overline{\delta}_r, \quad r = 1, \dots, s \quad (29)$$

$$\underline{\varphi}_i \leq \frac{g_{io} \sum_{j=1}^n \frac{x_{ij}}{n}}{\sum_{i=1}^m \left(g_{io} \sum_{j=1}^n \frac{x_{ij}}{n} \right)} \leq \overline{\varphi}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (30)$$

Die Input- und Outputquantitäten der „durchschnittlichen“ DMU entsprechen dabei dem arithmetischen Mittelwert aller DMUs.

3.4 Negative Folgen der Gewichtsrestriktionen

Die Integration von Gewichtsrestriktionen führt zwar einerseits zu einer „realitätsnäheren“ und somit für Entscheidungsträger akzeptableren Modellierung. Andererseits haben Gewichtsrestriktionen aber Auswirkungen auf die Komplexität der Berechnung sowie die Interpretation der Ergebnisse; sie können überdies zur Unlösbarkeit des Optimierungsproblems führen.⁵⁵

⁵² Vgl. Allen et al. 1997, S. 24, Sarrico/Dyson 2004, S. 22f., und Wong/Beasley 1990, S. 832.

⁵³ Vgl. Sarrico/Dyson 2004, S. 23ff., und Wong/Beasley 1990, S. 832.

⁵⁴ Vgl. Sarrico/Dyson 2004, S. 23f., und Wong/Beasley 1990, S. 832.

⁵⁵ Der Abschnitt erhebt nicht den Anspruch einer vollständigen Darstellung aller Konsequenzen der Integration von Gewichtsrestriktionen. Ein nicht ausgeführtes Problem stellt beispielsweise die Maximierung der absoluten anstatt der relativen Effizienz der DMUs im CCR-Modell dar; siehe dazu ausführlicher Podinovski 1999, S. 583f.

Das CCR-Modell ist immer dann **unlösbar**, wenn keine Kombination von Gewichtungsfaktoren existiert, die sowohl die Gewichtsrestriktionen als auch die Nebenbedingungen des ursprünglichen CCR-Basismodells erfüllt. Bei absoluten Gewichtsrestriktionen folgt dies zuweilen aus der Normierung des Effizienzwertes θ auf einen Wert ≤ 1 ,⁵⁶ die zu einer weiteren und dann inkompatiblen Restriktion der Gewichtungsfaktoren führen kann.⁵⁷ Analog können relative Gewichtsrestriktionen, die Restriktionen zwischen den Gewichtungsfaktoren von In- und Outputs festlegen, zur Unlösbarkeit des CCR-Modells führen.⁵⁸

Die Unlösbarkeit kann allerdings auch durch inkonsistente Gewichtsrestriktionen entstehen. Nachfolgendes Beispiel verdeutlicht etwa den Fall intransitiver Gewichtsrestriktionen, die unmittelbar zur Unlösbarkeit führen:

$$\vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta_3 \quad (31)$$

$$\vartheta_1 > \vartheta_3 \quad (32)$$

Die Forderung, dass Input 1 höher als Input 3 gewichtet werden soll (Formel (32)), widerspricht der mit Formel (31) definierten ordinalen Rangfolge der Inputgewichte.

Bei allen im Kapitel 3.3 dargestellten Varianten zur Integration von Restriktionen der virtuellen In- und Outputs darf zudem die Summe der minimal zulässigen Anteile aller Inputs (Outputs) am aggregierten Input (Output) den Wert 1 nicht überschreiten, damit ein lösbares CCR-Modell entstehen kann.⁵⁹ Dies kann folgendermaßen modelliert werden:

$$\sum_{i=1}^m \underline{\varphi}_i \leq 1 \quad (33)$$

$$\sum_{r=1}^s \underline{\delta}_r \leq 1 \quad (34)$$

Zudem darf die Summe der maximal zulässigen Anteile aller Inputs (Outputs) am aggregierten Input (Output) den Wert 1 nicht unterschreiten, falls für jeden Input (Output) ein maximal zulässiger Anteil festgelegt ist.⁶⁰ Dies kann folgendermaßen modelliert werden:

$$\sum_{i=1}^m \overline{\varphi}_i \geq 1 \quad (35)$$

⁵⁶ Vgl. Podinovski/Athanassopoulos 1998, S. 500f., Roll/Cook/Golany 1991, S. 6, und Tracy/Chen 2005, S. 390f.

⁵⁷ Diesem Problem kann beispielsweise durch die Verwendung eines sog. Maximin-Modell entgegnet werden. Siehe dazu ausführlicher Podinovski 1999, S. 585ff., sowie Podinovski/Athanassopoulos 1998, S. 501ff.

⁵⁸ Vgl. zur Lösbarkeit von Modellen mit verschiedenen Typen von Assurance Regions Allen et al. 1997, S. 19, Khalili et al. 2010, S. 761, und Pedraja-Chaparro/Salinas-Jimenez/Smith 1997, S. 221f.

⁵⁹ Vgl. Cooper/Seiford/Tone 2006, S. 173.

⁶⁰ Falls für einen Input (Output) kein maximal zulässiger Anteil am aggregierten Input (Output) festgelegt ist, entspricht der maximal zulässige Anteil dieses Inputs (Outputs) dem Wert 1, wodurch die Summe aller maximal zulässigen Anteile nicht kleiner als 1 sein kann.

$$\sum_{r=1}^s \bar{\delta}_r \geq 1 \quad (36)$$

Die Formeln (33)–(36) stellen somit notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit eines CCR-Modells unter Verwendung von Restriktionen der virtuellen In- und Outputs dar.

Die Wahrscheinlichkeit, ein unlösbares CCR-Modell zu erhalten, wird durch stark schwankende Input- und Outputquantitäten der DMUs⁶¹ sowie der simultanen Festlegung von zulässigen Mindest- und Höchstanteilen der Inputs (Outputs) am aggregierten Input (Output) bei Anwendung der virtuellen Restriktionen auf alle DMUs bzw. auf eine zusätzliche „durchschnittliche“ DMU erhöht.⁶²

Die zusätzlichen Nebenbedingungen, die durch die Gewichtsrestriktionen integriert werden, steigern zudem die **Komplexität der Effizienzmessung** und damit auch den Berechnungsaufwand des CCR-Modells.⁶³ Dies gilt vor allem bei der Verwendung von Restriktionen der virtuellen In- und Outputs, die gleichzeitig für alle DMUs gelten. Für eine Anwendung mit n DMUs bedeutet dies etwa, dass für jeden Input (Output), für den ein minimaler und maximaler Anteil am aggregierten Input (Output) festgelegt wird, $2 \cdot n$ zusätzliche Nebenbedingungen in jedem linearen Programm integriert werden.⁶⁴ Im Vergleich dazu werden bei absoluten Gewichtsrestriktionen für jeden Input (Output), für den ein Mindest- und Höchstgewicht festgelegt wird, lediglich zwei Nebenbedingungen in jedem linearen Programm integriert. Unter Verwendung von Restriktionen der virtuellen In- und Outputs für die betrachtete und eine künstliche „durchschnittliche“ DMU werden für jeden Input (Output), für den ein minimaler und maximaler Anteil am aggregierten Input (Output) festgelegt wird, vier Nebenbedingungen in jedem linearen Programm integriert.

Auch wenn für ein um Gewichtsrestriktionen erweitertes CCR-Modell in akzeptabler Zeit eine zulässige Lösung ermittelt werden kann, so besteht dennoch eine zusätzliche Gefahr in der falschen **Interpretation des Effizienzwertes** θ_o^* ineffizienter DMUs. Er entspricht nämlich nicht mehr zwangsläufig einer möglichen radialen Verbesserung gegenüber einer effizienten DMU bzw. Linearkombination mehrerer DMUs.⁶⁵

⁶¹ Vgl. Wong/Beasley 1990, S. 833.

⁶² Vgl. Sarrico/Dyson 2004, S. 25f.

⁶³ Dies kann vor allem in umfangreichen Anwendungen zu längeren Rechenzeiten führen; vgl. Wong/Beasley 1990, S. 832. Allerdings ist der steigende Berechnungsaufwand durch die Integration von Gewichtsrestriktionen infolge der stetigen Weiterentwicklung von Hard- und Software in vielen Anwendungsfällen eher unproblematisch; vgl. Sarrico/Dyson 2004, S. 23.

⁶⁴ Vgl. Allen et al. 1997, S. 24, Sarrico/Dyson 2004, S. 22f. und Wong/Beasley 1990, S. 832.

⁶⁵ Vgl. Allen et al. 1997, S. 27f., Podinovski 2016, S. 921, und Sarrico/Dyson 2004, S. 21ff.

4. Exemplarische Darstellung des Einflusses unterschiedlicher Gewichtsrestriktionen

4.1 Auswirkungen auf Effizienzwerte und Gewichtungsfaktoren

Nachfolgend werden verschiedene Typen von Gewichtsrestriktionen anhand des Datensatzes aus Tabelle 1 unabhängig voneinander analysiert – die dargestellten Varianten bauen insofern nicht aufeinander auf. Dabei werden einige Besonderheiten der Ergebnisse dargestellt, ohne die Ergebnisse allumfassend zu analysieren. Im uneingeschränkten CCR-Basismodell wurden sechs von zehn DMUs als effizient, also mit einem Effizienzwert von 1, ausgewiesen (siehe nochmals Tabelle 2).⁶⁶ Ohne Gewichtsrestriktionen wurden über alle DMUs hinweg insgesamt 11 In- bzw. Outputs mit Null-Gewichten versehen. Der Produktivitätsterm der DMU D setzt sich z. B. ausschließlich aus den gewichteten Mengen von Input 2 und Output 2 zusammen.⁶⁷

Variation 1:

Die fragwürdigen Null-Gewichte können am einfachsten durch **absolute Gewichtsrestriktionen** vermieden werden. Tabelle 4 zeigt demgemäß exemplarische Werte, wobei neben den Mindestgewichten auch Höchstgewichte Berücksichtigung finden sollen.⁶⁸

Tabelle 4: Exemplarische absolute Gewichtsrestriktionen

	Input x_1	Input x_2	Output y_1	Output y_2
Mindestgewicht ($\underline{\mathcal{G}}_i$ bzw. $\underline{\mu}_r$)	0,020	0,020	0,035	0,020
Höchstgewicht ($\overline{\mathcal{G}}_i$ bzw. $\overline{\mu}_r$)	0,060	0,060	0,070	0,035

Durch die Festlegung absoluter Mindest- und Höchstgewichte wird die Varianz der Gewichtungsfaktoren zwischen den DMUs begrenzt, sodass im Beispiel eine DMU die beiden Inputs jeweils höchstens dreimal so hoch gewichten kann wie eine andere DMU.⁶⁹

⁶⁶ Unter Betrachtung der nicht-radialen Ineffizienzen gelten nur fünf DMUs als Pareto-Koopmans-effizient, da DMU E trotz eines Effizienzwertes von 1 aufgrund einer Verschwendung des Inputs x_2 von DMU A dominiert wird.

⁶⁷ Die ermittelten Gewichtungsfaktoren in Tabelle 4 stellen jeweils lediglich eine Lösung der Optimierungsprobleme dar. Unter Umständen existieren auch andere Kombinationen aus Input- und Outputgewichten, die den DMUs denselben Effizienzwert zuweisen.

⁶⁸ Die in Tabelle 4 dargestellten Gewichtsrestriktionen sind ebenso wie der analysierte Datensatz fiktiv. Die Ausgestaltung von Gewichtsrestriktionen stellt bei der Anwendung auf einen realen Datensatz eine gewisse Herausforderung dar. Gewichtsrestriktionen können bspw. basierend auf Preisinformationen, Substitutions-/Transformationsraten, Gewichtungsfaktoren aus unbeschränkten DEA-Modellen, Expertenmeinungen und Plausibilitätsüberlegungen konstruiert werden. Der interessierte Leser sei diesbezüglich auf Thanassoulis/Portela/Allen 2004, S. 115ff., sowie Podinovski 2015 verwiesen.

⁶⁹ Der maximale Gewichtsunterschied eines Inputs ergibt sich aus dem Quotienten von Höchst- und Mindestgewicht, welcher in diesem Beispiel für beide Inputs drei beträgt. Diese Überlegung kann analog auf die Outputs angewendet werden.

Tabelle 5 stellt die Ergebnisse des (inputorientierten) CCR-Modells unter Verwendung der absoluten Gewichtsrestriktionen aus Tabelle 4 dar.

Tabelle 5: Ergebnisse des CCR-Modells unter absoluten Gewichtsrestriktionen

DMU	Effizienzwert θ	g_1	g_2	μ_1	μ_2
A	1,0000	0,0248	0,0485	0,0560	0,0200
B	0,9237	0,0204	0,0568	0,0542	0,0350
C	0,6720	0,0200	0,0400	0,0440	0,0200
D	0,8607	0,0200	0,0400	0,0350	0,0343
E	0,8745	0,0600	0,0209	0,0476	0,0200
F	0,6214	0,0200	0,0329	0,0350	0,0228
G	0,9496	0,0200	0,0533	0,0520	0,0317
H	1,0000	0,0200	0,0600	0,0588	0,0200
I	0,5854	0,0200	0,0333	0,0350	0,0235
J	0,9119	0,0200	0,0538	0,0508	0,0350

Die DMUs A und H erreichen nach wie vor einen Effizienzwert von 1, obwohl die Null-Gewichte ($\mu_{2,unbeschränkt}^A = \mu_{2,unbeschränkt}^H = 0$) nun verboten wurden; die Gewichtungsfaktoren des Outputs 2 der DMUs A und H entsprechen im beschränkten Modell vielmehr den vorgegebenen Mindestgewichten ($\mu_2^A = \mu_2^H = \underline{\mu}_2 = 0,02$). Die im unbeschränkten Modell noch als effizient ausgewiesenen DMUs B, D, E und J sind nun aber nicht mehr effizient. Wie oben erwähnt, schränken die absoluten Gewichtsrestriktionen auch das Verhältnis der Outputgewichte sowie die Flexibilität der Gewichtungsfaktoren der Inputs ein, was dann auch zu veränderten Effizienzwerten führen kann. So ist es z. B. anders als im Ausgangsmodell für DMU G nicht mehr möglich, eine Einheit des Inputs x_2 3,5-mal höher als eine Einheit des Inputs x_1 zu bewerten.⁷⁰ Folglich entsteht ein – allerdings in diesem Beispiel recht geringer – Effizienzverlust von 0,24% (= 0,9520 – 0,9496) bei DMU G gegenüber dem unbeschränkten CCR-Modell, weil DMU G dem Input x_1 nun einen höheren Wert zuweisen muss.

⁷⁰ Ohne Gewichtsrestriktion bewertet DMU G eine Einheit des Inputs x_1 mit 0,016 und eine Einheit des Inputs x_2 mit 0,056 (siehe Tabelle 2).

Variation 2:

Statt der in realen Anwendungsfällen meist nicht ohne weiteres konstruierbaren⁷¹ absoluten Gewichtsrestriktionen sind für Entscheidungsträger und Analysten oft relative Gewichtsrestriktionen einfacher vorzugeben. Ihre einfachste Form stellen **ordinale Gewichtsrestriktionen** dar. Angenommen sei im Folgenden, dass gemäß gängiger Expertenmeinung Output 1 mindestens so wichtig wie Output 2 ist, was mittels folgender Gewichtsrestriktion abgebildet werden kann:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \quad (37)$$

Im unbeschränkten Modell verstoßen die ermittelten Outputgewichte von fünf DMUs gegen die in Formel (37) formulierte Annahme (vgl. die DMUs B, D, F, I und J in Tabelle 2). Durch die Integration der ordinalen Gewichtsrestriktion in Formel (37) in das CCR-Modell wird diese „Fehl-gewichtung“ aufgehoben. Tabelle 6 zeigt die Ergebnisse des ordinal gewichtsbeschränkten CCR-Modells.

Tabelle 6: Ergebnisse des CCR-Modells unter einer ordinalen Gewichtsrestriktion

DMU	Effizienzwert θ	g_1	g_2	μ_1	μ_2
A	1,0000	0,0154	0,0538	0,0462	0,0385
B	1,0000	0,0125	0,0625	0,0455	0,0455
C	0,7026	0,0284	0,0347	0,0540	0,0000
D	0,9756	0,0035	0,0620	0,0390	0,0390
E	1,0000	0,1111	0,0000	0,0435	0,0435
F	0,7936	0,0031	0,0548	0,0345	0,0345
G	0,9520	0,0160	0,0560	0,0480	0,0400
H	1,0000	0,0047	0,0836	0,0526	0,0526
I	0,7719	0,0000	0,0667	0,0386	0,0386
J	1,0000	0,0041	0,0722	0,0455	0,0455

Die DMUs A, B, E, H und J sind noch immer effizient. Auffällig ist, dass sich zahlreiche Input- und Outputgewichte verändert haben, und es ist überraschend, dass davon auch Inputgewichte von DMUs betroffen sind, die die Anforderung aus Formel (37) bereits im unbeschränkten Modell erfüllt haben (vgl. die DMUs A, E und H in Tabelle 2).⁷² Der Effizienzwert der im unbeschränkten Modell effizienten DMU D verringert sich auf 0,9756, da DMU D im Gegensatz zu den DMUs B und J keine äquivalente, realisierbare Aggregation der Kriterien zur Verfügung steht, um das Ausschließen der optimalen Lösung aus Tabelle 2 auszugleichen.

⁷¹ Absolute Gewichtsrestriktionen für reale Datensätze können basierend auf Preisinformationen der Faktoren konstruiert werden. In den meisten Anwendungsfällen stellen jedoch fehlende Preise die entscheidende Begründung für den Einsatz der DEA dar. Folglich müssen andere, teils aufwändige Prozeduren durchlaufen werden. Siehe dazu ausführlicher Allen et al. 1997, S. 20ff.

⁷² Der Grund hierfür liegt darin, dass die in Tabelle 2 präsentierten Gewichtungsfaktoren effizienter DMUs lediglich eine mögliche Lösung des Optimierungsproblems darstellen. Durch die Integration von Formel (37) in den Mathematica-Code werden andere Werte für die In-/Outputgewichte identifiziert, die auch schon im unbeschränkten Modell die DMUs A, E und H als effizient ausgewiesen hätten.

Variation 3:

Die in Variation 2 erneut auftretenden Null-Gewichte können durch eine Kombination aus ordinalen und absoluten Gewichtsrestriktionen vermieden werden. Alternativ kann mittels **Assurance Regions vom Typ I**, die eine allgemeine Form ordinaler Gewichtsrestriktionen darstellen, diesem Problem begegnet werden. Angenommen folgende Restriktionen werden vom Entscheidungsträger formuliert:

$$\mu_2 \leq \mu_1 \leq 2\mu_2 \quad (38)$$

$$0,5g_1 \leq g_2 \leq 2g_1 \quad (39)$$

Durch Formel (38) wird gefordert, dass eine Einheit des Outputs y_1 mit dem ein- bis zweifachen Wert wie eine Einheit des Outputs y_2 bewertet wird. Formel (39) beschränkt das Verhältnis der Gewichtungsfaktoren der beiden Inputs untereinander auf einen Wert zwischen 0,5 und 2. Die Ergebnisse des CCR-Modells unter Berücksichtigung der in den Formel (38) und (39) formulierten Gewichtsrestriktionen sind in nachfolgender Tabelle 7 zusammengefasst.

Tabelle 7: Ergebnisse des CCR-Modells unter Assurance Regions vom Typ I

DMU	Effizienzwert θ	g_1	g_2	μ_1	μ_2
A	1,0000	0,0244	0,0488	0,0451	0,0404
B	1,0000	0,0263	0,0526	0,0455	0,0455
C	0,6689	0,0200	0,0400	0,0432	0,0216
D	0,8636	0,0200	0,0400	0,0345	0,0345
E	0,8500	0,0500	0,0250	0,0370	0,0370
F	0,7094	0,0179	0,0357	0,0308	0,0308
G	0,9441	0,0250	0,0500	0,0539	0,0270
H	0,9683	0,0256	0,0513	0,0553	0,0277
I	0,6376	0,0182	0,0364	0,0336	0,0301
J	0,9315	0,0244	0,0488	0,0451	0,0404

Die Assurance Regions vom Typ I beschränken sowohl die Flexibilität der Gewichtungsfaktoren der Inputs als auch die der Outputs. Infolgedessen werden einerseits Null-Gewichte vermieden. Andererseits gelten nur noch die beiden DMUs A und B als effizient. Im Gegensatz zum CCR-Modell unter absoluten Gewichtsrestriktionen (vgl. Tabelle 5) wird DMU H nun mit einen Effizienzwert von 0,9683 als ineffizient ausgewiesen. Dies folgt daraus, dass DMU H den Input x_2 nun lediglich zwei- und nicht dreimal so hoch bewerten kann wie Input x_1 . Des Weiteren kann bspw. DMU J auch in diesem CCR-Modell nur bedingt von ihrer relativen Stärke des Inputs x_2 profitieren und wird deshalb mit einen Effizienzwert von 0,9315 als ineffizient ausgewiesen.

Variation 4:

Ebenso können auch **virtuelle Gewichtsrestriktionen** dazu genutzt werden, Null-Gewichte zu vermeiden und vorhandene Präferenzinformationen, wie z. B. eine höhere Wichtigkeit bestimmter Faktoren für den Leistungserstellungsprozess, zu modellieren. Exemplarisch wird für das hier untersuchte Beispiel angenommen, dass im Rahmen von Experteninterviews Mindestanteile i. H. v. 1/3 für jeden betrachteten Faktor am virtuellen In- bzw. Output festgelegt wurden. Unter Verwendung der Formeln (26) und (27) ergeben sich folgende Gewichtsrestriktionen:

$$\frac{\delta_r}{3} = \frac{1}{3} \leq \frac{\mu_r y_{ro}}{\sum_{r=1}^2 \mu_r y_{ro}}, \quad r = 1, 2 \quad (40)$$

$$\frac{\varphi_i}{3} = \frac{1}{3} \leq \frac{g_i x_{io}}{\sum_{i=1}^2 g_i x_{io}}, \quad i = 1, 2 \quad (41)$$

Durch die Festlegung minimal zulässiger Anteile aller In- und Outputs am aggregierten In- bzw. Output werden Null-Gewichte verhindert. Da im Beispiel nur zwei In- und Outputs betrachtet werden, wird dadurch gleichzeitig festgelegt, dass der maximal zulässige Anteil eines Inputs bzw. Outputs am aggregierten (virtuellen) Input bzw. Output 2/3 betragen darf. Tabelle 8 zeigt die Ergebnisse im CCR-Modell unter Berücksichtigung der Formeln (40) und (41).

Tabelle 8: Ergebnisse des CCR-Modells unter virtuellen Gewichtsrestriktionen

DMU	Effizienzwert θ	g_1	g_2	μ_1	μ_2
A	1,0000	0,0370	0,0417	0,0444	0,0417
B	1,0000	0,0333	0,0476	0,0417	0,0476
C	0,5963	0,0556	0,0175	0,0306	0,0398
D	0,6650	0,0182	0,0424	0,0443	0,0222
E	0,9091	0,0741	0,0152	0,0404	0,0379
F	0,7331	0,0152	0,0392	0,0305	0,0326
G	0,9154	0,0385	0,0410	0,0436	0,0436
H	0,5354	0,0196	0,0606	0,0223	0,0595
I	0,7038	0,0133	0,0444	0,0383	0,0321
J	0,9458	0,0222	0,0513	0,0463	0,0407

Während die DMUs A und B weiterhin als effizient ausgewiesen werden, verschlechtert sich durch die Forderung eines Mindestanteils von jedem Input (Output) am aggregierten Input (Output) in Höhe eines Drittels insbesondere DMU H, welche nun mit 0,5354 den geringsten Effizienzwert aller DMUs aufweist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass DMU H mit drei Einheiten die geringste quantitative Ausprägung des Outputs y_2 besitzt und diesem infolge seines Mindestanteils am aggregierten Output ein hohes Gewicht zuordnen muss, damit dieser Mindestanteil erreicht wird.

4.2 Sensitivität der Effizienzergebnisse

Die Integration von Gewichtsrestriktionen führt i. d. R. dazu, dass Effizienzwerte absinken und die Diskriminierungskraft des Modells zunimmt. Ob die Effizienzwerte einzelner DMUs tatsächlich absinken, ist allerdings von der konkreten Ausgestaltung der Gewichtsrestriktionen abhängig. So waren z. B. die DMUs A und B in allen Modellen mit relativen Gewichtsrestriktionen effizient⁷³ (vgl. nochmals die Tabellen 6–8).⁷⁴ Um der Frage der Diskriminierungskraft etwas genauer nachzugehen, wird nachfolgend exemplarisch anhand einfacher Sensitivitätsanalysen die Entwicklung der Effizienzwerte ausgewählter DMUs näher betrachtet.

Variation 5a:

Am eingangs vorgestellten Datensatz wird zunächst untersucht, wie sich die Effizienzwerte ausgewählter DMUs in Abhängigkeit einer **Assurance Region vom Typ I** für die Outputs verhalten:

$$\underline{a} \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (42)$$

Der Grenzwert \underline{a} definiert ein minimal zulässiges Verhältnis der beiden Outputgewichte und kann als untere Grenze der relativen Wichtigkeit von Output 1 im Vergleich zu Output 2 interpretiert werden. Dabei gibt \underline{a} an, wie stark Output 1 mindestens gegenüber Output 2 gewichtet werden muss. Der Wert $\underline{a} = 2$ sagt bspw. aus, dass y_1 mindestens zweimal so hoch gewichtet werden soll wie y_2 .⁷⁵ Die Auswirkungen von \underline{a} auf die Effizienzwerte θ_o ausgewählter DMUs werden in nachfolgender Abbildung dargestellt.⁷⁶

⁷³ Lediglich bei den absoluten Gewichtsrestriktionen in Variation 1 war DMU B nicht effizient; vgl. Tabelle 5.

⁷⁴ Ursächlich können hierfür einerseits nicht-bindende Gewichtsrestriktionen sein, die keinen Einfluss auf die optimalen Gewichtungsfaktoren des (unbeschränkten) CCR-Modells haben. Andererseits stellen die optimalen Gewichtungsfaktoren des CCR-Modells (teils) lediglich eine Lösung des linearen Programms dar (vgl. Sueyoshi 1999, S. 1593). Unter Umständen existieren noch weitere Gewichtungskombinationen, die – auch unter Berücksichtigung der modellierten Gewichtsrestriktionen – zu den gleichen Effizienzwerten wie das unbeschränkte Modell führen.

⁷⁵ Die Grenzen für derartige Gewichtsrestriktionen und die damit verbundene Einschätzung der relativen Wichtigkeiten können bspw. aus Expertenmeinungen abgeleitet werden.

⁷⁶ Auf die Darstellung der Auswirkungen eines oberen Grenzwertes wird an dieser Stelle bewusst verzichtet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränkt sich die Sensitivitätsanalyse auf lediglich fünf DMUs. Dabei wurden die DMUs A, B, C, D und F ausgewählt, um die Auswirkungen des unteren Grenzwerts auf möglichst „unterschiedliche“ DMUs zu veranschaulichen.

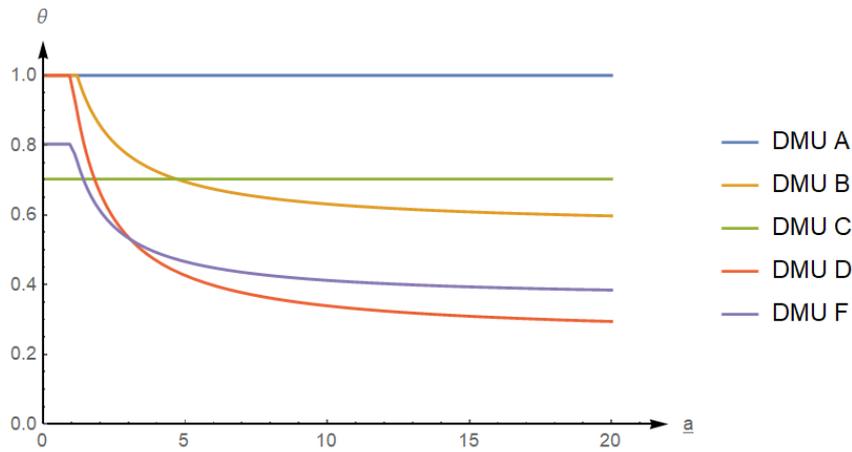


Abbildung 1: Effizienzwerte in Abhängigkeit eines unteren Grenzwerts \underline{a}

Wie bereits zuvor gesehen, gelten im unbeschränkten CCR-Modell (u. a.) die DMUs A, B und D als effizient, C und F als ineffizient ($\theta_C \approx 70\%$, $\theta_F \approx 80\%$). Mit zunehmendem Mindestgewichtsverhältnis \underline{a} sinken die Effizienzwerte der DMUs B, D sowie F und streben jeweils gegen einen Grenzwert ($\lim_{\underline{a} \rightarrow \infty} : \theta_B \approx 56,17\%$, $\theta_D \approx 35,59\%$, $\theta_F \approx 24,82\%$). Die Effizienzwerte der DMUs A und C verweilen hingegen auch mit zunehmendem \underline{a} auf einem konstanten Niveau.

Das Verhalten der Effizienzwerte kann mit den jeweiligen Input- und Outputquantitäten der DMUs erklärt werden, denn die DMUs A und C generieren jeweils mehr Output 1 ($y_{1,A} = 15$, $y_{1,C} = 13$) als Output 2 ($y_{2,A} = 8$, $y_{2,C} = 5$). Da mit zunehmendem \underline{a} die unterstellte relative Wichtigkeit von Output 1 gegenüber Output 2 steigt, muss Output 1 zunehmend höher gewichtet werden. Aufgrund der „relativen Stärke“ der DMUs A und C bzgl. des Outputs 1 ergibt sich daraus jedoch für die beiden DMUs kein Problem, denn das CCR-Modell ist weiterhin in der Lage, ihre „Stärken“ zu betonen. Das Gegenteil ist für die DMUs B, D und F zu beobachten, die eine „relative Schwäche“ von Output 1 gegenüber Output 2 aufweisen ($y_{1,B} = 8$, $y_{2,B} = 14$, $y_{1,D} = 5$, $y_{2,D} = 20$, $y_{1,F} = 8$, $y_{2,F} = 15$). Mit steigendem \underline{a} muss also die relativ schwache Leistung der DMUs B, D und F bzgl. dieses Outputs zunehmend stärker betont werden, was unweigerlich irgendwann zu sinkenden Effizienzwerten führt.

Variation 5b:

Diametral entgegengesetzt wird jetzt die relative Wichtigkeit des Outputs 2 gegenüber Output 1 mit folgender ARI-Restriktion betont:

$$\underline{b} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (43)$$

Die Auswirkungen des unteren Grenzwerts \underline{b} auf die Effizienzwerte der DMUs A, B, C, D und F werden in nachfolgender Abbildung veranschaulicht.

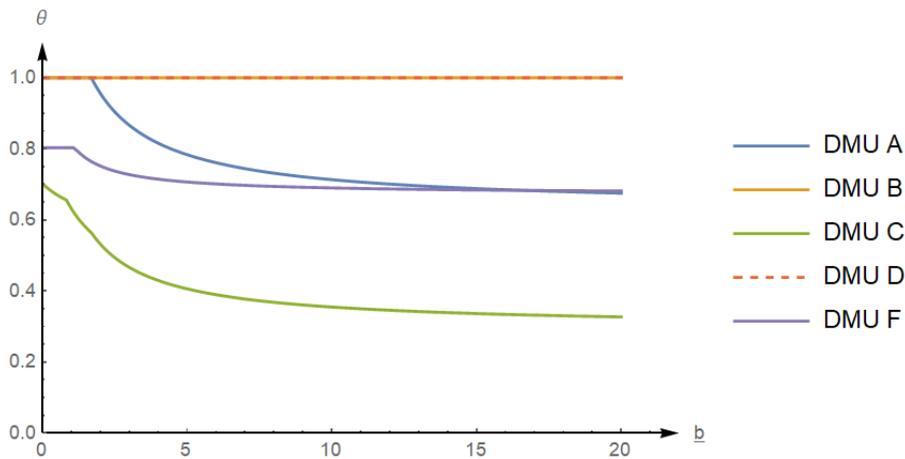


Abbildung 2: Effizienzwerte in Abhängigkeit eines unteren Grenzwerts \underline{b}

Wie zu erwarten, erweisen sich die Effizienzwerte der DMUs B und D aufgrund der relativen Stärke bzgl. Output 2 als robust gegenüber einer Veränderung von \underline{b} . Ebenfalls erwartungsgemäß verhalten sich die Effizienzwerte der DMUs A und C, die jetzt mit zunehmenden Gewichten der relativ geringen Outputquantitäten $y_{2,A}$ bzw. $y_{2,C}$ zunehmend sinken und gegen einen Grenzwert streben ($\lim_{\underline{b} \rightarrow \infty} \theta_A \approx 63,49\%$, $\theta_C \approx 29,76\%$). Interessanterweise nimmt auch der Effizienzwert von DMU F ab. Verglichen mit den DMUs A und C fällt das Absinken von θ_F jedoch geringer aus und strebt ebenfalls gegen einen Grenzwert ($\lim_{\underline{b} \rightarrow \infty} \theta_F \approx 67,24\%$). Auf Basis des Datensatzes kann zunächst nur vermutet werden, dass θ_F aufgrund der relativ hohen Inputmengen $x_{1,F}$ und $x_{2,F}$ und dem komplexen Zusammenspiel der Input- und Outputquantitäten sowie -gewichte im CCR-Modell absinkt. Eine abschließende Klärung der Ursache könnte durch genaue Analyse der Input- und Outputgewichte in Abhängigkeit von \underline{b} erfolgen. Dies soll allerdings nicht Gegenstand des vorliegenden Arbeitsberichts sein.

Variation 5c:

Neben einer outputseitigen Beschränkung können ARI-Restriktionen auch zur Abbildung relativer Wichtigkeiten innerhalb der Inputs genutzt werden. Eine Möglichkeit stellt nachfolgende Formel dar:

$$\underline{c} \leq \frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_2} \quad (44)$$

Durch \underline{c} wird ein Mindestgewichtsverhältnis von Input 1 zu Input 2 definiert, das die mindestens einzuhaltende relative Wichtigkeit von Input 1 gegenüber Input 2 repräsentiert.

Wird durch Vorgabe von $\underline{c} > 1$ gefordert, dass x_1 höher als x_2 gewichtet werden soll, werden DMUs mit verhältnismäßig hohen Mengen x_1 „abgestraft“; ihre Effizienzwerte fallen geringer als im unbeschränkten CCR-Modell aus (siehe Abbildung 3).

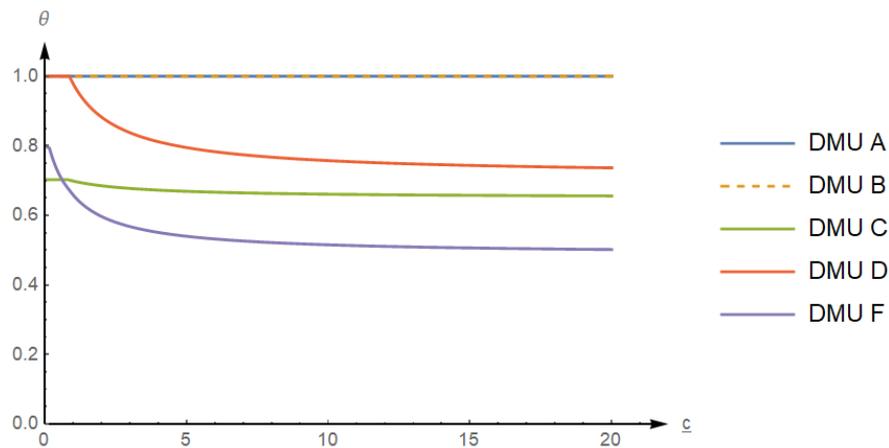


Abbildung 3: Effizienzwerte in Abhängigkeit eines unteren Grenzwerts $\underline{\epsilon}$

Mit zunehmendem $\underline{\epsilon}$ sinken die Effizienzwerte der DMUs D und F, die relativ hohe Mengen an Input 1 aufweisen ($x_{1D} = 20$, $x_{1F} = 22$). Das Absinken von θ_C ist hingegen nicht unmittelbar durch das Verhältnis der Inputquantitäten zu erklären, da DMU C weniger von Input 1 als von Input 2 verbraucht; hier sind wiederum weitergehende Analysen vonnöten.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieses Arbeitsberichts war es, sowohl die Integration verschiedener Gewichtsrestriktionen in das DEA-Basismodell nach Charnes, Cooper und Rhodes darzustellen, als auch deren Auswirkungen zu untersuchen. Dazu wurden zunächst der Effizienzbegriff und das CCR-Basismodell erläutert. Zudem wurde an einem fiktiven Beispiel mit zehn DMUs und jeweils zwei In- und Outputs gezeigt, dass fehlende Gewichtsrestriktionen unter anderem zum Ausblenden von Kriterien sowie oftmals zu Gewichtungsfaktoren führen, die vorhandenem Wissen widersprechen. Dadurch ist es dann auch möglich, dass ineffiziente DMUs (fälschlicherweise) als effizient eingestuft werden. Um diese Probleme zu vermeiden, wurden Gestaltungsmöglichkeiten von Gewichtsrestriktionen untersucht und am Beispiel erläutert. Hierzu erfolgte eine Unterteilung in absolute Gewichtsrestriktionen, relative Gewichtsrestriktionen sowie Restriktionen der virtuellen In- und Outputs. Dabei werden durch absolute Gewichtsrestriktionen Ober- und Untergrenzen für die Gewichtungsfaktoren festgelegt, während relative Gewichtsrestriktionen das Verhältnis der Gewichtungsfaktoren zueinander einschränken. Mittels Restriktionen der virtuellen In- und Outputs können Mindest- und Höchstanteile der In- und Outputs am aggregierten In- bzw. Output festgelegt werden.

Die Untersuchung der negativen Folgen, welche durch die Integration von Gewichtsrestriktionen entstehen können, zeigte, dass mit Ausnahme von (konsistenten) relativen Gewichtsrestriktionen zwischen In- oder Outputs alle Gewichtsrestriktionen zur Unlösbarkeit des CCR-Modells führen

können. Des Weiteren wurde aufgezeigt, dass insbesondere Restriktionen der virtuellen In- und Outputs die Komplexität der Effizienzmessung und damit auch den Berechnungsaufwand erhöhen können.

Im weiteren Verlauf wurde anhand exemplarischer Variationen aufgezeigt, wie durch Gewichtsrestriktionen eine bessere Diskriminierung der im CCR-Basismodell als effizient ausgewiesenen DMUs ermöglicht wird. Dabei wurden sowohl die Effizienzwerte als auch die Gewichtungsfaktoren unter verschiedenen Gewichtsrestriktionen betrachtet und die Ursachen für eine Verschlechterung des Effizienzwertes analysiert. Anschließend wurde in einfachen Sensitivitätsanalysen der Einfluss von Gewichtsrestriktionen auf die Effizienzwerte ausgewählter DMUs in Abhängigkeit der unteren Grenzwerte verschiedener input- und outputseitiger Assurance Regions vom Typ I untersucht. Dabei zeigte sich erneut, dass Gewichtsrestriktionen tendenziell zum Absinken der Effizienzwerte führen und die Diskriminierungskraft des CCR-Modells zunimmt.

Da im Rahmen dieses Arbeitsberichts ausschließlich das CCR-Modell mit konstanten Skalenerträgen in Multiplier-Form untersucht wurde, besteht weiteres Forschungspotenzial hinsichtlich anderer Skalenertragsformen (z. B. variable, nicht-zunehmende, nicht-abnehmende Skalenerträge). Durch Analysen der Auswirkungen von Gewichtsrestriktionen auf die Ergebnisse der Envelopment-Form des CCR-Modells könnten weitere Erkenntnisse über das Zusammenspiel zwischen ineffizienten DMUs und deren Benchmarks gewonnen werden. Des Weiteren könnten die Folgen der Integration von Gewichtsrestriktionen auf die Interpretation der Effizienzwerte sowie die Erarbeitung von Zielvorgaben für ineffiziente DMUs im Detail betrachtet werden.

Im vorliegenden Arbeitsbericht wurden für einen *fiktiven* Anwendungsfall *fiktive* Gewichtsrestriktionen konstruiert und genutzt. In zukünftigen Forschungsvorhaben soll die „sinnvolle“ Ausgestaltung von Gewichtsrestriktionen für den *realen* Anwendungsfall der öffentlich-rechtlichen Abfallwirtschaft im Mittelpunkt stehen. Dabei sollen verstärkt die Auswirkungen von Gewichtsrestriktionen auf die Ergebnisinterpretation untersucht werden, um schlussendlich die Akzeptanz der DEA als Verfahren zur Effizienzmessung zu erhöhen. In diesem Zusammenhang stellt die Nutzung der DEA innerhalb des Benchmarkings einen weiteren interessanten Forschungsgegenstand dar. Dabei sollen neben der rein deskriptiven Bestandsaufnahme der Leistungsfähigkeit der DMUs in vergangenen Zeiträumen auch Steuerungsmöglichkeiten innerhalb des Controllings erörtert werden.

Literaturverzeichnis

- Ali, A. I./Cook, W. D./Seiford, L. M.: Strict vs. Weak Ordinal Relations for Multipliers in Data Envelopment Analysis, in: *Management Science*, Vol. 37 (6), 1991, S. 733–738.
- Allen, K.: *Messung ökologischer Effizienz mittels Data Envelopment Analysis*, Wiesbaden 2002.
- Allen, R./Athanasopoulos, A./Dyson, R. G./Thanassoulis, E.: Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions, in: *Annals of Operations Research*, Vol. 73, 1997, S. 13–34.
- Banker, R. D./Cooper, W. W./Seiford, L. M./Zhu, J.: Returns to Scale in DEA, in: Cooper, W. W./Seiford, L. M./Zhu, J. (Hrsg.): *Handbook on Data Envelopment Analysis*, Dordrecht/Heidelberg/London/New York 2011, S. 41–70.
- Charnes, A./Cooper, W. W.: Programming with linear fractional functionals, in: *Naval Research Logistics*, Vol. 9 (3-4), 1962, S. 181–186.
- Charnes, A./Cooper, W. W./Rhodes, E.: Measuring the efficiency of decision making units, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 2 (6), 1978, S. 429–444.
- Charnes, A./Cooper, W. W./Rhodes, E.: Measuring the efficiency of decision-making units, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 3 (4), 1979, S. 339.
- Cook, W. D./Seiford, L. M.: Data envelopment analysis (DEA) – Thirty years on, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 192 (1), 2009, S. 1–17.
- Cooper, W. W./Seiford, L. M./Tone, K.: *Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses – With DEA-Solver Software and References*, New York 2006.
- Dyckhoff, H.: *Produktionstheorie – Grundzüge industrieller Produktionswirtschaft*, 5. Aufl., Berlin/Heidelberg/New York 2006.
- Dyson, R. G./Thanassoulis, E.: Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis, in: *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 39 (6), 1988, S. 563–576.
- Estellita Lins, M. P./Moreira da Silva, A. C./Lovell, C. A. K.: Avoiding infeasibility in DEA models with weight restrictions, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 181 (2), 2007, S. 956–966.
- Farrell, M. J.: The Measurement of Productive Efficiency, in: *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 120 (3), 1957, S. 253–290.
- Hagenloch, T.: Effizienzberechnung mit der Data Envelopment Analysis (I), in: *WISU – Das Wirtschaftsstudium*, 37. Jg., Nr. 10, 2008, S. 1372–1382.
- Joro, T./Viitala, E.-J.: Weight-restricted DEA in action: from expert opinions to mathematical models, in: *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 55 (8), 2004, S. 814–821.

- Khalili, M./Camanho, A. S./Portela, M. C. A. S./Alirezaee, M. R.: The measurement of relative efficiency using data envelopment analysis with assurance regions that link inputs and outputs, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 203 (3), 2010, S. 761–770.
- Koopmans, T. C.: Analysis of production as an efficient combination of activities, in: Koopmans, T. C. (Hrsg.): *Activity analysis of production and allocation*, New York/London, 1951, S. 33–97.
- Pedraja-Chaparro, F./Salinas-Jimenez, J./Smith, P.: On the Role of Weight Restrictions in Data Envelopment Analysis, in: *Journal of Productivity Analysis*, Vol. 8 (2), 1997, S. 215–230.
- Podinovski, V. V.: Side effects of absolute weight bounds in DEA models, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 115 (3), 1999, S. 583–595.
- Podinovski, V. V.: Validating absolute weight bounds in Data Envelopment Analysis (DEA) models, in: *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 52 (2), 2001, S. 221–225.
- Podinovski, V. V.: DEA Models with Production Trade-offs and Weight Restrictions, in: Zhu, J. (Hrsg.): *Data Envelopment Analysis – A Handbook of Models and Methods*, Boston/New York/Dordrecht/London, 2015, S. 105–144.
- Podinovski, V. V.: Optimal weights in DEA models with weight restrictions, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 254 (3), 2016, S. 916–924.
- Podinovski, V. V./Athanasopoulos, A. D.: Assessing the relative efficiency of decision making units using DEA models with weight restrictions, in: *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 49 (5), 1998, S. 500–508.
- Richter, M./Borsch, E.: Effizienzmessung mittels Data Envelopment Analysis, in: *WiSt – Wirtschaftswissenschaftliches Studium*, 46. Jg., Nr. 5, 2017, S. 20–26.
- Roll, Y./Cook, W. D./Golany, B.: Controlling Factor Weights in Data Envelopment Analysis, in: *IIE Transactions*, Vol. 23 (1), 1991, S. 2–9.
- Roll, Y./Golany, B.: Alternate Methods of Treating Factor Weights in DEA, in: *Omega*, Vol. 21 (1), 1993, S. 99–109.
- Sarrico, C. S./Dyson, R. G.: Restricting virtual weights in data envelopment analysis, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 159 (1), 2004, S. 17–34.
- Sueyoshi, T.: DEA Duality on Returns to Scale (RTS) in Production and Cost Analyses: An Occurrence of Multiple Solutions and Differences Between Production-Based and Cost-Based RTS Estimates, in: *Management Science*, Vol. 45 (11), 1999, S. 1593–1608.
- Thanassoulis, E./Portela, M. C./Allen, R.: Incorporating Value Judgments in DEA, in: Cooper, W. W./Seiford, L. M./Zhu, J. (Hrsg.): *Handbook on Data Envelopment Analysis*, Norwell/Dordrecht, 2004, S. 99–138.

Thompson, R. G./Langemeier, L. N./Lee, C.-T./Lee, E./Thrall, R. M.: The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming, in: *Journal of Econometrics*, Vol. 46 (1–2), 1990, S. 93–108.

Tracy, D. L./Chen, B.: A generalized model for weight restrictions in data envelopment analysis, in: *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 56 (4), 2005, S. 390–396.

Wilken, R.: *Dynamisches Benchmarking – Ein Verfahren auf Basis der Data Envelopment Analysis*, Wiesbaden 2007.

Wittmann, W.: *Produktionstheorie*, Berlin/Heidelberg/New York, 1968.

Wojcik, V./Dyckhoff, H./Gutgesell, S.: The desirable input of undesirable factors in data envelopment analysis, in: *Annals of Operations Research*, Vol. 259 (1–2), 2017, S. 461–484.

Wong, Y.-H. B./Beasley, J. E.: Restricting Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis, in: *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 41 (9), 1990, S. 829–835.

Ilmenauer Schriften zur Betriebswirtschaftslehre

**Institut für Betriebswirtschaftslehre der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
und Medien der Technischen Universität Ilmenau**

www.tu-ilmenau.de/is-ww

Herausgeber

Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Norbert Bach

Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Anja Geigenmüller

Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Michael Grüning

Univ.-Prof. Dr. rer. pol. Rainer Souren

ISSN 2192-4643

ISBN 978-3-940882-53-0

URN urn:nbn:de:gbv:ilm1-2018200197