

**Analyse des Querkrafttragverhaltens
bewehrter Bauteile aus Porenbeton
mit den Methoden der mathematischen Optimierung**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

an der Fakultät Bauingenieurwesen
der
Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Tobias Riesel
geboren am 2. August 1977
in Schleiz

Gutachter: 1. Prof. Dr.-Ing. habil. Erich Raue
2. Prof. Dr.-Ing. Steffen Marx
3. Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Mark

Tag der Disputation: 19.09.2012

Kurzreferat

Im Rahmen der Arbeit wird das Querkrafttragverhalten bewehrter Bauteile aus Porenbeton untersucht. Die vorherrschende Beschreibung des inneren Kräftezustandes basiert auf der Modellvorstellung eines Fachwerks oder Sprengwerks mit Stahlzugstreben und Betondruckstreben. Ziel ist die Entwicklung eines alternativen Verfahrens zur Ermittlung des inneren Kräftezustandes.

Ausgehend vom *Prinzip des Minimums des elastischen Gesamtpotentials* wird eine Extremalaufgabe für das mechanische Problem formuliert. Die numerische Umsetzung basiert auf der Überführung der Extremalaufgabe in eine nichtlineare Optimierungsaufgabe. Diese lässt sich mit Standardsoftware lösen. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass das grundlegende Verfahren unabhängig vom verwendeten Materialmodell ist. Nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehungen oder die Berücksichtigung der Rissbildung erfordern keine Anpassung des Berechnungsalgorithmus.

Bewehrte Porenbetonbauteile besitzen im Hinblick auf das Trag- und Verformungsverhalten einige Besonderheiten. Berechnungsansätze für Stahlbetonelemente lassen sich nicht ohne entsprechende Modifikationen übertragen lassen. Die Bewehrung wird aus glatten Stäben hergestellt, so dass nach der Herstellung nur ein Haftverbund wirksam ist. Dieser kann über die Lebensdauer teilweise oder vollständig versagen. Die Kraftübertragung zwischen den Verbundelementen muss durch entsprechende Kopplungselemente (z.B. Querstäbe, Bügel, Endwinkel) sichergestellt werden.

Der Bewehrungskorb ist im Porenbeton gebettet. Aufgrund der relativ niedrigen Festigkeit bzw. Steifigkeit des Porenbetons und des teilweise unwirksamen Verbundes treten Relativverschiebungen zwischen beiden Verbundmaterialien auf. Hier sind die Ursachen dafür zu finden, dass die Beanspruchung der Querkraftbewehrung viel geringer ist als bei vergleichbaren Stahlbetonbalken. Der Querkraftbewehrungsgrad erlaubt keine Rückschlüsse auf den Querkraftwiderstand.

Das zentrale Anliegen der Arbeit ist die Implementierung nichtlinearer Materialansätze, der Rissbildung des Porenbetons sowie der porenbetonspezifischen Besonderheiten (verschieblicher Verbund, diskrete Verankerung der Bewehrung und Relativverschiebungen zwischen Porenbeton und Bewehrung) in das Berechnungsmodell.

Die Leistungsfähigkeit des entwickelten Berechnungsmodells wird anhand von Beispielen demonstriert. Die Kräfte in der Bewehrung sowie das Tragwerksverhalten werden realitätsnah bestimmt.

Abstract

In this thesis the behaviour of reinforced autoclaved aerated concrete (AAC) members is examined when they are subjected to shear forces. The main models used for analyzing shear forces are based on framework or truss frame models with concrete struts and steel tension ties. The primary objective is the development of an alternative model for evaluation of inner forces in AAC members.

The mechanical problem is based on the *Principle of Minimum Potential Energy* relating to the stable equilibrium of conservative systems. Numerical solution will be achieved by direct energy minimization using nonlinear optimization techniques provided by standard software tools. The main advantage of this approach is the independence of material law from the base algorithm. Therefore nonlinear effects like cracks in concrete or yielding of reinforcement bars can be implemented without changing the fundamental model.

Regarding to the load bearing and deflection behaviour reinforced autoclaved aerated concrete members have some specifics which will prevent the usage of calculation models for reinforced concrete. Steel rebar elements are not profiled and are covered by a corrosion protection. There is no sufficient bond between the reinforcement and the concrete. Forces have to be carried by discrete elements (e.g. crossbar, stirrup). The reinforcement cage is bedded in the concrete. When the beam or plate is loaded there will be small displacements between steel and concrete. These displacements have a strong influence on the forces in the rebar elements and have to be considered in a calculation model. This is the main reason why the ratio of shear reinforcement isn't a measure for the load bearing capacity in shear.

The alternative model developed in this thesis will implement the nonlinear material behaviour of steel and concrete, the cracking of concrete and the specific characteristic of AAC like non existing bond, discrete anchorage of reinforcement and displacements between reinforcement and concrete.

The effectiveness of the model is shown by means of some test results by Wehr (AAC-Beams) and Daschner (AAC-plates). The model gives realistic results for the internal forces and the displacements of the AAC members as well as the local displacements of the reinforcement within the concrete.

Vorwort

Diese Arbeit entstand in den Jahren 2005 bis 2012 neben meiner beruflichen Tätigkeit im Ingenieurbüro Dipl.-Ing. Alexander Röse als externer Doktorand an der Professur Massivbau der Bauhaus Universität Weimar.

Herzlich bedanken möchte ich mich bei meinem Betreuer Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Erich Raue für die Möglichkeit der externen Promotion sowie die Unterstützung über viele Jahre. Seine stete Bereitschaft zur Diskussion und die vielfältigen Anregungen waren mir eine sehr wertvolle Hilfe.

Für die Übernahme der Koreferate danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Steffen Marx und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Mark.

Mein Dank gilt außerdem Herrn Dr.-Ing. Hans-Georg Timmler und Herrn Jun.-Prof. Dr.-Ing. Matthias Pahn für die hilfreichen Hinweise zur Vervollständigung der Arbeit.

Ganz besonders möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Alexander Röse bedanken, der mir die zeitliche Flexibilität und Freiheit gewährte, um die Arbeit zu erstellen.

Meiner lieben Frau Alina sowie meinen Kindern Jolanda, Konstantin und Matilda danke ich besonders für ihr Verständnis, ihre Geduld und Hilfe.

Berlin, Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente	7
2.1	Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonelementen	8
2.1.1	Erste Überlegungen zum Querkrafttragverhalten und praktische Anwendung	8
2.1.2	Fach- und Stabwerksmodelle	9
2.1.3	Kamm- und Zahnmodelle	11
2.1.4	Modelle auf der Grundlage der Finite Elemente Methoden	12
2.1.5	Empirische Ansätze	13
2.1.6	Theorien auf der Grundlage der Festigkeit der Betondruckzone	14
2.1.7	Bruchmechanische Ansätze	15
2.2	Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Porenbetonelementen	16
2.3	Entwicklung der Normen für bewehrte Porenbetonbauteile	29
3	Mechanische und mathematische Grundlagen	33
3.1	Kontinuumsmechanische Zusammenhänge	34
3.1.1	Der allgemeine Spannungszustand	34
3.1.2	Der allgemeine Dehnungszustand	36
3.2	Materialverhalten	37
3.2.1	Einführung	37
3.2.2	Materialverhalten des Bewehrungsstahls	39
3.2.3	Materialverhalten von Porenbeton	40
3.2.4	Modellierung von Rissen	46
3.2.5	Zusammenwirken von Porenbeton und Bewehrungsstahl	49
3.3	Energiemethoden	53
3.3.1	Einführung	53
3.3.2	Formänderungsenergie	53
3.3.3	Prinzip der virtuellen Verrückung	54
3.3.4	Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials	55
3.4	Mathematische Optimierung	57
3.4.1	Einführung	57
3.4.2	Lösen von Problemen der Mathematischen Optimierung	59
3.5	Energiemethoden und mathematische Optimierung bei der Tragwerksanalyse	60
3.6	Anwendung der mathematischen Optimierung in der Tragwerksanalyse	66

4	Tragverhalten bewehrter Porenbetonbauteile	73
4.1	Verbund zwischen Porenbeton und Bewehrungsstahl	74
4.2	Thermische Vorspannung bewehrter Porenbetonbauteile	75
4.3	Tragverhalten der Verankerungsstäbe der Längsbewehrung	77
4.4	Tragverhalten der Verankerungsstäbe der Querkraftbewehrung	79
4.5	Eigene numerische Untersuchungen zum Verformungsverhalten der Verankerungsstäbe	80
4.5.1	Einführung	80
4.5.2	Der elastisch gebettete Balken	80
4.5.3	Numerische Simulation als gebetteter Balken	82
4.5.4	Vergleichende Berechnungen	86
5	Alternatives Berechnungsmodell für bewehrte Porenbetonelemente	89
5.1	Modell zur Bestimmung der Dehnungsverteilung	90
5.2	Annahmen zum Materialverhalten	91
5.2.1	Einführung	91
5.2.2	Materialverhalten von Beton und Porenbeton	93
5.2.3	Materialverhalten des Bewehrungsstahles	97
5.3	Berechnungsalgorithmus	98
5.3.1	Aufstellen der Zielfunktion für die Extremalaufgabe	99
5.3.2	Nebenbedingungen der Extremalaufgabe	100
5.3.3	Lösen der Extremalaufgabe	101
5.4	Diskretisierung von Tragwerk und Querschnitt	101
5.5	Nachgiebigkeit der Verankerungspunkte der Bewehrung	103
6	Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells	109
6.1	Querkraftbewehrte Porenbetonbalken	110
6.1.1	Berechnungsreihe B1 mit starren diskreten Verankerungsstellen der Bewehrung	113
6.1.2	Berechnungsreihe B2 mit diskreten Verankerungsstellen der Bewehrung und Nachgiebigkeit der Bügelverankerung	116
6.1.3	Berechnungsreihe B3 mit diskreten Verankerungsstellen der Bewehrung, Nachgiebigkeit der Bügelverankerung und der Verankerung der Längsbewehrung	119
6.2	Bewehrter Porenbetonbalken nach DIN 4223:2003	127
6.3	Nicht querkraftbewehrte Porenbetonplatten	132
6.4	Stahlbeton T-Balken	137
6.5	Zusammenfassung der Vergleichsrechnungen	142
6.5.1	Dehnungen	142
6.5.2	Verformungen der Verankerungsbereiche	143
6.5.3	Mittendurchbiegung	144
6.5.4	Abschätzung der Rissbreiten	144
7	Zusammenfassung und Ausblick	149
	Anhang	153

1 Einführung

Porenbeton ist ein vielseitiger Baustoff mit einer relativ hohen Festigkeit bezogen auf sein Gewicht. Aus Porenbeton lassen sich massive Konstruktionen erstellen, die gleichzeitig die Anforderungen an den Wärme- und Schallschutz sowie die Tragfähigkeit erfüllen. Besonders die geringe Wärmeleitfähigkeit macht den Porenbeton zu einem ökonomisch interessanten Baustoff im Wohnungs- und Wirtschaftsbau. Aufgrund seiner industriellen Herstellung lässt sich eine gleichbleibende Qualität mit geringen Schwankungen der Materialeigenschaften erreichen. Bauteile aus Porenbeton werden häufig in modularen Bausystemen eingesetzt, die aus einer Vielzahl bewehrter und unbewehrter Elemente bestehen oder mit Tragsystemen aus Stahl oder Stahlbeton kombiniert werden.

Die Entwicklung des Porenbetons lässt sich bis in die 80er Jahre des 19. Jahrhunderts zurückverfolgen [94]. Am Anfang versucht man künstliche Bausteine aus Kalk-Sand-Mörtel mit gleichbleibender Qualität herzustellen. Zernikow (1877) und später Michaelis (1880) suchen nach Möglichkeiten, die Erhärtung des Mörtels zu beschleunigen und setzen hochgespannten Wasserdampf für die Produktion ein. Auf den entsprechenden Patenten basieren die Herstellungstechniken für dampfgehärtete Baustoffe. Im Zuge der weiteren Entwicklung werden Blähstoffe zugeführt, die das sonst kompakte Gefüge mit Gasblasen durchsetzen. Aylsworth und Dyer entwickeln 1914 ein neues Verfahren. Das Aufblähen des Mörtels wird durch gasförmigen Wasserstoff erreicht, der bei der Reaktion von Kalk, Wasser und Metallpulver (Aluminium oder Zink) entsteht [162]. Als Erfinder des modernen Porenbetons gilt J.A. Eriksson [187]. Er kombiniert erstmals im Jahre 1927 das Verfahren von *Aylsworth/Dyer* mit der Dampfdruckhärtung. Die industrielle Produktion von Bausteinen startet 1929 unter dem Markennamen YTONG, der sich von der ersten Produktionsstätte ableitet (*Y*xhults *Å*ngehärdade Gasbetong). In der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wird die Produktionspalette durch großformatige Bauteile und bewehrte Porenbetonelemente erweitert.

Ausgangsstoffe für den Porenbeton sind quarzhaltige Sande oder Quarzmehl, Bindemittel, Treibmittel und Wasser. Als Bindemittel werden Branntkalk oder Zement und als Treibmittel feines Aluminiumpulver verwendet. Zusätzlich können je nach Rezeptur geringe Anteile an Anhydrit oder Gips sowie Recyclingmaterial eingesetzt werden. Im Herstellungsprozess werden die fein gemahlene Grundstoffe zu einer wässrigen Suspension vermischt und in Formen gegossen. Der Treibprozess findet bei der Umsetzung des Porosierungspulvers in der alkalischen Suspension statt. Es entsteht Wasserstoff, der die typischen Makroporen mit einem Durchmesser von ca. 0,5 bis 1,5mm bildet. Die hydrothermale Härtung des Porenbetons im Autoklaven läuft in Wasserdampf bei einem Druck von 10 bis 12 bar und Temperaturen von 180 bis 200°C ab [187].

Bauteile aus Porenbeton lassen sich in bewehrte und unbewehrte Elemente gliedern. Zu Beginn der technischen Entwicklung konzentriert man sich auf unbewehrte Mauersteine. Die Entwicklung verläuft über größere Plansteine bis hin zu Wandtafeln mit Abmessungen

1 Einführung

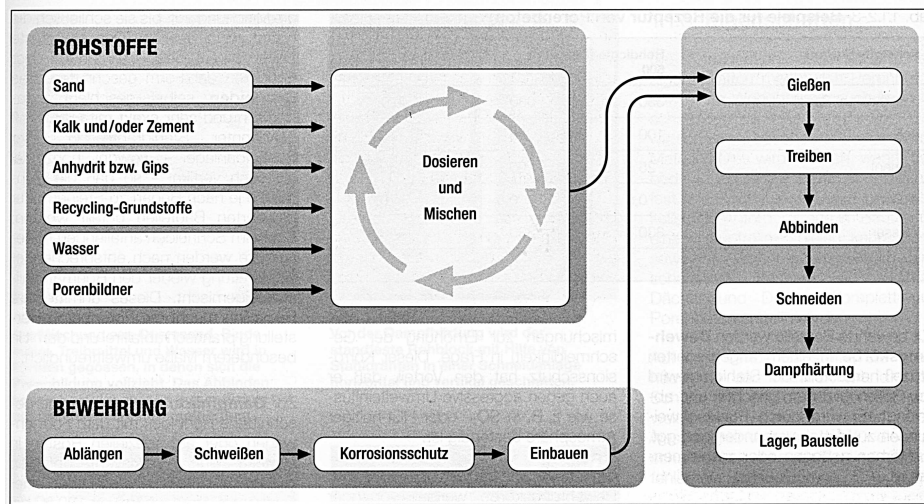


Abbildung 1.1: Produktionsablauf von Porenbeton [187]

von 1,5x3,5m. Sobald in den Bauteilen Zugspannungen auftreten, ist eine Bewehrung wie beim Stahlbeton erforderlich. Neben bewehrten Wandelementen werden vor allem bewehrte Dach- und Deckenplatten sowie Stürze hergestellt. Mit dieser Palette an Bauteilen lassen sich vielfältige Bausysteme zusammenstellen, die eine effiziente und rationelle Bauweise ermöglichen.

Um flexibel auf die jeweiligen Bedürfnisse im Planungsprozess eingehen zu können, ist es notwendig, dem Tragverhalten adäquate Berechnungsgrundlagen zugrunde zu legen und Bemessungsregeln zur Verfügung zu haben. Dies gilt besonders für bewehrte Elemente. Erste Entwicklungen in Deutschland finden in dieser Richtung während der 50er Jahre des 20. Jahrhunderts statt und werden bis zum aktuellen Normentwurf aus dem Jahre 2003 [5] kontinuierlich weitergeführt.

Im Vergleich zum Stahlbeton besitzt der bewehrte Porenbeton einige entscheidende Unterschiede. Aufgrund seiner Porosität und der geringen Alkalizität bietet der Porenbeton keinen ausreichenden Korrosionsschutz. Die Bewehrung besteht üblicherweise aus glatten Stäben, die durch Punktschweißungen zu Matten bzw. zu Körben verbunden werden. Zusätzlich ist der Stahl mit einem Rostschutz beschichtet. Ein Haftverbund ist zwar existent, unterliegt aber starken Streuungen. Bereits bei kleinen Relativverschiebungen zwischen Porenbeton und Bewehrung kann der Haftverbund versagen. Im Hinblick auf die Bemessung ist der Verbund keine relevante Größe. Die Interaktion zwischen Bewehrung und Beton wird über diskrete Verankerungselemente sichergestellt.

In Forschungsarbeiten ([40], [76], [188]) wird versuchstechnisch nachgewiesen, dass die Verankerungsproblematik wesentlich den inneren Kräfteverlauf bestimmt. An den Verankerungspunkten treten Spannungskonzentrationen auf, die zu einer Verschiebung der Knotenpunkte führen. Diese Relativverschiebungen zwischen Bewehrung und Porenbeton bewirken ein niedriges Beanspruchungsniveau der Querkraftbewehrung und eine erhöhte Völligkeit der Zugkraftlinie der Biegezugbewehrung. Daher lassen sich die für den Stahlbeton entwickelten Be-

rechnungsmodelle nur mit entsprechenden Modifikationen auf den Porenbeton übertragen. Insbesondere querkraftbewehrte Bauteile weisen Unterschiede im Kräfteverlauf auf, so dass der Querkraftbewehrungsgrad, im Gegensatz zu Stahlbeton, kein ausreichendes Maß für die Querkrafttragfähigkeit darstellt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das Tragverhalten von Bauteilen aus bewehrtem Porenbeton wirklichkeitsnah zu beschreiben. Zu diesem Zweck wird ein Berechnungsmodell entwickelt, das einerseits nichtlineares Materialverhalten und lokale Schädigungen (z.B. Risse) berücksichtigt und andererseits den porenbetonspezifischen Besonderheiten (diskrete Lasteinleitungspunkte, unzureichender Verbund, Verschiebungen zwischen Bewehrung und Porenbeton) Rechnung trägt.

Im Allgemeinen basieren Berechnungsverfahren auf Gleichgewichtsbedingungen, Verträglichkeitsbedingungen der Verformungen und Spannungs-Dehnungs-Beziehungen. In der linearen und nichtlinearen Tragwerksanalyse dominieren Lösungsverfahren, die auf der Finiten Elemente Methode basieren. Nichtlineare Aufgabenstellungen werden auf lineare Gleichungssysteme zurückgeführt und mit den bekannten mathematischen Methoden iterativ gelöst. Dies gelingt durch inkrementelle Laststeigerungen und eine entsprechende Anpassung der Steifigkeiten in Abhängigkeit vom aktuellen Schnittgrößen- und Deformationszustand. Für jede Laststufe sind dabei in der Regel mehrere Iterationen notwendig.

In dieser Arbeit wird ein alternatives Berechnungsverfahren entwickelt, welches auf Energieprinzipien basiert und mit den Methoden der mathematischen Optimierung gekoppelt wird. Ähnliche Verfahren werden in den letzten Jahren am Bereich Massivbau der Bauhaus-Universität Weimar zur Analyse von Stahl- und Spannbetonkonstruktionen erfolgreich eingesetzt ([115], [141]-[144], [191] u.a.). Auf der Grundlage des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials wird das mechanische Problem als Extremalaufgabe formuliert. Diese lässt sich in eine Optimierungsaufgabe überführen und mit den Methoden der nichtlinearen mathematischen Optimierung lösen. Hierfür stehen leistungsfähige Routinen zur Verfügung, die durch allgemein zugängliche Standardsoftware bereitgestellt werden.

Ein solches Vorgehen hat vor allem dann Vorteile, wenn ein spezieller Beanspruchungszustand von Interesse ist und der Lastpfad im Einzelnen nicht verfolgt werden soll. Ein weiterer Vorteil ergibt sich aus der Tatsache, dass für die Berechnungsmethodik das spezifische Materialverhalten von untergeordneter Bedeutung ist. Die nichtlinearen Berechnungen laufen mit den gleichen Schritten und im gleichen Schema wie eine linear elastische Analyse ab. Materialgesetze werden in integraler Form in das Berechnungsmodell implementiert, so dass nichtlineare Effekte durch Unstetigkeiten in der Spannungs-Dehnungs-Linie (z.B. Rissbildung) im Mittel berücksichtigt werden.

Die Formulierung der Berechnungsaufgabe erfolgt im Raum der Verschiebungen, d.h. die Verformungen stellen die Unbekannten des Systems dar. Das Tragverhalten wird durch globale Verschiebungen (z.B. Durchbiegung des Balkens) sowie lokale Verschiebungen (z.B. Schlupf der Längsbewehrung, Eindrückung der Verankerungsstäbe) beschrieben. Abgeleitete Größen (Dehnung des Betons und der Bewehrung) sind die Basis für die Ermittlung der inneren Energie.

1 Einführung

Die Arbeit gliedert sich in fünf Teile.

Um die Einflussparameter auf das Berechnungsmodell zu klären, wird in *Kapitel 2* der aktuelle Wissensstand aufbereitet. Die Modellvorstellungen für das Querkrafttragverhalten des bewehrten Porenbetons leiten sich im Wesentlichen vom Stahlbeton ab, der aufgrund seiner wirtschaftlichen Bedeutung auch die Wissenschaft und Forschung auf diesem Gebiet dominiert. Es werden die wichtigsten Modelle zum Querkrafttragverhalten von Stahlbeton vorgestellt, bevor auf die Modellvorstellungen für bewehrte Porenbetonbauteile eingegangen wird.

Die Entwicklung von porenbetonspezifischen Normen beginnt in Deutschland 1958 mit der DIN 4223 [1], die sich auf plattenartige Bauteile beschränkt. Seitdem wird kontinuierlich an der Erweiterung und Anpassung der Bemessungsregeln gearbeitet. 1978 erfolgt die Aufnahme querkraftbewehrter Bauteile in die Norm [2] und 2003 wird eine umfangreiche Überarbeitung durchgeführt [5]. Das dort verwendete Bemessungskonzept orientiert sich an den Normen für Stahlbeton.

Das Tragwerksverhalten wird durch grundlegende Beziehungen der technischen Mechanik beschrieben. Die entsprechenden Zusammenhänge werden in *Kapitel 3* vorgestellt. In der vorliegenden Arbeit werden die Beschränkungen, die sich durch die Bernoulli-Hypothese ergeben, aufgehoben und die Balkentragwerke mit einem zweidimensionalen Spannungs- bzw. Verschiebungszustand beschrieben. Die Tragwerksverschiebungen stellen die Unbekannten des Berechnungsmodells dar. Die daraus abgeleiteten Deformationen bilden die Grundlage für Arbeits- bzw. Energieausdrücke. Ausgehend vom Prinzip der virtuellen Verrückungen wird eine Extremalaufgabe auf der Basis vom Prinzip des Minimums des Gesamtpotentials entwickelt. Die Extremalaufgabe lässt sich in eine nichtlineare Optimierungsaufgabe überführen, die mit den Methoden der mathematischen Optimierung unter Einsatz von Standardsoftware gelöst wird.

Die mechanischen Eigenschaften von Beton und Porenbeton sind durch eine niedrige Zugfestigkeit im Vergleich zur Druckfestigkeit gekennzeichnet. Daraus ergibt sich für biegebeanspruchte Bauteile das Erfordernis einer Bewehrung in der Zugzone. Zur Sicherung der Querkrafttragfähigkeit von Balkentragwerken ist eine Querkraftbewehrung notwendig. Die Bildung von Rissen im Porenbeton führt zu einer Steifigkeitsdegradation und zu einer Umlagerung der inneren Kräfte. Neben der Rissbildung können weitere nichtlineare Effekte in Form von Plastizierungen (Bewehrungsstahl, Überschreiten der Betondruckfestigkeit) sowie nichtlinearer Materialbeziehungen auftreten. Eine Anforderung an das entwickelte Berechnungsmodell ist die Erfassung dieser nichtlinearen Materialbesonderheiten.

Bewehrte Porenbetonbauteile weisen im Vergleich zum Stahlbeton einige Besonderheiten auf, die in *Kapitel 4* näher betrachtet werden. Aufgrund der niedrigeren Alkalizität des Porenbetons wird die Bewehrung zur Sicherung des Korrosionsschutzes ummantelt. Aus diesem Grund kommen vorwiegend glatte Bewehrungsstäbe zum Einsatz. Daraus folgen eine entsprechende Reduzierung des Verbundes [166] sowie eine große Streuung der Verbundspannungen [74]. Eine Interaktion zwischen Porenbeton und Stahl muss über lokale Verankerungselemente hergestellt werden. Die Tragfähigkeit bzw. die Verformungseigenschaften dieser Verankerungselemente beeinflussen das Tragverhalten und müssen in einem Berechnungsmodell

berücksichtigt werden. Es wird ein lokales Modell zur Beschreibung der Verschiebungen von Verankerungsstäben im Porenbeton entwickelt. Dieses basiert auf den Grundbeziehungen eines gebetteten Balkens. Es berücksichtigt sowohl nichtlineares Materialverhalten als auch nichtlineare Bettungsbedingungen. Im Anschluss werden Auszugsversuche von Verankerungsstäben im Porenbeton nachgerechnet.

Kapitel 5 befasst sich mit der Herleitung eines Berechnungsmodells zur Beschreibung des inneren Kräftezustandes bewehrter Porenbetonbauteile. Dies wird auf Basis der vorgestellten mechanischen Beziehungen formuliert und in eine Extremalaufgabe überführt. Diese Extremalaufgabe wird so aufbereitet, dass sie mit den Methoden der mathematischen Optimierung unter Verwendung von Standardsoftware gelöst werden kann. Mit dem Berechnungsmodell können nichtlineare Materialbeziehungen sowie die Rissbildung berücksichtigt werden. Die vorab beschriebenen porenbetonspezifischen Besonderheiten werden implementiert. Das Modell kann sowohl für querkräftbewehrte Bauteile als auch für Bauteile ohne Querkräftbewehrung eingesetzt werden.

In *Kapitel 6* zeigen Vergleichsrechnungen die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Berechnungsmodells. Versuche an querkräftbewehrten Porenbetonbalken und Porenbetonplatten ohne Querkräftbewehrung werden nachgerechnet. Ein nach DIN 4223:2003 bemessener querkräftbewehrter Porenbetonbalken wird hinsichtlich des Spannungs- und Verformungszustandes analysiert. Weiterhin wird gezeigt, dass sich das vorgeschlagene Berechnungsmodell auch auf Stahlbetonelemente anwenden lässt.

Die Kräfte in der Bewehrung sowie das Tragwerksverhalten können, wie Vergleiche mit experimentell ermittelten Daten zeigen, realitätsnah abgebildet werden.

Ausgehend von den Ergebnissen der Vergleichsrechnungen wird ein Vorschlag unterbreitet, wie das Berechnungsmodell bei Bemessungsaufgaben nach deformationsbasierten Grenzzuständen Anwendung finden kann.

1 Einführung

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

Die Modellvorstellungen zum Querkrafttragverhalten von Porenbeton sind eng an die des Normalbetons geknüpft. Aufgrund der wirtschaftlichen Bedeutung des Normalbetons und dessen weltweiter Verbreitung liegt der wissenschaftliche Fokus stärker auf diesem Bereich. Die damit gewonnenen Erkenntnisse werden mit entsprechenden Modifikationen auf den Porenbeton übertragen und stellen die Basis der dort geführten Untersuchungen dar.

Im ersten Teil des Kapitels wird die Entwicklung der Modelle zur Beschreibung der Querkrafttragfähigkeit von Stahlbeton dargestellt. Hierbei wird auf grundlegende Konzepte eingegangen, ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Die Beschreibung der Tragfähigkeit bewehrter und unbewehrter Porenbetonbauteile beginnt in Deutschland, ausgehend von den Versuchen durch Rüschi, in den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts. Die Modelle zur Bewertung der Querkrafttragfähigkeit orientieren sich an der Fachwerkanalogie bzw. an Stabwerksmodellen.

Die Entwicklung von Normen für Porenbeton in Deutschland ist in einem weiteren Abschnitt dargestellt. Diese ist eng mit den Versuchsergebnissen von Rüschi, Schäffler, Janovic und Grasser verknüpft.

2.1 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonelementen

2.1.1 Erste Überlegungen zum Querkrafttragverhalten und praktische Anwendung

Im Gegensatz zur Biegebemessung befassen sich die „Eisenbetonbauer“ erst seit der Wende zum 20. Jahrhundert mit der Frage der Schubfestigkeit „eisenbewehrter“ Balken. Christophe [30] beschreibt, dass Eisenbetonbalken mit unten liegender Biegebewehrung durch ein Abplatzen der Betondeckung und durch diagonale Risse im auflagernahen Steg versagen. Er berichtet, dass durch gebogene Stäbe, Bügel oder Schlingen der Widerstand deutlich erhöht werden kann.

Analog zu den Fachwerken im Stahlbau erkennt man die „aufhängende“ Wirkung der aufgebogenen Stäbe im „Eisenbetonbau“ zur Abtragung der Querkraft. 1865 lässt Wilkenson bei einem vollständig aus Beton errichtetem Haus die Zugbewehrung der Betonbalken an den Auflagern hochführen [130].

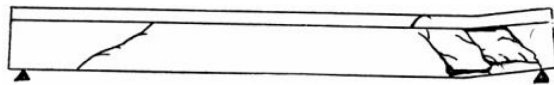


Abbildung 2.1: Schubbruch nach Christophe [30]

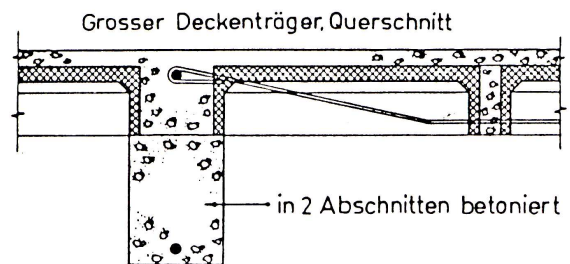


Abbildung 2.2: Deckendetail aus Wilkinsons Haus [130]

Hennebique greift diese Bewehrungsführung in seinen „Eisenbetonplattenbalken“ auf und entwickelt sie weiter. Er lässt die Hälfte der unten liegenden Biegezugbewehrung von den Drittelpunkten zum Auflager hin aufbiegen. Mit oben offenen Flacheisenbügel werden die geraden und die aufgebogenen Bewehrungsstähle zu einem Bewehrungskorb zusammengefasst [114]. Bereits 1890 lässt Wayss eine ähnliche Bewehrungsanordnung zur Sicherung der Querkräfte ausführen. Die konstruktiven Unterschiede zu Hennebique sind gering. Er verwendet Rundeisen- statt der Flacheisenbügel und erhöht die Stützbewehrung durch Zulagestäbe [130].

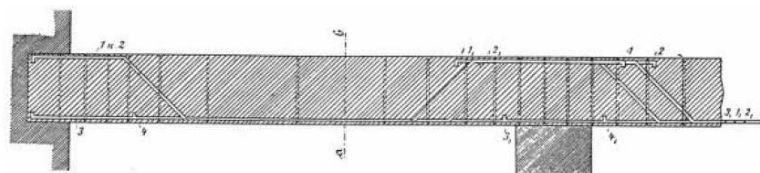


Abbildung 2.3: Bewehrungsführung nach Wayss [130]

2.1 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonelementen

Die Einbaulage der aufgebogenen Bewehrung befindet sich bei allen Systemen im auflagenahen Drittel des Feldes und erfolgt ohne Berücksichtigung des statischen Systems bzw. der Belastung. Ein allgemeines, theoretisch begründetes Verständnis über die Schubspannungen im „Eisenbetonträger“ besteht bis dahin noch nicht. Art und Lage der Querkraftbewehrung wird vielmehr aus praktischen Überlegungen heraus entwickelt.

2.1.2 Fach- und Stabwerksmodelle

Ritter [152] befasst sich 1899 in der Schweizer Bauzeitung ausgiebig mit der Bauweise Hennebique. Für ein Tragmodell stellt er sich vor, dass die Bügel, die Längsbewehrung und der Beton eine Art Fachwerk ergeben. Die Bügel bilden die Zugstreben und der Beton die unter 45° geneigten Druckstreben. Er gibt eine Gleichung zur Bestimmung der Spannungen in den Bügeln an, sieht sich aber außerstande, die Wirklichkeitsnähe seines Modells auf theoretischem Weg zu begründen. Er hält es für zweckmäßig, die Bügel in Auflagenähe um 45° zu neigen, um deren Wirkung bei der Abtragung der Querkräfte zu erhöhen.

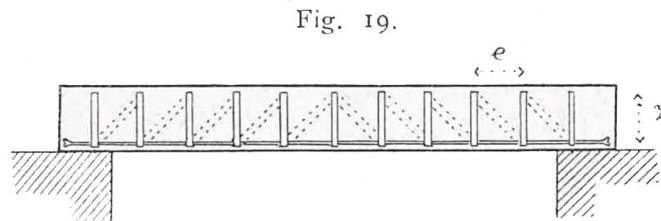


Abbildung 2.4: Fachwerk-Modell nach Ritter [152]

Aufbauend auf den Vorschlägen von Ritter führt Mörsch [121] zu Beginn des 20. Jahrhunderts umfangreiche Versuche durch und begründet die Fachwerkanalogie. Dabei lässt er neben lotrechten Bügeln und Schrägaufbiegungen erstmals unter 45° geneigte Bügel einbauen. Danach bildet sich in einem Stahlbetonbalken ein Fachwerk mit parallelen Gurten aus (Betondruckgurt und Stahlzuggurt). Der Winkel der Betondruckstreben wird zu 45° angenommen. Dies begründet Mörsch mit der theoretischen Neigung der Hauptdruckspannung in Höhe der Nulllinie des ungerissenen Balkens. Der Neigungswinkel der Zugstreben ergibt sich aus der Neigung der Querkraftbewehrung. Das Modell nach Mörsch findet Eingang in zahlreiche Bemessungsvorschriften für Stahlbetonbauteile.

Versuche zeigen, dass sich häufig eine kleinere Rissneigung zur Balkenachse als 45° einstellt. Kupfer [95] folgert daraus, dass sich kleinere Winkel als bisher angenommen für die geneigten Druckstreben ergeben. Als Beweis stellt er eine Gleichung mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit auf und erzielt damit eine bessere Übereinstimmung mit bekannten Versuchsergebnissen.

Leonhardt ([104]-[105]) führt umfangreiche Schubversuche durch und stellt fest, dass sich geringere Bügelspannungen ergeben, als durch die Fachwerkanalogie nach Mörsch zu erwarten wären. Er vertritt daher die Meinung, dass der Druck- und Zuggurt nicht wie bisher angenommen parallel verlaufen, sondern sich der Druckgurt zum Auflager hin neigt [102]. Die sogenannte erweiterte Fachwerkanalogie berücksichtigt eine Abtragung der Querkräfte durch

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

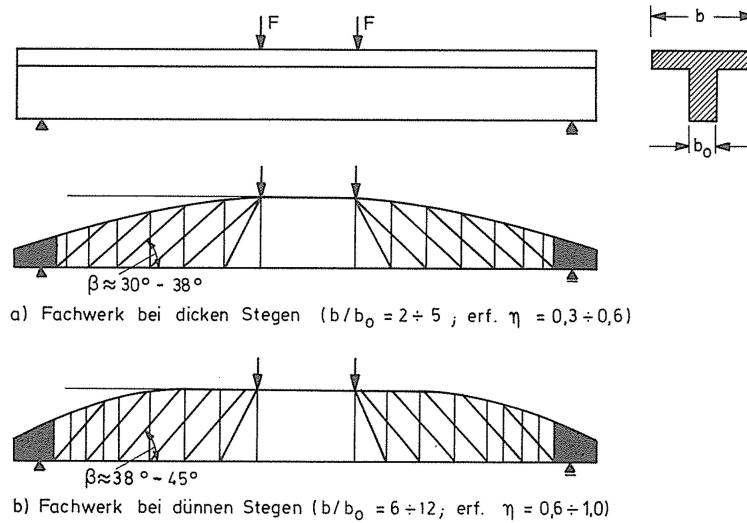


Abbildung 2.5: Fachwerkmodell nach Leonhardt [102]

eine Sprengwerk Wirkung, so dass die Bügel in diesem Bereich entlastet werden. Allerdings macht Leonhardt keine Angaben über die Größe der Druckgurtneigung. Die Neigung der Betondruckstreben gibt Leonhardt mit 30° bis 45° an.

Specht [169] überlagert ein Fachwerkmodell mit einem Bogen-Zugband-Modell, um die direkte Lastabtragung zum Auflager zu erfassen. Er teilt die Querkrafttragfähigkeit in drei Teile auf: den Widerstand des Betonquerschnittes mit der im Verbund liegenden Längsbewehrung (Fachwerk-Stützbogen-Modell), den Widerstand einer vorgespannten Bewehrung (Bogen-Zugband-Modell) und den Widerstand einer aus Bügeln und Schrägstreben bestehenden Querkraftbewehrung (Fachwerk-Modell). Die drei Anteile werden additiv zusammengefasst.

Mark ([110], [113]) entwickelt ein räumliches Fachwerkmodell zur Beschreibung eines zweiachsig durch Querkräfte beanspruchten Stahlbetonbalkens (Abbildung 2.6). Der zusammengefasste Vektor der Querkraftkomponenten V_y und V_z wird in eine Summe von k Einzelvektoren vom Schwerpunkt der Druckzone zu den gezogenen Bewehrungsanteilen zerlegt. Damit wird die Zugzone in mehrere Anteile aufgelöst. Um die Gleichgewichtsbedingungen einzuhalten, werden sowohl in der Querschnittsebene als auch diagonal im Balken zusätzliche Fachwerkstreben benötigt. Mit diesem Modell ergeben sich für die Bügelschenkel größere Kräfte als bei einer getrennten Behandlung der Querkräfte V_y und V_z . Aus dem Fachwerkmodell leitet Mark [111] einen Bemessungsansatz in Anlehnung an DIN 1045-1 [8] ab. Die Widerstände werden in Abhängigkeit einer Querkraftneigung α_v durch zusätzliche Faktoren reduziert. Mit den Extremwerten für den Parameter α_v kann eine einachsige Querkraftbeanspruchung ($\alpha_v = 0$) und eine diagonal über Eck wirkenden Querkraft ($\alpha_v = 1, 0$) beschrieben werden.

Birtel [20] erweitert das Bemessungsmodell für zweiachsige Querkraftbeanspruchungen von Mark. Durch einen Summenansatz kann er einen gleitenden Übergang von Bauteilen ohne Querkraftbewehrung zu Bauteilen mit Querkraftbewehrung beschreiben.

2.1 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonelementen

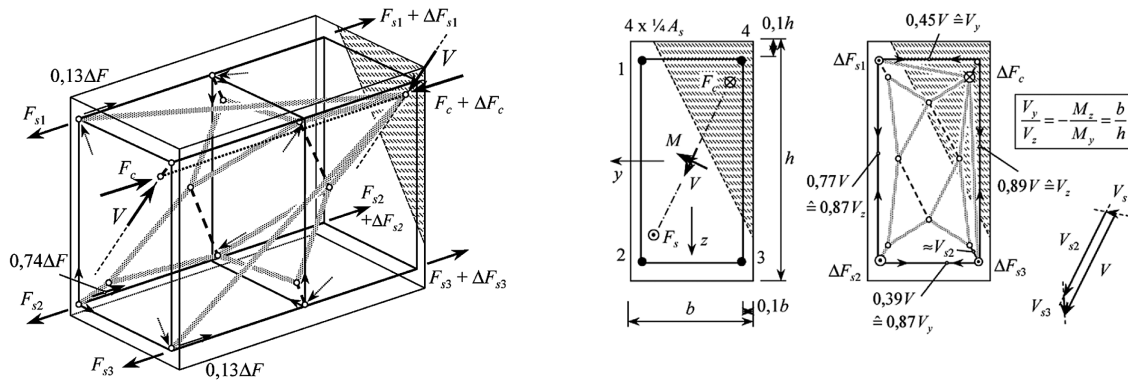


Abbildung 2.6: Räumliches Fachwerkmodell und Projektion in der Querschnittsebene nach Mark [110]

2.1.3 Kamm- und Zahnmodelle

Die Kamm- bzw. Zahnmodelle lassen sich auf Kani [82] zurückführen. Er entwickelt die Vorstellung, dass unter einer ansteigenden Last der Balken infolge Rissbildung in eine kammartige Struktur übergeht. Dabei bildet die Druckzone den Kammrücken, in den die sogenannten „Betonzähne“ eingespannt sind. Diese Zähne werden durch die Biegerisse begrenzt und können als Kragarme aufgefasst werden, welche durch Einzellasten aus der Verbundwirkung zwischen Stahl und Beton belastet werden. Kani geht davon aus, dass die „Betonzähne“ bei einer Überschreitung der Betonzugfestigkeit an der Einspannstelle nacheinander ausfallen. Somit bildet sich ein Bogen-Zugband-Modell heraus. Durch fortschreitende „Betonzahn“-bildung und nachfolgenden Ausfall wird der Bogen weiter geschwächt, so dass es zum Gesamtversagen kommt.

Der Grenzzustand des Modells wird später durch Kani [83] neu definiert. Bei Bauteilen mit kleinen Schubslankheiten geht das Kammmodell in ein Modell aus mehrschichtigen Druckbögen über, so dass das Erreichen der Zugfestigkeit an der Einspannstelle der Betonzähne nicht zwingend ein Versagen des Bauteils bedingt. Diese Druckbögen stützen sich auf die unten liegende Bewehrung ab, die als Zugband fungiert. Die Querkraftbewehrung stellt in diesem Modell eine Verbindung zwischen den inneren und den äußeren Druckbögen her.

Jungwirth [79] nutzt ein Kammmodell zu umfangreichen Versuchsnachrechnungen. Das Betontragwerk wird durch einen Kamm mit schrägen Betonzähnen ersetzt. Die Biegebewehrung und die Bügel koppeln die Rissufer miteinander. Mit diesem hochgradig statisch unbestimmten Stabwerk kann Jungwirth eine sehr gute Übereinstimmung von Versuch und Nachrechnung erzielen. Die Form des Kamms (Anzahl der Betonzähne, Neigung der Druckstreben etc.) entnimmt er den jeweiligen Versuchen, so dass für dieses Modell das Rissbild genau bekannt sein muss. Moosecker [120] erweitert dieses Kammmodell dahingehend, dass er von einem idealisierten Rissbild ausgeht.

Das Zahnmodell wird von Fenwick und Paulay [49] sowie von Taylor [178] um die Rissverzahnung und die Verdübelungswirkung der Bewehrung erweitert.

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

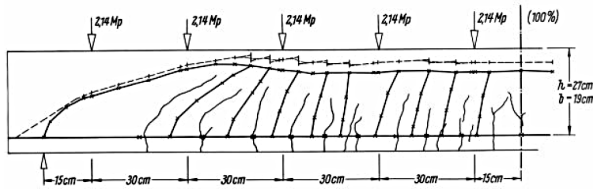


Abbildung 2.7: Statisches Modell und Rissbild nach Jungwirth [79]

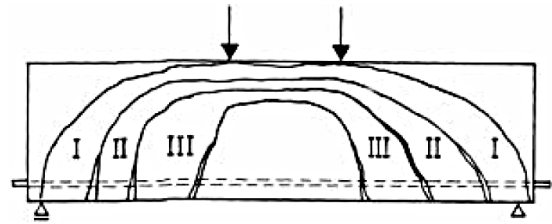


Abbildung 2.8: Bogenmodell nach Kani [83]

Reineck ([147], [148]) greift die Idee der Zahnmodelle auf. Er definiert die Querkrafttragfähigkeit unter Berücksichtigung einer diskreten Rissbildung. Dabei bezieht er die Rissöffnung, die Rissreibung, die Verdübelungswirkung der Längsbewehrung sowie die Einspannung der Betonzähne in den Druckgurt ein. Die Rissneigung und der Rissabstand sind für die Modellierung zu definieren. Es wird davon ausgegangen, dass es im Bereich der Wurzel des Querkraftrisses zu einer Entfestigung des Betons und somit zu einem Teilversagen der Einspannung der Betonzähne kommt. Dies bedeutet einen Rissfortschritt. Der Betonzahn wird verdreht und die beiden Rissufer verschieben sich gegeneinander. Diese Verschiebung aktiviert die Rissuferverzahnung, welche das Gleichgewicht der Kräfte am betrachteten Betonzahn aufrechterhält.

Die übertragbare Querkraft setzt Reineck am linearisierten Querkraftriss aus den Anteilen der Verdübelungswirkung, der Rissreibung und dem Anteil der Betondruckzone zusammen. Für die Berechnung ist die Bestimmung der Relativverschiebungen, welche durch die einzelnen Anteile hervorgerufen werden, erforderlich. Damit gestaltet sich dieses Modell sehr aufwendig. Daher führt Reineck ein stark vereinfachtes Fachwerkmodell ein, welches die Verdübelungswirkung vernachlässigt und von einer verschmierten Rissbildung ausgeht. Das Fachwerkmodell besteht aus Betondruck- und Betonzugstreben. Da das Versagen der Betonzugstrebe das versagensbedingende Kriterium ist, kann ein Ansatz der vollen Betonzugfestigkeit zu einer Überschätzung der Tragfähigkeit führen. Dies macht die Einführung fiktiver Rechenwerte für die Zugfestigkeit erforderlich.

2.1.4 Modelle auf der Grundlage der Finite Elemente Methoden

Mit der Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen wird seitens der Forscher versucht, den Kräfteverlauf in einem Stahlbetonbalken durch die Anwendung der Methoden der Finiten Elemente zu beschreiben. Das zentrale Problem ist die Erfassung des gerissenen Zustandes. Eine der ersten Arbeiten auf diesem Gebiet wird von Ngo und Scordelis [125] veröffentlicht. Sie teilen den Beton in dreieckförmige, an den Enden gekoppelte Elemente. Die Bewehrung wird als Stab modelliert und ist über Federelemente mit dem Beton gekoppelt. Das Rissbild muss bei diesem Modell vorgegeben werden.

Franklin [53] verschmiert die Risse, indem er sie einem bestimmten Elementtyp zuweist. Dabei wendet er bei den Elementen ein anisotropes Materialgesetz an. Dieser Ansatz wird auch von Grünberg [61] und von Stegbauer [171] übernommen.

2.1 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonelementen

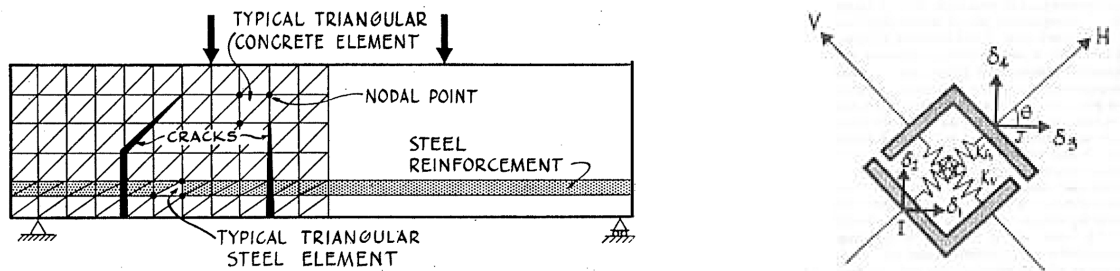


Abbildung 2.9: Finite Elemente Modell eines Stahlbetonbalkens und Verbundelement nach Ngo/Scordelis [125]

Später wird von einem ungerissenen Zustand ausgegangen und während der Rechnung der Verlauf der Risse mit einer Rissfortschrittsanalyse ermittelt. Entsprechende Ansätze sind z.B. bei Cedolin/Poli [28] und Fischer [50] zu finden.

Das Verhalten von Stahlbetonbalken wird von Grootenboer [60] durch die Einführung nicht-linearer Werkstoffgesetze für Beton und Stahl sowie durch die Berücksichtigung der Verdübelungswirkung der Bewehrung und einer Verzahnung der Rissufer weiter angenähert.

Wang [186] führt Berechnungen mit Hilfe des verschmierten Rissmodells durch, um so eine Aussage für den Verlauf eines diskreten Risses zu treffen. Mit dem so gefundenen Riss wird dann die eigentliche Berechnung angestellt.

2.1.5 Empirische Ansätze

Empirische Ansätze beruhen auf einer mehr oder weniger begrenzten Anzahl von Versuchen. Es werden Regressionsanalysen und andere statistische Betrachtungen durchgeführt, um Faktoren für einzelne Einflussparameter zu erhalten. Dabei werden solche Parameter betrachtet, von welchen angenommen wird, dass sie das Querkrafttragverhalten maßgeblich beeinflussen. Die Zugfestigkeit des Betons, die Bauteilhöhe, die Schubschlankheit und der Bewehrungsgrad werden häufig berücksichtigt. Diese Ansätze besitzen allerdings keine Allgemeingültigkeit, wenn sie nicht theoretisch begründet werden. Sie sollten daher nur unter solchen Bedingungen angewendet werden, die auch bei den zugrunde gelegten Versuchen vorlagen.

Kordina und Blume [86] leiten empirische Ansätze zur Ermittlung der Querkrafttragfähigkeit aus zahlreichen Versuchsergebnissen ab. Die relevanten Einflussgrößen werden durch statistische Verfahren ermittelt und in mathematische Ansätze überführt. Da keine mechanische Erklärung der Einflussgrößen gegeben wird, lassen sich die Ergebnisse nicht verallgemeinern und sind an die untersuchten Randbedingungen gebunden.

Weitere empirische Untersuchungen werden u.a. von Rimmel [150], Mallee [108], Herzog ([69], [70]), Zsutty [195], Haddain/Hong/Mattock [63], und Kordina/Hegger [87] durchgeführt,

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

welche ausschließlich auf der Auswertung von Versuchen basieren. Wegen der begrenzten Anzahl der zugrunde liegenden Versuche sind die Ansätze nur bedingt übertragbar.

Praktische Bedeutung haben diese empirischen Ansätze durch ihren Einzug in die Normen CEB/FIP-Model Code 90 [3] und den Eurocode 2 [7] gewonnen.

2.1.6 Theorien auf der Grundlage der Festigkeit der Betondruckzone

Das Problem der Bestimmung der Bruchquerkraft wird auf die Frage der Festigkeit der Biegedruckzone im Querkraftbereich zurückgeführt. Nach der Rissbildung können über die Risse keine Kräfte mehr übertragen werden. Der Balken trägt die Querkraft über die ungerissene Druckzone ab. Es wird vorausgesetzt, dass bei zunehmender Einschnürung der Druckzone ein Betondruckbruch eintritt. Die einzelnen Modelle unterscheiden sich in erster Linie durch Annahmen zur Festigkeit der Betondruckzone.

Während Moody et al. [119] die Biegedruckfestigkeit des Betons als Bruchkriterium heranziehen, gehen Laupas/Siess/Newmark [100], Borischansky [58] und Walther [184] davon aus, dass die Kombination aus Biege- und Schubspannung für den Bruch verantwortlich ist.

Walther ([184], [185]) leitet mit Hilfe des Mohr'schen Bruchkriteriums eine Schubdruckfestigkeit als Funktion der Schubschlankheit ab. Er betrachtet den querkraftbeanspruchten Bereich als Scheibenproblem, so dass die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte nicht mehr gegeben ist. Dabei spaltet er das Deformationsverhalten in einen Schub- und einen Biegeanteil und prägt den Begriff der Schubrotation.

Weigler und Becker [189] stellen fest, dass die Beziehung von Walther empfindlich auf die Annahme der Betonzugfestigkeit reagiert. Sie modifizieren die Schubdruckfestigkeit dahingehend, dass sie die Bruchumhüllende des Mohr'schen Spannungskreises statt mit einer Parabel mit einer Geraden annähern.

Kamerling und Kuyt [81] geben als Versagensbedingung eine Betonstauchung von 5‰ am Balkenoberrand auf einer vorgegebenen Länge an. Diese wird unter der Voraussetzung eben bleibender Querschnitte berechnet.

Das von Kotsovos [89] entwickelte *Compressive force path concept* führt die Querkrafttragfähigkeit eines Balkens allein auf die Tragfähigkeit der Druckzone zurück. Das Versagen wird den sich entwickelnden Zugkräften im Druckpfad zugewiesen. Zum einen werden bei einer Änderung des Druckpfades Zugkräfte benötigt und zum anderen kommt es bei einer Veränderung der Breite des Druckpfades zu Spannungskonzentrationen. Diese bewirken eine Volumenänderung und induzieren damit Querkzugspannungen. Kotsovos nimmt einen Verbundverlust der Bewehrung und ein damit verbundenes Anwachsen der Biegerisse bzw. eine Reduktion der Druckzonenhöhe mit den beschriebenen Folgen an.

Rissreibung schließt Kotsovos aufgrund der großen Rissweiten ebenso wie eine Verdübelungswirkung der Bewehrung aus, so dass die Tragwirkung des Balkens allein von den Bedingungen im Druckpfad abhängig ist. Eine Quantifizierung der Tragfähigkeit in Form eines

2.1 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonelementen

Bemessungsmodells wird durch Kotsovos nicht durchgeführt. Im kritischen Querschnitt ist ein aufnehmbares Moment definiert, welches allerdings nicht hergeleitet wird [90].

2.1.7 Bruchmechanische Ansätze

Grob und Thürlimann ([179], [180]) leiten die Schubbruchlast eines Stahlbetonbalkens anhand eines Fachwerkmodells unter Annahme ideal plastischen Verhaltens her. Sie gehen davon aus, dass sich die Fachwerkgeometrie kontinuierlich vom Auftreten der ersten Risse bis zum Bruchzustand infolge einer Variation der Druckstrebenneigung ändert. Dies verlangt eine ausreichende Querkraftübertragung in den Rissen. Geht man davon aus, dass die Möglichkeit der Schubübertragung mit zunehmender Rissweite abnimmt, ergeben sich natürliche Grenzen für den Umlagerungsprozess. Grob/Thürlimann geben als ausreichende Begrenzung

$$0,5 \leq |\tan \gamma| \leq 2,0 \quad (2.1)$$

an (Abbildung 2.10, links). Für Bauteile mit niedrigem Bewehrungsgrad verliert das System seine Tragfähigkeit, wenn Biege- oder Querkraftbewehrung fließen. Bei einem hohen Bewehrungsgrad ist Bruchversagen des Betons maßgebend. Durch konzentrierte Lasten (Einzellasten, Auflagerpunkte) wird der Lastfluss im Fachwerkmodell gestört. Es werden fächerförmige Druckstreben eingeführt, die mit den konzentrierten Lasten im Gleichgewicht stehen. Die Bügelkräfte unterscheiden sich nicht zum regulären Fachwerkmodell. Allerdings werden die Kräfte im Druck- und Zugband beeinflusst (Abbildung 2.10, rechts).

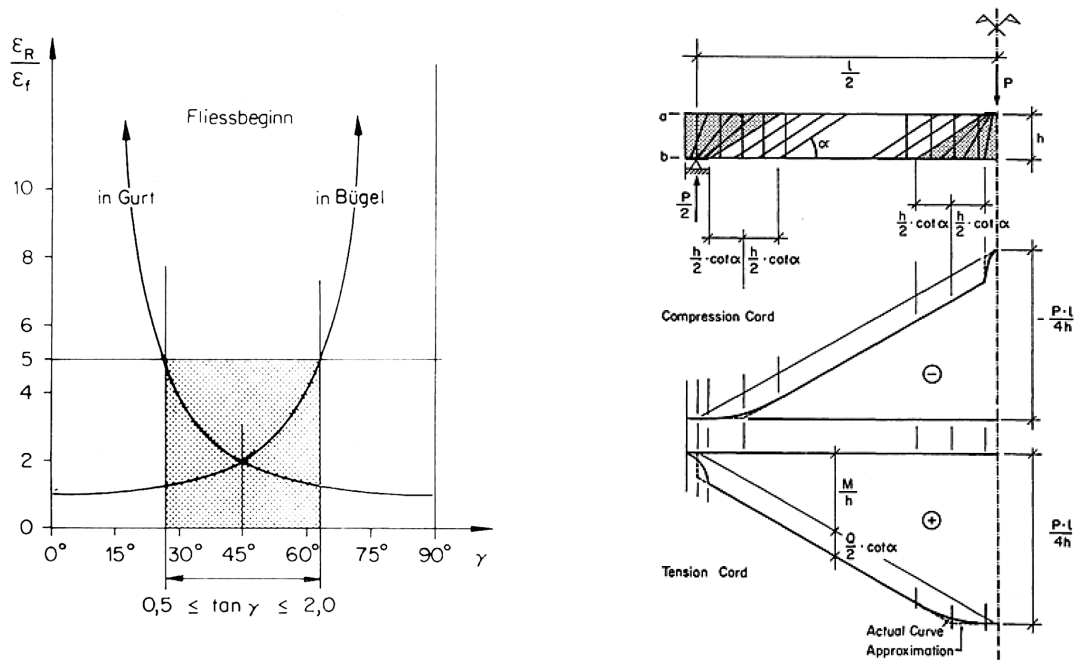


Abbildung 2.10: Fachwerkmodell nach Grob/Thürlimann [179]

Eine Weiterentwicklung stellt die Beschreibung des Kraftflusses in einem Tragwerk durch Spannungsfelder dar. Einen Überblick über die Entwicklung geben Muttoni et al. [124] und

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

Sigrist [167]. Mit Spannungsfeldern kann die Tragfähigkeit von Stahlbetontragwerken bestimmt werden, wobei für die Bemessung die Biege- und Querkrafttragwirkung im Zusammenhang gesehen werden muss.

Für das Arbeiten mit Spannungsfeldern wird der dreidimensionale Bauwerkskörper in ebene Tragelemente zerteilt. Einen Stahlbetonbalken stellt man sich dabei in seine Komponenten Obergurt, Untergurt und Steg zerlegt vor. Die Hauptaufgabe besteht darin, den Steg in Spannungsfelder aufzuteilen und einen zweckmäßigen Spannungszustand zu finden. Es stehen Fächer, parallele Druckbänder und Knoten für den Beton sowie Zugbänder für die Bügelbewehrung zur Beschreibung des Spannungszustandes zur Verfügung. Knoten und Fächer kommen da zum Einsatz, wo konzentrierte Kräfte eingeleitet werden. Trotz der Anschaulichkeit erfordert die Bemessung von Tragwerken mit Spannungsfeldern ein hohes Maß an Erfahrung bei der Gestaltung des inneren Tragsystems.

2.2 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Porenbetonelementen

Im Vergleich zum Normalbeton besitzt der Porenbeton eine relativ geringe wirtschaftliche Bedeutung. Dies erklärt die geringere Anzahl an Forschungsarbeiten und experimentellen Versuchen auf diesem Gebiet.

Anfang der 1950er Jahre führt Rüsich [157] erste Untersuchungen zur Tragfähigkeit bewehrter und nicht bewehrter Balken aus „Gasbeton“ durch. Er erkennt, dass die Grundsätze für Stahlbeton nicht ohne Weiteres übertragen werden können. Das Ziel des Versuchsprogrammes ist die Ableitung allgemein verwendbarer Konstruktionsregeln. Neben der Frage zur Tragfähigkeit längsbewehrter Balken ohne Querkraftbewehrung soll das Tragverhalten für verschiedene Bewehrungsführungen der Querkraftbewehrung (Bügel, Schrägeisen, angeschweißte Schrägbügel) geklärt werden.

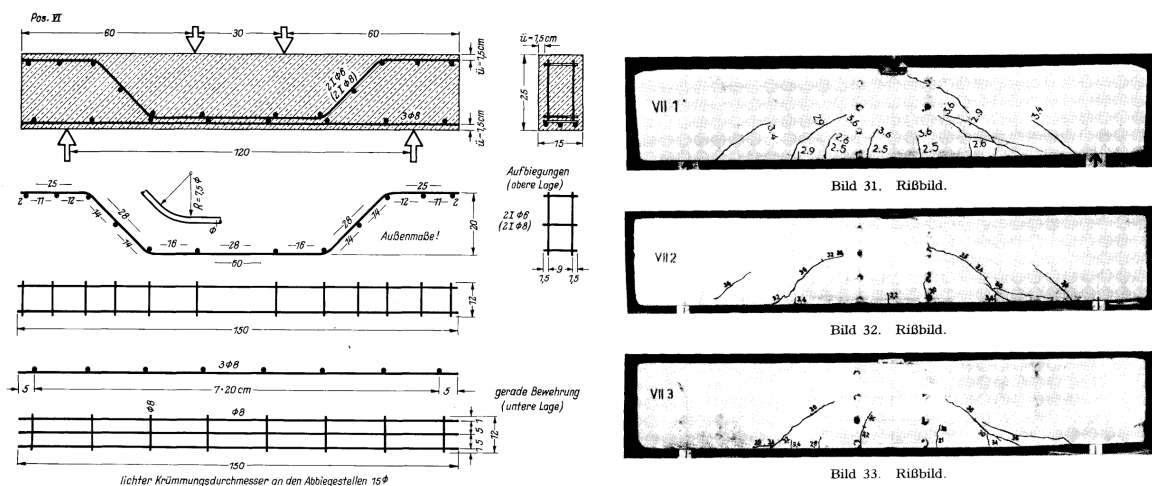


Abbildung 2.11: Balken mit Schubsicherung durch Schrägeisen und Bruchbilder [157]

Bauteile ohne Querkraftbewehrung zeigen ein Versagensverhalten analog dem des Stahlbe-

2.2 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Porenbetonelementen

tons. Bei etwa 80% der Bruchlast treten Biegezugrisse zwischen den beiden Einzellasten auf, die sich bei weiterer Laststeigerung nicht fortpflanzen. Erste Querkraftrisse zeigen sich ab ca. 90% der Bruchlast am unteren Rand. Bei weiterer Laststeigerung pflanzen sich diese rasch fort und leiten den Bruch ein. Es stellt sich nach Bildung der Querkraftrisse kein stabiler Gleichgewichtszustand mehr ein.

Für querkraftbewehrte Bauteile kann durch Verwendung von Schrägstäben eine geringe Steigerung der Traglast festgestellt werden. Gegenüber Bauteilen ohne Schrägstäben liegt die aufnehmbare Querkraft im Mittel um ca. 24% höher. An den Umlenkpunkten treten lokale Zerstörungen auf, welche zu einer verstärkten direkten Lastabtragung und einer erhöhten Beanspruchung der Endverankerung führen. Die starken Verformungen des Verankerungsbereiches der Längsbewehrung bedingen einen sekundären Biegedruckbruch. Versuche an Balken mit lotrechten Bügeln werden von Rüschi nicht angestellt.

Rüschi führt ergänzende Ausziehversuche durch, um die Verankerungsfestigkeit verschiedener Bügelformen zu bestimmen. Untersucht werden kurze Balkenstücke mit angeschweißtem Querstab, Winkelhaken und Bügelschleifen. Rüschi erkennt dabei eine klare Tendenz. Am günstigsten erweisen sich die Proben mit aufgeschweißten Längsstäben. Hier treten kleinere Streuungen auf und der Versagensbeginn der Verankerung ist deutlich ausgeprägt. Die Stahlspannungs-Schlupf-Beziehung zeigt die geringsten Schlupfwerte. Die Schleifenverankerung liefert zwar eine höhere Tragfähigkeit, allerdings auch größere Schlupfwerte. Zudem streuen die Ergebnisse der Schleifen- und Hakenverankerung stark.

Ein weiteres Ergebnis der Versuche stellen die Aussagen zum Verbund zwischen Stahl und Porenbeton dar. Dieser spielt nur eine untergeordnete Rolle und kann nicht sicher für eine Interaktion beider Elemente sorgen. Ein Zusammenwirken von Beton und Bewehrung erfolgt vorwiegend über spezielle Verankerungselemente, so dass die Kräfte an diskrete Lasteinleitungsstellen übertragen werden müssen.

Schäffler [159] befasst sich mit der Biegetragfähigkeit bewehrter Platten aus Porenbeton. Die durchgeführten Versuche zeigen ein nahezu lineares Materialverhalten des Porenbetons in der Druckzone (Abbildung 2.13). Den Völligkeitsgrad für die Druckzone gibt Schäffler mit 0,5 bis 0,58 und die Lage mit $\beta = 0,33 \dots 0,37$ an.

Weiterführende Untersuchungen Schäfflers [160] Anfang der 1960er Jahre behandeln die Verankerungsproblematik sowie das Kriechverhalten bewehrter Platten aus Porenbeton. Er untersucht, durch welche konstruktiven Maßnahmen die Tragfähigkeit der Verankerung verbessert werden kann und welche Rolle der Haftverbund zwischen Bewehrung und Porenbeton spielt.

Nilsson [127] betrachtet die Wirkung einer Bewehrung in der Druckzone. Er führt Versuche an Einfeldträgern durch, wobei die Querkraftsicherung der Balken durch vertikale und geneigte offene Bügel und vertikale geschlossene Bügel erfolgt. Die Druckbewehrung der Balken knickt beim Bruch aus und vermindert die Biegesteifigkeit der Träger. Die Untersuchung mit geschlossenen Bügeln soll zeigen, ob ein positiver Effekt auf das Knickverhalten der Druckbewehrung existiert. In den Tests kann kein signifikanter Einfluss auf die Tragfähigkeit festgestellt werden.

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

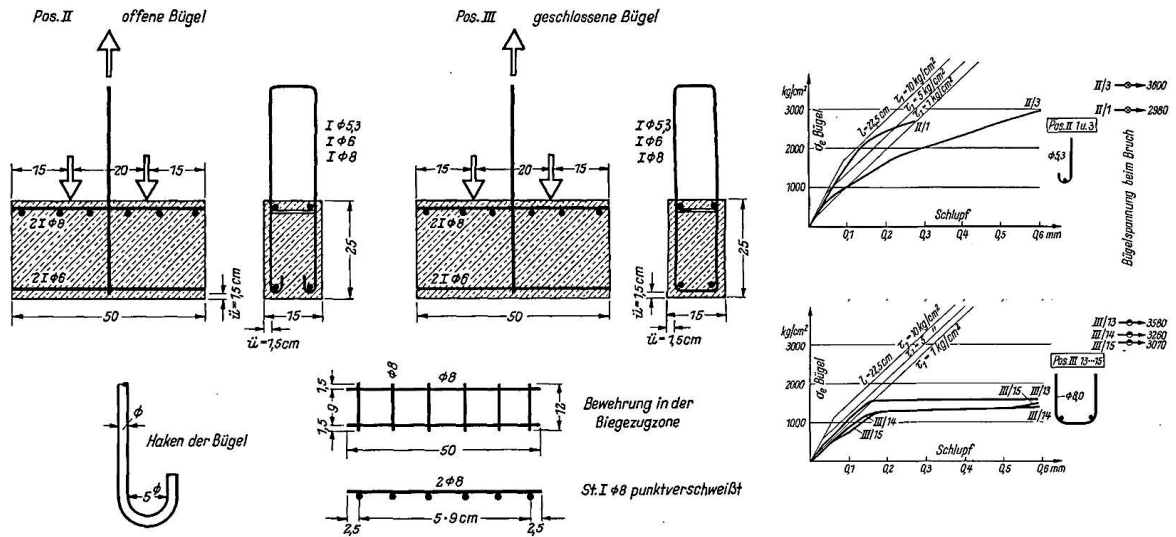


Abbildung 2.12: Ausziehkörper mit offenen und geschlossenen Bügeln und Schlupfkurven [157]

Cederwall [26] testet verschiedene Balkenelemente mit vertikalen und geneigten Bügeln. Er stellt fest, dass die Last beim Auftreten des ersten Querkraftrisses kaum von der Neigung der Bügel beeinflusst wird. Für die Bruchlast erkennt er einen positiven Effekt der unter 45° geneigten Bügel. Gegenüber der Last bei Querkraftrissbildung kann die Bruchlast um 29% (im Mittel) bei geneigten Bügeln und um 13% (im Mittel) bei senkrechten Bügeln gesteigert werden.

Janovic und Grasser [76] führen im Zuge der Neufassung der DIN 4223:1958 [1] umfangreiche Versuche zum Querkrafttragverhalten von Porenbetonbalken durch. Dabei erkennen sie, dass eine Neubetrachtung der Biegetragfähigkeit erforderlich ist. Getestet werden Einfeldbalken mit und ohne Querkraftbewehrung. Neben Anordnung und Durchmesser der Bewehrung wird die Schubschlankheit variiert.

Hinsichtlich der Biegetragfähigkeit stellen Janovic/Grasser fest, dass die Völligkeitswerte der Spannungsverteilung in der Biegedruckzone mit $\alpha_0 = 0,63$ (im Mittel) größer als die von Schäffler [159] ermittelten Werte sind. Der Verlauf der Druckspannungen in der Biegedruckzone kann ausreichend genau durch eine quadratische Parabel mit $\alpha_0 = 2/3$ beschrieben werden. Für die Neufassung der DIN 4223 geben sie die Empfehlung, eine bilineare Spannungs-Dehnungslinie zu verwenden (Abbildung 2.14). Die Sicherheitsbeiwerte betragen 1,75 bei Versagen mit und 2,1 bei Versagen ohne Vorankündigung. Eine weitere Aussage bezieht sich auf die Längsbewehrung in der Biegedruckzone. Diese sollte nicht in Rechnung gestellt werden.

Für Balken ohne Querkraftbewehrung führen Janovic/Grasser Untersuchungen mit verschiedenen Schubschlankheiten $a/h = 2 ; 3,5$ und 5 durch. Bei Balken mit Schubschlankheiten von 2 und 3,5 tritt der Bruch durch eine Ausbildung von Schrägrissen vom Auflager zur Lasteinleitungsstelle ein. Bei Balken mit größeren Schubschlankheiten versagt die Druckzone. Bei keinem der acht untersuchten Balken tritt ein Versagen der Endverankerung als

2.2 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Porenbetonelementen

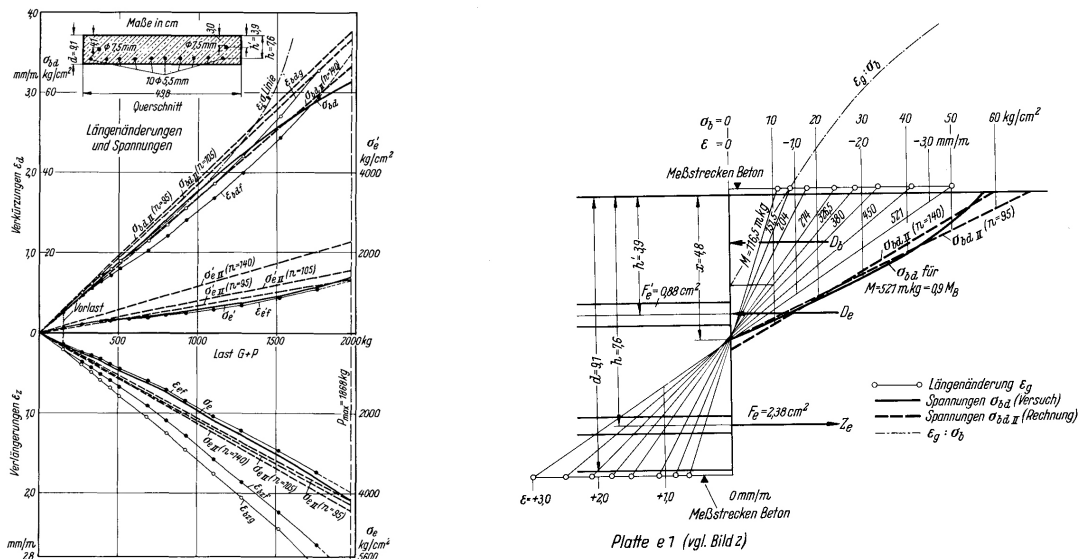


Abbildung 2.13: Biegeprüfung und Spannungsverteilung für Platte 1 [159]

primäre Versagensursache auf. Der Bruch erfolgt jeweils ohne Vorankündigung. Das Berechnungsmodell wird aus einem Sprengwerk gebildet. Als Ergebnis geben sie die Empfehlung, die zulässigen Schubspannungen nach DIN 4223:1958 [1] von $\tau_o = 1,2kp/cm^2$ (für GSB 50) auf $\tau_o = 1,0kp/cm^2$ herabzusetzen. Werte für andere Porenbetonfestigkeiten werden extrapoliert.

Für die Balken mit Querkraftbewehrung können als Versagensursachen neben einem Abspalten der Betondeckung der Bügel Schubdruckbrüche identifiziert werden. Diese treten in der Nähe der Lasteinleitungsstelle auf und gehen mit einem großen Schlupf der Endverankerung der Längsbewehrung einher. Die Rissbilder der Balken mit Querkraftbewehrung ähneln denen ohne Bügel, so dass eine Sprengwerkwirkung vermutet wird. Janovic/Grasser vermuten, dass das Querkrafttragssystem vom Mörschen Fachwerkmodell mit parallelen Gurten und unter 45° geneigter Druckstrebe abweicht. Es werden unterschiedliche Stabwerke auf ihre Eignung zur Beschreibung des inneren Lastflusses untersucht. Neben einem Fachwerk mit geneigtem Druckgurt und einem mehrfachen Fachwerk fällt die Wahl auf ein durch ein Sprengwerk überlagertes Fachwerk mit parallelen Gurten und Druckstreben unter 45° . Die Versuche zeigen, dass die Sprengwerkwirkung für Schubschlankheiten ab $a/h = 3,5$ sehr gering ausfällt, so dass die volle Querkraft den Bügeln zugeordnet werden muss. Bei kleineren Schubschlankheiten nimmt die Sprengwerkwirkung zu, ist aber deutlich kleiner als bei Balken ohne Querkraftbewehrung. Dies wird darauf zurückgeführt, dass ein Teil der Biegezugbewehrung bereits durch die Fachwerkwirkung beansprucht wird und nur ein Teil für das Zugband des Sprengwerkes zur Verfügung steht. Dieses Bemessungsmodell findet Eingang in die Norm von 1978 [2].

Es zeigt sich, dass ein Bügelabstand kleiner als 10cm kaum die Tragfähigkeit beeinflusst, obwohl sich der Querkraftbewehrungsgrad weiter erhöht. Eine Vergrößerung der Bügelabstände hat dagegen einen Einfluss auf die Tragfähigkeit. Durch größere Bügelabstände vermindert sich die Fachwerksteifigkeit und das Sprengwerk muss einen höheren Teil der Last abtragen. Daraus folgen größere Rissbreiten und eine stärkere Beanspruchung der Endverankerung.

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

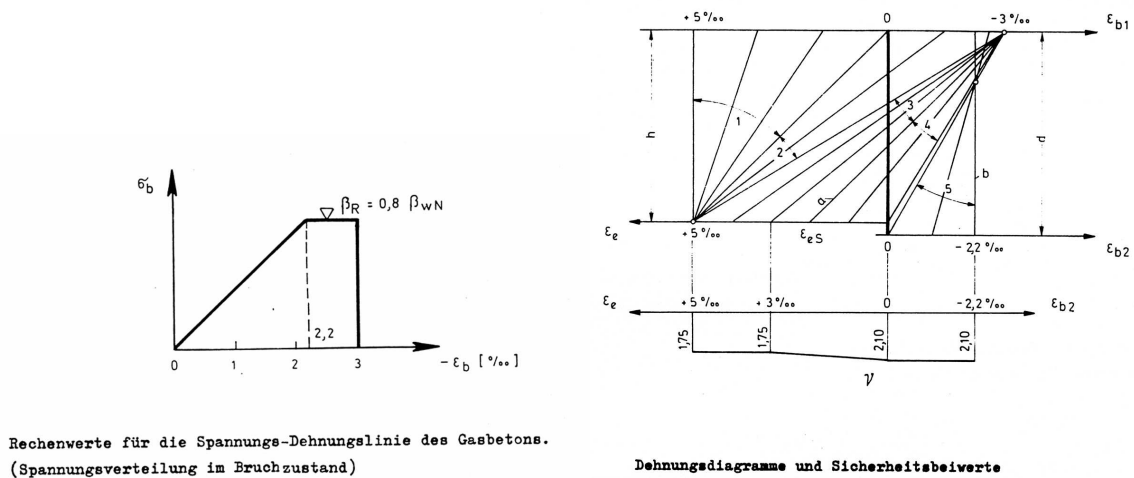


Abbildung 2.14: Spannungs-Dehnungslinie und Dehnungsdiagramme für die Bemessung [76]

Weitere Überlegungen stellen Janovic/Grasser über die Verankerung der Bügel durch Längsstäbe an. Sie verwenden das Bettungszifferverfahren und idealisieren den Verankerungsbereich als dünne weiche Schicht auf unnachgiebigem Grund. Sie führen diese Annahme darauf zurück, dass in einer eng begrenzten Zone unterhalb des Verankerungsstabes die Zellwände und somit die Poren zerstört bzw. komprimiert werden. Die Schicht mit Zellwandversagen ist dünn und die bezogenen Verformungen sind groß. Der ungestörte Porenbeton besitzt im Vergleich eine hohe Steifigkeit. Als Berechnungsmodell wählen sie den unendlich langen elastisch gebetteten Balken. Für die Bettungssteifigkeit finden sie durch Auswertung der Versuche von Schäffler [160] und Sell/Zelger [165] Werte von $c = 1000 \dots 2000 \text{kp/cm}^2$. Als "vertretbare,, Verschiebung des Verankerungsstabes sollen $0,45 \text{mm}$ nicht überschritten werden.

Bezüglich der Verankerung der Biegezugbewehrung am Auflager werden als Restzugkraft

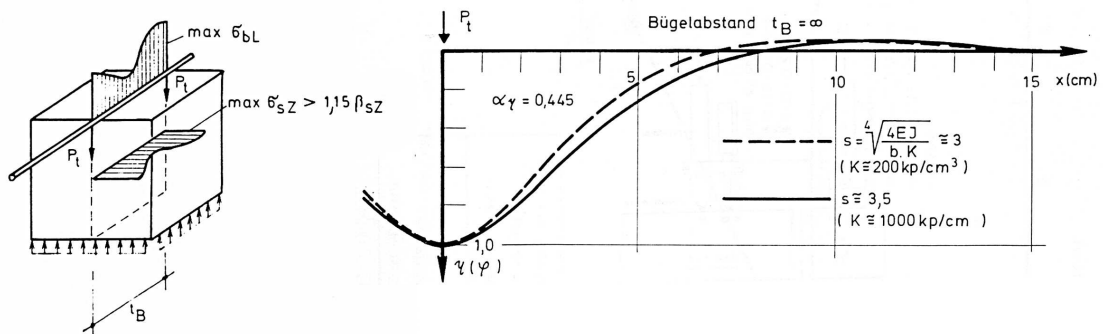


Abbildung 2.15: Modell elastisch gebetteter Balken für den Verankerungsstab [76]

2.2 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Porenbetonelementen

in Abhängigkeit der Bügelabstände Werte zwischen dem 1,54-fachen und dem 2,78-fachen der Querkraft angegeben. Ein Nachweisverfahren für die Verankerung wird nicht entwickelt.

Ergänzende Untersuchungen zur Tragfähigkeit der Endverankerung führen Janovic und Grasser [75] Ende der 1970er Jahre durch. Neben der Entwicklung eines Bemessungsverfahrens steht die konstruktive Ausbildung der Endverankerung im Vordergrund. Die Erkenntnisse der Untersuchung werden in Abschnitt 4.3 näher diskutiert.

Briesemann [23] wertet in der Literatur dokumentierte und eigene Schubversuche an Porenbetonplatten und -balken mit dem Ziel aus, Bemessungsregeln zur Beurteilung der Tragfähigkeit von Bauteilen mit bzw. ohne Querkraftbewehrung zu erstellen. Er beurteilt die einzelnen Parameter hinsichtlich ihres Einflusses auf die Riss- bzw. Bruchlast anhand von statistischen Betrachtungen. Er analysiert bekannte Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens und leitet Bemessungsformeln ab. Briesemann hält dabei die Verwendung halbempirischer Zusammenhänge für besonders sinnvoll. Aufgrund der werksmäßigen Herstellung können Probekörper aus der aktuellen Produktion verwendet werden, so dass mögliche Verfälschungen infolge Herstellung unter Laborbedingungen sowie eine Verminderung der Versuchskörperabmessungen nicht vorhanden sind. Durch empirische Formeln können Effekte wie die Mitwirkung des Porenbetons auf Zug auf einfachem Wege berücksichtigt und eine gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen erzielt werden.

Für nicht querkraftbewehrte Porenbetonbalken und -platten erkennt Briesemann ein Tragverhalten, das dem des Stahlbetons ähnlich ist. Den Hauptunterschied sieht er im fehlenden Einfluss der Rissuferverzahnung, da die fein gemahlene Zuschläge wesentlich weniger uneben als bei Normalbeton sind. Eine gleichgroße Rissfläche besitzt aufgrund der Luftporen eine viel kleinere Fläche zur Übertragung von Reibungskräften. Für kleine Schubschlankheiten sieht Briesemann ein Sprengwerk mit Zugband als Modellvorstellung, das für große Schubschlankheiten in ein Zahnmodell übergeht. Die Schubbruchlast ist mit folgender Beziehung angegeben:

$$V_u = b \cdot z \cdot \beta_D \cdot \rho_l \cdot \left[A + \frac{B}{(a/h)} \right] [N]. \quad (2.2)$$

Für die Parameter A und B (Tabelle 2.1) unterscheidet er in Platten- und Balkentragwerke, wobei Grenzwerte für die Abmessungen angegeben sind. Als Einflussparameter auf die Bruchlast definiert Briesemann die Bauteilabmessungen (b und z), die Festigkeit des Porenbetons (β_D), den Längsbewehrungsgrad (ρ_l) und die Schubschlankheit (a/h). Den Einfluss des Längsbewehrungsgrades ρ_l auf die Querkrafttragfähigkeit konnte Briesemann anhand der Versuchswerte nicht eindeutig feststellen. Da er aber grundsätzlich von einem Einfluss ausgeht, nimmt er den Parameter in die Bemessungsgleichung 2.2 auf. Dabei beruft er sich auf in der Literatur dokumentierte Untersuchungen [66].

Bauteil	Parameter A	Parameter B
Porenbetonplatte	0,0522	1,0776
Porenbetonbalken	0,0789	0,3267

Tabelle 2.1: Parameter für die Ermittlung der Schubbruchlast nach Gleichung 2.2

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

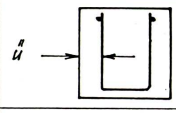
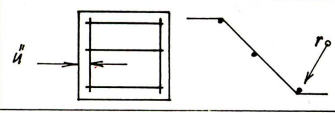
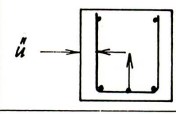
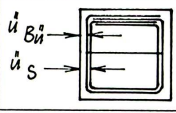
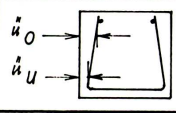
Bezeichnung	Form der Schubbewehrung, Betondeckung der Bügel oder der aufgebogenen Eisen	$k_U^{e,Q}$
A	 $\dot{u} = 37,4 \text{ mm}$	0,575
C	 $\dot{u} = 27,0 \text{ mm}$ $r = 7,5 \phi$	1
A + C	 $\dot{u} = \text{keine Angaben}$	1
D + D _S	 $\dot{u}_{B\dot{u}} = 15,0 \text{ mm}$ $\dot{u}_S = 21,0 \text{ mm}$	1
B	 $\dot{u}_O = 31,0 \text{ mm}$ $\dot{u}_U = 17,0 \text{ mm}$	1

Abbildung 2.16: Formen der Querkraftbewehrung in den Untersuchungen von Briesemann [23]

Bis zum Entstehen der ersten Schubrisse beobachtet Briesemann bei Bauteilen mit Querkraftbewehrung ein Tragverhalten, das dem vergleichbarer Bauteile ohne Querkraftbewehrung stark ähnelt. Diese Beobachtungen decken sich mit denen von Rüschi [157] bzw. von Janovic und Grasser [76]. Die Steigerungsmöglichkeit der Last bis zum Bruch fällt geringer aus als beim Stahlbeton. Er stellt ebenfalls fest, dass der Querkraftbewehrungsgrad kein hinreichender Parameter zur Beurteilung der Tragfähigkeit ist. Dafür besitzt die Form der Bügel einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss (Abbildung 2.16). Den Grund sieht er in der Verankerung der Bewehrung. Als wirksamste und in der Herstellung wirtschaftlichste Art der Querkraftbewehrung gibt Briesemann den senkrechten, offenen Bügel an, wenn er über eine ausreichende seitliche Betondeckung verfügt. Für die Tragfähigkeit ist ein empirischer Zusammenhang definiert.

$$V_u = \frac{b \cdot z \cdot \beta_D \cdot \rho_l \cdot \eta}{k_U^{e,Q}} \cdot \left[0,1383 + \frac{1,497}{(a/h)^2} \right] [N] \quad (2.3)$$

Zusätzlich zu Gleichung 2.2 wird die Querkraftbewehrung durch den Schubdeckungsgrad η und einen Faktor für die Form der Bügel $k_U^{e,Q}$ berücksichtigt (Abbildung 2.16). Die Schubslankheit a/h wird quadratisch eingeführt, da eine bessere Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen erzielt werden kann.

Als Tragmodell stellt sich Briesemann ein durch mehrere Sprengwerke überlagertes Fachwerkmodell vor (Abbildung 2.17). Aus der in Auflagernähe beobachteten Rissbildung leitet er eine Neigung des Obergurtes ab. Die Verwendung der Sprengwerke begründet er zum einen durch die großen gemessenen Zugbanddehnungen in Auflagernähe und zum anderen durch die flachen Schubrisse, die im Verlauf mit den beobachteten Schrägrissen in den Balken

2.2 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Porenbetonelementen

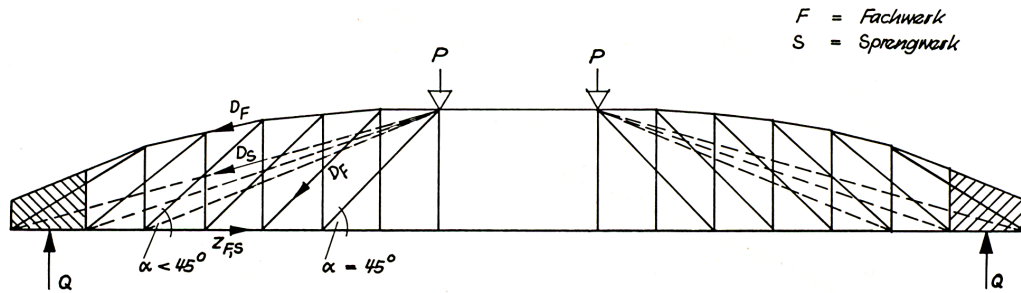


Abbildung 2.17: Tragmodell für querkraftbewehrte Porenbetonbalken nach Briesemann [23]

übereinstimmen. Die Überlegungen Briesemanns hinsichtlich eines geneigten Druckgurt des Fachwerkmodells scheinen fraglich und werden z.B. durch Wehr [188] angezweifelt. Durch den unvollständigen Verbund zwischen Bewehrung und Porenbeton und der notwendigen diskreten Lastübertragung ist die Lage des Druckgurtes geometrisch bedingt.

Regan [145] führt experimentelle Untersuchungen zur Querkrafttragfähigkeit sowohl an Platten als auch an bügelbewehrten Balken durch. Für Platten ohne Querkraftbewehrung leitet er ein Bogen-Zugband-Modell ab, dessen Tragfähigkeit durch die Festigkeit der Endverankerung des Zugbandes bestimmt wird. Für Balken mit Querkraftbewehrung schlägt er die Verwendung eines Fachwerkmodells mit unter 45° geneigten Druckstreben vor. Bei insgesamt 19 Versuchen mit Querkraftbewehrung werden Querkraftbewehrungsgrad und Neigung der Bügel, Längsbewehrung, Porenbetonfestigkeit und Schubschlankheit variiert. Vier Balken sind mit außenliegender Querkraftbewehrung hergestellt. Regan stellt eine Steigerung der Bruchquerkraft gegenüber nicht querkraftbewehrten Balken von 17% bei Verwendung lotrechter Bügel und bis zu 50% bei Verwendung geneigter Bügel fest.

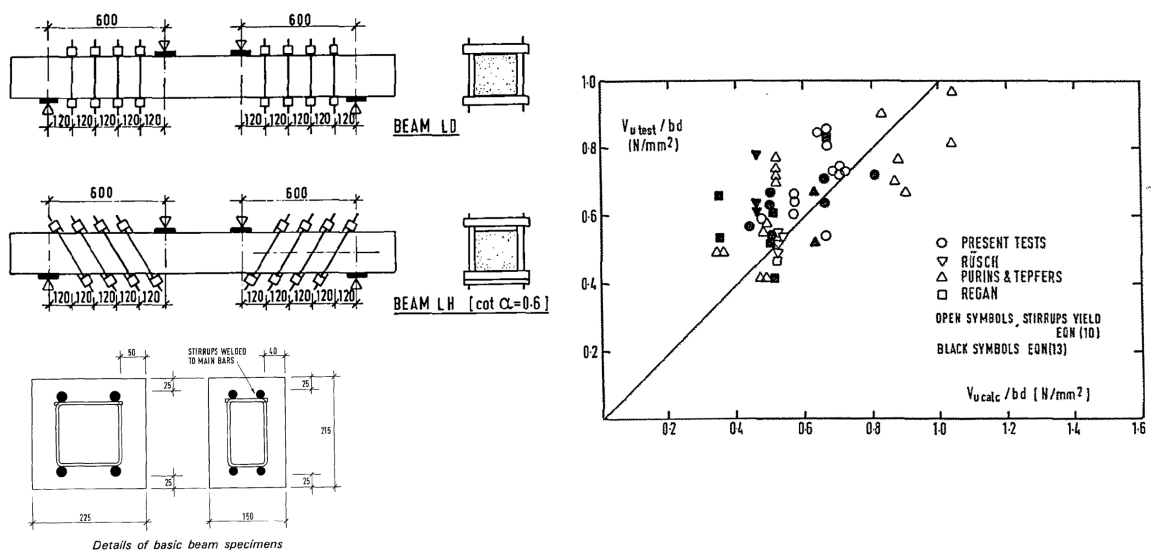


Abbildung 2.18: Balkenversuche nach Regan [145]

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

Hinsichtlich der Versagenskriterien unterscheidet Regan drei Fälle. Die Tragfähigkeit der Querkraftbewehrung wird aus der Fachwerkanalogie abgeleitet

$$V_u = \frac{A_{sw} \cdot f_y \cdot z}{s \cdot \sin\alpha}. \quad (2.4)$$

Das Versagen der geneigten Betondruckstrebe ist durch eine Begrenzung der Spannungen bestimmt

$$\frac{V_u}{b \cdot d} \leq 0,12 \cdot f_{cc} \cdot (1 + \cot\alpha). \quad (2.5)$$

Die Tragfähigkeit der Verankerung ist durch eine Begrenzung der Leibungsspannungen nachzuweisen

$$V_u \leq \frac{\sigma_b}{2} \cdot z \cdot (1 + \cot\alpha) \cdot \left(n \cdot d_{sl} + \frac{d_w \cdot b_w}{s} \right). \quad (2.6)$$

Regan gibt als möglichen Mittelwert für die Leibungspressung $\sigma_b = 7N/mm^2$ an, ohne diese Annahme näher zu begründen. Alternativ schlägt Regan anstelle von Gleichung 2.6 eine Begrenzung von $V_u/(bd)$ auf einen empirischen Grenzwert von $0,5N/mm^2$ für lotrechte Bügel bzw. $0,65N/mm^2$ für 45-60° geneigte Bügel vor.

Aroni und Cividni [16] untersuchen Ende der 1980er Jahre in der Literatur dokumentierte Versuche zu Porenbetonplatten ohne Querkraftbewehrung (z.B. Briesemann [23], Regan [145], u.a.). Sie analysieren insgesamt 271 Versuche aus 11 Reihen. Ausgehend von den Vorgaben des ACI Building Code 318 für Normalbeton entwickeln sie eine empirische Beziehung für die zulässige Schubspannung

$$\tau_o = \alpha_0 \cdot f_{cc} + \alpha_1 \cdot \frac{\rho_l \cdot a}{h}. \quad (2.7)$$

Eine parallele Analyse wird mit Gleichung

$$\tau_o = \alpha_0 \cdot f_{cc} + \alpha_1 \cdot \rho_l + \alpha_2 \cdot \frac{a}{h} \quad (2.8)$$

durchgeführt. Beide Beziehungen berücksichtigen neben der Betonfestigkeit f_{cc} den Längsbewehrungsgrad ρ_l und die Schubschlankheit a/h . Die Parameter α_0 , α_1 und α_2 werden mittels Regressionsanalyse bestimmt. Obwohl Aroni/Cividni für Gleichung 2.8 statistische Vorteile sehen, schlagen sie eine auf Gleichung 2.7 basierende Beziehung für Bemessungsaufgaben vor.

Ausgehend von den Betrachtungen zu Bauteilen ohne Querkraftbewehrung stellt Aroni [14] ähnliche Überlegungen zu querkraftbewehrten Bauteilen an. Gleichung 2.7 wird um einen Anteil der Bewehrung erweitert

$$\tau_o = \alpha_0 \cdot f_{cc} + \alpha_1 \cdot \frac{\rho_l \cdot a}{h} + \alpha_2 \cdot \rho_w \cdot f_{yw}, \quad (2.9)$$

wobei ρ_w den Querkraftbewehrungsgrad und f_{yw} die Streckgrenze der Bewehrung repräsentieren. Die Parameter α_0 bis α_2 werden wiederum anhand von in der Literatur dokumentierten Versuchen (Briesemann [23], Regan [145] und Matsumura [116]) durch Regressionsanalyse bestimmt. Aroni leitet eine Bemessungsgleichung für Bauteile aus Porenbeton mit Querkraftbewehrung ab. Diesem Vorgehen kann allerdings nur wenig Bedeutung beigemessen werden, da der Querkraftbewehrungsgrad in Hinblick auf die Tragfähigkeit nur eine geringe Auswirkung hat.

2.2 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Porenbetonelementen

Janovic und Grasser [74] zweifeln daran, dass für Porenbetonbauteile ohne Querkraftbewehrung eine Verwendung des Zahnmodells wie beim Normalbeton geeignet ist. Sie begründen diese Einschätzung zum einen mit den geringen Verbundspannungen zwischen Porenbeton und Bewehrung und zum anderen mit der fehlenden bzw. unzuverlässigen Reibung in den Rissen. Eine mögliche Verdübelungswirkung der Bewehrung sehen sie als keine sichere Kenngröße an.

Daschner [37] führt Ende der 1990er Jahre umfangreiche Versuche zu längsbewehrten Porenbetonbauteilen ohne Querkraftbewehrung durch. Hierbei handelt es sich um insgesamt 31 einachsige gespannte Platten, die nach DIN 4223:1978 [2] bemessen sind. Neben der Frage der Querkrafttragfähigkeit beschäftigt sich Daschner vor allem mit der Problematik der Endverankerung und der Ermittlung des Versatzmaßes. Es wird unter anderem der Einfluss der Porenbetonfestigkeit, des Längsbewehrungsgrades, der Schubschlankheit und der Belastungsanordnung untersucht. Die Längsbewehrung bei vier der betrachteten Platten wird mit Endwinkeln verschweißt, um einen Schlupf der Bewehrung weitestgehend auszuschließen.

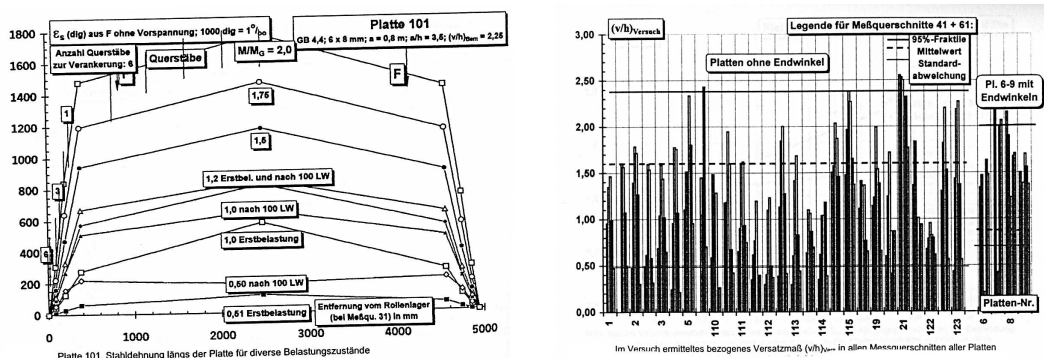


Abbildung 2.19: Stahldehnung längs der Platte und bezogenes Versatzmaß [37]

Um die Beanspruchung der Endverankerung und das Versatzmaß zu ermitteln, führt Daschner Messungen der Stahldehnung entlang der Längsachse durch. Er stellt einen völligen Zugkraftverlauf (Abb. 2.19, links) und entsprechende Beanspruchungen der Endverankerung fest. Das Versatzmaß wird im Wesentlichen durch die Querstabordnung zur Verankerung der Längsbewehrung bestimmt. Daher spricht Daschner vom effektiven Versatzmaß. Die rechte Grafik 2.19 stellt das bezogene Versatzmaß v/h aller Messquerschnitte dar. Als Mittelwert wird $v/h = 1,6$ für Platten ohne und $v/h = 0,85$ für Platten mit Endwinkeln angegeben. Daschner wertet die Versuche hinsichtlich des bezogenen Versatzmaßes und der Bruchsicherheit statistisch aus. Er ermittelt für v/h einen Variationskoeffizienten von ca. 30% und einen 95%-Fraktilewert von 2,3, welcher Bemessungsaufgaben zugrunde gelegt werden soll. Der Mittelwert der Bruchsicherheit liegt bei 2,23 für Platten ohne und 2,37 für Platten mit Endwinkeln.

Weitere Untersuchungen Daschners beschäftigen sich mit der Frage der thermischen Vorspannung [41], dem Kriechen des unbewehrten Porenbetons [39] und dem Verankerungskriechen [38].

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

Boutros und Saverimutto [22] führen Untersuchungen an bewehrten Porenbetonstürzen durch, wobei das Hauptaugenmerk auf der Verankerungsfestigkeit der Bewehrungsstäbe liegt. Anhand von Auszugsversuchen möchten sie Erkenntnisse über die Verankerungssteifigkeit gewinnen. Diese vergleichen sie mit Versuchen an Porenbetonstürzen, deren Bewehrung aus Schubleitern besteht. Boutros/Saverimutto stellen das Gleichgewicht am Schrägriss auf (Abbildung 2.20), wobei für die Zugkraft T der unteren Längsbewehrung die aus den Auszugsversuchen ermittelte Verankerungskraft gesetzt wird. Die Kräfte V_C und V_T stellen die resultierenden Querkraftanteile des ungerissenen Betons und der Querkraftbewehrung dar. Die Betondruckspannungen infolge der resultierenden Druckkraft C liegen für Versuche mit einem engen Abstand der Stäbe der Schubleitern im Bereich der Druckfestigkeit, bei großen Abständen jedoch deutlich darunter. Dies wird auf ein Verankerungsversagen zurückgeführt. Ein Berechnungsmodell zur Beschreibung der Tragfähigkeit von Porenbetonbauteilen wird durch die Autoren nicht entwickelt.

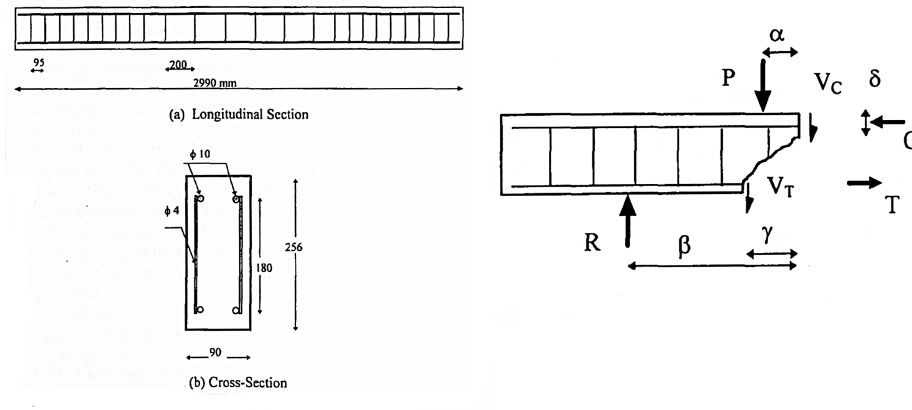


Abbildung 2.20: Gleichgewicht am Schrägriss nach Boutros/Saverimutto [22]

Wehr [188] führt experimentelle Untersuchungen zum Tragverhalten von querkraftbewehrten Elementen aus Porenbeton durch und setzt dabei drei Schwerpunkte:

- Beschreibung des Bruchwiderstandes von Porenbeton unter räumlicher Beanspruchung
- Tragverhalten der Verankerungsstäbe
- Tragverhalten querkraftbewehrter Porenbetonbalken.

Daraus leitet er ein umfangreiches Versuchsprogramm mit dem Ziel der Erstellung eines Bemessungskonzeptes ab.

Abbildung 2.21 zeigt den Versuchsaufbau, einen verformten Verankerungsstab nach dem Bruch und die gemessenen Last-Verformungsbeziehungen für den Verankerungsstab. Im Bruchzustand treten, in Abhängigkeit des Abstandes der Lasteinleitungspunkte, teilweise große plastische Deformationen des Verankerungsstabes auf. Unmittelbar unterhalb des Verankerungsstabes befindet sich eine Schicht verdichteten Porenbetons. Hier sind nahezu keine Luftporen

2.2 Modelle zur Querkrafttragfähigkeit von Porenbetonelementen

mehr enthalten. Wehr gibt die Schicht verdichteten Materials mit dem Zwei- bis Dreifachen des Verankerungsstabdurchmessers an, wobei unmittelbar an der Lasteinleitungsstelle der Bereich am größten ist. Wehr stellt bei den Last-Verformungs-Kurven einen Knick im Anstieg der Kurven fest. Dieser zeigt einen starken Abfall der Steifigkeit und tritt für alle Abstände der Lasteinleitung auf. Unterhalb des Knickpunktes bildet die Steifigkeit eine Konstante. Das Abflachen der Kurve tritt auf, wenn die Leibungspressung die Druckfestigkeit des Porenbetons erreicht. Wehr stellt fest, dass das Modell des unendlich elastisch gebetteten Balkens aufgrund der Annahmen linearer Elastizität die Verformungen unterschätzt. Er schlägt daher ein alternatives Berechnungsverfahren auf Basis eines abstrahierten statischen Modells vor. Ausgehend von der Annahme, dass sich die Leibungspressung gleichmäßig unter dem Verankerungsstab verteilt, betrachtet er einen Durchlaufträger, der an den Lasteinleitungsstellen gestützt und durch die Leibungspressung belastet ist. Bilden sich an den Lasteinleitungspunkten plastische Gelenke, degeneriert das System zu Einfeldträgern.

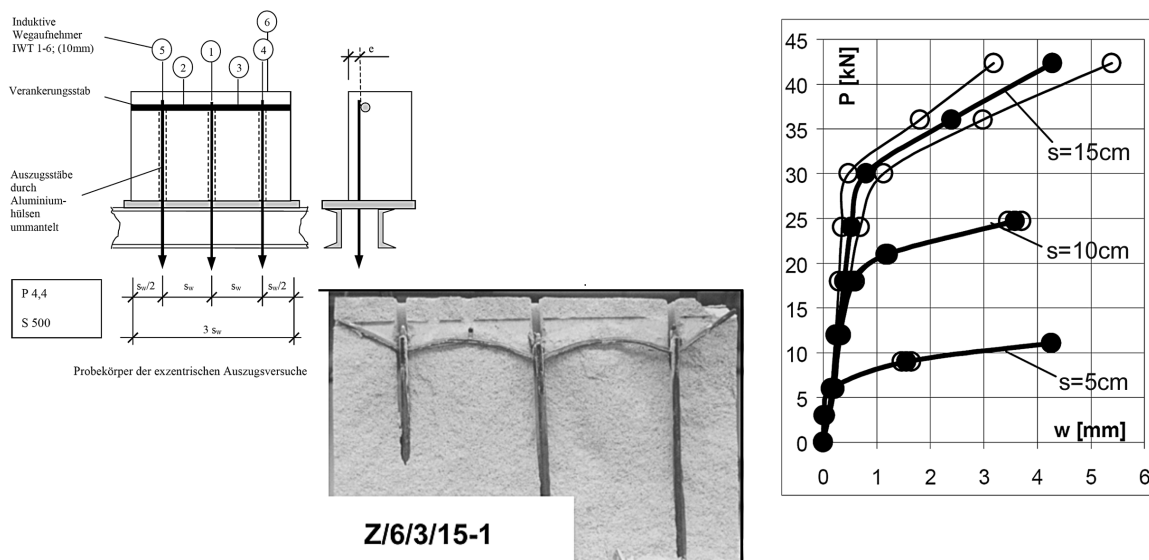


Abbildung 2.21: Auszugsversuche nach Wehr [188]

Im zweiten Teil der Arbeit befasst sich Wehr mit der Durchführung und Auswertung von Balkenversuchen. Neben Bügelabstand und Längsbewehrungsgrad werden die Verankerungsstabdurchmesser und die Belastungsart variiert. Ein besonderes Augenmerk legt Wehr auf die Messung der Dehnungen in den Bügeln und der Längsbewehrung, um den inneren Kräfteverlauf näher zu beschreiben. Er bestimmt die größten Bügelbeanspruchungen bei einem Bügelabstand von 10cm. Größere Abstände führen in Folge der höheren Leibungspressungen und entsprechend größeren Verformungen der Verankerungsbereiche zu einer Entlastung der Bügel und einer verstärkten direkten Lastabtragung. Für die Stahldehnungen des Zuggurtes zeigt sich ein ähnliches Bild zu den Versuchen von Daschner [37] an nicht querkraftbewehrten Porenbetonelementen. Die Völligkeit der Zugkraftlinie ist größer als bei vergleichbaren Stahlbetonelementen. Die Versuche Wehrs bestätigen die in der Literatur dokumentierte Aussage, dass der Querkraftbewehrungsgrad aufgrund der geringen Auslastung der Querkraftbewehrung nicht zu einer Beurteilung der Querkrafttragfähigkeit herangezogen werden kann ([23], [76]).

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

Wehr entwickelt für vergleichende Berechnungen ein Stabwerksmodell, das auf einem parallelgurtigen Fachwerk und mehreren überlagerten Sprengwerken basiert. Er lehnt sich an die Überlegungen Thürlimanns [179] zur fächerförmigen Ausbreitung von Druckfeldern in Bereichen der Krafteinleitung an. Es werden vom Auflager bzw. vom Punkt der Lasteinleitung Druckstreben zu allen gegenüberliegenden Knoten eingeführt (Abbildung 2.22, links). Die durch die Bügel definierten vertikalen Zugstreben des Fachwerkes werden durch eine modifizierte Beziehung für die Dehnsteifigkeit modelliert.

Auf der rechten Seite von Abbildung 2.22 ist der Lastfluss für eine Einheitslast von $1kN$ dargestellt. Diagonalstäbe mit Zugbeanspruchungen werden im Berechnungsmodell sukzessive entfernt. Dies tritt bei allen Stäben mit einem Winkel größer als 45° auf. Der Lastfluss des Modells zeigt, dass der größte Teil der Belastung direkt über die Sprengwerkswirkung in das Auflager geleitet wird. Ein Vergleich der berechneten Bruchquerkräfte mit den Versuchswerten zeigt, dass das Modell für große Bügelabstände die zulässigen Belastungen überschätzt.

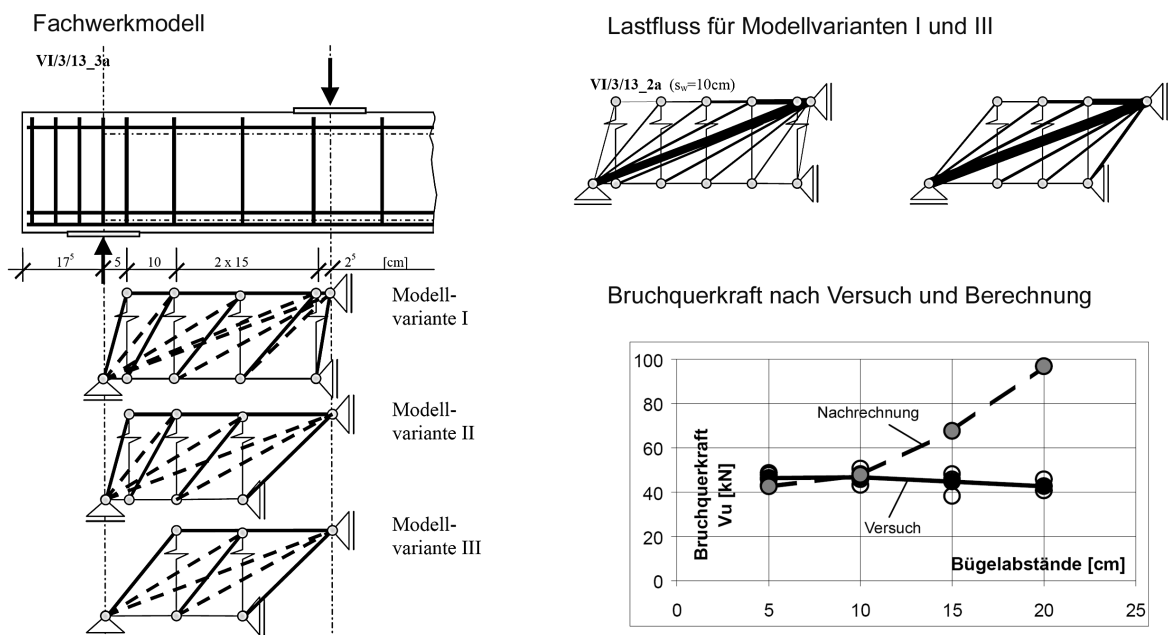


Abbildung 2.22: Fachwerkmodell nach Wehr [188]

Hinsichtlich einer Bemessungsaufgabe schlägt Wehr ein Verfahren der variablen Druckstrebenneigung basierend auf den Überlegungen Thürlimanns [179] vor. Er identifiziert anstelle eines Fließens der Querkraftbewehrung ein analoges Verhalten der Bügelbewehrung aufgrund der Nachgiebigkeit der Verankerung. Als relevante Versagenszustände werden die Tragfähigkeit der Verankerung der Querkraftbewehrung, die Tragfähigkeit der Querkraftbewehrung und die Tragfähigkeit der Betondruckstrebe angesehen. Zusätzlich ist die Neigung der Betondruckstrebe zu begrenzen und die Verankerung der Längsbewehrung nachzuweisen.

2.3 Entwicklung der Normen für bewehrte Porenbetonbauteile

Desai [43] führt Versuche an Dachplatten aus Porenbeton durch. Die Platten besitzen keine Querkraftbewehrung, haben eine Spannweite von $2,5m$ und einen Querschnitt von $600mm \times 200mm$. Desai vergleicht seine Versuchsergebnisse mit den Bemessungsregeln des Europäischen Normenentwurfs prEN 12602. Die Platten versagen bei einer Querkraft, die in etwa der zweifachen Bemessungslast V_{Rd1} entsprechen. Aufgrund der geringen Auslastung der Bewehrung regt er die Möglichkeit an, nicht-metallische Werkstoffe für die Bewehrung zu verwenden, um Problemen beim Korrosionsschutz aus dem Weg zu gehen.

2.3 Entwicklung der Normen für bewehrte Porenbetonbauteile

Die Entwicklung der Normen für bewehrte Porenbetonbauteile in Deutschland beginnt in den 1950er Jahren. Die Untersuchungen von Rüschi [157] und Schäffler [159] bilden die Grundlage der DIN 4223:1958 [1]. Der Nachweis der Querkrafttragfähigkeit wird über die Schubspannungen geführt, die aus der Querkraft und der Querschnittsgeometrie ermittelt werden. Für rechteckige Querschnitte gilt:

$$\tau = \frac{Q}{b \cdot z}. \quad (2.10)$$

Die Spannungen τ sind zulässigen Schubspannungen τ_o gegenüberzustellen. Grundlage dieses empirischen Zusammenhangs bildet die Beobachtung Rüschi's, dass sich nach der Querkraft-Rissbildung kein stabiler Gleichgewichtszustand mehr einstellen kann. Die Norm beschränkt sich auf plattenartige Bauteile ohne Querkraftbewehrung.

Aufbauend auf den Untersuchungen von Janovic und Grasser [76] wird die Neufassung der DIN 4223:1978 [2] um die Nachweise der Tragfähigkeit querkraftbewehrter Bauteile erweitert. Für den Nachweis wird auf das Fachwerkmodell nach Mörsch zurückgegriffen. Die Verwendung von Druckstrebenneigungen kleiner als 45° ist nicht zugelassen. Der Nachweis der Druckstrebe ist durch Einhaltung einer zulässigen Schubspannung zu führen. Nicht querkraftbewehrte Bauteile werden analog zur Norm von 1958 nachgewiesen.

Die zulässige Beanspruchung der Endverankerung ist in Abhängigkeit des Verankerungsstabdurchmessers, des Bügelabstandes und einer zulässigen Leibungsspannung definiert. Die Leibungsspannung ist so gewählt, dass ein Abplatzen der seitlichen Betondeckung vermieden wird. Hierzu bestehen Abhängigkeiten zum Stabdurchmesser, der Betondeckung und der Festigkeit des Porenbetons. Ein Nachweis der Querkraftbewehrung ist normativ nicht erfasst, da als Versagenskriterium der Verankerungsbruch angesehen wird.

Die Neufassung der Norm DIN 4223:2003 [5] orientiert sich weitestgehend am europäischen Normenentwurf prEN 12602 [131]. Für nicht querkraftbewehrte Elemente wird ein Bogen-Zugband-Modell zugrunde gelegt. Die Steifigkeit des Zugbandes ist durch den Längsbewehrungsgrad ρ_1 bestimmt und stellt einen maßgebenden Parameter für die Tragfähigkeit des Bauteils dar.

$$V_{Rd1} = \tau_{Rd} \cdot (1 - 0,83 \cdot d) (1 + 240 \cdot \rho_1) \cdot b_w \cdot d \quad (2.11)$$

Mit steigendem Bewehrungsgrad nimmt die Querkrafttragfähigkeit zu. Gleichung 2.11 hat einen empirischen Charakter und basiert auf der Auswertung vieler Versuche.

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

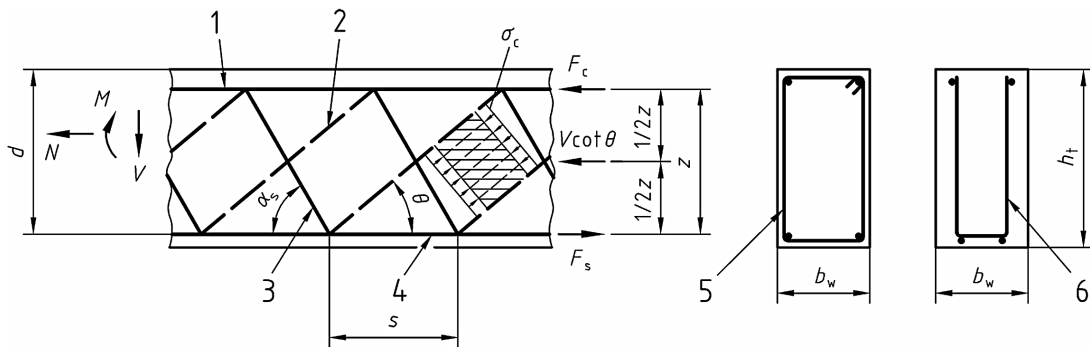
Der Bemessungswert V_{Rd2} hat ebenfalls empirischen Charakter und beschreibt die Tragfähigkeit der geneigten Porenbetondruckstrebe des Fachwerkes. Er ist in der Regel nur für auflagernahe Einzellasten maßgebend.

$$V_{Rd2} = 0,36 \cdot \nu \cdot b_w \cdot d \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_{c2}} \quad (2.12)$$

Der Wert V_{Rd3} beschreibt die Tragfähigkeit der Querkraftbewehrung und deren Verankerung. Er setzt sich additiv aus dem Anteil des unbewehrten Querschnittes V_{Rd1} und dem Anteil der Querkraftbewehrung V_{wd} zusammen. Die Verankerungsproblematik wird durch eine aufnehmbare Stahlspannung in den Bügeln (σ_{swd}) berücksichtigt.

$$V_{wd} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot z \cdot \sigma_{swd} \quad (2.13)$$

$$V_{Rd3} = V_{Rd1} + V_{wd} \quad (2.14)$$



Legende

- | | | | |
|---|--------------------|---|-------------------------------------|
| 1 | Druckzone | 4 | Zugzone |
| 2 | Druckstreben | 5 | Beispiel eines geschlossenen Bügels |
| 3 | Querkraftbewehrung | 6 | Beispiel eines offenen Bügels |

Abbildung 2.23: Querkraftmodell nach [9]

Die Regelungen in DIN 4223:2003 [5] gehen von lotrechten Bügeln und einer Druckstrebenneigung von 45° aus. Das Konzept der variablen Druckstrebenneigung wird nicht verwendet, da sich bei flacheren Winkeln größere Beanspruchungen der Umlenkbereiche (Fachwerkknoten) und größere Verankerungskräfte der Zugbewehrung ergeben [163].

Die europäische Norm DIN EN 12602:2008 [9] schließt die Verwendung von geneigten Bügeln bzw. flacheren Druckstreben nicht aus (Abbildung 2.23). Es besteht die Forderung, dass die Querkraftbewehrung mit der Längsbewehrung verschweißt ist und dass der Abstand der Bügel $0,9 \cdot d / \sin \alpha_s$ nicht übersteigt.

Der Querkraftwiderstand für Bauteile ohne Querkraftbewehrung V_{Rd1} wird analog zu DIN 4223:2003 [5] ermittelt (Gleichung 2.11). Der Beitrag der Querkraftbewehrung ergibt sich unter Berücksichtigung des Neigungswinkels α_s zu

$$V_{wd} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot z \cdot \sigma_{swd} \cdot (1 + \cot \alpha_s) \cdot \sin \alpha_s. \quad (2.15)$$

2.3 Entwicklung der Normen für bewehrte Porenbetonbauteile

Für den Nachweis der Porenbetondruckstrebe ist die Gleichung

$$V_{Rd2} = \nu \cdot b_w \cdot z \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_{c2}} \cdot \left(\frac{\cot\Theta + \cot\alpha_s}{1 + \cot^2\Theta} \right) \quad (2.16)$$

angegeben, welche die geneigte Druckstreben mit dem Winkel Θ berücksichtigt.

2 Entwicklung der Querkraftmodelle für Stahlbeton- und Porenbetonelemente

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

Es werden die Grundlagen zur Beschreibung beliebiger Spannungs- bzw. Deformationszustände erläutert. Die Balkentheorie basiert auf der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte, der sogenannten Bernoulli-Hypothese. Diese Theorie vernachlässigt die Schubverzerrungen im Querschnitt. Um die Beanspruchungen einer Querkraftbewehrung direkt zu ermitteln, müssen die Schubverzerrungen und die Verschiebungsdifferenzen zwischen Ober- und Unterseite eines Balkens betrachtet werden. Die Spannungen bzw. Dehnungen werden auf Basis eines ebenen Spannungszustandes beschrieben.

Aufgrund von Nichtlinearitäten im Materialverhalten und der Rissbildung im Porenbeton kommt es zu einer Umlagerung der inneren Kräfte. Um diese Umlagerungen zu beschreiben, ist die Wahl eines geeigneten Materialmodells für die beteiligten Komponenten erforderlich. Dieses muss einerseits einen numerisch stabilen Berechnungsablauf gewährleisten und andererseits durch bekannte Parameter charakterisierbar sein. Es werden allgemeine Ansätze zur Beschreibung des Materialverhaltens bzw. für das Zusammenwirken von Beton und Bewehrungsstahl diskutiert.

Die Anwendung von Energiemethoden in der Strukturmechanik hat eine lange Tradition. Ausgehend vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen und dem Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials kann eine Extremalaufgabe formuliert werden. Diese lässt sich in eine Optimierungsaufgabe überführen und mit den Methoden der nichtlinearen mathematischen Optimierung lösen. Es werden die Grundlagen für die Aufstellung der Extremalaufgabe und die Lösungsstrategien vorgestellt. Die Anwendung auf ein Balkentragwerk zeigt die Leistungsfähigkeit dieser Vorgehensweise.

3.1 Kontinuumsmechanische Zusammenhänge

3.1.1 Der allgemeine Spannungszustand

3.1.1.1 Kartesische Spannungskomponenten

Betrachtet man ein Volumenelement $dV = dx dy dz$, so wirken auf jeder der sechs Seitenflächen jeweils eine Normalspannungs- und zwei Schubspannungskomponenten. Um den allgemeinen Spannungszustand zu beschreiben, benötigt man drei Normalspannungen σ_x , σ_y und σ_z sowie sechs Schubspannungen τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} und τ_{zy} . Die Anzahl der Schubspannungskomponenten kann durch eine Gleichgewichtsbetrachtung auf drei reduziert werden [175]

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (3.1)$$

3.1.1.2 Spannungen und Gleichgewichtsbedingungen

Der Spannungszustand in einem Punkt wird durch die Vorgabe der sechs Spannungskomponenten σ_x , σ_y , σ_z , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ und $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ eindeutig beschrieben. Damit ist es möglich, den Spannungsvektor $\vec{s} = [s_x, s_y, s_z]$ eines beliebig orientierten Flächenelementes dF auszudrücken. Abbildung 3.1 zeigt ein differentielles Tetraeder und den auf die Fläche $dF = \triangle ABC$ wirkenden Spannungsvektor \vec{s} . Die Fläche wird durch den Normalenvektor

$$\vec{n} = [n_x, n_y, n_z] = [\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)] \quad (3.2)$$

festgelegt, so dass die Projektionen von dF auf die y-z, x-z und x-y-Ebene

$$\begin{aligned} dF \cdot n_x &= dF \cdot \cos(\alpha) \\ dF \cdot n_y &= dF \cdot \cos(\beta) \\ dF \cdot n_z &= dF \cdot \cos(\gamma) \end{aligned} \quad (3.3)$$

sind. Die Gleichgewichtsbedingungen in x-Richtung lauten

$$s_x \cdot dF = \sigma_x n_x dF + \tau_{yx} n_y dF + \tau_{zx} n_z dF.$$

Aus dieser und den anderen Gleichgewichtsbedingungen lassen sich die Komponenten von \vec{s} ermitteln:

$$\begin{aligned} s_x &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ s_y &= \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x + \tau_{zy} n_z \\ s_z &= \sigma_z n_z + \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die dem Element dF zugeordnete Normalspannung ist

$$\begin{aligned} \sigma &= \vec{s} \cdot \vec{n} = n_x s_x + n_y s_y + n_z s_z \\ \sigma &= n_x^2 \sigma_x + n_y^2 \sigma_y + n_z^2 \sigma_z + 2 \cdot (n_x n_y \tau_{xy} + n_x n_z \tau_{xz} + n_y n_z \tau_{yz}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

während die zugehörige Schubspannung

$$\tau = \sqrt{\vec{s}^2 - \sigma^2} \quad (3.6)$$

beträgt.

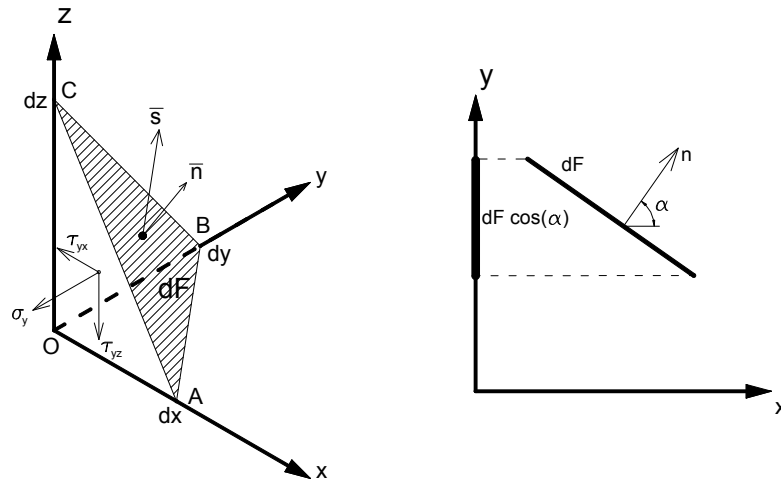


Abbildung 3.1: Spannung im Tetraederelement

3.1.1.3 Hauptspannungen und Spannungsinvarianten

Es gilt folgender Satz [176]:

Es gibt durch jeden Punkt eines einem Spannungszustand unterworfenen Körpers drei - zueinander senkrechte - Schnittebenen, auf denen der Spannungsvektor senkrecht steht und somit die Schubspannungen verschwinden; man nennt diese Ebenen Hauptspannungsebenen und die zugehörigen Spannungen Hauptspannungen.

Mit $\bar{s} = \bar{n} \cdot \sigma$ und somit

$$\begin{aligned} s_x &= n_x \cdot \sigma \\ s_y &= n_y \cdot \sigma \\ s_z &= n_z \cdot \sigma \end{aligned} \quad (3.7)$$

erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ 0 &= (\sigma_y - \sigma) n_y + \tau_{xy} n_x + \tau_{zy} n_z \\ 0 &= (\sigma_z - \sigma) n_z + \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Diese Gleichung hat nur dann von Null verschiedene Lösungen für n_x , n_y und n_z , wenn die Determinante gleich Null ist

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (3.9)$$

Die daraus entstehende kubische Gleichung besitzt aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors drei reelle Wurzeln σ_1 , σ_2 und σ_3 . Der Spannungstensor vereinfacht sich unter Ver-

wendung der Hauptspannungen zu

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

3.1.1.4 Der ebene Spannungszustand

Den Spannungszustand in einem Balken kann man allgemein mit einem ebenen Spannungszustand beschreiben. Der Spannungstensor reduziert sich auf die Komponenten σ_x , σ_y und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Die Spannungen sind unabhängig von z und konstant über die Dicke verteilt. Die Spannungen lassen sich in jede Richtung senkrecht zur z -Ebene transformieren. Ist ϕ der Winkel zwischen der Achse ξ und x , so erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \cos^2(\phi) + \sigma_y \sin^2(\phi) + \tau_{xy} \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \tau_{\xi\chi} &= \tau_{xy} (\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin(\phi) \cos(\phi). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Der Winkel ϕ kann so gewählt werden, dass die Schubspannung $\tau_{\xi\chi}$ zu Null wird. In diesem Fall erhält man

$$\tau_{\xi\chi} = \tau_{xy} (\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin(\phi) \cos(\phi) = 0$$

bzw.

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{\sin^2(\phi) - \cos^2(\phi)} = \frac{1}{2} \tan(2\phi). \quad (3.12)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich zwei rechtwinklige Richtungen finden, für die die Schubspannung verschwindet. Die zugehörigen Normalspannungen werden als Hauptspannungen bezeichnet. Die Gleichungen zur Ermittlung der Hauptspannungen lassen sich aus einem *Mohr'schen* Diagramm ableiten [176]:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (3.13)$$

Sind die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 bekannt, so vereinfachen sich die Gleichungen (3.11) zu

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_1 \cos^2(\phi) + \sigma_2 \sin^2(\phi) \\ \tau_{\xi\chi} &= \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) \sin(2\phi). \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1.2 Der allgemeine Dehnungszustand

3.1.2.1 Zusammenhang zwischen Verformung und Dehnung

In kartesischen Koordinaten lässt sich der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den auftretenden Dehnungen an einem beliebigen Punkt durch die differentiellen Beziehungen:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.16)$$

ausdrücken. Die drei Gleichungen 3.15 stellen die Längenänderungen in den jeweiligen Richtungen dar und die Gleichungen 3.16 repräsentieren die Winkeländerungen zwischen zwei Linien in der direkten Umgebung des betrachteten Punktes.

3.1.2.2 Der ebene Dehnungszustand

Betrachtet man den ebenen Dehnungszustand, so erhält man die Hauptdehnungen analog zu den Hauptspannungen des ebenen Spannungszustandes

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \quad (3.17)$$

Der Winkel zwischen den Dehnungen ϵ_x bzw. ϵ_y und den Hauptdehnungen wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\tan(2\theta) = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}. \quad (3.18)$$

In den Hauptachsen wird die Schubverformung γ_{xy} zu Null. Die maximale Schubgleitung erhält man in einer Ebene 45° zur Hauptebene mit der Gleichung

$$\frac{1}{2}\gamma_{max} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \quad (3.19)$$

In dieser Ebene sind die Normaldehnungen $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$.

Im Fall des ebenen Spannungszustandes ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$) gibt es durch den *Poisson*-Effekt einen Dehnungsanteil ϵ_z senkrecht zur Ebene, so dass man einen dreidimensionalen Dehnungszustand erhält. Handelt es sich um ein isotropes bzw. ein orthotropes Material mit einer Material-Symmetrieachse parallel zur $x - y$ -Ebene, treten keine Schubdeformationen γ_{yz} bzw. γ_{zx} auf. Dies erzeugt eine Situation analog zum Spannungszustand $\sigma_z \neq 0$ und $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Die dritte Hauptdehnung beträgt

$$\epsilon_3 = \epsilon_z. \quad (3.20)$$

Die beiden anderen Hauptdehnungen lassen sich nach Dowling [45] mit Gleichung 3.17 bestimmen. Die Hauptachsen für Spannung und Dehnung sind für isotropes Material gleich. Für orthotropes Material gilt diese Aussage nur, wenn die Hauptspannungsachsen senkrecht zu den Symmetrieebenen des Materials stehen.

3.2 Materialverhalten

3.2.1 Einführung

Die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Baustoffen erfolgt im Allgemeinen durch Kraft-Verformungs- bzw. Spannungs-Dehnungsbeziehungen. Es ist zur besseren Veranschaulichung zweckmäßig, von einaxialen Beanspruchungen auszugehen und diese dann für mehraxiale Lastsituationen anzupassen. In Abbildung 3.2 sind verschiedene Spannungs-Dehnungs-

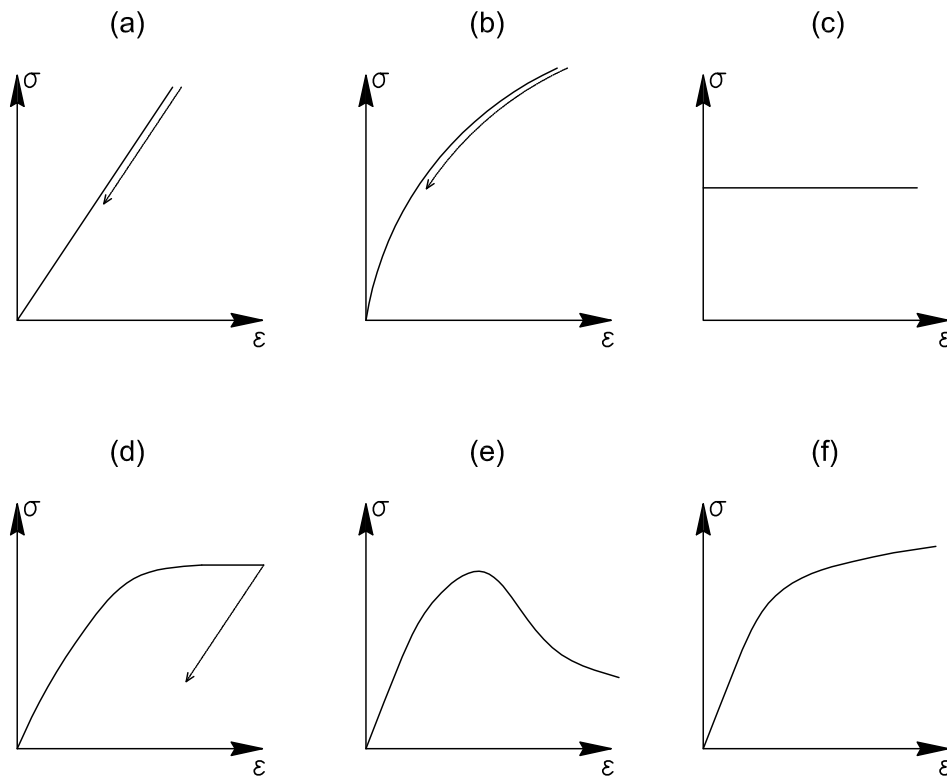


Abbildung 3.2: Spannungs-Dehnungs-Diagramme für einaxiale Beanspruchungen

Diagramme für einaxiale Beanspruchungen dargestellt. Die Abbildungen 3.2 (a) und 3.2 (b) zeigen jeweils ein elastisches Stoffgesetz. Alle Verformungen sind vollständig reversibel und es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Die Belastungs- und Entlastungskurve fallen zusammen und es findet keine Energiedissipation statt. Treten irreversible Verformungen auf, spricht man von plastischem Materialverhalten bzw. von Energiedissipation. Abbildung 3.2 (c) zeigt das einfachste Modell des plastischen Tragverhaltens (ideal-plastisch). Bis zum Erreichen eines Grenzwertes der Spannung (Fließspannung) gibt es keine Dehnungen. Danach wachsen die Dehnungen uneingeschränkt an. Elastische Dehnungen, wie sie bei jedem realen Material auftreten, werden vollständig vernachlässigt.

Meist tritt in der Praxis eine Kombination aus elastischem und plastischem Materialverhalten auf (Abbildung 3.2 (d)). Kleine Beanspruchungen spielen sich in einem elastischen Bereich ab, während bei größeren Spannungen die zur Verformung aufgebrauchte Energie nur teilweise zurückgewonnen wird. Abbildung 3.2 (e) charakterisiert ein entfestigendes Stoffgesetz. Nachdem die maximal mögliche Beanspruchung erreicht wird, nimmt die Spannung bei einer weiteren Steigerung der Deformationen kontinuierlich ab. Eine experimentelle Ermittlung eines entfestigenden Kurvenverlaufes gestaltet sich schwierig. Kotsovos et al. [91] zeigen, dass für Normalbeton das entfestigende Verhalten auf eine Interaktion zwischen der Prüfeinrichtung und dem Prüfkörper zurückgeführt werden kann. Die in Abbildung 3.2 (f) dargestellte Kurve beschreibt ein sich verfestigendes Material. Nach Erreichen der Fließspannung beginnt die Verfestigungsphase, in der das Tragvermögen bei weiterer Verformungssteigerung kontinuierlich zunimmt.

Für eine ingenieurmäßige Betrachtung des Tragverhaltens von Bauteilen ist es notwendig, das Materialverhalten entsprechend zu idealisieren, so dass man die für eine Anwendung bedeutsamen Merkmale berücksichtigt, untergeordnete Einflüsse allerdings vernachlässigt. Im Allgemeinen ist es nicht erforderlich, eine möglichst genaue mathematische Beschreibung des Kurvenverlaufes zu erreichen, da hiermit nur eine scheinbare Genauigkeit erzielt wird. Signifikante Steifigkeitsänderungen müssen angemessen berücksichtigt werden, um realistische Ergebnisse der Tragwerksanalyse zu erhalten. In der Kontinuumsmechanik ist es üblich, zur Beschreibung von Strukturänderungsprozessen (z.B. Rissbildung) die Materialzusammenhänge durch mittlere Spannungen und Dehnungen auszudrücken.

Für das Berechnungsmodell, welches in Abschnitt 5 entwickelt wird, ist die Formulierung des Materialgesetzes als Energiebeziehung notwendig. Die spezifische Formänderungsenergie erhält man durch Integration der Spannungs-Dehnungs-Beziehung:

$$W = \int_{\epsilon} \sigma(\epsilon) d\epsilon. \quad (3.21)$$

3.2.2 Materialverhalten des Bewehrungsstahls

Bei der Bauteilbemessung geht man vereinfachend davon aus, dass der Bewehrungsstahl nur Kräfte in Stablängsrichtung aufnimmt und einachsig beansprucht ist. Typische Spannungs-Dehnungs-Linien von Stahl lassen sich in vier unterschiedliche Abschnitte unterteilen. Bei niedrigen Belastungen verhält sich der Stahl nahezu linear elastisch und die Verformungen sind reversibel. Nach dem Erreichen der Streckgrenze folgt eine plastische Phase, während der sich der Stahl bei konstanter Spannung verlängert. Beim Fließen des Stahls kommt es an Störstellen im Kristallgitter zu einem lokalen Abgleiten und zu einer Veränderung der kristallinen Struktur. Der Zusammenhalt des Gitters geht dabei nicht verloren und es erfolgt eine Verfestigung des ganzen Kristalls [68]. Der Stab fließt nicht auf seiner ganzen Länge gleichzeitig. Es kommt vielmehr zu einer Lokalisierung der Verformung in kleinen Stababschnitten. Der Vorgang ist abgeschlossen, wenn sich wieder eine gleichmäßige Verformung entlang der Stabachse eingestellt hat. Danach beginnt eine Verfestigungsphase. Der gesamte Stab verlängert sich bei einer Zunahme der Belastung. Die Verformung erfolgt ohne eine Volumenänderung, so dass die Verlängerung des Stabes eine Reduktion der Querschnittsfläche bedingt. Nach dem Erreichen der Maximallast lokalisieren sich die Verformungen an der schwächsten Stelle. Außerhalb des sogenannten Einschnürbereiches wird der Stab entlastet [65].

Der Idealisierungsgrad für die Spannungs-Dehnungs-Beziehung richtet sich nach der zu bearbeitenden Fragestellung. Während bei der Bestimmung von Tragwiderständen ein starr - ideal plastisches Gesetz (Abbildung 3.3 (a)) genügt, sollte bei der Ermittlung von Verformungen bzw. bei der Behandlung von Rissbildungsproblemen die Anfangssteifigkeit (E_1) berücksichtigt werden (Abbildungen 3.3 (b-d)). Für die Modellbildung im Stahlbetonbau wird häufig ein bilineares Materialgesetz verwendet, da es in der Regel eine ausreichende Näherung darstellt. Für den bewehrten Porenbeton kann dieser Ansatz übernommen werden.

Für Zug- und Druckbeanspruchungen gelten für Stahl ähnliche Spannungs-Dehnungs Beziehungen, so dass von einem analogen Materialverhalten ausgegangen werden kann. Bei großen Stauchungen muss darauf geachtet werden, dass der Bewehrungsstab nicht ausknickt.

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

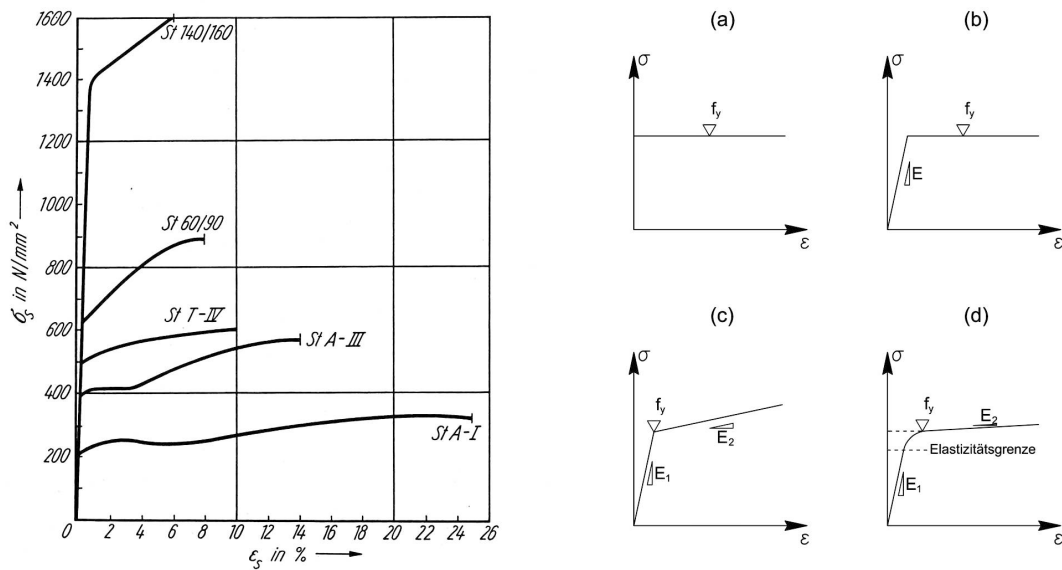


Abbildung 3.3: Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach [65] und idealisierte Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Betonstahl

3.2.3 Materialverhalten von Porenbeton

Das Materialverhalten von Porenbeton und Normalbeton ähnelt sich in wesentlichen Eigenschaften. Es ist gekennzeichnet durch eine starke Druck-Zug-Anisotropie. Während sich beide Baustoffe sehr gut zur Abtragung von Druckspannungen eignen, besitzen sie nur einen geringen Widerstand gegenüber Zugspannungen. Im Gegensatz zum Porenbeton liegen für Normalbeton umfassende Versuchsergebnisse und theoretische Überlegungen vor. Einzelne Erkenntnisse (z.B. zur Rissbildung) lassen sich auf den Porenbeton übertragen.

3.2.3.1 Porenbeton und Normalbeton unter einiaxialen Druck

Das Verhalten von Beton und Porenbeton unter Druckbeanspruchungen ist eng mit der Entstehung bzw. Ausweitung von Mikrorissen verbunden. Die Ursache liegt in der Kraftumlenkung infolge unterschiedlicher Steifigkeiten von Zementstein und Zuschlagskörnern. Daraus resultieren Querzugspannungen, die zur Mikrorissbildung führen. Der innere Kräfteverlauf zwischen Normal- und Leicht- bzw. Porenbeton unterscheidet sich aufgrund der Materialzusammensetzung. Bei Normalbeton treten die Risse entlang der Zuschlagskörner auf, da diese eine höhere Festigkeit als der Zementstein besitzen. Die Zuschläge von Leichtbeton besitzen eine niedrigere Festigkeit, so dass im Allgemeinen Risse durch die Zuschlagskörner verlaufen [107]. Tartsch [177] zieht Parallelen zwischen Leicht- und Porenbeton, indem er die kugelförmigen Makroporen als Zuschlagskörner mit sehr kleiner Steifigkeit beschreibt.

Während das Verhalten von Poren- und Normalbeton in mesoskopischer Sicht unterschiedlich ist, kann im makroskopischen Verhalten unter Druckspannungen ein analoges Verhalten festgestellt werden. Für das Spannungs-Dehnungs-Verhalten unter monoton steigender Kurzzeitbelastung lassen sich drei Bereiche identifizieren [65]. Für geringe Beanspruchungen nimmt die Längsstauchung mit zunehmender Druckspannung nahezu proportional zu und die Defor-

mationen können als elastisch angenommen werden. Bei steigender Beanspruchungsintensität wachsen die Dehnungen überproportional an. Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten ist nichtlinear und es treten plastische Verformungen auf. Beim Übergang von Stadium zwei zu Stadium drei besitzt das Betonvolumen ein Minimum. Bei steigender Belastung wird die Verdichtung des Betons infolge Längsstauchung durch eine Auflockerung des Gefüges infolge Mikrorissbildung überlagert. Die Querdehnung nimmt schneller zu als die Längsstauchung, so dass eine Volumenzunahme beobachtet werden kann. Es beginnt ein Prozess der Zerstörung der Betonstruktur. Die innere Tragstruktur ändert sich und eine kontinuumsmechanische Beschreibung ist nicht mehr möglich. Die drei Stadien der Arbeitslinie lassen sich sowohl für Normalbeton [96] als auch für Porenbeton ([106], [177]) identifizieren. Dabei zeigt sich für Porenbeton, dass im Gegensatz zum Normalbeton, das nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten weniger ausgeprägt ist.

Die Bewertung der Arbeitslinie für den Bereich nach Erreichen der Druckfestigkeit wird uneinheitlich in der Literatur diskutiert. Der Grund für die divergierenden Ansätze im sogenannten Nachbruchbereich (*post-peak behaviour*) liegt hauptsächlich in der Schwierigkeit der versuchstechnischen Steuerung zur Erfassung des abfallenden Astes. Bei verformungsgesteuerten Versuchen kann mit zunehmender Stauchung ein Abfallen der Betondruckspannungen beobachtet werden [65]. Van Mier [117] und Vonk [183] zeigen, dass das sogenannte *strain-softening* stark von der Größe der Versuchskörper abhängt, wobei kleinere Körper ein duktileres Verhalten zeigen. Dies wird darauf zurückgeführt, dass sich infolge der Rissbildung schmale Säulen bilden, deren Stabilität das Entfestigungsverhalten bestimmen. Eine kürzere kritische Knicklänge bedingt dabei ein duktileres Verhalten. Kotsovovs ([88], [91]) zeigt, dass das Nachbruchverhalten maßgeblich durch die Interaktion des Testobjektes (Betonzylinder) und der Testeinrichtung (Druckplatten) beeinflusst wird. Er sieht den Grund dafür in den Reibungsspannungen an den Enden des Testkörpers. Durch eine Reduzierung der Reibungsspannungen weist Kotsovovs nach, dass der Entfestigungsprozess nahezu in ein ideal sprödes Verhalten übergeht.

Last-Verformungs-Charakteristik

In der Literatur lassen sich unterschiedliche Ansätze für Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von Beton finden. In der DIN 1045-1 [8] wird für Normalbeton ein parabelförmiger Ansatz für die Schnittgrößen- bzw. Verformungsermittlung vorgeschlagen:

$$\sigma_c = f_{cc} \cdot \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \quad (3.22)$$

mit $\eta = \epsilon/\epsilon_{c1}$ und $k = 1, 1 \cdot E_{cm} \cdot \epsilon_{c1}/f_{cc}$. Hierbei beschreiben f_{cc} die einaxiale Druckfestigkeit, ϵ_{c1} die zugehörige Dehnung und E_{cm} den Elastizitätsmodul des Betons. Ein weiterer nichtlinearer Ansatz für die Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Normalbeton gibt Kaufmann [84]:

$$\sigma_c = f_{cc} \cdot \frac{2\epsilon_c \epsilon_{c0} + \epsilon_c^2}{\epsilon_{c0}^2}, \quad (3.23)$$

wobei ϵ_{c0} die Dehnung des Betons bei der Betonfestigkeit f_{cc} darstellt. Den Wert von ϵ_{c0} gibt Kaufmann mit ca. 0,002 für Normalbeton an. Abbildung 3.4 zeigt einen Vergleich verschiedener Ansätze.

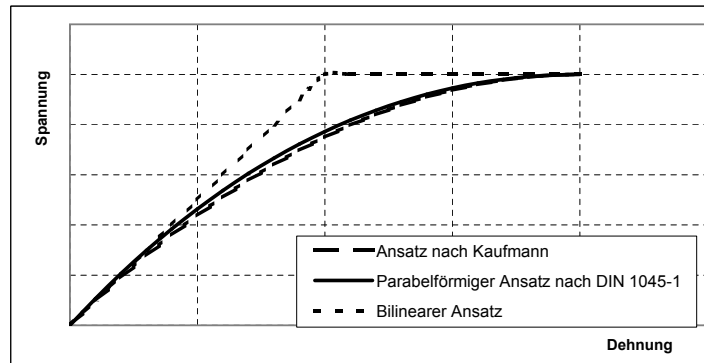


Abbildung 3.4: Qualitativer Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

Eine weitere Möglichkeit zur Approximation der Arbeitslinie stellen Polynomansätze dar.

$$\sigma_c = f_{cc} \cdot \sum_{i=1}^n \Psi_i \cdot \epsilon_{c,i} \quad (3.24)$$

Marx [115] stellt für Normalbeton Polynome 4. Grades auf, die eine ausreichende Genauigkeit liefern. Er gibt die Polynomkoeffizienten Ψ_i für verschiedene Festigkeitsklassen an. Dieser Polynomansatzes besitzt nur bis zum Erreichen der Scheiteldehnung seine Gültigkeit. Ein Anwachsen der Betondehnungen ist durch entsprechende Restriktionen zu berücksichtigen.

In der Literatur (z.B. [47]) lassen sich weitere Modelle zur Beschreibung der Arbeitslinie von Beton finden, auf die im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird.

Für Porenbeton wird in DIN 4223:2003 [5] eine bilineare Spannungs-Dehnungs-Linie vorgeschlagen. Alternativ ist aber auch die Verwendung anderer geeigneter Ansätze erlaubt. DIN 4223:2003 [5] stellt hier die Forderung, dass die Völligkeit des Diagramms und die Lage der resultierenden Druckspannung bei einer Randstauchung von 3‰ gleichwertig sind (Abbildung 3.5). Weitere mögliche Verlaufsfunktionen für die Arbeitslinie werden nicht definiert. Eine Approximation von Versuchswerten kann z.B. mittels Polynomansätzen erfolgen. In Abschnitt 5.2 werden verschiedene Ansätze mit Versuchsergebnissen von Tartsch [177] verglichen.

3.2.3.2 Porenbeton und Normalbeton unter einaxialem Zug

Porenbeton und Normalbeton besitzen im Vergleich zu ihrer Druckfestigkeit eine geringe Zugfestigkeit, die von zahlreichen Einflussfaktoren abhängig ist und großen Streuungen unterliegt. Daher wird die Zugfestigkeit bei Festigkeitsberechnungen häufig außer Acht gelassen. Für die Betrachtung eines zweidimensionalen Zustandes, für querkraftbeanspruchte Bauteile sowie bei der Abschätzung von Rissbreiten und -abständen bzw. der Verformungen spielt sie eine bedeutende Rolle. Für den Porenbeton liegen nur wenige Untersuchungen vor. Diese beschränken sich hauptsächlich auf die Ermittlung einer einaxialen Zugfestigkeit oder bei biaxialen Verhalten auf die Ermittlung einer Versagenskurve für den Druck-Zug- bzw. Zug-Zug-Bereich. Prinzipielle Überlegungen zum Materialverhalten unter Zugbeanspruchungen und zur Rissbildung können vom Normalbeton auf den Porenbeton übertragen werden.

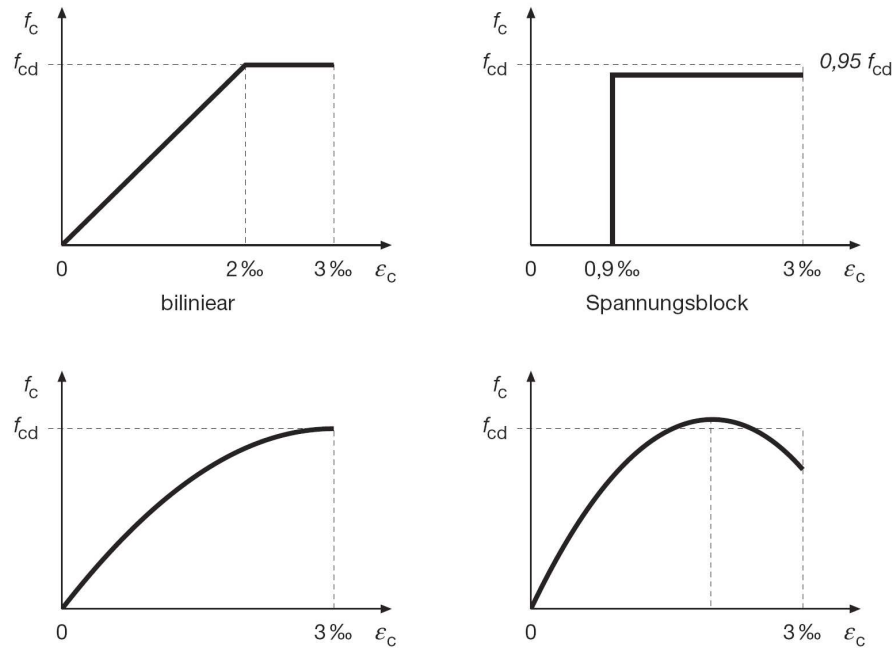


Abbildung 3.5: Arbeitslinien für Porenbeton nach [163]

Die Zugfestigkeit wird häufig in Abhängigkeit der Würfel- oder Zylinderdruckfestigkeit angegeben. Stenger [172] gibt für Normalbeton eine Zugfestigkeit in Abhängigkeit der Zylinderdruckfestigkeit f_{cc} an:

$$f_{ct} = 0,3 \cdot (f_{cc})^{2/3}. \quad (3.25)$$

Für Porenbeton wird in der Literatur ([165], [188]) ein Wert von 0,12...0,17 der einaxialen Druckfestigkeit für die Zugfestigkeit angenommen.

Betrachtet man die Spannungs-Dehnungs-Beziehung, so folgt sie zu Beginn der Belastung einem linearen Verlauf. Nichtlineare Verformungsanteile bis zum Erreichen der Zugfestigkeit sind auf eine fortschreitende Mikrorissbildung zurückzuführen [99]. Die Angaben in der Literatur, ab welchem Spannungsniveau mit einem nichtlinearen Verhalten zu rechnen ist, schwanken zwischen 0,5 und 0,9. Während Cornelissen [34], Duda [46] und Reinhardt [149] von einem linear elastischen Modell ausgehen, wird im Model Code 1990 [3] ein bilineares Modell zur Beschreibung des Zugverhaltens vorgeschlagen. Bis zu einer Spannung von 90% der Zugfestigkeit verhält sich der Beton linear elastisch. Danach wachsen die Dehnungen bis zum Erreichen der zentrischen Zugfestigkeit auf $\epsilon = 0,15\%$ an. Laube [99] und Gutsch [62] verwenden ein Linear-Parabel-Modell, um die Zugspannungs-Dehnungslinie für jungen Beton abschnittsweise zu beschreiben. Bis zu einem Wert von 50% der Zugfestigkeit wird lineares Verhalten vorausgesetzt und darüber hinaus kommt eine Parabel

$$\sigma = \frac{f_{ct}}{2} \cdot \left[2 - \left(1 - \frac{\epsilon - \epsilon_{0,5}}{\epsilon_{ct} - \epsilon_{0,5}} \right)^{n_\epsilon} \right] \quad (3.26)$$

zum Einsatz. In Gleichung 3.26 sind $\epsilon_{0,5} = \frac{f_{ct}}{2 \cdot E}$ und $n_\epsilon = \frac{\epsilon_t - \epsilon_{0,5}}{\epsilon_{0,5}}$.

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

Bei Erreichen der Zugfestigkeit versagen Prüfkörper nicht schlagartig, sondern zeigen bei weggesteuerten Versuchen ein entfestigendes Verhalten. Verformungen lokalisieren sich in einer Störungszone, bis sich aus den vorhandenen Mikrorissen ein einziger Trennriss bildet. Ein physikalisches Modell zur Beschreibung dieser Rissbildung geht auf Hillerborg [71] zurück. Er führt den Begriff des fiktiven Rissmodells (*fictitious crack model*) ein. Das Verformungsverhalten eines zugbeanspruchten Stabes lässt sich durch das Verformungsverhalten des ungerissenen Stabes und das der sogenannten Rissprozesszone beschreiben. Bis zum Erreichen der Zugfestigkeit geht er von einem nahezu elastischen Verhalten aus. Es wird nur eine geringe Energiemenge dissipiert. Bei einem Überschreiten der Zugfestigkeit bildet sich an der schwächsten Stelle des Stabes eine Risszone mit der Länge l_f . Für eine Risszonenlänge $l_f = 0$ lokalisieren sich die Verformungen im fiktiven Riss mit der Breite w . Die Bereiche außerhalb der Risszone werden entlastet und verkürzen sich entsprechend, so dass das Verformungsverhalten durch eine Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung beschrieben werden kann. Die bis zur vollständigen Trennung des Körpers in der Risszone dissipierte Energie kann durch Integration der Entfestigungskurve ermittelt werden:

$$G_f = \int_0^{w_u} \sigma \cdot dw. \quad (3.27)$$

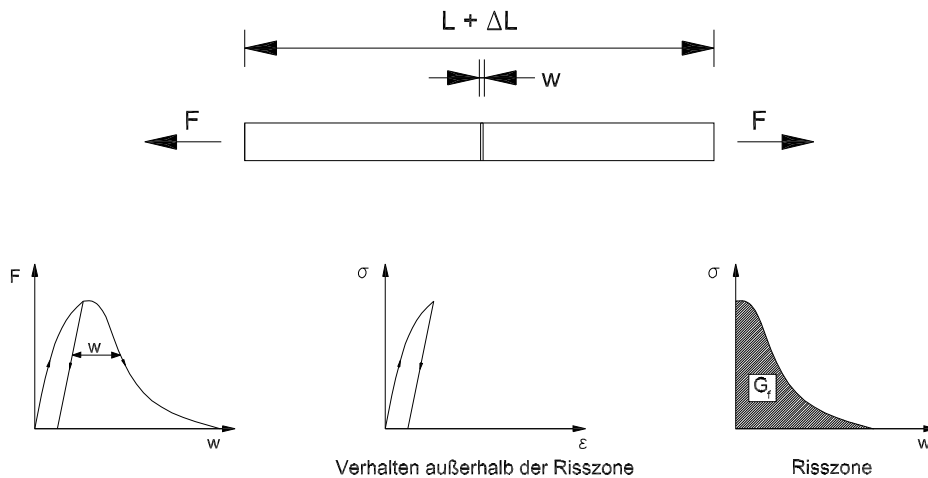


Abbildung 3.6: Verhalten eines auf Zug beanspruchten Betonstabes nach Hillerborg [72]

Die spezifische Bruchenergie G_f wird dabei als Materialkenngröße betrachtet, welche unabhängig von der Geometrie des Betonkörpers ist. Sie muss im Allgemeinen experimentell ermittelt werden, wobei Hordijk [73] feststellt, dass sie in erster Linie von der Festigkeit des Betons und der Korngrößenverteilung abhängt. Stehen keine Versuchswerte zur Verfügung, gibt der Model Code 1990 [3] einen Anhaltswert für G_f in $[J/m^2]$:

$$G_f = \alpha \cdot f_{ck}^{0,7}. \quad (3.28)$$

f_{ck} ist die charakteristische Druckfestigkeit in $[N/mm^2]$ und α ein Faktor zur Berücksichtigung der maximalen Korngröße.

3.2.3.3 Materialverhalten unter mehraxialen Beanspruchungen

Viele Tragwerke bzw. Tragwerkselemente lassen sich als ebene Strukturen idealisieren. Dem Materialverhalten unter zwei axialen Beanspruchungen muss dabei besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. Ein Großteil der Untersuchungen zu diesem Thema befasst sich mit der Ermittlung der Festigkeitskennwerte. Erste umfangreiche Untersuchungen führt Kupfer [96] für Normalbeton durch. Er testet 228 unbewehrte Scheibenelemente unter verschiedenen zweidimensionalen Belastungssituationen. Neben den angesprochenen Probekörpern, die durch Stahlbürsten belastet werden, testet er 24 Scheiben mit einem Lasteintrag über Stahlplatten. Dabei stellt er fest, dass ein großer Anteil der bis dahin angenommenen Erhöhung der Festigkeit unter zwei axialen Druckspannungen auf die Interaktion der Elemente mit der Testeinrichtung zurückzuführen ist. Anhand der Versuchsergebnisse können Versagenskurven im Hauptspannungsraum konstruiert werden. Dabei ist zu beachten, dass es teilweise erhebliche Streuungen der Versuchsergebnisse gibt. Dies wird ebenfalls durch Versuchsergebnisse von van Mier [118] bestätigt.

In Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses σ_1/σ_2 werden verschiedene Versagensmechanismen festgestellt. Zugspannungen aus äußerer Belastung überlagern sich dabei mit Querspannung infolge Druckbeanspruchungen. Für den Druck-Zug-Bereich ergibt sich eine leicht verminderte Zugfestigkeit. Wird diese erreicht, bildet sich ein Trennriss senkrecht zur Zugbeanspruchung, so dass die Versuchsscheibe in zwei Körper geteilt wird. Da die Zugspannungen aus äußerer Belastung damit vollständig abgebaut sind, kann die Druckspannung annähernd bis zur einaxialen Druckfestigkeit gesteigert werden. Geringere Zugspannungen, die die Zugfestigkeit nicht erreichen, führen dazu, dass es vor Erreichen der einaxialen Druckfestigkeit zu Druckbrüchen kommt.

Im Bereich zweiachsiger Zugbeanspruchung stellt Kupfer [96] im ganzen Bereich etwa die einachsige Zugfestigkeit fest. Dieser nahezu konstante Festigkeitsverlauf entspricht der Normalspannungshypothese. Beide Beanspruchungsrichtungen beeinflussen sich kaum.

Für zweiachsige Druckspannungen findet eine Festigkeitserhöhung statt. Diese wird auf die stützende Wirkung der Querdruckspannung zurückgeführt, wobei Kupfer das Maximum bei einem Spannungsverhältnis von $\sigma_2/\sigma_1 = -0,5/ -1$ sieht. Bei einer weiteren Steigerung von σ_2/σ_1 nimmt die Festigkeitserhöhung aufgrund der spaltenden Wirkung von σ_2 in der lastfreien Richtung ab.

Eine weitere Methode, das mehraxiale Betonverhalten darzustellen, ist die Transformation der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Oktaederkoordinaten. Das Verformungsverhalten des Betons unter allen Spannungszuständen lässt sich durch eine hydrostatische Spannungs-Volumendehnungs-, eine Deviatorspannung-Deviatordehnungs- und eine Deviatorspannungs-Volumendehnungs-Linie beschreiben. Der Einfluss der hydrostatischen Spannung auf die Deviatordehnung ist gering und daher vernachlässigbar [92].

Untersuchungen zum zwei axialen Bruchwiderstand von Porenbeton werden von Sell [165] und später von Linse und Stegbauer [106] durchgeführt. Sie orientieren sich für den Versuchsaufbau und die Auswertung an den Erfahrungen von Kupfer [96]. Die maximale Überhöhung bei zwei axialer Druckbeanspruchung fällt mit ca. 15 % geringer aus als beim Normal-

beton [106]. Im Druck-Zug-Bereich werden die jeweiligen einaxialen Festigkeiten nicht ganz erreicht. Die Versagensfläche besitzt einen völligeren Verlauf als beim Normalbeton. Die zwei-axiale Zugfestigkeit weicht nicht wesentlich von der einaxialen Zugfestigkeit ab.

Umfangreiche Untersuchungen zum dreiaxialen Bruchverhalten von Porenbeton führt Wehr [188] durch. Aufbauend auf den Untersuchungen von Sell [165] und Linse/Stegbauer[106] entwickelt er eine dreidimensionale Bruchfigur im Hauptspannungsraum, um ein Bruchkriterium für den Verankerungsbereich zu erhalten. Er stellt für räumliche Druckspannungen eine deutliche Zunahme der Festigkeit gegenüber der einaxialen Beanspruchungen fest. Für das räumliche Bruchmodell geht Wehr für die zweidimensionale Druckbeanspruchung von einer Überhöhung der Druckfestigkeit um den Faktor 1,05 (nach [106]) aus. Für den dreidimensionalen Druckzustand leitet er eine Überhöhung von 1,65 ab (Abbildung 3.7). Wehr stellt eine Anisotropie der Festigkeit für Probekörper in bzw. senkrecht zur Treibrichtung fest. Er gibt einen Faktor von ca. 0,86 für die Festigkeit in Treibrichtung an.

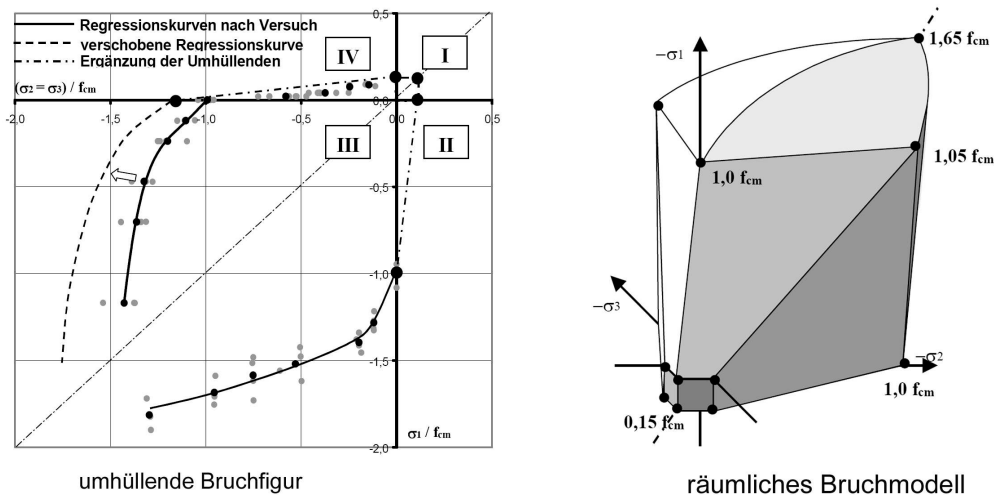


Abbildung 3.7: Dreidimensionales Bruchmodell nach Wehr [188]

3.2.4 Modellierung von Rissen

Beton und Porenbeton sind spröde Materialien. Eine wichtige Eigenschaft besteht darin, dass unter Zugspannungen Risse entstehen. Der Modellierung des sich durch die Rissbildung ergebenden Steifigkeitsabfalls kommt bei der Tragwerksanalyse eine erhebliche Bedeutung zu. Im Wesentlichen stehen zwei verschiedene Modellvorstellungen zur Verfügung: die diskrete und die verschmierte Beschreibung von Rissen. Beide Verfahren werden erfolgreich für Betonstrukturen eingesetzt, besitzen aber wesentliche Unterschiede, welche je nach Einsatzgebiet und Zielsetzung gewisse Vor- bzw. Nachteile haben.

3.2.4.1 Diskretes Rissmodell

Die diskrete Beschreibung von Rissen hat eine möglichst exakte Abbildung der Realität zum Ziel. Bei Erreichen der Zugfestigkeit bedingt der Riss eine Unstetigkeit im Verschiebungsfeld und wird direkt in die geometrische Abbildung übernommen. Der wesentliche Vorteil des diskreten Rissmodells besteht darin, dass die Größe der Rissöffnung und der Vorgang der fortschreitenden Rissbildung bei einer Lasterrhöhung ermittelt werden kann.

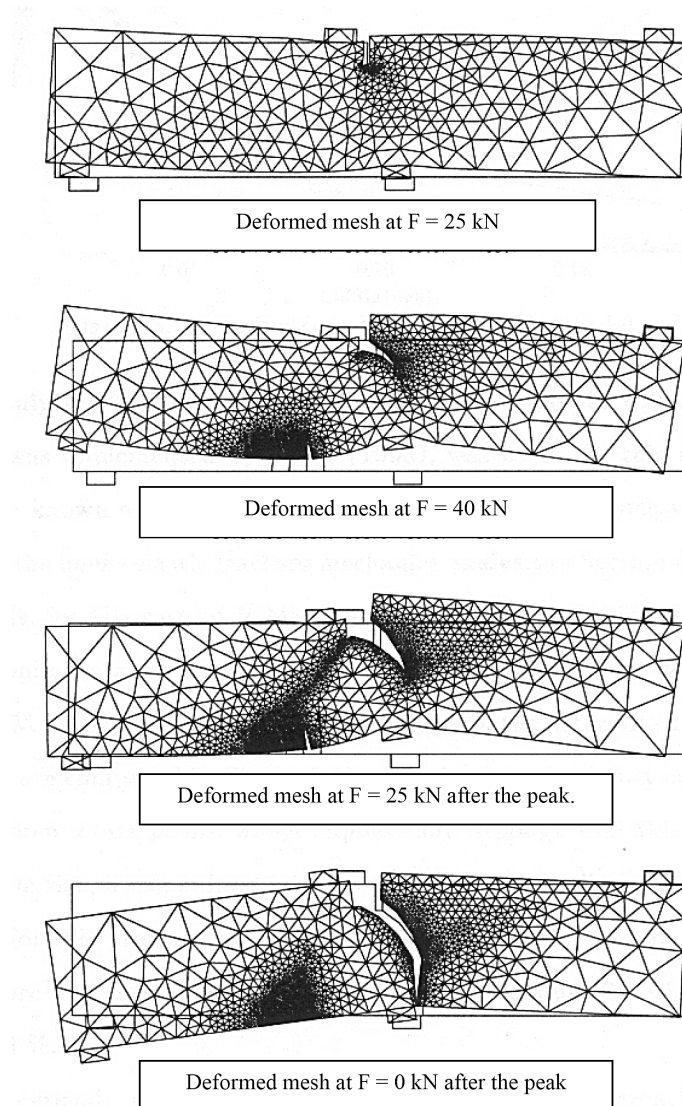


Abbildung 3.8: Anwendung des diskreten Rissmodells nach [77]

Das Hauptanwendungsgebiet der diskreten Rissmodelle liegt in der Bruchmechanik bzw. der Rissfortschrittsanalyse mittels finiter Elemente. Für eine Tragwerksanalyse muss bei Rissbildung das FE-Netz entsprechend verändert werden (Abbildung 3.8). Hierfür sind spezielle Algorithmen notwendig, die sowohl die Geometrie des Netzes als auch die Netzdichte schrittweise

den Berechnungsergebnissen anpassen (adaptive FEM). Diese Neugenerierung des Netzes ist sehr zeitintensiv, erfordert eine hohe Rechenleistung und bedingt aufgrund der gestiegenen Freiheitsgrade eine erhöhte Zahl der Eingabeparameter. Daher finden solche Berechnungsansätze hauptsächlich im Bereich der Forschung Anwendung.

3.2.4.2 Verschmiertes Rissmodell

Mit einem Modell auf Basis der verschmierten Beschreibung von Rissen kann eine aufwendige Anpassung der Netzgeometrie vermieden werden. Stattdessen erfolgt eine Anpassung des Materialgesetzes, um die Auswirkung der Rissbildung näherungsweise zu beschreiben. Eine Rissöffnung findet verschmiert statt, so dass der Bereich weiterhin als Kontinuum betrachtet werden kann.

Bei Erreichen der Zugfestigkeit im Beton und der darauffolgenden Rissbildung wird das isotrope Materialverhalten durch ein orthotropes Gesetz ersetzt. Die Hauptachsen entsprechen den Hauptspannungsrichtungen. Aufgrund von Spannungsumlagerungen kommt es innerhalb der Struktur zu einer Veränderung der Hauptspannungsrichtung, so dass sich diese von den ursprünglichen Orthotropieachsen unterscheiden. Es existieren verschiedene Methoden, die Risse während der Berechnung zu behandeln.

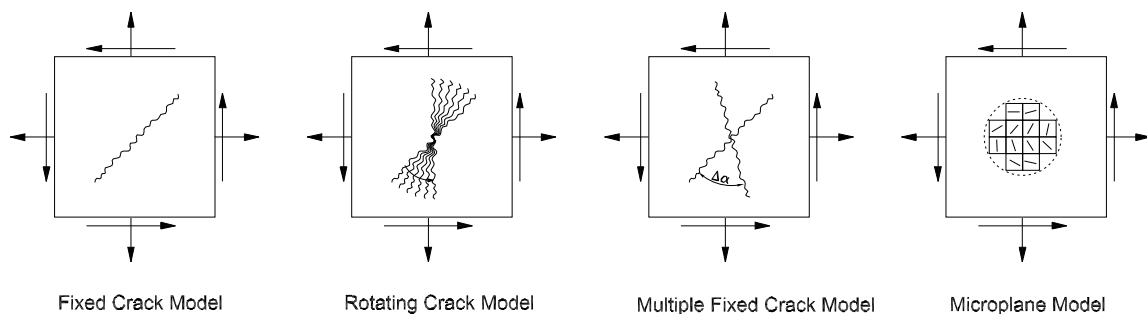


Abbildung 3.9: Rissmodelle

Rashid [134] schlägt das sogenannte *Fixed Crack Model* vor. Er geht davon aus, dass der Riss senkrecht zur Richtung der größten Hauptspannung auftritt und reduziert damit das Risskriterium auf die Beziehung zwischen Spannung und Zugfestigkeit. Dies gilt im Allgemeinen für spröde Materialien. Nach dem Auftreten des Risses wird die Rissrichtung fixiert. Bei einer Veränderung der Belastungssituation treten an den Rissufern Kombinationen aus Normal- und Schubspannungen auf. Da keine weiteren Risse in anderen Richtungen erlaubt sind, können die Spannungskomponenten parallel zum Riss die Zugfestigkeit des Materials überschreiten. Die Tragfähigkeit eines Bauteils kann überschätzt werden.

Das *Fixed orthogonal Crack Model* basiert auf derselben physikalischen Erklärung wie das *Fixed Crack Model*. Die Orientierung eines Risses wird nach dem auftreten fixiert. Um das zu steife Bauteilverhalten bei der Verwendung des *Fixed Crack Model* zu umgehen, werden

mehrere Rissebenen an einem Punkt zugelassen. Suidan und Schnobrich [174] erlauben die Entstehung weiterer Rissebenen senkrecht zum ersten Riss. Für ebene Systeme ergibt sich die Möglichkeit von zwei und für räumliche Systeme für drei Risse je Punkt.

De Borst und Nauta [21] gehen einen Schritt weiter und lassen beliebige Winkel zu (*Multiple Fixed Crack Model*). Der zweite Riss entsteht, wenn sich die größte Hauptspannung um einen Grenzwert $\Delta\alpha$ verändert hat und die Zugfestigkeit des Materials überschritten wird. Eine Variation des Modells wird durch Rots [156] vorgestellt. Unter Vernachlässigung des Risskriteriums stellt sich die zweite Rissebene ein, wenn der Grenzwinkel $\Delta\alpha$ erreicht wird. Für $\Delta\alpha \rightarrow 0$ geht dieser Vorschlag in das *Rotating Crack Model* über.

Beim *Rotating Crack Model* tritt der Riss wie beim *Fixed Crack Model* senkrecht zur größten Hauptspannung auf. Der Unterschied besteht darin, dass sich die Rissrichtung bei einer Veränderung der Belastung senkrecht zur maximalen Spannung einstellt. An den Rissufern treten nur Normalspannungen und keine Schubspannungen auf. Die Zugfestigkeit des Materials wird nicht überschritten. Die Idee hinter dem Modell basiert auf der Beobachtung, dass sich an der Risspitze die Mikrorisse senkrecht zur maximalen Zugspannung einstellen. Dieser Ansatz wurde z.B. von Cope [33], Vecchio [182] und Jirasek [78] verfolgt.

Das *Microplane Model* von Carol und Prat [25] basiert auf der Vorstellung, dass das Verhalten eines gerissenen Materials durch die Untersuchung einer finiten Anzahl von Richtungen beschrieben werden kann. Der Unterschied zum *Multiple Fixed Crack Model* besteht darin, dass die Richtungen nicht lastabhängig ermittelt werden, sondern vordefiniert sind. Für jede Richtung ist ein Risskriterium definiert, welches auf Schub- und Normalspannungen anspricht, so dass auch Risse in Richtungen entstehen können, die nicht senkrecht zur maximalen Hauptspannung sind. Werden die Mikroebenen in den Richtungen der Grenzwinkel des *Multiple Fixed Crack Model* angeordnet, liefern beide die gleichen Ergebnisse.

Einen weiteren Ansatz gibt Weihe ([21], [190]) mit dem adaptiven *Fixed Crack Model*. Es stellt einen weichen Übergang von den beiden Extremen des *Fixed Crack Model* und *Rotating Crack Model* her. Die kritische Versagensebene wird auf Grundlage der Mohr'schen Hypothese festgelegt, so dass sie sowohl von der Art des Versagensmechanismus als auch von der Art der Belastung abhängt.

3.2.5 Zusammenwirken von Porenbeton und Bewehrungsstahl

3.2.5.1 Verbund

Eine einwandfreie Kraftübertragung zwischen Porenbeton bzw. Normalbeton und Stahl ist die grundlegende Bedingung für das Funktionieren dieser Bauweise. Die Verbundeigenschaften beeinflussen u.a. die Rissbildung, die sich ergebenden Rissweiten und somit auch die Verformungseigenschaften. Im Wesentlichen wird der Verbund in Haftverbund, Formverbund und Reibungsverbund unterschieden [65]. Der Haftverbund beruht auf einer Klebewirkung zwischen Zementstein und Bewehrung. Er ist zuerst wirksam und wird durch die Oberflächenbeschaffenheit (Rauigkeit, Sauberkeit) des Stahles beeinflusst. Die Verbundwirkung ist spröde und wird bereits bei kleinen Verformungen überwunden [103]. Nach Überwindung des Haftverbundes ist die Verzahnung des Betonmörtels mit der Bewehrungsfläche maßgebend

für die Verbundwirkung. Diese Verzahnung kommt durch die Oberflächenrauigkeit bei glatten Bewehrungsstählen bzw. durch die Profilierung bei Rippenstahl zustande. Daher ergeben sich unterschiedliche Verbundfestigkeiten für glatte und profilierte Stähle. Die maximale Verbundspannung entspricht dem Übergang vom Form- zum Reibungsverbund (Abb. 3.10).

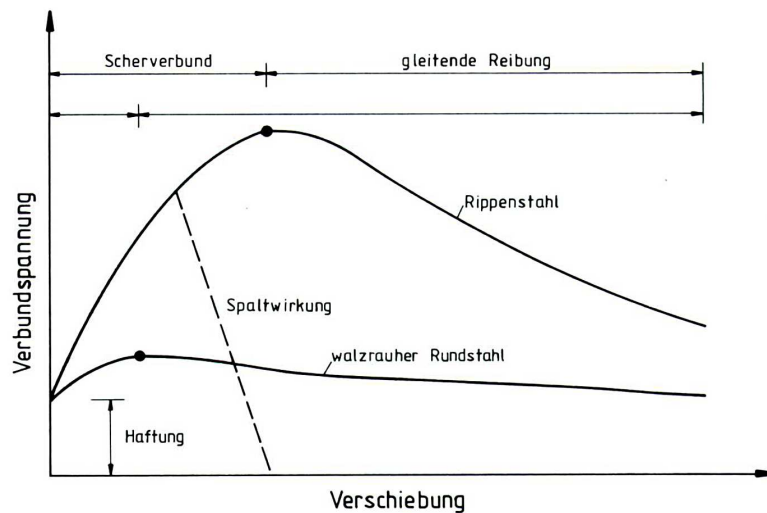


Abbildung 3.10: Verbundspannungs-Verschiebungs-Beziehung [158]

Für Stahlbeton und Betonstähle mit ausgeprägten Querrippen spielen Haft- und Reibungsverbund eine untergeordnete Rolle. Die entscheidende Verbundwirkung ist der Formverbund. An den einzelnen Rippen entsteht eine Verdübelungswirkung. Die Kraftübertragung erfolgt durch gegenüber der Stahlachse geneigten Druckspannungen im Beton. Vereinfacht nimmt man die Kraftübertragung zwischen Stahl und Beton durch eine am differentiellen Stabelement wirkende nominelle Verbundspannung τ_b an. Die Beschreibung des Verbundverhaltens erfolgt durch eine Beziehung zwischen der mittleren Verbundspannung und der zugehörigen Relativverschiebung δ , wie sie an Verbundkörpern mit kurzen Einbettungslängen ermittelt werden kann. Beim Ausziehversuch wird ein mit bestimmter Verbundlänge L einbetonierter Bewehrungsstab aus dem Prüfkörper herausgezogen, wobei die Verschiebung des Stabes am freien Ende gemessen wird. Die Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung wird als fiktives Stoffgesetz für die Lösung von Verbundproblemen herangezogen und von Rehm [146] als *Grundgesetz des Verbundes* bezeichnet. Die Größe und Form der Prüfkörper sowie die Länge der Verbundstrecke haben einen wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisse der Auszugsversuche. Es wird ein Mittelwert der Verbundspannung über die Verbundlänge angegeben. Als Verbundfestigkeit ist der mittlere Maximalwert τ_{max} definiert. Für praktische Berechnungen geht man häufig von einem starren Verbund zwischen Beton und Bewehrung aus.

Bei bewehrten Porenbetonbauteilen werden glatte Bewehrungsstähle eingesetzt, die zusätzlich mit einem Korrosionsschutz umhüllt sind. Ein Formverbund kann sich nicht aufbauen, so dass im Wesentlichen nur ein Haftverbund wirksam ist. Die Rolle des Verbundes bei bewehrten Porenbetonkonstruktionen sowie die Interaktion zwischen den Verbundmaterialien wird in Kapitel 4 diskutiert.

3.2.5.2 Zugspannungen in gerissenen Bauteilen

Im ungerissenen Zustand verhält sich ein bewehrter Zugstab nahezu linear elastisch. Der erste Riss bildet sich bei Erreichen der Zugfestigkeit des Betons. Nach der vollständigen Durchtrennung des Betonquerschnittes wird im Rissquerschnitt die gesamte Belastung durch die Bewehrung aufgenommen. Zwischen den Rissen kommt es durch den Verbund weiterhin zu einer Einleitung von Zugspannungen, so dass bei steigender Belastung weitere Risse entstehen können. Da der Beton einen Teil der Zugbelastung übernimmt, kommt es zu einer versteifenden Wirkung, so dass ein gerissenes Element eine höhere Steifigkeit als der Bewehrungsquerschnitt aufweist. Bei einer weiteren Steigerung der Belastung wird der Körper in einzelne Risselemente unterteilt.

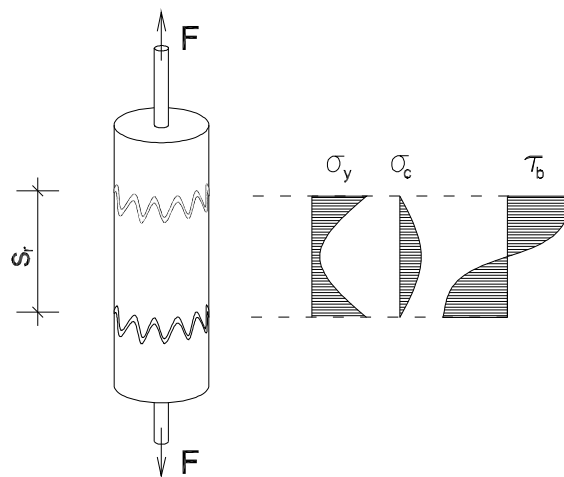


Abbildung 3.11: Risselement und qualitativer Verlauf der Spannungen im Stahl und Beton sowie Verbundspannungen

Abbildung 3.11 zeigt ein durch zwei Risse im Abstand s_r begrenztes Element. Der qualitative Verlauf der Spannungen ist angetragen. In den Rissen ist die Zugspannung im Beton σ_c Null und die Stahlspannung σ_y maximal. Zwischen den beiden Rissen findet eine Übertragung der Spannungen vom Stahl auf den Beton über die Verbundspannung τ_b statt. Die Betonzugspannungen besitzen in der Mitte zwischen den Rissen ein Maximum.

Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen wird in der Literatur ([51], [57]) auch als *tension stiffening* bezeichnet. Eine Berücksichtigung der Zugversteifung kann zum einen durch eine wirksame mittlere Betonzugfestigkeit [168] und zum anderen durch eine Anpassung der Arbeitslinie der Bewehrung [6] erfolgen.

3.2.5.3 Orthogonal bewehrte Scheibenelemente

Das Tragverhalten einer ungerissenen bewehrten Scheibe unterscheidet sich kaum von dem einer unbewehrten Betonscheibe. Sobald eine Hauptzugspannung die Zugfestigkeit überschreitet, kommt es zur Rissbildung und zu einer Umlagerung der Kräfte. Zwischen benachbarten Rissen werden Teile der Zugkräfte durch Verbundwirkung auf den umliegenden Beton übertragen. Durch die dadurch entstehenden Querdehnungen wird die Druckfestigkeit des Betons

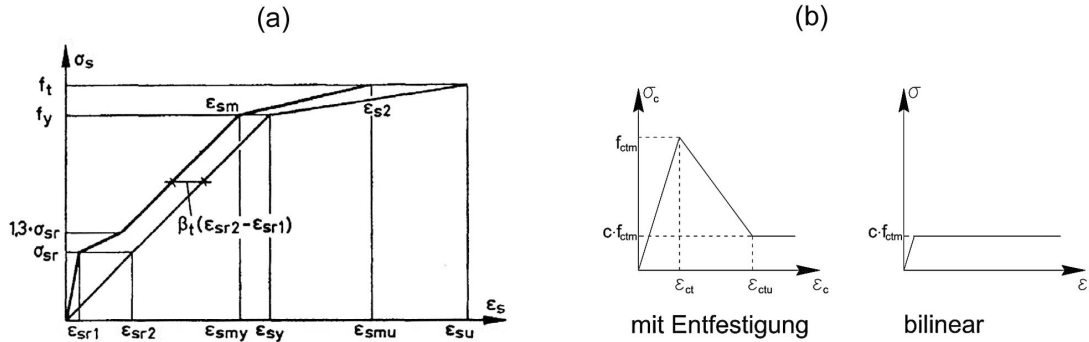


Abbildung 3.12: Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen, (a) Modifizierung der Arbeitslinie des Betonstahles [6], (b) Berücksichtigung einer mittleren Betonzugfestigkeit [168]

vermindert. Liegen die Stahlspannungen unterhalb der Fließgrenze, so verhält sich eine Stahlbetonscheibe unter Querdzugbeanspruchung ähnlich einer unbewehrten Betonscheibe. Treten dagegen große Querdehnungen aufgrund einer fließenden Bewehrung auf, verringert sich die Druckfestigkeit [172]. Die Abnahme der Druckfestigkeit wird nicht auf die entstehenden Risse parallel zur Druckbeanspruchung zurückgeführt, sondern auf die spaltende Wirkung der Rippen der Querbewehrung.

Die durch Querdehnung reduzierte Druckfestigkeit ist von der konstruktiven Durchbildung abhängig und stellt keine echte Materialeigenschaft dar. Versuche zeigen, dass sich der Einfluss der Querdehnungen analytisch abschätzen lässt ([155], [161]). Collins/Vecchio [32] schlagen folgende Beziehung für die maximale Druckfestigkeit von Normalbeton in Abhängigkeit der Querdehnung ϵ_q vor:

$$f_{c,eff} = \frac{f_{cc}}{0,8 \cdot 170\epsilon_q} \leq f_{cc}. \quad (3.29)$$

Kaufmann [84] greift diesen Ansatz auf und passt ihn an aktuelle Versuchsergebnisse an:

$$f_{c,eff} = \frac{f_{cc}^{2/3}}{0,4 \cdot 30\epsilon_q} \leq f_{cc}. \quad (3.30)$$

Für moderate Querdehnungen gibt Muttoni [123] die Betondruckfestigkeit in Abhängigkeit der Zylinderdruckfestigkeit an, wobei der Einfluss der Querdehnung unberücksichtigt bleibt.

$$f_{c,eff} = 1,6 \cdot f_{cc}^{2/3} \leq 0,6f_{cc}. \quad (3.31)$$

Die Stahldehnungen in bewehrten Porenbetonelementen sind kleiner als beim Stahlbeton. Ein Stahlfließen, speziell der Querkraftbewehrung, tritt in der Regel nicht auf. Zurückzuführen ist diese Tatsache auf den fehlenden Verbund und die Verankerungsproblematik. Eine Abminderung der Druckfestigkeit, wie nach den Gleichungen 3.29 bis 3.31 für Normalbeton, scheint daher nicht erforderlich.

3.3 Energiemethoden

3.3.1 Einführung

Aufgabe der Kontinuumsmechanik ist es, die Kinematik bzw. Statik eines Körpers in Abhängigkeit der Randbedingungen zu beschreiben. Um den Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungszustand zu ermitteln, steht ein System von Gleichungen zu den Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen zur Verfügung. Da sich selten eine exakte Lösung finden lässt, greift man auf Näherungslösungen zurück, die häufig auf Energieprinzipien basieren.

3.3.2 Formänderungsenergie

Ausgehend von der Gibbs'schen Gleichung

$$dU = T \cdot dS + \frac{1}{\rho} \cdot \sigma \, d\epsilon \quad (3.32)$$

lässt sich nach Müller [122] für adiabate Prozesse (ohne Wärmefluss bzw. Wärmestrahlung) durch Integration von einem Anfangszustand U_A ohne Deformationen zu einem Endzustand U_E mit Deformationen der Ausdruck für die spezifische Formänderungsenergie W finden.

$$U_E - U_A = \int_0^\epsilon \frac{1}{\rho} \cdot \sigma \, d\epsilon \quad (3.33)$$

$$W = \rho \cdot (U_E - U_A) = \int_0^\epsilon \sigma \, d\epsilon \quad (3.34)$$

Dies erfolgt unter der Annahme, dass sich die Dichte ρ im aktuellen und im spannungsfreien Zustand nicht unterscheiden. Die spezifische Formänderungsenergie ist die Differenz der inneren Energiezustände $\rho \cdot (U_E - U_A)$ und beschreibt die Arbeit der Spannungen an den Verzerrungen. Anschaulich kann dies durch die Fläche unter der Spannungs-Dehnungs-Linie dargestellt werden (Abbildung 3.13). Man spricht vom *Erweiterten 2. Satz von Castigliano*, der besagt, dass die Ableitung der spezifischen Formänderungsenergie nach den Dehnungen die Spannung ergibt [122].

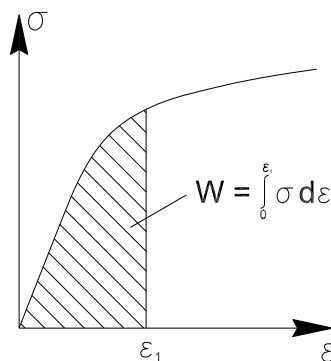


Abbildung 3.13: spezifische Formänderungsenergie

3.3.3 Prinzip der virtuellen Verrückung

Ein virtueller Verschiebungszustand $[\delta u \delta v \delta w]$ ist ein kleiner, dem wirklichen Zustand überlagerter Zustand, welcher nicht unbedingt eintreten und mit der geometrischen Konfiguration vereinbar sein muss. Der virtuelle Zustand wird mit dem der Variationsrechnung entliehenen Symbol δ kenntlich gemacht. Die virtuellen Verschiebungen erzeugen einen virtuellen Dehnungszustand

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} \delta u, \dots, \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \delta v + \frac{\partial}{\partial y} \delta u, \dots \quad (3.35)$$

Berechnet man die mit einer virtuellen Verrückung einhergehende virtuelle Arbeit $\delta \Pi_a$ der Oberflächen- und Volumenkräfte, so erhält man nach [122] folgenden Ausdruck:

$$\delta \Pi_a = \delta \Pi_i + \delta W_B. \quad (3.36)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Arbeit der äußeren Lasten (Oberflächen- und Volumenkräfte) $\delta \Pi_a$ einerseits zu Formänderungen des Körpers beitragen (innere Formänderungsenergie $\delta \Pi_i$) und andererseits den Körper beschleunigen (Formänderungsarbeit der Massenbeschleunigung δW_B). Für den Anwendungsfall der Statik deformierbarer Systeme, bei dem alle beschleunigungsabhängigen Terme entfallen ($\delta W_B = 0$), lautet das Prinzip der virtuellen Verschiebung:

Für ein mechanisches System, welches sich im Gleichgewicht befindet, ist für jeden virtuellen Verschiebungszustand die virtuelle Formänderungsenergie gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte [128]

$$\delta \Pi_a = \delta \Pi_i. \quad (3.37)$$

Mit der Definition des Energiefunktional Π

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a \quad (3.38)$$

folgt, dass die erste Variation und somit die erste Funktionalableitung des Energiefunktional verschwindet. Das Energiefunktional besitzt einen stationären Punkt

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_i - \Pi_a) = 0. \quad (3.39)$$

Um das Prinzip der virtuellen Verrückung praktisch anwenden zu können, ist es erforderlich, die Energieausdrücke explizit ausrechnen zu können. Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte lässt sich aus den Volumen- bzw. Oberflächenkräften bestimmen. Man erhält für die Variation des Potentials der äußeren Kräfte

$$\delta \Pi_a = \underbrace{\int_O \overline{F}_x \delta u dy dz + \overline{F}_y \delta v dz dx + \overline{F}_z \delta w dx dy}_{\int_O \delta W_{a,O} dO} + \underbrace{\int_V (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dV}_{\int_V \delta W_{a,V} dV} \quad (3.40)$$

mit $\delta W_{a,O}$ als virtueller Arbeit der Oberflächenkräfte und $\delta W_{a,V}$ als virtueller Arbeit der Volumenkräfte. Für die Bestimmung der Formänderungsenergie ist die Kenntnis der Materialeigenschaften erforderlich. Für ein Volumenelement gilt

$$\delta \Pi_i = \int_v \delta W_i dx dy dz, \quad (3.41)$$

wobei die Formänderungsarbeit δW_i vom Dehnungszustand abhängt und sich direkt aus der Spannungs-Dehnungs-Beziehung ableitet (Abbildung 3.13).

3.3.4 Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials

Das Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials lässt sich als Postulat folgendermaßen beschreiben:

Von allen geometrisch möglichen Verformungszuständen, die ein Körper einnehmen kann, repräsentiert derjenige den Gleichgewichtszustand zwischen den inneren Spannungen und den äußeren Kräften, für den das elastische Gesamtpotential ein Minimum einnimmt [151].

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a \Rightarrow \text{Minimum} \quad (3.42)$$

Mit Gleichung 3.39 wird gezeigt, dass das Gesamtpotential Π einen stationären Wert besitzt. Mit 3.40 und 3.41 erhält man einen Ausdruck für die erste Variation des Gesamtpotentials bei dem nur die Verschiebungen variiert werden, während Spannungen und Kräfte einen konstanten Wert besitzen. Es liegt ein Variationsproblem mit Nebenbedingungen (3.15 und 3.16) vor. Nach der Multiplikatormethode von Lagrange [24] lässt sich ein um die Nebenbedingungen erweitertes Potential $\tilde{\Pi}$ einführen

$$\tilde{\Pi} = \Pi - \int_V \sum_{i=1}^6 \lambda_i \cdot NB_i dV. \quad (3.43)$$

Hierin sind λ_i die Lagrange-Multiplikatoren und NB_i die 6 Nebenbedingungen.

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &= \Pi - \int_V \sum_{i=1}^6 \lambda_i \cdot NB_i dV \\ \tilde{\Pi} &= \Pi - \int_V \lambda_1 \left(\epsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \lambda_2 \left(\epsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \lambda_3 \left(\epsilon_z - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \lambda_4 \left(\gamma_{xy} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \lambda_5 \left(\gamma_{yz} - \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \lambda_6 \left(\gamma_{zx} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) dV \\ \tilde{\Pi} &= \Pi - \int_V \lambda_1 (\epsilon_x - u, x) + \lambda_2 (\epsilon_y - v, y) + \lambda_3 (\epsilon_z - w, z) + \dots \\ &\quad \dots + \lambda_4 (\gamma_{xy} - (u, y + v, x)) + \lambda_5 (\gamma_{yz} - (v, z + w, y)) + \lambda_6 (\gamma_{zx} - (w, x + u, z)) dV \end{aligned}$$

Daraus folgt die erste Variation

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\Pi} &= \delta\Pi - \int_V \lambda_1 \delta\epsilon_x + \lambda_2 \delta\epsilon_y + \lambda_3 \delta\epsilon_z + \lambda_4 \delta\gamma_{xy} + \lambda_5 \delta\gamma_{yz} + \lambda_6 \delta\gamma_{zx} dV + \dots \\ &\quad \dots + \int_V \lambda_1 \delta u_{,x} + \lambda_2 \delta v_{,y} + \lambda_3 \delta w_{,z} + \lambda_4 (\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) + \lambda_5 (\delta v_{,z} + \delta w_{,y}) + \lambda_6 (\delta w_{,x} + \delta u_{,z}) dV \end{aligned}$$

Darin kann das zweite Integral unter Berücksichtigung der Produktregel

$$\begin{aligned} \lambda_1 \delta u_{,x} &= (\lambda_1 \delta u)_{,x} - \delta u \lambda_{1,x} \\ \lambda_2 \delta v_{,y} &= (\lambda_2 \delta v)_{,y} - \delta v \lambda_{2,y} \\ &\vdots \end{aligned}$$

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

nach dem Gaußschen Satz folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
 & \int_V (\lambda_1 \delta u)_{,x} + (\lambda_2 \delta v)_{,y} + \dots dV - \int_V \delta u \lambda_{1,x} + \delta v \lambda_{2,y} + \dots dV \\
 &= \int_V \frac{\partial (\lambda_1 \delta u + \lambda_4 \delta v + \lambda_6 \delta w)}{\partial x} + \frac{\partial (\lambda_2 \delta v + \lambda_4 \delta u + \lambda_5 \delta w)}{\partial y} + \frac{\partial (\lambda_3 \delta w + \lambda_5 \delta v + \lambda_6 \delta u)}{\partial z} dV \\
 & - \int_V \delta u \lambda_{1,x} + \delta v \lambda_{2,y} + \dots dV \\
 &= \int_O (\lambda_1 \delta u + \lambda_4 \delta v + \lambda_6 \delta w) dydz + (\lambda_2 \delta v + \lambda_4 \delta u + \lambda_5 \delta w) dzdx + (\lambda_3 \delta w + \lambda_5 \delta v + \lambda_6 \delta u) dxdy \\
 & - \int_V \delta u \lambda_{1,x} + \delta v \lambda_{2,y} + \dots dV.
 \end{aligned}$$

Mit 3.40 erhält man zusammenfassend für $\tilde{\Pi}$

$$\begin{aligned}
 \delta \tilde{\Pi} &= \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} - \lambda_1 \right) \delta \epsilon_x + \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} - \lambda_2 \right) \delta \epsilon_y + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} - \lambda_6 \right) \delta \gamma_{zx} dV \\
 & - \int_V \delta u (\lambda_{1,x} + \lambda_{4,y} + \lambda_{6,z} + p_x) + \delta v (\lambda_{2,y} + \lambda_{4,x} + \lambda_{5,z} + p_y) + \delta w (\lambda_{3,z} + \lambda_{5,y} + \lambda_{6,x} + p_z) dV \\
 & + \int_O \delta u (\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6 - F_x) + \delta v (\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5 - F_y) + \delta w (\lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_6 - F_z) dO.
 \end{aligned}$$

Darin muss jedes Integral für sich verschwinden. Unter Berücksichtigung des Fundamentallemmas der Variationsrechnungen erhält man folgende Ergebnisse:

- Die Lagrange-Multiplikatoren lassen sich als Spannungskomponenten identifizieren

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} = \sigma_x \\
 \lambda_2 &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} = \sigma_y \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

- Die Gleichgewichtsbedingungen in V sind erfüllt

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,x} + \lambda_{4,y} + \lambda_{6,z} + p_x &= \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{zx,z} + p_x = 0 \\
 \lambda_{2,y} + \lambda_{4,x} + \lambda_{5,z} + p_y &= \sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} + \tau_{yz,z} + p_y = 0 \\
 \lambda_{3,z} + \lambda_{5,y} + \lambda_{6,x} + p_z &= \sigma_{z,z} + \tau_{yz,y} + \tau_{zx,x} + p_z = 0
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

- Die Randbedingungen auf O sind erfüllt

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6 &= \sigma_x + \tau_{xy} + \tau_{zx} = F_x \\
 \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5 &= \sigma_y + \tau_{xy} + \tau_{yz} = F_y \\
 \lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_6 &= \sigma_z + \tau_{yz} + \tau_{zx} = F_z
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Besitzt das Gesamtpotential einen stationären Punkt ($\delta \Pi = 0$), so sind sowohl die Gleichgewichtsbedingungen als auch die natürlichen Randbedingungen eingehalten. Um zu zeigen,

dass das Gesamtpotential im Gleichgewichtszustand ein Minimum einnimmt, muss die zweite Variation einen positiven Wert annehmen ($\delta^2\Pi > 0$). Dafür vergleicht man das Gesamtpotential des Gleichgewichtszustandes mit dem eines kinematisch zulässigen Nachbarzustandes

$$\Pi(\epsilon + \delta\epsilon, u + \delta u) - \Pi(\epsilon, u) = \int_V [W(\epsilon + \delta\epsilon) - W(\epsilon)] dV + \delta\Pi_a. \quad (3.47)$$

Mittels Entwicklung einer Taylor-Reihe für den Integranden lässt sich nach Betten [19] eine Näherung für die zweite Variation des Gesamtpotentials finden:

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2!} \int_V \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon^2} \delta\epsilon^2 dV. \quad (3.48)$$

Betten [19] beweist, dass für linear elastisches Verhalten die Variation stets einen positiven Wert annimmt und das elastische Gesamtpotential ein Minimum besitzt.

Das Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials setzt voraus, dass es sich um ein konservatives Problem handelt. Für allgemeine Materialansätze, geometrisch nichtlineare Problemstellungen oder Probleme der Theorie 2. Ordnung gibt es zwar einen Potentialausdruck für den die erste Variation zu Null wird, aber die hinreichende Bedingung für ein Minimum ($\delta^2\Pi = 0$) ist nicht zwingend erfüllt. Dies kann nur gewährleistet werden, wenn eine stabile Gleichgewichtslage möglich ist [85].

3.4 Mathematische Optimierung

3.4.1 Einführung

Die allgemeine Aufgabenstellung der mathematischen Optimierung besteht darin, eine Funktion (Zielfunktion oder Optimierungskriterium) zu minimieren oder zu maximieren, d.h. den kleinsten bzw. größten Funktionswert zu bestimmen. Man spricht anstelle von Minimierung oder Maximierung auch von Optimierung bzw. der Bestimmung des Extremums oder Optimums. Die Variablen der Zielfunktion können gewissen Beschränkungen in Form von Gleichungen oder Ungleichungen unterliegen. Der durch die Nebenbedingungen eingegrenzte Bereich wird auch als zulässiger Bereich bezeichnet. Liegen keine Nebenbedingungen vor, so spricht man von einer unrestringierten Optimierungsaufgabe.

Je nach Art der verwendeten Zielfunktion ergeben sich verschiedene Lösungstheorien. Man unterscheidet z.B. in Aufgaben der linearen, nichtlinearen oder vektoriellen Optimierung oder in zusätzliche Spezialfälle der quadratischen oder diskreten Optimierung.

Die lineare Optimierung wird durch den russischen Mathematiker Kantorowitsch in den 1930er Jahren begründet [36]. Er entwickelt ein Verfahren zur Produktionsoptimierung. Eine Anwendung in den Ingenieurwissenschaften lässt sich bei Collatz und Wetterling [31] finden. Es handelt sich dabei um eine Aufgabenstellung aus einem Artikel von Prager [132], bei der es um die maximale Punktbelastung einer viereckigen Platte geht. Für die Theorie der linearen Optimierung existieren zahlreiche Lösungsmethoden, deren bekannteste die Simplexmethode ist. Für eine Darstellung dieser Methoden wird auf die Literatur (z.B. [93] und [164]) verwiesen. Für Ingenieurprobleme lässt sich diese Theorie nur selten anwenden. Sobald die

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

Zielfunktion oder eine Funktion der Nebenbedingungen nichtlinear ist, liegt eine nichtlineare Optimierungsaufgabe vor. Diese werden erst seit den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts betrachtet. Als Begründer der Theorie der nichtlinearen Optimierung gelten die Mathematiker Karush, Kuhn und Tucker. Weiterführende Informationen zur nichtlinearen Optimierung werden in der Literatur ([13], [54] und [93]) gegeben.

Im Folgenden sollen in einem kurzen Überblick grundlegende Eigenschaften von Optimierungsaufgaben sowie allgemeine Lösungsmethoden dargestellt werden.

Existenz einer Lösung

Für ein Optimierungsproblem ist es von Interesse, ob überhaupt ein Optimum existiert. Die Nichtexistenz eines Optimums kann zum einen den Grund haben, dass die praktische Aufgabenstellung, für die das mathematische Modell formuliert wurde, keine optimale Lösung besitzt. Zum anderen können die Nebenbedingungen die Lösungsmenge auf einen unbeschränkten oder leeren Bereich festlegen. Um über die Existenz eines Extremums zu entscheiden, ist der Satz von Weierstrass [173] hilfreich:

Wenn eine Funktion F in einem abgeschlossenen Intervall B definiert und stetig ist, dann besitzt sie dort ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.

Eindeutigkeit einer Lösung

Die Eindeutigkeit einer Lösung fordert, dass es genau einen Punkt gibt, in dem die Zielfunktion ein Minimum oder Maximum annimmt. Diese Forderung kann nur unter zusätzlichen Voraussetzungen bzw. durch eine geeignete Form der Zielfunktion (z.B. strenge Konvexität) gewährleistet werden.

Optimalitätsbedingungen

Man unterscheidet in hinreichende und notwendige Optimalitätsbedingungen. Aus den Optimalitätsbedingungen lassen sich für einfache Aufgaben die Optimalpunkte exakt berechnen. Für komplexe praktische Aufgabenstellungen ist dies nicht möglich, so dass auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden muss.

Sensitivität einer Lösung

Bei Sensitivitäts- bzw. Stabilitätsbetrachtungen werden die Auswirkungen von Störungen untersucht, die in der Zielfunktion oder den Nebenbedingungen auftreten. Diese Störungen können zum Beispiel Rundungen oder nur näherungsweise bekannte Koeffizienten sein.

Allgemeine Lösungsmethoden

Die Methoden zur Lösung von Optimierungsaufgaben lassen sich in drei Klassen einteilen.

1. Als indirekte Methode wird das exakte Lösen der Gleichungen bzw. Ungleichungen der notwendigen Optimalitätsbedingungen bezeichnet. Diese Vorgehensweise ist in der Praxis allerdings nur selten anwendbar, da sich aufgrund von Nichtlinearitäten die Gleichungen und Ungleichungen nicht exakt lösen lassen. Eine numerische Lösung ist häufig nicht effektiv und nur für Spezialfälle (z.B. bei quadratischer Optimierung) effizient einsetzbar.

2. Als direkte Methoden werden numerische Näherungslösungen der Optimierungsaufgabe bezeichnet, die erzielt werden, ohne die Optimalitätsbedingungen zu lösen. Sie stellen die hauptsächlichsten Ansätze für praktische Aufgaben dar.

3. Für einfache Optimierungsaufgaben können grafische Lösungsmethoden angewendet werden. Sie sind allerdings nur bei bis zu drei unabhängigen Variablen praktikabel und besitzen meist nur illustrativen Charakter. Daher spielen sie bei praktischen Anwendungen keine Rolle.

3.4.2 Lösen von Problemen der Mathematischen Optimierung

Eine effektive Berechnung praktischer Aufgabenstellungen der Optimierung ist nur durch die Verwendung von Computern und entsprechenden Programmsystemen möglich. Mittels Computeralgebrasystemen können die Gleichungen der notwendigen Optimalitätsbedingungen aufgestellt und gelöst werden. Handelt es sich um nichtlineare Gleichungen existieren keine allgemeingültigen Lösungsmethoden. Kann keine exakte Lösung ermittelt werden, muss man numerische Verfahren anwenden.

Die numerischen Techniken basieren auf Iterationsmethoden. Ausgehend von einer Anfangsnäherung \bar{x}^0 wird eine Folge von Punkten \bar{x}^k erzeugt, deren Konvergenz sich selten nachweisen lässt. Häufig kann nur eine fallende Folge von Zielfunktionswerten gezeigt werden. Zusätzlich wird noch eine Abbruchschranke benötigt, da die Iteration im Allgemeinen nicht nach einer endlichen Anzahl von Schritten eine Lösung liefert. Grundtypen numerischer Methoden sind:

- Abstiegs- und Gradientenmethode

Ausgehend von einem Startwert \bar{x}^k wird ein neuer Wert in Abstiegsrichtung \bar{d}^k mit der Schrittweite α_k bestimmt.

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k + \alpha_k \cdot \bar{d}^k$$

- Newton-Verfahren

Die Zielfunktion im aktuellen Näherungspunkt wird durch eine quadratische Funktion ersetzt. Unter der Voraussetzung, dass die Hesse-Matrix $H(\bar{x}^k)$ positiv definit ist, hat die Funktion $f(\bar{x})$ an der Stelle \bar{x}^{k+1} mit $\nabla f(\bar{x})$ ein globales Minimum.

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - H^{-1}(\bar{x}^k) \cdot \nabla f(\bar{x}^k)$$

- Strafmethode

Strafmethode werden verwendet, um Optimierungsaufgaben mit Gleichungsnebenbedingungen in Ersatzaufgaben ohne Nebenbedingungen zu überführen. Diese können z.B. mit der Gradientenmethode oder dem Newton-Verfahren gelöst werden.

Neben den Grundtypen existieren viele Erweiterungen bzw. Modifikationen dieser Methoden sowie weitere Ansätze zur Behandlung von Optimierungsaufgaben. Die Entwicklung effektiver numerischer Methoden stellt einen gegenwärtigen Forschungsschwerpunkt in der mathematischen Optimierung dar. Auf die theoretischen Hintergründe wird im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen, sondern auf die Literatur (z.B. Alt [13], Geiger [54], [55] und Krabs [93]) verwiesen.

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

Die genannten numerischen Optimierungsmethoden sind in ihrer Grundform bzw. in erweiterter Form in entsprechenden Softwarelösungen integriert. Diese Software lässt sich in drei Kategorien einordnen:

1. Spezielle Programmsysteme zur Optimierung z.B. LINDO, CONOPT, MINOPT
2. Computeralgebra- und Mathematikprogramme z.B. MATLAB oder MAPLE
3. Tabellenkalkulationen mit Modulen zur Optimierung z.B. MICROSOFT EXCEL

Da in der Ingenieurmathematik nicht nur Optimierungsaufgaben zu lösen sind, bieten sich die Gruppe der Mathematikprogramme oder Tabellenkalkulationen für die Praxis an. Tabellenkalkulationen wie Microsoft EXCEL gehören oft zur Standardausrüstung von Computern im Rahmen eines Office-Paketes. Weitere Vorteile eines Tabellenkalkulationsprogramms sind die übersichtliche Darstellung von Matrizen und Feldern sowie die Visualisierungsmöglichkeiten im Rahmen von ein- oder mehrdimensionalen Diagrammen. Eine Einführung in die Verwendung verschiedener Computeralgebrasysteme gibt Benker in [18]. Eine Weiterentwicklung des EXCEL Solvers für Systeme mit einer größeren Zahl von Unbekannten sowie mit leistungsfähigeren Routinen findet man in [101] oder [133].

Eine Beschreibung der Anwendung der entsprechenden Optimierungssoftware soll im Rahmen der Arbeit nicht gegeben werden. Hierfür wird auf die entsprechenden Dokumentationen bzw. die Literatur verwiesen (z.B. [18], [48], [101], u.a.).

3.5 Energiemethoden und mathematische Optimierung bei der Tragwerksanalyse

Die Anwendung von Arbeits- und Energieprinzipien hat eine lange Tradition in der Behandlung mechanischer Problemstellungen. Neben der Vektoranalysis, auch Newton'sche Mechanik genannt, entwickelt sich parallel ein Zweig der Mechanik, der das Prinzip der virtuellen Arbeit zum Inhalt hat. Bernoulli stellt im 18. Jahrhundert eine generelle Formulierung des Prinzips auf, während Lagrange die mathematischen Werkzeuge liefert. Erweiterungen auf kinematische Systeme erfährt das Prinzip durch D'Alembert, Lagrange und Hamilton. Einen Überblick über die Entwicklung der Energiemethoden gibt Langhaar [98]. Die wichtigste Anwendung findet das Prinzip der virtuellen Arbeit bei der Formulierung von Variations- und Extremalprinzipien. Sie stellen die Basis für das in Abschnitt 3.3 beschriebene Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials dar. Frühe Anwendung finden diese Prinzipien durch Castigliano zur Ermittlung von Verformungen ausgewählter Punkte eines elastischen Systems [97].

Das Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials bildet die Grundlage für verschiedene Näherungsverfahren. Mit dem Verfahren nach Ritz [153] kann der stationäre Wert eines Funktionals, des Gesamtpotentials Π , für die Komponenten eines Verschiebungsfeldes ermittelt werden. Das Funktional wird durch eine Ansatzfunktion

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n a_i v_i(x) \quad (3.49)$$

3.5 Energiemethoden und mathematische Optimierung bei der Tragwerksanalyse

ersetzt, welche die geometrischen Randbedingungen erfüllen muss. Das Extremum ist durch die Wahl der Freiwerte a_i zu ermitteln, wobei die Bedingungen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \dots, i \quad (3.50)$$

erfüllt sein müssen. Dankert [35] gibt die Lösung für einen Biegeträger nach dem Ritz-Verfahren an. Für Systeme mit komplizierter Geometrie ist es allerdings unmöglich Ansatzfunktionen zu finden, die allen Randbedingungen genügen. Existiert kein Funktional oder ist dieses nicht bekannt, kann das Verfahren der gewichteten Residuen (Galerkin-Verfahren) angewendet werden. Dieses Verfahren dient als Basis für die Entwicklung der Finite Elemente Methode (FEM) [193].

Alternativ zur FEM ist eine direkte Behandlung von Extremalprinzipien der Mechanik möglich. Durch die Entwicklung von Algorithmen zur linearen und nichtlinearen Optimierung in Verbindung mit immer leistungsfähigeren Rechneranlagen steht ein Werkzeug zur Verfügung, um die Extremalaufgaben effizient zu lösen. Die Anwendung der linearen Optimierung zur Bestimmung der Grenzlast für Rahmentragwerke zeigen Grierson und Gladwell [59]. Charnes, Lemke und Zienkiewicz [29] betrachten statische und kinematische Ansätze zur Grenzlast und diskutieren die theoretischen Grundlagen zur Anwendung der linearen Optimierung.

Eine weitere Anzahl von Publikationen behandelt die Ermittlung der Grenzlast von Platten und Schalentragwerken mit der linearen mathematischen Optimierung. Collatz und Wetterling [31] ermitteln die Grenztragfähigkeit einer durch eine Punktlast beanspruchten Platte. Wolfensberger [192] bestimmt den unteren Grenzwert der Traglast sowie die optimale Bewehrung einer Platte durch eine lineare Optimierungsaufgabe.

Ein Grundproblem bei der Anwendung der linearen Optimierung besteht in der Linearisierung der nichtlinearen Fließbedingungen. Zavelani-Rossi und Corradi [196] schlagen vor, den Ellipsoiden der Huber-Mises-Hencky-Fließbedingung durch einbeschriebene Polyeder zu ersetzen.

Fox und Stanton [52] wenden die mathematische Optimierung in Verbindung mit der Finiten Elemente Methode an. Die potentielle Energie von Plattentragwerken wird über die Steifigkeitsmatrizen der Elemente ermittelt. Sie lösen nicht das zugehörige Gleichungssystem, sondern suchen das Minimum der potentiellen Energie mittels einer Abstiegsmethode. Dabei stoßen sie auf das Problem, dass die Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix über mehrere Größenordnungen differieren. Dies führt zu einer schlechten Konvergenz der Optimierungsroutinen. Durch entsprechende Skalierungsmethoden können sie die Effizienz der Gradientenmethoden erheblich steigern.

Dawe [42] befasst sich mit der Tragwirkung und den Verformungen flacher Bogen, da diese im Allgemeinen nicht durch Stabknicken, sondern durch „Durchschnappen“ versagen. Hierbei handelt es sich um ein geometrisch nichtlineares Problem, für dessen Lösung Dawe ein numerisches Verfahren auf Basis des Minimums der potentiellen Energie vorschlägt. Der Bogen wird dabei in gebogene Balkenelemente zerlegt, wobei linear elastisches Material und Ebenbleiben der Querschnitte vorausgesetzt wird. Die potentielle Energie des Tragwerks wird auf

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

eine Funktion zurückgeführt, die nur von den Knotenverformungen der einzelnen Elemente abhängig ist.

Eine Betrachtung der Effizienz von Algorithmen zur Minimierung der Energiefunktion findet durch Kamat und Hayduk [80] statt. Sie stellen fest, dass die mathematische Optimierung vor allem bei relativ kleinen Systemen mit nichtlinearen Materialansätzen Vorteile besitzt. Da die Mathematik immer leistungsfähigere Optimierungsroutinen zur Verfügung stellt, schlagen sie eine Erweiterung der Methoden auf sogenannte *large scale nonlinear systems* mit einer hohen Anzahl an Freiheitsgraden vor.

Ohkubo et al. [129] untersuchen Fachwerke mit physikalischen und geometrischen Nichtlinearitäten. Sie führen die Lösung eines Fachwerkes mit Materialnichtlinearitäten auf eine quadratische Optimierungsaufgabe mit linearen Gleichungsnebenbedingungen zurück. Die Zielfunktion der Optimierungsaufgabe stellt das konjugierte Gesamtpotential des Tragwerks dar. Bei der Behandlung von Problemen mit geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten schlagen sie eine Kombination der Ansätze für das konjugierte Gesamtpotential und des Minimums der potentiellen Energie vor. Die Lösung erfolgt mit den Methoden der quadratischen Optimierung. Der Rechenaufwand ist nicht sensitiv bezüglich der Materialformulierung. Somit ergeben sich Vorteile gegenüber inkrementellen Methoden für hochgradig nichtlineare Ansätze.

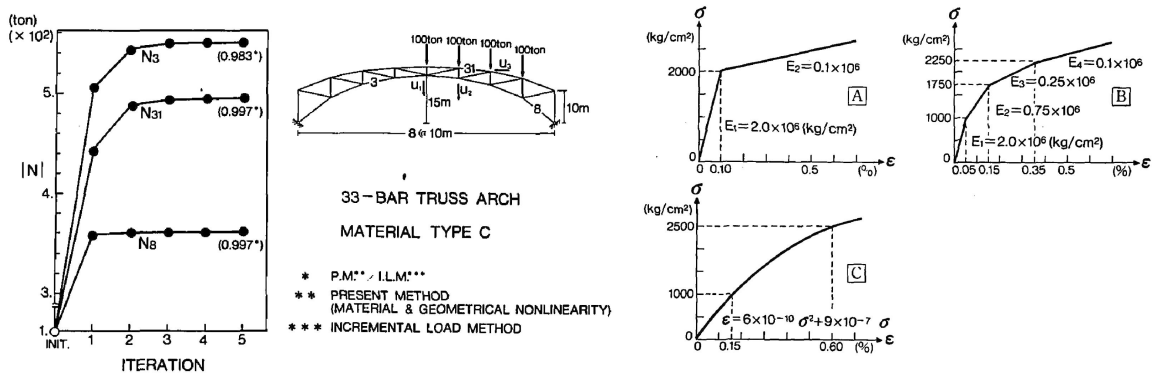


Abbildung 3.14: Anwendung der mathematischen Optimierung auf Fachwerke mit physikalischen und geometrischen Nichtlinearitäten durch Ohkubo [129]

Der Einfluss sehr großer Verformungen wird durch El-Ghazaly und Monforton [12] betrachtet. Sie nutzen die mathematische Optimierung zur Bestimmung von Knicklasten, aber auch zur Beschreibung des Verhaltens eines Tragwerkes, nachdem einzelne Tragglieder ausgefallen sind. Anhand von Versuchsnachrechnungen (flacher Bogen, abgespannter Turm unter Horizontallast) verifizieren sie ihr Berechnungsmodell und erzielen eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten. El-Ghazaly/Monforton gehen ausschließlich von linear elastischem Materialverhalten aus.

Haftka [64] schlägt einen sogenannten simultanen Ansatz zur optimalen nichtlinearen Berechnung von Fachwerken vor. Dabei kombiniert er die Lösung des mechanischen Problems

mit der Frage des optimalen Materialeinsatzes. Die Zielfunktion beinhaltet zum einen das Gesamtpotential des Tragwerkes und zum anderen die Design-Parameter (z.B. Querschnitte der Elemente). Er vergleicht seinen Ansatz mit herkömmlichen Berechnungsmethoden für drei Raumfachwerke und stellt für die simultane Berechnung Vorteile vor allem bei großen Tragwerken fest.

Anwendung der mathematischen Optimierung bei Beton- und Stahlbetontragwerken

Raue [135] gibt einen Überblick über die Aufgabenstellung und Lösungsmethoden zur Bestimmung der Grenzlast von Flächentragwerken aus Stahlbeton. Insbesondere verweist er auf die Möglichkeiten der mathematischen Optimierung zur Untersuchung des Gleichgewichtszustandes von Schalentragwerken unter statischer und dynamischer Belastung. Die Berechnungsgrundlagen für den allgemeinen Fall des dreidimensionalen Spannungszustandes stellt Raue in [139] dar. Ausgehend vom Prinzip der virtuellen Spannungen entwickelt er die Extremalaufgabe für das konjugierte Gesamtpotential

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma^T D^{-1} \sigma dV + \int_V \sigma^T \epsilon_T dV - \int_{S_u} u_s^T A_s^T \sigma dS \implies \text{Minimum}. \quad (3.51)$$

Die quadratische Optimierungsaufgabe besitzt als Nebenbedingungen die Gleichgewichtsbedingungen, die statischen Randbedingungen und die Plastizitätsbedingungen. Bei einer Verwendung multilinearer Arbeitslinien wird die Dekomposition in mehrere elastisch plastische Körper vorgeschlagen. Als möglicher Anwendungsfall ist ein Beispiel einer rotationssymmetrisch belasteten Zylinderschale enthalten.

Die Anwendung des Berechnungsmodells auf Durchlaufträger behandelt Raue in [136]-[138]. Eine Zerlegung des Durchlaufträgers in ein statisch bestimmtes Hauptsystem mit Belastungen und ein statisch bestimmtes System mit überzähligen Stützmomenten erfolgt in [138]. Mit dem vorgestellten Berechnungsmodell lassen sich die Schnittgrößen bei linear elastisch - ideal plastischem Verhalten als quadratische Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen ermitteln. Setzt man linear elastisches Verhalten voraus, entfallen die Nebenbedingungen der quadratischen Optimierungsaufgabe und die Lösung lässt sich durch Nullsetzen der ersten partiellen Ableitungen der Zielfunktion als Gleichungssystem ermitteln. Die Bestimmung der Grenzlast erfolgt über eine lineare Optimierungsaufgabe.

In [137] wird die Momentenumlagerung statisch unbestimmter Balkentragwerke infolge Plastizierungen für beliebige Belastungssituationen untersucht. Das Materialverhalten der Baustoffe ist auf eine linear elastisch - ideal plastische Beschreibung beschränkt. Auf Basis des Prinzips vom Minimum der konjugierten Formänderungsenergie erfolgt die Entwicklung einer quadratischen Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen. Die Formänderungsenergie ist als Funktion der Biegemomente angegeben und die zur Optimierungsaufgabe gehörenden Lagrange-Parameter lassen sich als Fließparameter zur Bestimmung der plastischen Verformungen identifizieren.

Eine Erweiterung des Modells auf die Verwendung multilinearer Arbeitslinien erfolgt in [136]. Die Momenten-Krümmungs-Beziehungen werden in mehrere elastisch-plastische Momentenanteile zerlegt. Neben den plastischen Gelenken lassen sich Bereiche mit Rissbildung

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

berücksichtigen. Fasst man einen Knick der Momenten-Krümmungs-Beziehung als Rissbildungsmoment auf, so kann zum einen die verminderte Steifigkeit des gerissenen Querschnittes implementiert und zum anderen die Ausbreitung der Risse identifiziert werden.

Raue, Barthel und Kassahun [144] stellen eine Anwendung der mathematischen Optimierung zur Bestimmung der Schnittkraftumlagerungen von Rechteckplatten vor. Die Zielfunktion der Extremalaufgabe besitzt Abhängigkeiten von den Biegemomenten M_x und M_y sowie vom Drillmoment M_{xy} . Es wird linear elastisch - ideal plastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Als Plastizitätsbedingungen kommen linearisierte Johansen-Bedingungen nach Wolfensberger [192] zum Einsatz. Das Berechnungsmodell für die Platten basiert auf einer Diskretisierung mittels finiter Differenzen. Einen weiteren Anwendungsfall für rotationssymmetrische Tragwerke unter rotationssymmetrischer Belastung stellen Raue und Barthel in [143] vor.

Diener [44] untersucht langzeitbelastete Bauteile aus Stahl- und Spannbeton unter der Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens. Zu vorher festgelegten Zeitpunkten werden die Schnittgrößen und Deformationen bestimmt. Die Lösung erfolgt mittels einer quadratischen Optimierungsaufgabe jeweils innerhalb eines Zeitschrittes. Um die Effekte des nichtlinearen Kriechens zu berücksichtigen, führt Diener einen spannungsabhängigen Kriechzahlerhöhungsfaktor ein.

Eine Erweiterung der Ansätze erfährt das Berechnungsmodell durch Marx [115]. Er leitet aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebung statische und kinematische Extremalprinzipie ab (Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials), die er in ein generalisiertes Lagrangeproblem überführt. Damit können sowohl physikalisch als auch geometrisch nichtlineare Probleme erfasst werden. Durch die Verwendung nichtlinearer Optimierungsverfahren ist es nicht mehr notwendig, die Materialbeziehungen zu linearisieren. Er schlägt einen Polynomansatz vor, um die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons zu approximieren. Marx stellt als praktische Anwendung unter anderem die Berechnung elastisch-plastischer Aussteifungssysteme und die Berechnung komplexer geometrisch und physikalisch nichtlinearer Rahmentragwerke aus Stahlbeton vor.

Adami [11] verfolgt die Berechnung von Aussteifungssystemen mit den Methoden der mathematischen Optimierung weiter und erweitert diese. Dabei betrachtet er vor allem die in Großtafelbauweise errichteten Wohnungsbauten der DDR. Durch das vorgestellte Berechnungsmodell ist es möglich, nichtlineare Effekte an den Rändern der Aussteifungselemente (z.B. Aufreißen der Horizontalfugen und verschieblicher Verbund in den Vertikalfugen) zu berücksichtigen.

Weitzmann [191] schlägt ein Bemessungskonzept vor, das deformationsbasierte Grenzzustände sowohl für statisch als auch dynamisch belastete Stahlbetontragwerke betrachtet. Für die numerische Umsetzung wird auf die Modellansätze der Finiten Elemente Methode und die Algorithmen der mathematischen Optimierung zurückgegriffen. Der Vorteil besteht in der direkten Ermittlung eines gesuchten Zustandes, ohne Zwischenschritte oder den Lastpfad zu berücksichtigen.

Eine Erweiterung des Querschnittsmodells zur nichtlinearen Berechnung findet durch Raue ([141], [140], [142]) statt. Die Beschreibung des Materialverhaltens erfolgt nicht mehr auf Basis

3.5 Energiemethoden und mathematische Optimierung bei der Tragwerksanalyse

einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung, sondern durch zugehörige Integralfunktionen, die das Materialverhalten eindeutig beschreiben. Diese Vorgehensweise wird als Energiemethode mit integraler Beschreibung des Materialverhaltens (EIM) bezeichnet.

$$\begin{aligned}
 W(\epsilon) &= \int_0^\epsilon \sigma(\epsilon) d\epsilon \\
 F(\epsilon) &= \int_0^\epsilon W(\epsilon) d\epsilon \\
 \Phi(\epsilon) &= \int_0^\epsilon F(\epsilon) d\epsilon
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

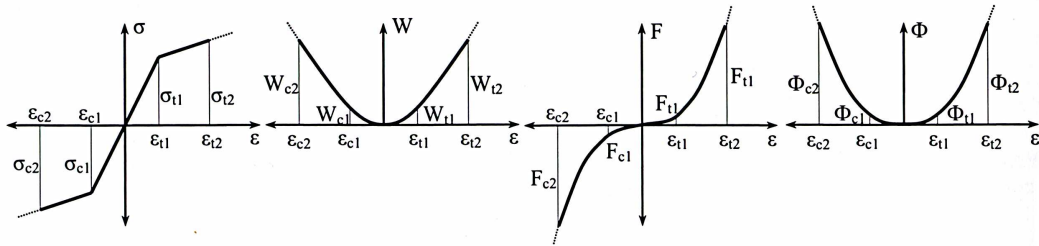


Abbildung 3.15: Verlauf der σ , W , F und Φ -Funktionen nach Raue [141]

Mit diesen Funktionen können Materialbesonderheiten (z.B. Rissbildung, *tension stiffening*, Ver- und Entfestigung) im Modell „verschmiert“ berücksichtigt werden. Der Berechnungsalgorithmus ist unabhängig von den verwendeten Materialbeziehungen, so dass die Integralfunktionen vorab bestimmt werden. Entsprechende Ansätze für multilineare σ - ϵ -Funktionen und Potenzfunktionen sind aufgeführt. Die Schnittkräfte am Querschnitt lassen sich direkt aus der Formänderungsenergie ableiten.

Mark ([109], [112]) wendet numerische Optimierungsverfahren zur Lösung des gekoppelten Gleichungssystems der Gleichgewichtsbedingungen am Querschnitt an. Durch Minimierung einer gewichteten Fehlersumme bestimmt er die Dehnungsebene für Stahlbetonquerschnitte. In Kombination mit einer numerischen Spannungsintegration können Berechnungen mit beliebigen Materialbeziehungen durchgeführt werden. Dabei wird die Lösung des Gleichungssystems mit einer Form- bzw. Strukturoptimierung verknüpft. Neben den unbekanntenen Parametern der Dehnungsebene werden zusätzlich weitere Optimierungsparameter wie Abmessungen oder Bewehrungsmengen eingeführt.

Der Ansatz wird von Mark und Stangenberg [113] für nachträglich verstärkte Stahlbetonquerschnitte erweitert. Mit Hilfe der vorgestellten Berechnungsmethodik werden Momenten-Krümmungs-Beziehungen verstärkter Querschnitte aufgestellt. Diese können in die nichtlineare Tragwerksanalyse integriert werden.

3.6 Anwendung der mathematischen Optimierung in der Tragwerksanalyse

Einführung

Im Folgenden wird ein Balkentragwerk durch die Anwendung der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Energiemethoden und der in Abschnitt 3.4 dargestellten mathematischen Optimierung berechnet. Als Beispiel dient der gelenkig gelagerte Einfeldträger mit konstantem Rechteckquerschnitt und Gleichstreckenlast nach Abbildung 3.16.

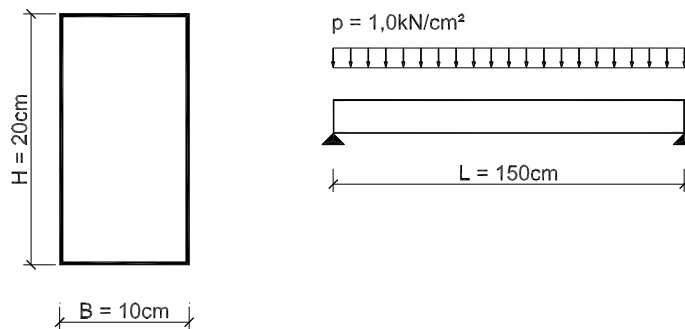


Abbildung 3.16: Berechnungsbeispiel

Die Ermittlung der Ergebnisse erfolgt über eine direkte Energieminimierung. Die Zielfunktion der Optimierungsaufgabe stellt das Energiefunktional nach Abschnitt 3.3.4 dar. Die Unbekannten der Optimierungsaufgabe sind die Unbekannten der Zielfunktion und bestehen aus den Verschiebungen des Tragwerkes. Die potentielle Energie der inneren Kräfte erhält man durch Integration der Energiedichte über das Tragwerk. Diese hängt neben den Deformationen nur von den Eigenschaften des Materials ab. Ein großer Vorteil dieser Methode besteht darin, dass das Berechnungsmodell unabhängig vom verwendeten Materialansatz ist. Nichtlineare oder unstetige Materialbeziehungen lassen sich einfach implementieren, ohne die Grundstruktur der Berechnung zu verändern. Zusätzlich können für die Optimierungsaufgabe Nebenbedingungen definiert werden. Für einige Optimierungsaufgaben sind Nebenbedingungen zwingend erforderlich.

Bei den betrachteten Problemstellungen handelt es sich um konvexe nichtlineare Optimierungsaufgaben mit bzw. ohne Nebenbedingungen.

Das in Abbildung 3.16 dargestellte Tragwerk wird mit verschiedenen Diskretisierungen und mit unterschiedlichen Materialgesetzen berechnet. Der Balken (Bernoulli-Hypothese) mit linear elastischem Materialverhalten wird zu einem ebenen Tragwerk erweitert, um die Schubgleitung zu berücksichtigen. Darüber hinaus wird ein Material mit linear elastisch - ideal plastischem Spannungs-Dehnungs-Verhalten verwendet.

Das Modell für das Balkentragwerk wird in Abschnitt 4.5 um die Bettung erweitert. Es dient als Basis für die Vergleichsrechnungen zum Verformungsverhalten der Verankerungsstäbe. Das

ebene Tragwerk ist die Grundlage für das Berechnungsmodell in Abschnitt 5.

1) Der gelenkig gelagerte Einfeldträger als Balkentragwerk

Unter Voraussetzung der Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte erhält man eine lineare Dehnungsverteilung über die Querschnittshöhe (Abbildung 3.17), die von zwei Parametern abhängt. Dies können die Mittendehnung ϵ_0 und die Krümmung des Querschnittes κ oder die Randdehnungen ϵ_o und ϵ_u sein. Der Zusammenhang dieser Parameter ist folgender:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{\epsilon_o + \epsilon_u}{2} \\ \kappa &= \frac{\epsilon_u - \epsilon_o}{H}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Damit lässt sich für den Verlauf der Dehnungen über die Querschnittshöhe eine Geradengleichung angeben, die von den Randdehnungen abhängt.

$$\epsilon(y) = \epsilon_u - \kappa \cdot y \quad (3.54)$$

Bei numerischen Berechnungen hat sich gezeigt, dass es günstiger ist, anstelle der Dehnungen die Verschiebungen als Unbekannte des Systems zu definieren. Hierfür stehen die Durchbiegung w und die Horizontalverschiebung u_o des oberen und u_u des unteren Querschnittsrandes zur Verfügung. Die Dehnungen lassen sich durch Differenzieren der Horizontalverschiebung ermitteln. Bei der Verwendung der Dehnungen als Unbekannte können aufgrund von Skalierungsproblemen numerische Instabilitäten auftreten.

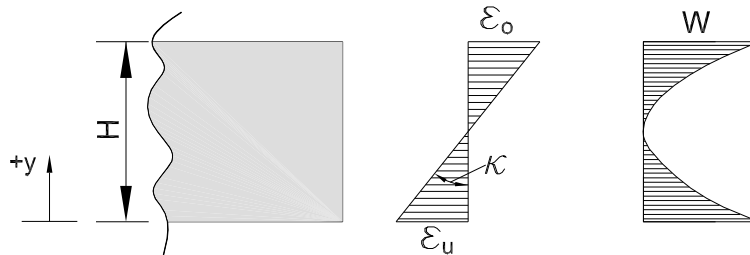


Abbildung 3.17: Dehnungsverteilung und Formänderungsarbeit am Balkenquerschnitt

Da für den Balken die Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte vorausgesetzt wird, gibt es keine direkte Kopplung der Horizontal- bzw. Vertikalverschiebung u und v . Für das Berechnungsmodell muss diese Kopplung in Form einer Nebenbedingung berücksichtigt werden. Die Nebenbedingung der Optimierungsaufgabe lautet

$$\kappa = \frac{\epsilon_u - \epsilon_o}{H} = -\frac{d^2v}{dx^2}. \quad (3.55)$$

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

Unter Berücksichtigung des Hooke'schen Gesetzes mit

$$W = 0,5 \cdot E \cdot \epsilon^2 \quad (3.56)$$

erhält man für den Verlauf der Formänderungsarbeit über die Querschnittshöhe eine quadratische Gleichung. Der Elastizitätsmodul sei mit $E = 3000kN/cm^2$ gegeben.

$$W(y) = \frac{E \cdot [\epsilon_u - \kappa \cdot y]^2}{2} \quad (3.57)$$

Die Ermittlung des Potentials der inneren Kräfte am Querschnitt j erfolgt mittels Integration der Formänderungsarbeit über die Querschnittsfläche. Für den Sonderfall eines rechteckigen Querschnittes mit linear elastischem Materialverhalten ist das Doppelintegral geschlossen lösbar. Das Gesamtpotential der inneren Kräfte lässt sich durch eine numerische Integration von $\Pi_{i,j}$ über die Balkenlängsachse ermitteln.

$$\begin{aligned} \Pi_{i,j} &= 0,5 \cdot E \cdot \int^B \int^H [\epsilon_u^2 - 2 \cdot \kappa \cdot y^2 + \kappa^2 \cdot y^2] \\ \Pi_{i,j} &= \frac{E \cdot B \cdot H}{6} \cdot [\epsilon_u^2 + \epsilon_u \cdot \epsilon_o + \epsilon_o^2] \end{aligned} \quad (3.58)$$

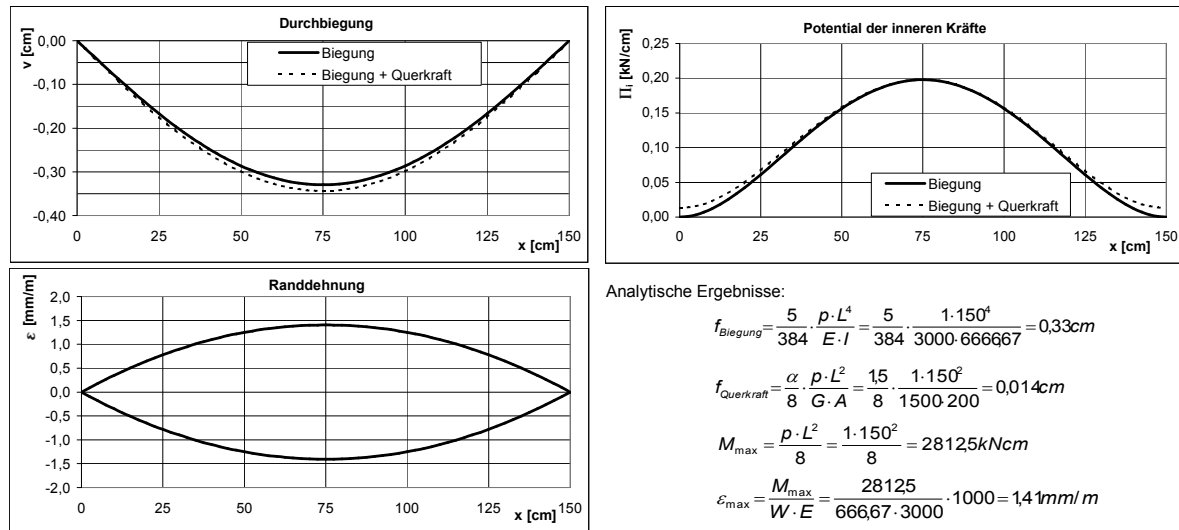


Abbildung 3.18: Ergebnisse der Berechnung des Balkens

Abbildung 3.18 zeigt die Ergebnisse der Berechnung sowie einen Vergleich mit der analytischen Lösung. Für das verwendete Beispiel liefert die Optimierungsaufgabe für die Durchbiegung sowie für die Spannungen die gleichen Ergebnisse wie die Differentialgleichung der Biegelinie. Das dritte Diagramm zeigt die Energiedichte über die Balkenlängsachse. In Balkenmitte treten die größten Werte auf, da sich hier die größten Dehnungen befinden.

Aufgrund der Einschränkung der Bernoulli-Hypothese lassen sich mit dem Modell des Balkens keine Schubspannungen auf direktem Weg ermitteln. Timoshenko und Gere [56] geben

3.6 Anwendung der mathematischen Optimierung in der Tragwerksanalyse

eine Möglichkeit an, einen Anteil der Schubgleitung bei der Ermittlung des Gesamtpotentials zu berücksichtigen. Am Querschnitt erhält man den Ausdruck

$$\Pi_{i,j,\gamma} = \frac{G \cdot A \cdot \gamma^2}{2 \cdot \psi}, \quad (3.59)$$

wobei γ die Schubgleitung in der neutralen Faser darstellt. Gleichung 3.59 berücksichtigt eine mittlere Schubgleitung, die über die Querschnittshöhe mit einem konstanten Verlauf angenommen ist. Für das Beispiel ist der Schubmodul mit $G = 1500 \text{ kN/cm}^2$ gegeben und die Querschnittsfläche beträgt $A = 200 \text{ cm}^2$. Der Wert ψ ist ein Korrekturfaktor für die Verwendung der mittleren Schubgleitung und ist abhängig von der Querschnittsform. Der Korrekturfaktor beträgt für Rechteckquerschnitte $\psi = 3/2$. Die gestrichelte Linie in Abbildung 3.18 kennzeichnet die durch den Querkraftanteil erweiterte Durchbiegung bzw. innere Energie. Die Querkraft liefert nur einen kleinen Anteil zur Mittendurchbiegung.

Mit diesem Ansatz können die zu erwartenden Schubverformungen und der Energieanteil abgeschätzt werden. Im Hinblick auf eine Spannungsermittlung ist er nur eingeschränkt anwendbar. Bei der Verwendung nichtlinearer oder plastischer Materialgesetze stößt er an seine Grenzen, so dass hier ein Vorgehen analog der folgenden Beispiele gewählt werden sollte.

2) Der gelenkig gelagerte Einfeldträger als ebenes Tragwerk

Das Berechnungsbeispiel wird zu einem ebenen Tragwerk erweitert, so dass ein zweiachsiger Spannungszustand entsteht. Neben der Dehnung ϵ_x in Balkenlängsachse wird die Dehnung ϵ_y senkrecht zum Balken sowie die Schubgleitung γ_{xy} im Modell berücksichtigt. Dies macht eine weitere Diskretisierung des Tragwerks erforderlich. Über die Querschnittshöhe werden mehrere Stützstellen eingeführt und die Verschiebungen durch Taylorpolynome angenähert. Die detaillierte Beschreibung des Berechnungsmodells und eine mögliche Diskretisierung ist in Abschnitt 5 dargestellt. Die Auflager werden als Punktlagerungen angenommen. Der Querschnitt besteht wie in Abschnitt 3.6 aus einem homogenen, linear elastischen Material mit $E = 3000 \text{ kN/cm}^2$. Die Formänderungsarbeit wird getrennt für die beiden Hauptachsen der Dehnung berechnet.

Abbildung 3.19 zeigt die Verteilung der Formänderungsarbeit im Balken, die Durchbiegung des Balkens vom Auflagerrand bis zur Balkenmitte sowie die berechneten Spannungen über die Querschnittshöhe für die Stelle $x = 18,3 \text{ cm}$ (querkraftbeanspruchter Bereich). Die berechnete Mittendurchbiegung für das Beispiel beträgt $0,38 \text{ cm}$.

Die Spannungsverläufe sind über die Querschnittshöhe dargestellt und zeigen einen Vergleich mit den in Abschnitt 3.6 berechneten Werten für den „Timoshenko“-Balken. Die Axialspannung σ_x verläuft nahezu linear. Spannungen senkrecht zum Balken σ_y sind ebenfalls fast linear und im Vergleich sehr klein. Für die Schubspannungen τ_{xy} erhält man einen parabelförmigen Verlauf mit dem Maximum der Spannungen in der Querschnittsmitte. Der Ansatz nach Timoshenko liefert hier eine konstante Spannung τ_{xy} .

Die Verteilung der Formänderungsarbeit (Energiedichte) vom Auflager bis zur Balkenmitte ist in Abbildung 3.19 (oben) dargestellt. Die größten Energieanteile befinden sich in den

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

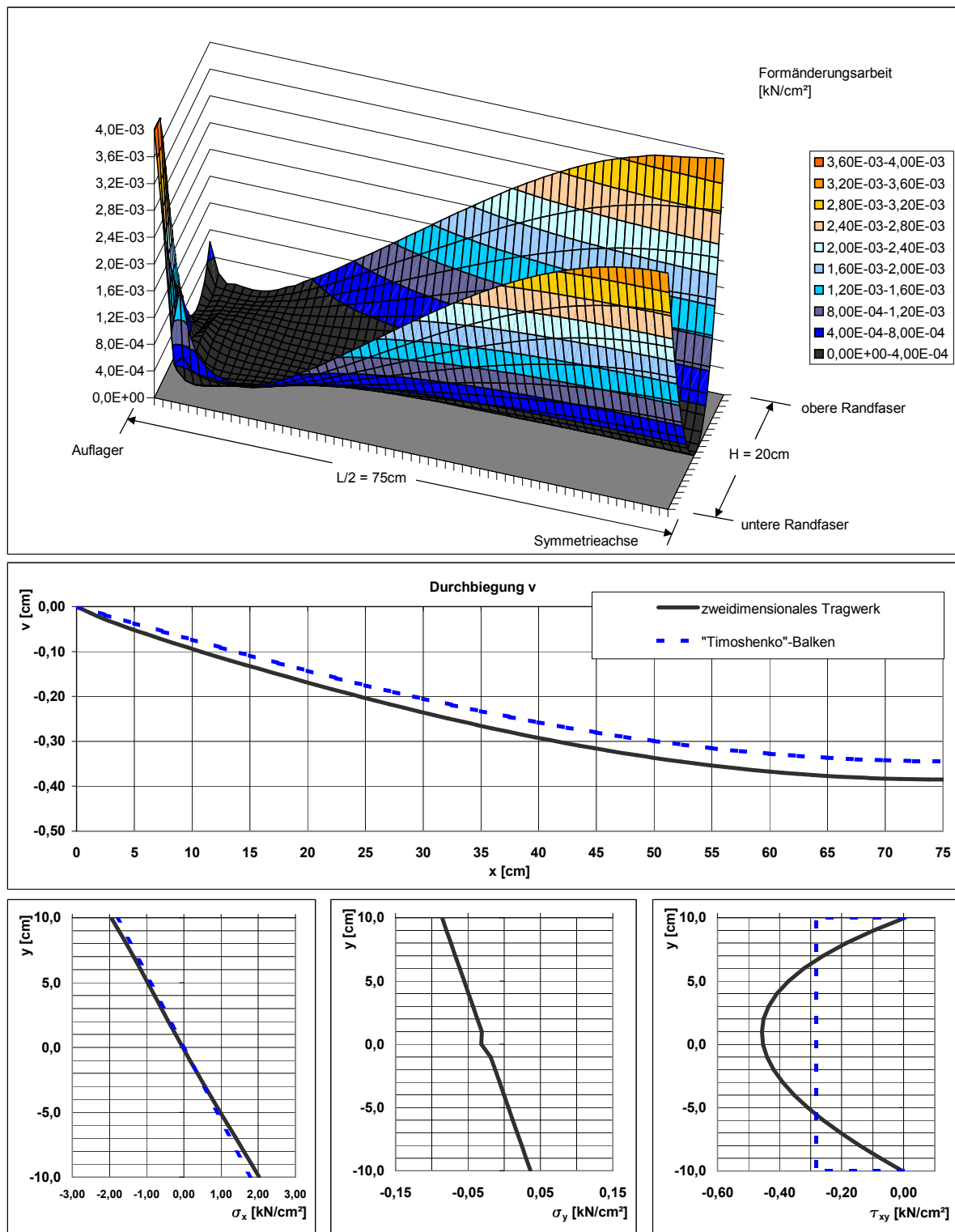


Abbildung 3.19: Formänderungsarbeit, Durchbiegung und Spannungen - Modell B2

3.6 Anwendung der mathematischen Optimierung in der Tragwerksanalyse

Randfasern der Balkenmitte. Hier treten die größten Dehnungen ϵ_x auf. Die Schubgleitung hat für dieses Beispiel nur einen untergeordneten Einfluss auf die Energiedichte.

Das Auflager ist als Punktlager modelliert. Bei Scheibensystemen treten an Punktlagern bzw. an Punktlasten Singularitäten auf [154]. In der Abbildung der Energiedichte lässt sich die Singularität am Auflager deutlich erkennen. Hier konzentrieren sich die Lagerlasten in einem Punkt und rufen entsprechend große Dehnungen hervor. Für die geplante Anwendung der Beschreibung des Querkrafttragverhaltens von Balken mit mäßiger Höhe ist der unmittelbare Auflagerbereich von untergeordnetem Interesse, so dass auf eine verfeinerte Modellierung und den sich daraus ergebenden erhöhten Aufwand verzichtet wird. Die Einflusszone der Singularität ist eng umgrenzt und beeinflusst die globale Tragwirkung nur geringfügig.

3) Der gelenkig gelagerte Einfeldträger als ebenes Tragwerk mit nichtlinearem Materialverhalten

Für das dritte Beispiel wird der Balken mit einem linear elastisch - ideal plastischen Materialgesetz berechnet. Hier zeigt das Berechnungsmodell und die mathematische Optimierung seine Vorteile. Es ist keine Anpassung des für die lineare Berechnung verwendeten Algorithmus erforderlich. Einzig die für die Ermittlung der Formänderungsarbeit verwendete Gleichung 3.56 muss abgewandelt werden. Für den unmittelbaren Auflagerbereich wird weiterhin ein linear elastischer Materialansatz gewählt, um der singulären Lasteinleitung Rechnung zu tragen.

Unter Berücksichtigung einer Grenzdehnung ϵ_f , bei der das Material zu fließen beginnt, lässt sich für die Formänderungsarbeit ein zweiteiliger Ausdruck verwenden. Dabei wird vereinfachend davon ausgegangen, dass der Betrag der Fließdehnung für Druck- und Zugspannungen der Gleiche ist.

$$\begin{aligned} W &= 0,5 \cdot E \cdot \epsilon^2 & |\epsilon| \leq \epsilon_f \\ W &= E \cdot |\epsilon| \cdot \epsilon_f - 0,5 \cdot E \cdot \epsilon_f^2 & |\epsilon| > \epsilon_f. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Wendet man Gleichung 3.60 wie in Abschnitt 3.6 getrennt für beide Hauptdehnungen an, entspricht dies einer Bewertung nach der Normalspannungshypothese.

Im Diagramm für die Energiedichte (Abbildung 3.20, oben) kann man die Bereiche erkennen, in denen ein Fließen des Materials auftritt. Der Anstieg der Energiedichte flacht sich stark ab, so dass ein Plateau entsteht. In Abbildung 3.20 (unten) ist ein Vergleich der Ergebnisse für das Modell B2 (linear-elastisches Materialverhalten) und das Modell B3 (linear-elastisch-idealplastisches Materialverhalten) dargestellt. Die Festigkeit in den Randfasern wird erreicht, so dass ein Fließen des Materials beginnt. Die Mittendurchbiegung erhöht sich um ca. 42 Prozent.

3 Mechanische und mathematische Grundlagen

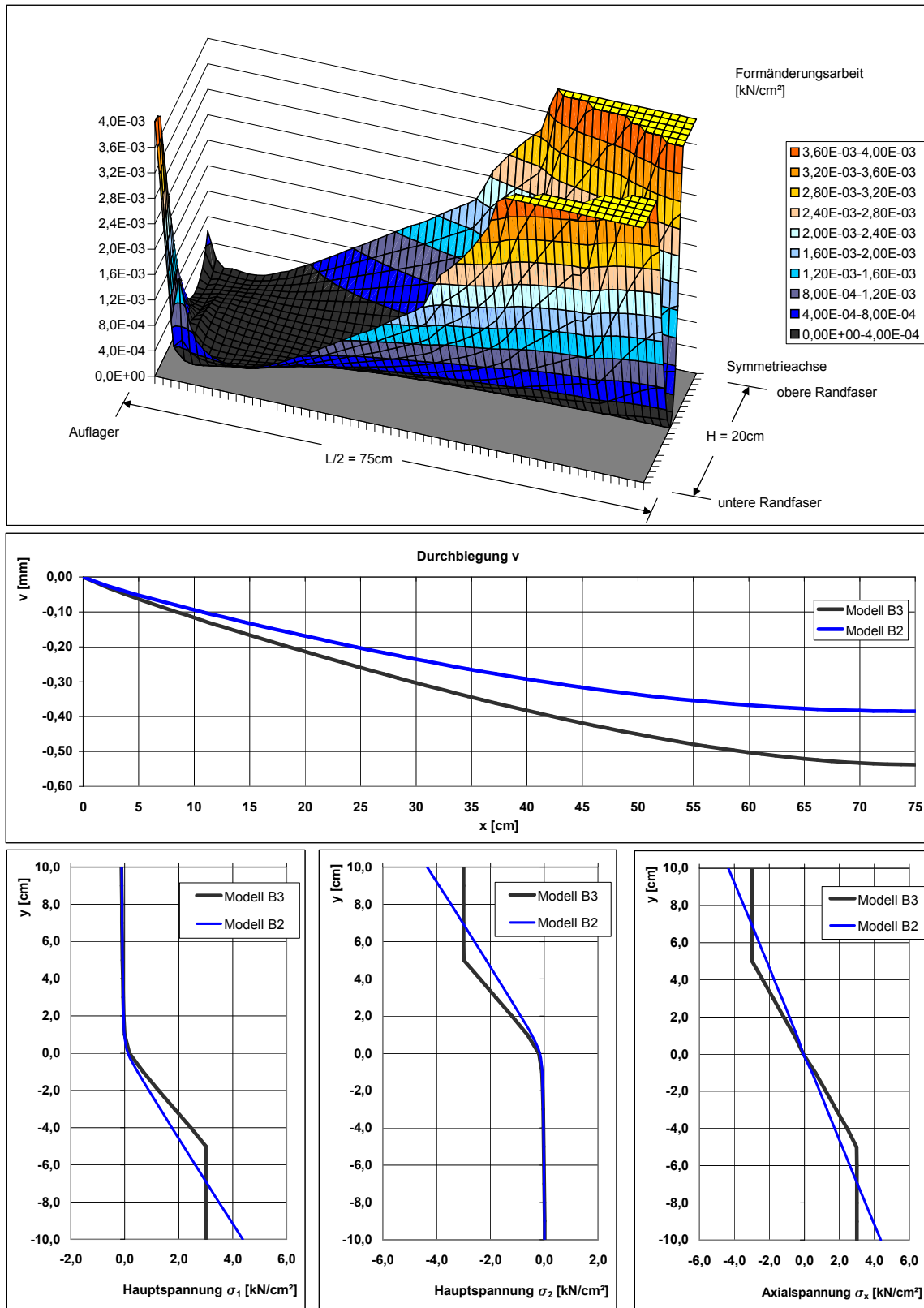


Abbildung 3.20: Formänderungsarbeit und Vergleich der Ergebnisse von Modell B2 und B3

4 Tragverhalten bewehrter Porenbetonbauteile

Der Porenbeton bietet keinen ausreichenden Korrosionsschutz für die Bewehrung. Daher muss dieser durch besondere Maßnahmen sichergestellt werden. Dies geschieht in der Praxis meist durch bituminöse Korrosionsschutzmittel, in welche die glatten Betonstäbe getaucht werden. Die Ummantelung hat einen großen Einfluss auf den Haftverbund zwischen Porenbeton und Bewehrung.

Die Interaktion zwischen Bewehrungsstahl und Porenbeton erfolgt maßgeblich über diskrete Verankerungsstellen. Daraus resultieren lokale Spannungskonzentrationen, welche durch Leibungspressungen und Spaltzugspannungen infolge der Lastausbreitung hervorgerufen werden. Diese Spannungszustände können sich kritisch in Bezug auf die Tragfähigkeit der Verankerungsverbindung und auf die Tragfähigkeit der Gesamtkonstruktion auswirken.

Neben der reinen Tragfähigkeit der Verankerung müssen die zugehörigen Verschiebungen betrachtet werden. Infolge großer Leibungspressungen tritt eine Kompression des Porenbetons und eine Relativverschiebung des Bewehrungskorbes auf. Daraus resultieren Umlagerungsprozesse, welche den inneren Kräftezustand der Gesamtstruktur beeinflussen. Sind die Möglichkeiten zur Umlagerung erschöpft, kann es aufgrund erhöhter Deformationen der Verankerungsbereiche zu einem Versagen der Gesamtstruktur kommen, obwohl die Tragfähigkeit des Verankerungsbereiches noch nicht erreicht ist.

Es wird ein Berechnungsmodell entwickelt, um die Verschiebungen der Verankerungsstäbe zu beschreiben. Das Modell auf Basis des gebetteten Balkens berücksichtigt sowohl die nichtlineare Bettungsreaktion des Porenbetons als auch die Möglichkeit des Stahlfließens in der Bewehrung. Das mechanische Problem wird als Extremalaufgabe auf Basis des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials formuliert und mit den Methoden der mathematischen Optimierung gelöst. Es werden Nachrechnungen zu dokumentierten Versuchen angestellt, die eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten zeigen.

4.1 Verbund zwischen Porenbeton und Bewehrungsstahl

Nach der Autoklavierung besitzt der Porenbeton eine geringere Alkalizität als Normalbeton. Der pH-Wert ist in der Literatur mit 8,8-9,3 [170] bzw. 10-11 [15] angegeben. In Verbindung mit der Porosität des Betons ist ein ausreichender Korrosionsschutz der Bewehrung nicht gewährleistet. Daher ist für den Bewehrungsstahl eine Korrosionsschutzschicht erforderlich, welche üblicherweise aus Zementleim, bituminösen Materialien oder Kunststoff besteht.

Bei Stahlbetonkonstruktionen kann man den wirksamen Verbund auf die Komponenten Haftverbund, Formverbund und Reibungsverbund zurückführen. Da für bewehrten Porenbeton aufgrund der Korrosionsschutzschicht glatte Bewehrungsstähle verwendet werden, entfällt der Formverbund.

Short [166] führt Anfang der 1960er Jahre Versuche mit blanker Stahlbewehrung und bituminös ummantelter Bewehrung durch. Er misst für nicht ummantelte Stäbe einen nennenswerten Verbund. Dabei stellt er einen Einfluss der Position bzw. Ausrichtung der Stäbe fest. Horizontalstäbe zeigen einen geringeren Widerstand als vertikale Stäbe, was er auf eine Gärtschattenbildung zurückführt. Bei den Stäben mit bituminöser Ummantelung wird von Short nur ein geringer Verbund gemessen (siehe Abbildung 4.1). Das Versagen bei den durchgeführten Versuchen tritt durch eine Separation des Stahles vom bituminösen Überzug auf.

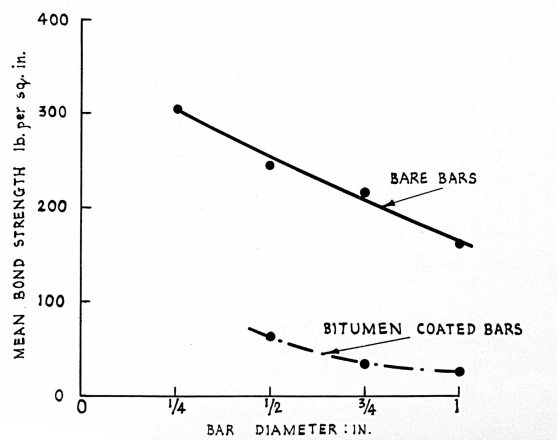


Abbildung 4.1: Ergebnis der Auszugversuche von Short [166]

Janovic/Grasser [74] messen ebenfalls die Verbundspannungen zwischen Porenbeton und Stahl. Sie ermitteln sehr kleine Werte zwischen $f_b = 0,026$ bis $0,073 N/mm^2$ (Mittelwert $f_{b,m} = 0,05 N/mm^2$). Die Ergebnisse von Auszugversuchen mit einem zusätzlichen Querdruk auf den Porenbeton liefern näherungsweise die gleichen Ergebnisse.

Wehr [188] wertet Versuchsergebnisse von van Nieuwenburg/de Blaere [126] aus und führt eine numerische Simulation durch. Dabei stellt er fest, dass der verwendete Korrosionsschutzüberzug einen Einfluss auf die Verbundfestigkeit besitzt (Abbildung 4.2, links). Eine eindeutige Abhängigkeit der Verbundfestigkeit vom Stabdurchmesser lässt sich nicht erken-

4.2 Thermische Vorspannung bewehrter Porenbetonbauteile

nen (Abbildung 4.2, rechts), allerdings vermutet Wehr für größere Stabdurchmesser aufgrund der herstellungsbedingten Gärshadowenbildung eine abnehmende Tendenz. Für die seitliche Randüberdeckung kann ebenfalls keine eindeutige Abhängigkeit festgestellt werden. Wehr führt eine nichtlineare Berechnung mittels finiter Volumenelemente durch und kann die Versuchsergebnisse von van Nieuwenburg/de Blaere näherungsweise abbilden.

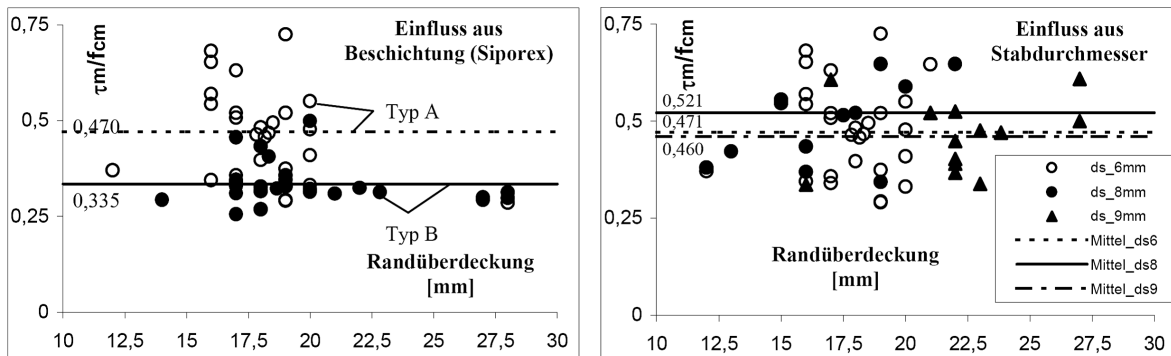


Abbildung 4.2: Abhängigkeit der Verbundspannung vom Korrosionsschutz und vom Stabdurchmesser nach Wehr [188]

Die europäische Norm DIN EN 12602:2008 [9] erlaubt den Ansatz eines Verbundes bei der Bemessung. Der charakteristische Wert der Verbundfestigkeit f_{bk} ist dabei nach DIN EN 12269-1 [4] zu bestimmen. Dieser Wert darf für alle Fälle mit einer gleichen bzw. größeren Betondeckung verwendet werden. Zur Ermittlung des Bemessungswertes der Verbundfestigkeit ist die Gleichung

$$f_{bd} = k_1 \cdot k_2 \cdot f_{bk} / \gamma_c \quad (4.1)$$

angegeben. Die beiden Abminderungsfaktoren berücksichtigen geometrische Einflussgrößen (k_1 , üblicher Wert 0,8) und Langzeit- bzw. Temperatureinflüsse (k_2 , üblicher Wert 0,2). Als Teilsicherheitsbeiwert wird $\gamma_c = 1,73$ empfohlen. Das bedeutet, dass nur ca. 9% (inkl. Sicherheitsfaktor) der mittels Versuch bestimmten Verbundfestigkeit für eine Bemessungsaufgabe in Ansatz gebracht werden dürfen. Wird die charakteristische Verbundfestigkeit nicht mittels Versuchen bestimmt, ist f_{bd} zu Null anzunehmen.

Die Verbundfestigkeit stellt keine relevante Größe für eine Bemessungsaufgabe dar. Die Interaktion zwischen Porenbeton und Bewehrung muss durch diskrete Verankerungselemente sichergestellt werden.

4.2 Thermische Vorspannung bewehrter Porenbetonbauteile

Bedingt durch den Herstellungsprozess baut sich bei bewehrten Porenbetonbauteilen eine thermische Vorspannung auf. Die Ursache dafür liegt in der gegenüber dem Porenbeton größeren Temperaturdehnzahl des Bewehrungsstahles. Der Ausdehnungskoeffizient des Stahles liegt bei ca. $1,2 \cdot 10^{-5} 1/K$ und der des Porenbetons bei ca. $0,8 \cdot 10^{-5} 1/K$ [187]. Damit dehnt sich der Bewehrungsstahl bei der Dampfhärtung um 50% stärker aus als der Beton. Nach dem

4 Tragverhalten bewehrter Porenbetonbauteile

Abschluss der Autoklavierung tritt während des Abkühlens eine Dehnungsdifferenz zwischen Bewehrungsstahl und Beton auf, da nun der Porenbeton seine Festigkeit besitzt. Diese Dehnungsdifferenz bewirkt eine Vordehnung des Bewehrungsstahles und eine Vorstauchung des Porenbetons.

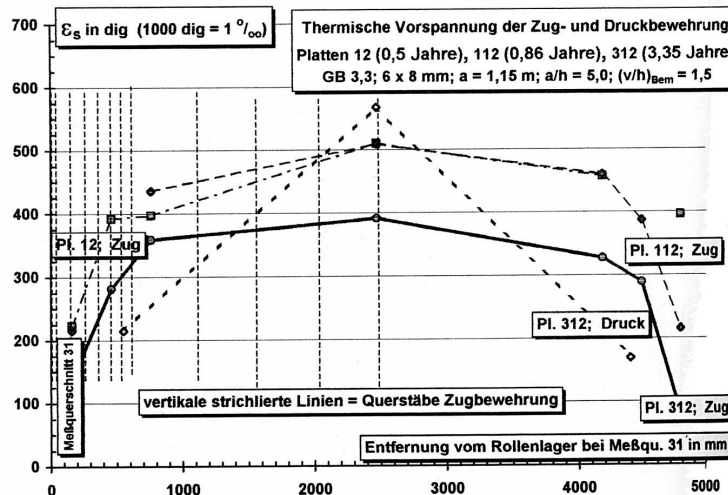


Abbildung 4.3: Thermische Vorspannung der Bewehrung nach Daschner [41]

Neben der Dehnungsdifferenz zwischen Porenbeton und Stahl hängt die thermische Vorspannung vom Bewehrungsgrad und der Wirksamkeit des Haftverbundes ab. Sowohl Wehr [188] als auch Daschner [41] geben an, dass der Verlauf der thermischen Vorspannung entlang der Balkenlängsachse nicht konstant ist (Abbildung 4.3). Sie führen diese Tatsache auf den bei der Messung noch wirksamen Haftverbund zurück.

Daschner [41] untersucht das Kriech- und Schwindverhalten mehrerer Platten und stellt fest, dass die Vorspannung im Laufe der Zeit abgebaut wird. Er misst an Platten mit einem Alter von 4,66 Jahren eine Abnahme der Vorspannung von 8% bis 34%.

Beide Versuchsreihen von Daschner bzw. Wehr stellen einen positiven Effekt der thermischen Vorspannung auf die Biegeerisslast fest. Die Rissbildung wird verzögert und für den Gebrauchszustand können kleinere Rissbreiten und kleinere Durchbiegungen beobachtet werden. Im Bruchzustand treten an der Endverankerung teilweise erhebliche Verformungen auf. Dieser Endschlupf ist eine inelastische Verformung, die in ihrer Auswirkung einem Stahlfließen entspricht [188]. Der Schlupf hebt die thermische Vorspannung teilweise bzw. vollständig auf, so dass für einen Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit die thermische Vorspannung keine Rolle spielt.

Eine Vorspannung der Querkraftbewehrung hat aufgrund der geringen Bauteilhöhe nur eine untergeordnete Bedeutung. Messungen von Wehr [188] zeigen viel geringere Dehnungsdifferenzen in den Bügeln.

Für das Berechnungsmodell wird der Einfluss der thermischen Vorspannung nicht berück-

4.3 Tragverhalten der Verankerungsstäbe der Längsbewehrung

sichtigt. Infolge der Verschiebungen des Bewehrungskorbes innerhalb des Porenbetons und dem damit verbundenen Versagen des Haftverbundes können die positiven Effekte der Vorspannung nicht über die gesamte Lebensdauer der Bauteile sichergestellt werden.

4.3 Tragverhalten der Verankerungsstäbe der Längsbewehrung

Da die Interaktion von Porenbeton und Bewehrungsstahl nicht über den Verbund gewährleistet werden kann, muss eine Kraftübertragung über diskrete Verankerungselemente erfolgen. Für querkraftbewehrte Porenbetonbalken stellen die Bügel des Bewehrungskorbes die zur Verankerung notwendigen Querstäbe dar. Bei plattenartigen Bauteilen übernimmt die Querbewehrung die Verankerung.

Die Zugkraft der Längsbewehrung infolge des maximalen Biegemomentes muss bis zum Auflager hin über die Querstäbe verankert werden [5]. Die verbleibende Zugkraft ist theoretisch hinter dem Auflager zu verankern. Da in der Regel die erforderlichen Lagerüberstände nicht vorhanden sind, werden die zur Verankerung notwendigen Querstäbe auch vor dem Auflager angeordnet.

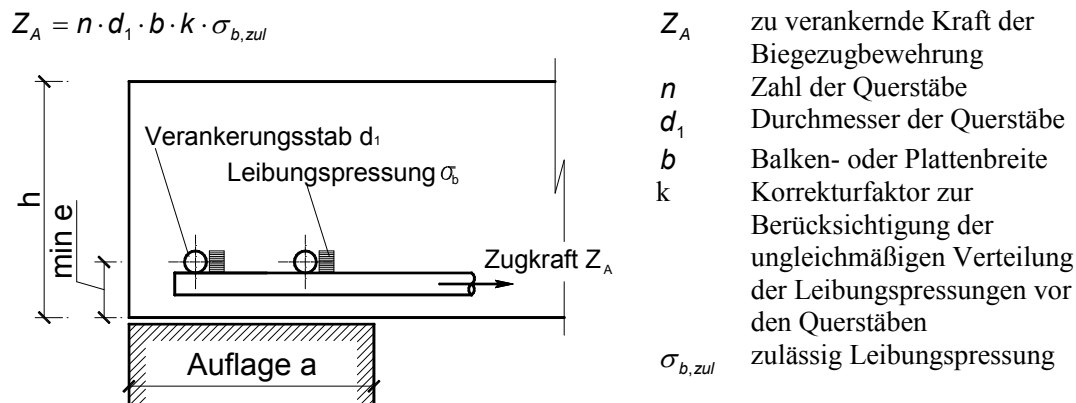


Abbildung 4.4: Bemessung der Endverankerung nach [76]

Janovic [76] schlägt ein Berechnungsverfahren zur Bemessung der Endverankerung vor (Abbildung 4.4). Die Verankerungsfestigkeit wird durch die Betondeckung, die Betondruckfestigkeit, den Querstabdurchmesser, die Anzahl der Querstäbe, den Abstand der Längsstäbe und den Querdruck am Auflager beeinflusst. Die Auflagerkraft erzeugt im Bereich der Endverankerung eine Querpressung, die die im Bruchzustand aufnehmbare Leibungspressung günstig beeinflusst. Janovic gibt eine Erhöhung der zulässigen Leibungspressung von 30 % gegenüber fehlender Querpressung an.

Die Verankerungsstäbe sind im Porenbeton gebettet. Aufgrund der geringen Festigkeit bzw. Steifigkeit des Porenbetons und des unvollständigen Verbundes kommt es zu einer Relativverschiebung zwischen Beton und Bewehrung. In Abhängigkeit der Ausbildung der Endverankerung kann ein Schlupf beobachtet werden ([40], [76], [188]). Die Nachgiebigkeit der Verankerungsstäbe im Feld bedingt einen völligen Verlauf der Zugkraftlinie (Abbildung 4.5). Die damit einhergehenden Kraftumlagerungen führen zu einer stärkeren direkten Lastabtragung

4 Tragverhalten bewehrter Porenbetonbauteile

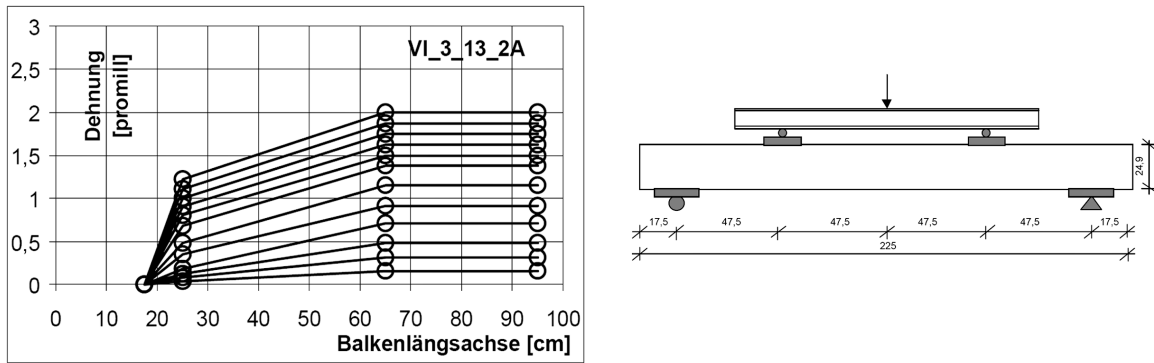


Abbildung 4.5: Stahldehnung in Balkenlängsachse nach Wehr [188]

und einer Erhöhung der Beanspruchung der Endverankerung. Eine unzureichende Verankerung der Zugkräfte kann entweder ein Versagen durch Abspalten der Betondeckung oder bei großen Verformungen der Verankerungsbereiche ein sekundäres Biegeversagen einleiten [188].

Abbildung 4.6 stellt die durch Wehr [188] im Versuch ermittelten Werte für den Endschlupf und die Mittendurchbiegung dar. Für geringe Beanspruchungen kann ein nahezu linearer Zusammenhang der Last-Durchbiegungskurve festgestellt werden. Bei kleinen Bügelabständen (5cm und 10cm) bleibt dieser lineare Zusammenhang bis kurz vor dem Bruch bestehen. Die Verformungen der Balken mit größeren Abständen der Bügel zeigen dagegen eine progressive Entwicklung der Mittendurchbiegung. Stellt man die gemessenen Werte des Schlupfes der Längsbewehrung den Durchbiegungen gegenüber, kann man eine Abhängigkeit beider Werte voneinander erkennen. Die progressive Verformungsentwicklung kann auf die Vergrößerung der Bügelabstände und den wachsenden Schlupf an der Endverankerung zurückgeführt werden.

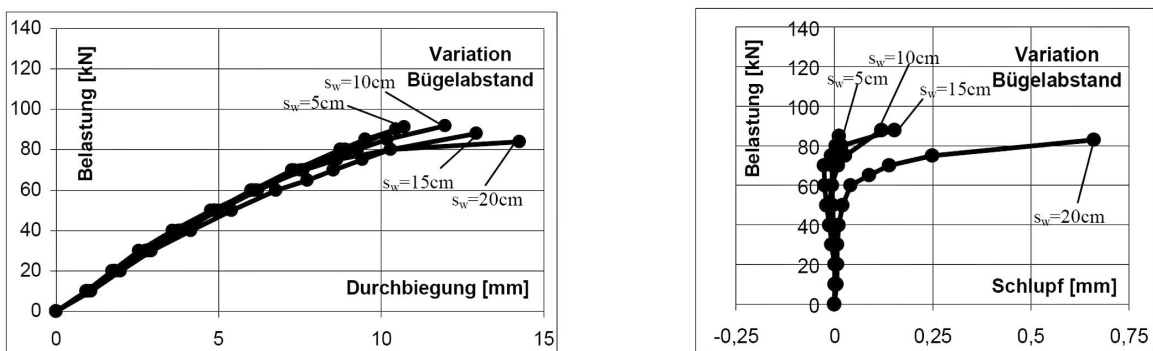


Abbildung 4.6: Schlupf der Längsbewehrung und Durchbiegung in Abhängigkeit der Bügelabstände nach Wehr [188]

Bei niedriger Beanspruchung tritt nur ein kleiner Schlupf an der Endverankerung auf. Die Pressungen an den Verankerungsstäben sind ebenfalls klein und der Haftverbund ist noch teilweise wirksam. Für große Bügelabstände steigen die Leibungspressungen schnell an und es

4.4 Tragverhalten der Verankerungsstäbe der Querkraftbewehrung

treten Deformationen an den Lasteinleitungsbereichen auf. Bei einem Überschreiten der Porenbetonfestigkeit werden die Poren komprimiert und es können keine weiteren Kräfte aufgenommen werden. Bei kleinen Bügelabständen wird die Endverankerung geringer beansprucht und es kann ein verhältnismäßig kleiner Schlupf der Längsbewehrung beobachtet werden.

Eine unzureichend dimensionierte Endverankerung ruft große Verschiebungen des Zuggurtes gegenüber dem bettenden Porenbeton hervor. Dieser Schlupf führt im maximal biegebeanspruchten Bereich zu einer Einschnürung der Druckzone und einem sekundären Biegedruckbruch [188]. Die zur Aktivierung der Verankerungskräfte notwendigen Verschiebungen sind zu begrenzen, um ein Bauteilversagen auszuschließen.

4.4 Tragverhalten der Verankerungsstäbe der Querkraftbewehrung

Bei Bauteilen aus Normalbeton wird die Steifigkeit der Querkraftbewehrung durch den Bewehrungsstahl bestimmt und ist vom Querkraftbewehrungsgrad abhängig. Im Gegensatz dazu hat beim querkraftbewehrten Porenbeton die Nachgiebigkeit der diskreten Verankerungspunkte einen großen Einfluss auf die Steifigkeitsverhältnisse. Diese Nachgiebigkeit wird im Wesentlichen durch die Biegesteifigkeit des Verankerungsstabes, die Festigkeit bzw. Steifigkeit des Porenbetons sowie den Abstand der Lasteinleitungspunkte bestimmt. Die Verankerungsstäbe sind im Porenbeton gebettet. Bei großen Belastungen können Porenquetschungen und eine Verdichtung des Gefüges unterhalb des Verankerungsstabes beobachtet werden [188].

Janovic [76] stellt durch Versuche an bügelbewehrten Balkenelementen aus Porenbeton fest, dass ein Querkraftversagen mit einem Abplatzen der seitlichen Betondeckung einhergeht. Dies bedeutet ein Versagen des Knotenpunktes zwischen Bügelbewehrung und schräg geneigter Betondruckstrebe. Daraus leitet er einen Einfluss der seitlichen Betondeckung auf diesen Versagenszustand ab.

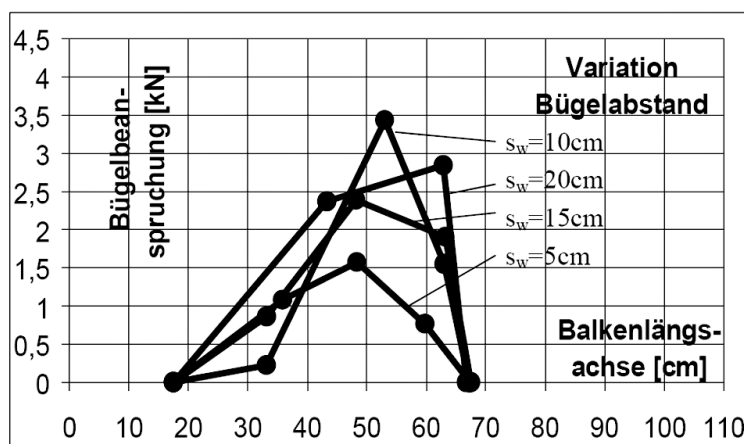


Abbildung 4.7: Bügelbeanspruchung in Balkenlängsachse für die Abstände $s=5\text{cm}$, 10cm , 15cm , 20cm nach Wehr [188]

4 Tragverhalten bewehrter Porenbetonbauteile

Abbildung 4.7 stellt von Wehr [188] im Versuch ermittelte Kräfte in den Bügeln dar. Im Durchschnitt treten für einen Abstand der Bügel von 10cm die größten Bügelkräfte auf. Für schwach querkraftbewehrte Balken erhält man aufgrund der größeren Leibungsspannungen unter dem Verankerungsstab eine erhöhte Nachgiebigkeit des Knotenpunktes. Hieraus folgen kleinere Bügelkräfte und eine größere direkte Lastabtragung zum Auflager.

Die Versuche von Wehr und Janovic zeigen, dass die seitliche Betondeckung keinen Einfluss auf das Verformungsvermögen der Verankerungsstäbe hat. Das Deformationsverhalten wird nur von den Pressungen unter dem Verankerungsstab bestimmt. Weiterhin wird gezeigt, dass es eine klare Zweiteilung in der Last-Verschiebungs-Beziehung der Verankerungspunkte gibt. Unterhalb einer kritischen Last ist die Steifigkeit nahezu konstant. Danach sinkt die Verankerungssteifigkeit stark ab. Diese charakteristische Änderung der Beziehung tritt nach Wehr bei einer Leibungspressung in der Größenordnung des 0,8- bis 1,35-fachen der einachsigen Druckfestigkeit auf¹. Im Hinblick auf ein Berechnungsmodell scheint der Ansatz der Druckfestigkeit des Porenbetons als Grenzleibungspressung angebracht.

4.5 Eigene numerische Untersuchungen zum Verformungsverhalten der Verankerungsstäbe

4.5.1 Einführung

Da das Verformungsverhalten einen wichtigen Einfluss auf die Verteilung der inneren Kräfte besitzt, soll dieses mittels Vergleichsrechnungen untersucht werden. Die Auszugsversuche von Wehr [188] zeigen einen linearen Verlauf der Last-Verformungs-Beziehung für niedrige Belastungen. Eine lineare Finite Elemente Berechnung mit einem Volumenmodell liefert nur eine ungenügende Abschätzung der Verformungen (Tabelle 4.1). Die Definition einer Prozesszone mit geringerer Steifigkeit und die Verwendung nichtlinearer Materialgesetze könnte eine bessere Annäherung der Versuchsergebnisse liefern. Da der Berechnungsaufwand zur Lösung dieses Teilproblems dadurch unverhältnismäßig ansteigt, wird im folgenden Abschnitt ein Berechnungsmodell auf Basis eines gebetteten Balkens betrachtet.

d_s [mm]	6mm	8mm	10mm	12mm
w_{FEM} [mm]	0,026	0,021	0,017	0,015
$w_{Versuch-Wehr}$ [mm]	$\approx 0,15$	—	—	$\approx 0,063$

Tabelle 4.1: Ergebnis der linearen FE-Berechnung

4.5.2 Der elastisch gebettete Balken

Zur Ermittlung des Verformungsverhaltens wird der Verankerungsstab als elastisch gebetteter Balken modelliert. Der Stab ist kontinuierlich im Porenbeton gebettet und wird durch Einzellasten an den Stellen der angeschweißten Bügel bzw. Querstäbe beansprucht. Geht man von einer linearen Elastizität sowohl des Verankerungsstabes als auch des bettenden Materials aus, so lässt sich nach Timoshenko [181] die Differentialgleichung (DGL) der Biegelinie

¹0,8 tritt bei einem Verankerungsstabdurchmesser von 12mm auf, wobei hier der Schweißnahtknoten versagt

4.5 Eigene numerische Untersuchungen zum Verformungsverhalten der Verankerungsstäbe

angeben:

$$EI \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = -c \cdot y. \quad (4.2)$$

Fasst man die Steifigkeiten im Parameter $\beta = \sqrt{\frac{c}{4EI}}$ zusammen, kann die allgemeine Lösung von Gleichung 4.2 gefunden werden:

$$y = e^{\beta \cdot x} \cdot (A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x) + e^{-\beta \cdot x} \cdot (C \cdot \cos \beta x + D \cdot \sin \beta x). \quad (4.3)$$

Die Konstanten A, B, C und D lassen sich aus den Randbedingungen bestimmen. Betrachtet man den durch eine Einzellast beanspruchten unendlich gebetteten Balken, so verschwinden für einen unendlich entfernten Punkt die Durchbiegung und die Krümmung des Stabes. Diese Bedingung ist nur erfüllt, wenn die beiden Konstanten A und B zu Null gesetzt werden. Unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen lässt sich die Biegelinie für den Stab in Abbildung 4.8 mit

$$y = e^{-\beta \cdot x} \cdot (C \cdot \cos \beta x + D \cdot \sin \beta x) \quad (4.4)$$

angeben. Die beiden Konstanten C und D können am Lasteinleitungspunkt mit den Bedingungen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0$ und $Q_{x=0} = -\frac{F}{2}$ gefunden werden:

$$D = C \quad (4.5)$$

$$C = \frac{F}{8 \cdot \beta^3 \cdot EI}. \quad (4.6)$$

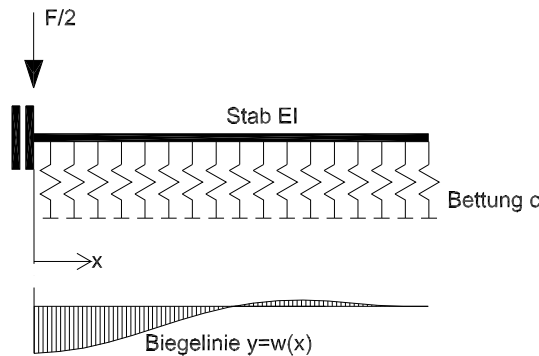


Abbildung 4.8: Modell und Biegelinie des unendlich elastisch gebetteten Stabes

Setzt man die Konstanten C und D in die Gleichung der Biegelinie 4.4 ein, so erhält man

$$y = w(x) = \frac{F}{8 \cdot \beta^3 \cdot EI} \cdot e^{-\beta x} \cdot (\cos \beta x + \sin \beta x). \quad (4.7)$$

Das zugehörige Biegemoment für den Verankerungsstab ist durch die zweite Ableitung der Biegelinie gegeben:

$$M = -EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F}{4} \cdot \beta \cdot e^{-\beta x} \cdot (\sin \beta x - \cos \beta x). \quad (4.8)$$

4 Tragverhalten bewehrter Porenbetonbauteile

Für die Ermittlung der Bettungskonstante wird auf die Ergebnisse von Wehr [188] zu den zentrischen Auszugsversuchen zurückgegriffen. Da sich die Last-Verformungs-Beziehung bis zu einem bestimmten Lastniveau linear verhält und die Streuung der Einzelversuche in diesem Bereich gering ist, wird die Bettungsziffer c aus den Versuchen abgeleitet.

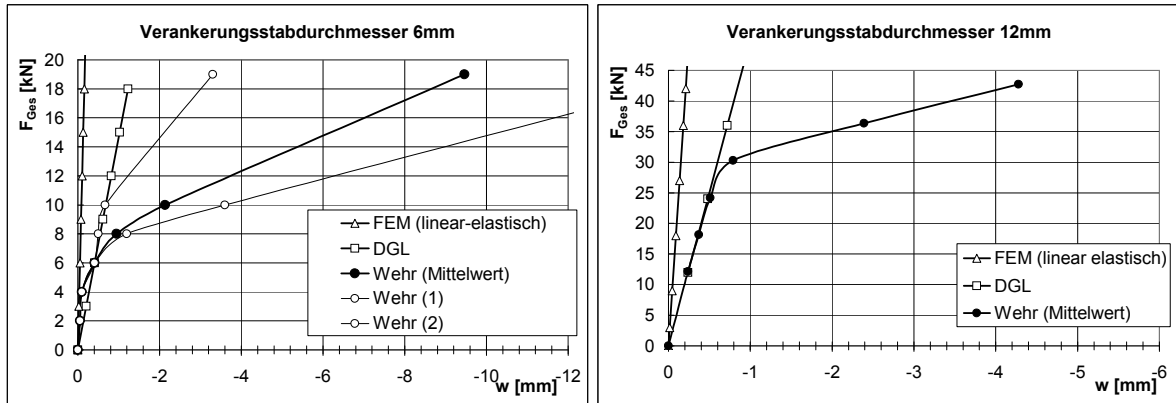


Abbildung 4.9: Last-Verformungs-Beziehung

In Tabelle 4.2 sind die Ergebnisse der Berechnung sowie die ermittelten Steifigkeiten der Bettung für die erste Belastungsstufe dargestellt. Für die gewählte Belastung

$$F_{Ges, d_s=6mm} = 3 \cdot F = 2kN$$

bzw.

$$F_{Ges, d_s=12mm} = 3 \cdot F = 6kN$$

betragen die Leibungspressungen σ_b ca. 30% (Stabdurchmesser 12mm) bzw. ca. 50% (Stabdurchmesser 6mm) der Druckfestigkeit des Porenbetons. Im Verankerungsstab treten bereits große Spannungen auf ($\sigma_{st} = 15kN/cm^2$). Da für die Versuche ein Stahl der Güte St37 gewählt wurde, kann davon ausgegangen werden, dass bereits bei der zweiten Laststufe Plastizierungen im Stahl auftreten.

Ein Vergleich mit den Versuchswerten zeigt, dass das Modell des elastisch gebetteten Balkens nur für kleine Kräfte die Versuchswerte abbildet. Die Kurven der Messwerte haben einen signifikanten Knick, der mit einer linearen Berechnung nicht beschrieben werden kann. Die lineare Berechnung mit finiten Elementen liefert aufgrund der Anfangs beschriebenen Problematik der Erfassung des Lasteinleitungsbereiches zu kleine Verformungen des Verankerungsstabes. Für eine realistische Abbildung des Verformungsverhaltens für den gesamten Belastungsbereich ist eine Einbeziehung des nichtlinearen Materialverhaltens des Stahls und des Porenbetons erforderlich.

4.5.3 Numerische Simulation als gebetteter Balken

Für den Verankerungsstab wird das Modell des gebetteten Balkens beibehalten (Abbildung 4.10). Die Lösung der Differentialgleichung in Abschnitt 4.5.2 liefert für den linearen Bereich gute Ergebnisse, kann allerdings den Steifigkeitsabfall bei höheren Laststufen nicht abbilden.

4.5 Eigene numerische Untersuchungen zum Verformungsverhalten der Verankerungsstäbe

d_s [mm]	F [kN]	w [mm]	c [kN/cm ²]	M [kN/cm]	σ_{St} [kN/cm ²]	σ_b [kN/cm ²]
6	0,667	0,05	33	0,33	15,8	0,28
12	2	0,15	12	2,58	15,2	0,16

Tabelle 4.2: Ergebnis der Berechnung mit der DGL der Biegelinie

Plastizierungen des Verankerungsstabes bzw. inelastische Verformungen des Porenbetons beeinflussen die Verformungseigenschaften maßgeblich.

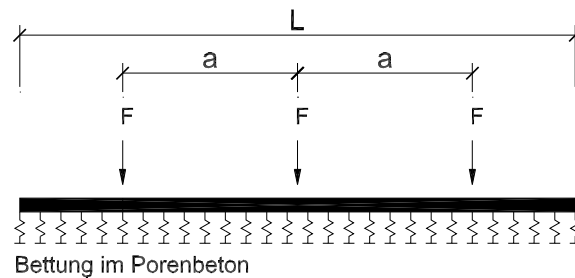


Abbildung 4.10: Modell gebetteter Balken

Im Folgenden wird ein numerisches Modell für den Verankerungsstab entwickelt, das die Besonderheiten des im Porenbeton gebetteten Stabes berücksichtigt und die nichtlinearen Materialbeziehungen einbezieht.

Die mechanische Aufgabe des gebetteten Stabes wird auf Basis des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials als eine Extremwertaufgabe formuliert. Diese lässt sich durch entsprechende Diskretisierung in eine Optimierungsaufgabe überführen und mit den Methoden der mathematischen Optimierung lösen. Das Optimierungsproblem ist mit *Solvern*, wie sie durch mathematische Standardsoftware oder Tabellenkalkulationen zur Verfügung gestellt werden, lösbar. Für das Materialverhalten des Verankerungsstabes und die Bettung können beliebige nichtlineare Funktionen verwendet werden.

Aufstellen der Extremwertaufgabe

In Abschnitt 3 werden die Grundlagen für das Aufstellen der Extremalaufgabe besprochen. Den Gleichgewichtszustand erhält man für den Verformungszustand, der das Gesamtpotential zu einem Minimum macht. Das Gesamtpotential setzt sich aus den Anteilen der Formänderungsenergie des Verankerungsstabes $\Pi_{i,S}$, der Formänderungsenergie der Bettung Π_B und dem Potential der äußeren Kräfte Π_a zusammen.

$$\Pi_{Gesamt} = \Pi_{i,S} + \Pi_B - \Pi_a \Rightarrow \text{Minimum} \quad (4.9)$$

Potential der inneren Kräfte des Verankerungsstabes

Die Formänderungsenergie für den Bewehrungsquerschnitt $\Pi_{i,S}$ erhält man aus dem Volumenintegral der spezifischen Formänderungsenergie W über den Bewehrungsstab.

$$\Pi_{i,S} = \int_x \int_y \int_z W(\epsilon(x, y, z)) dx dy dz \quad (4.10)$$

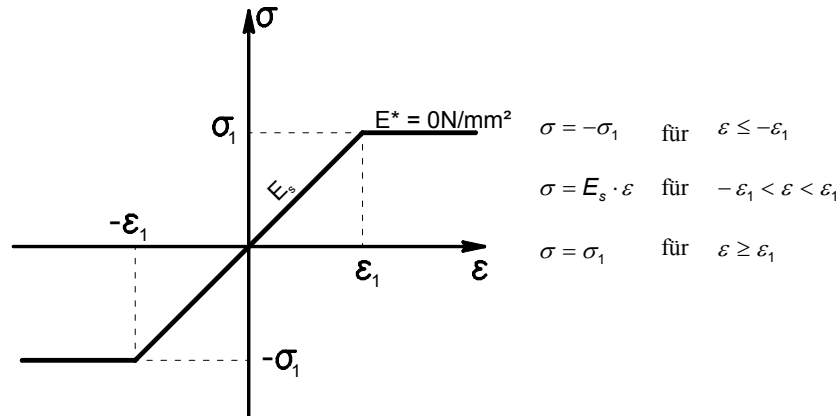


Abbildung 4.11: Materialverhalten des Bewehrungsstahls

Die Versuche von Wehr [188] zeigen, dass es bei kleinen Verankerungsstabdurchmessern und großen Verankerungskräften zu einer Ausbildung plastischer Gelenke an den Lasteinleitungsstellen kommt. Daher wird ein Fließen der Bewehrung berücksichtigt und für den Stahl ein linear elastisch - ideal plastisches Materialgesetz gewählt (Abbildung 4.11). Die spezifische Formänderungsenergie W ist als Flächeninhalt unter der Spannungs-Dehnungs-Linie definiert. Unter Berücksichtigung einer Grenzdehnung ϵ_1 erhält man den Ausdruck für die spezifische Formänderungsenergie. Es wird keine prinzipielle Unterscheidung für Zug- und Druckspannungen vorgenommen. Abbildung 4.12 stellt den Zusammenhang zwischen Dehnung, Spannung und spezifischer Formänderungsenergie grafisch dar. Der Verlauf ist über die Querschnittshöhe aufgetragen.

$$W(\epsilon) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{E_S \cdot \epsilon^2}{2} & \text{für } |\epsilon| \leq \epsilon_1 \\ E_S \cdot \epsilon_1 \cdot \epsilon - \frac{E_S \cdot \epsilon_1^2}{2} & \text{für } \epsilon > \epsilon_1 \\ E_S \cdot (-\epsilon_1) \cdot \epsilon - \frac{E_S \cdot \epsilon_1^2}{2} & \text{für } \epsilon < -\epsilon_1 \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

Unter Voraussetzung der Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte lässt sich die Dehnung am Querschnitt eindeutig durch die Randdehnungen beschreiben. Der Verlauf vom oberen zum unteren Rand ist linear.

$$\epsilon = \epsilon_u - \left(\frac{\epsilon_u - \epsilon_o}{d_s} \right) \cdot y \quad (4.12)$$

Mit den Beziehungen nach Gleichungen 4.10 bis 4.12 ist das Potential der inneren Kräfte des Verankerungsstabes eindeutig durch die Randdehnung ϵ_u und ϵ_o des Stabes bestimmt.

Bettung des Verankerungsstabes im Porenbeton

Der Verankerungsstab ist im Porenbeton kontinuierlich gebettet. Aufgrund der punktuellen Lasteinleitung senkrecht zur Stabachse treten Verschiebungen auf, welche zu einer ungleichmäßigen Verteilung der Leibungspressungen führen. Die Formänderungsarbeit für die

4.5 Eigene numerische Untersuchungen zum Verformungsverhalten der Verankerungsstäbe

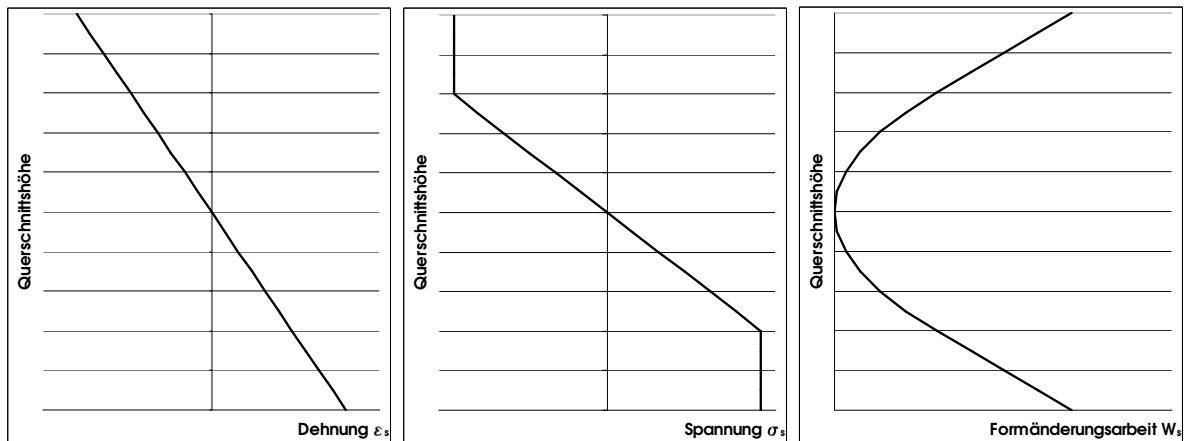


Abbildung 4.12: Dehnungsverlauf, Spannungsverteilung und spezifische Formänderungsenergie am Querschnitt

Bettung W_B erhält man aus der Integration der Bettungsfunktion K :

$$W_{Bettung} = \int K(w) dw. \quad (4.13)$$

Da der Verankerungsstab eine konstante Breite d_s besitzt, erhält man das Gesamtpotential der Bettung durch das folgende Doppelintegral:

$$\Pi_B = d_s \cdot \int \int K(w) dw dx. \quad (4.14)$$

Für eine lineare Bettungsfunktion K vereinfacht sich Gleichung 4.14 zu

$$\Pi_B = d_s \cdot \int \frac{c \cdot w}{2} dx, \quad (4.15)$$

wobei c die Bettungskonstante darstellt. Diese Lösung entspricht der Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie (Abschnitt 4.5.2). Die Versuche von Wehr [188] zeigen, dass es bei größeren Belastungen in einem Bereich unterhalb des Stabes zu einer Komprimierung der Porenstruktur kommt. Hier kann kein linearer Zusammenhang mehr angenommen werden. Die Steifigkeit der Bettung nimmt stark ab. Für die folgenden Vergleichsrechnungen wird eine trilineare Bettungsfunktion (Abbildung 4.13) eingeführt, um die Abnahme der Steifigkeit c in Anhängigkeit der Verschiebung w zu berücksichtigen.

Die Anfangssteifigkeit c_1 wird aus den Versuchswerten unter Zuhilfenahme der Lösung der Differentialgleichung in Abschnitt 4.5.2 abgeleitet. Erreicht der Bettungsdruck 90% der Druckfestigkeit des Porenbetons, so erfolgt eine Reduzierung der Bettungskonstante auf 50% (c_2). Bei Erreichen der Druckfestigkeit f_{cc} wird die Steifigkeit der Bettung auf 10% der Anfangssteifigkeit reduziert.

$$\begin{aligned} c_2 &= 0,5 \cdot c_1 \\ c_3 &= 0,1 \cdot c_1 \end{aligned}$$

Das Integral 4.14 zur Ermittlung des Potentials der Bettung wird abschnittsweise numerisch gelöst.

4 Tragverhalten bewehrter Porenbetonbauteile

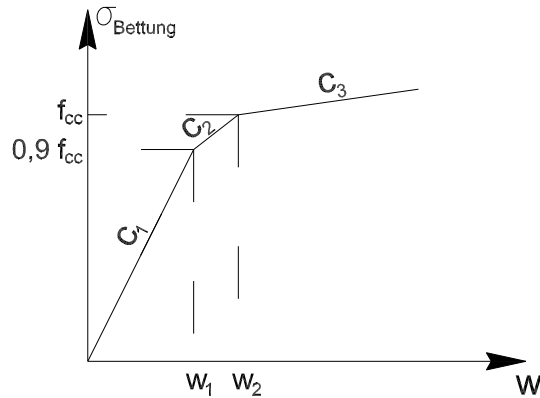


Abbildung 4.13: Steifigkeit der Bettung

Potential der äußeren Kräfte

Die zu verankernden Kräfte der Längsbewehrung bzw. der Bügel stellen die Belastung dar. Die Lasten wirken senkrecht zum Stab. Das Potential der äußeren Kräfte ergibt sich aus dem Produkt aus Kraft und Verschiebung an den jeweiligen Knotenpunkten in Krafrichtung

$$\Pi_a = \sum F(x) \cdot w(x). \quad (4.16)$$

4.5.4 Vergleichende Berechnungen

Mit dem vorgestellten Berechnungsmodell werden Vergleichsrechnungen für die Verankerungsstabdurchmesser 6mm und 12mm zu den zentrischen Auszugsversuchen von Wehr [188] durchgeführt. Für die Bettungssteifigkeit werden die in Tabelle 4.3 dargestellten Werte verwendet. Der Verankerungsstab besteht aus einem Stahl der Güte St37. Eine Materialuntersuchung zum Stahl wird von Wehr nicht durchgeführt, so dass für die Berechnungen die Normwerte ($f_y = 24kN/cm^2$ und $E_y = 21000kN/cm^2$) angesetzt werden. Wie in Abschnitt 4.5.2 beschrieben, treten bereits bei der ersten Belastungsstufe Spannungen in der Größenordnung von $15kN/cm^2$ auf, so dass ein Fließen des Stahles zu erwarten ist.

Stab	Porenbeton		Bettungsziffer		
	E-Modul $[kN/cm^2]$	$f_{cc} [kN/cm^2]$	$c_1 [kN/cm^2]$	$c_2 [kN/cm^2]$	$c_3 [kN/cm^2]$
6	235	0,53	30	15	3
12	235	0,53	12	6	1,2

Tabelle 4.3: Steifigkeit der Bettung

Abbildung 4.14 zeigt die Ergebnisse der Vergleichsrechnung und die entsprechenden Versuchsergebnisse von Wehr [188]. Für niedrige bis mittlere Belastungen kann eine gute Übereinstimmung erzielt werden.

4.5 Eigene numerische Untersuchungen zum Verformungsverhalten der Verankerungsstäbe

Wehr stellt bei den Messungen zur Last-Verformungs-Beziehung der Verankerungsstäbe teilweise sehr breite Streuungen fest (Abbildung 4.14 dünne Linien). Diese treten bei kleineren Durchmessern in größerem Maße auf.

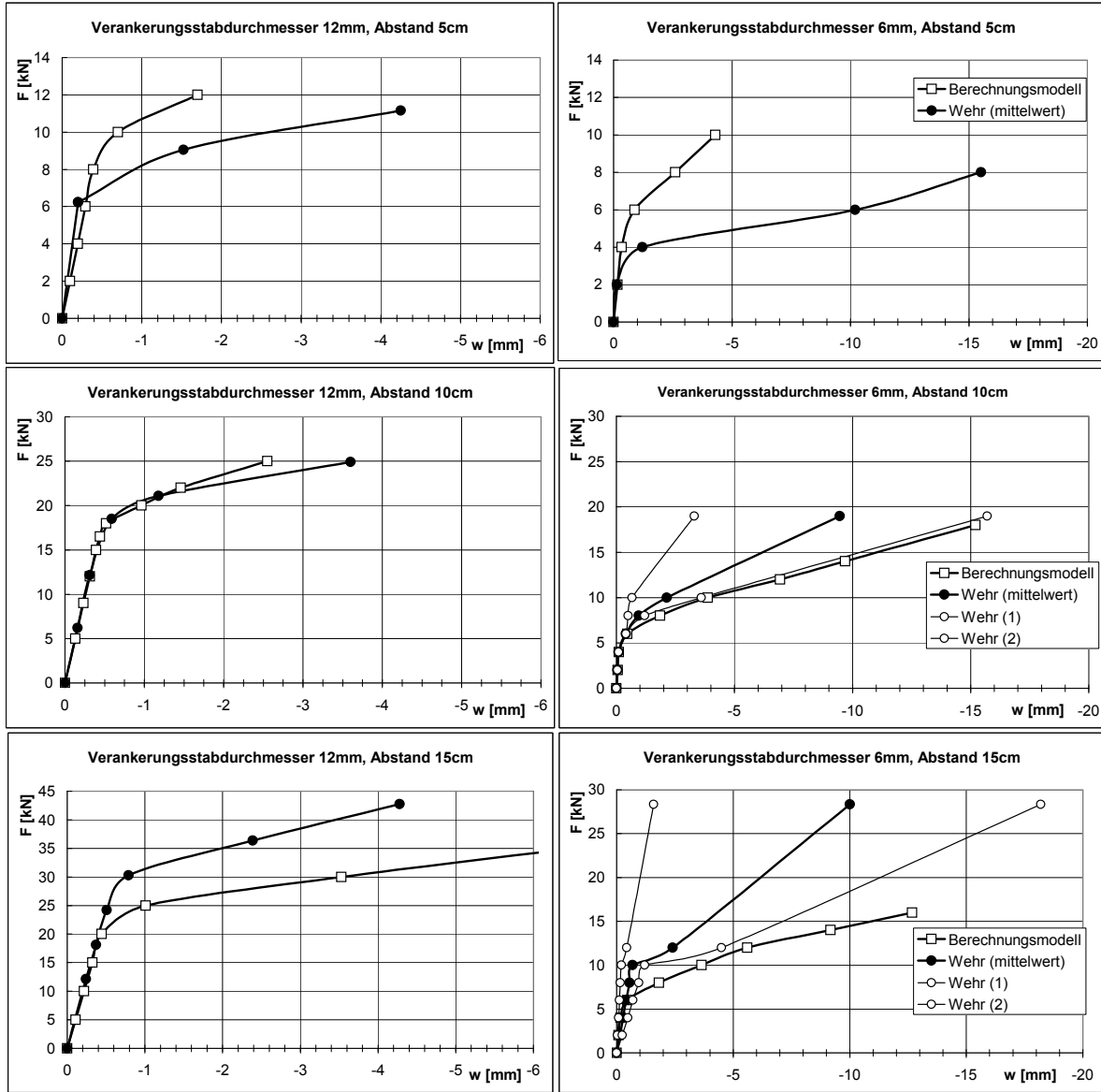


Abbildung 4.14: Last-Verformungs-Beziehung für den Verankerungsstab

Die Spannungen an den Lasteinleitungsstellen der Verankerungsstäbe erreichen über die volle Querschnittshöhe die Streckgrenze, so dass sich plastische Gelenke ausbilden. Der Wert der Streckgrenze hat einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das Verformungsverhalten. Da keine Materialuntersuchung für den Stahl durchgeführt wurde, ist den Vergleichsrechnungen die Mindeststreckgrenze von $24\text{kN}/\text{cm}^2$ zugrunde gelegt. Dies führt, besonders für große Abstände der Lasteinleitungsstellen, zu einer Überschätzung der Verschiebungen.

4 Tragverhalten bewehrter Porenbetonbauteile

Die Versuche sind von Wehr bis zum Versagen des Prüfkörpers aufgezeichnet. Es werden zum Teil sehr große Kräfte aufgebracht und entsprechend große Verschiebungen gemessen. In querkraftbewehrten Porenbetonbalken treten diese Verschiebungen des Verankerungsstabes nicht auf, da es zu Lastumlagerungen im Tragwerk kommt. Ein Versagen der Verankerung der Querkraftbewehrung geht mit einem Abplatzen der Betondeckung einher. Der absolute Betrag der Verschiebung kann als Maß für die Tragfähigkeit eines Balkens dienen. Hierfür ist die Definition von Grenzverschiebungen notwendig.

Das erarbeitete Berechnungsmodell für den Verankerungsstab ist gut geeignet, die Verschiebungen des Bewehrungskorbes innerhalb des Porenbetonkörpers zu beschreiben. Es wird als lokales Modell mit dem globalen Berechnungsmodell gekoppelt, um die Lastumlagerungen innerhalb des Porenbetonelementes zu erfassen.

5 Alternatives Berechnungsmodell für bewehrte Porenbetonelemente

Aufgrund der verschiedenen Einflussparameter stellt die Tragwirkung querkräftbewehrter Porenbetonelemente ein komplexes Problem dar. Neben den bei Stahlbetontragwerken bekannten Effekten der Rissbildung, der Nichtlinearitäten bei den Materialien und der Zeitabhängigkeit der Verformungsprozesse müssen bei Porenbetonkonstruktionen verschieblicher Verbund, diskrete Verankerung der Bewehrung, Nachgiebigkeit der Verankerung der Bewehrung und sprödebruchbedingte Versagensmechanismen berücksichtigt werden. Eine ganzheitliche Betrachtung querkräftbewehrter Balken durch Analysen mit finiten Elementen gestaltet sich sehr aufwendig und scheint für eine praxisbezogene Anwendung wenig geeignet.

Für die Bewertung der Querkrafttragfähigkeit haben sich in den Regelwerken Modelle durchgesetzt, die auf der Fachwerkanalogie basieren. Diese Ansätze sind nicht unumstritten. Einzelne Einflussparameter können nur vereinfacht oder gar nicht berücksichtigt werden. Ein Berechnungsmodell muss zum einen nachvollziehbar und transparent und zum anderen mit einfachen Werkzeugen lösbar sein. Empirische Ansätze scheiden daher ebenso aus, da sie keine Allgemeingültigkeit besitzen. Sie fußen auf einer begrenzten Anzahl von Versuchsergebnissen. Liegen andere als die Versuchsbedingungen vor, können die empirisch gewonnenen Formeln nur bedingt eingesetzt werden.

Es wird ein alternatives Berechnungsmodell entwickelt, das das Tragverhalten eines bewehrten Porenbetonelementes mit den Grundbeziehungen des zweiachsigen Spannungszustandes beschreibt. Zur Lösung der Problemstellung wird auf der Basis von Energiemethoden (Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials) eine Extremalaufgabe definiert, welche sich mit den Methoden der nichtlinearen mathematischen Optimierung lösen lässt. Dieses Optimierungsproblem kann mit Solvern von Standardsoftware (z.B. Matlab von MathWorks, Microsoft EXCEL) bearbeitet werden.

Das Berechnungsmodell berücksichtigt sowohl das globale Tragverhalten des Verbundtragwerkes als auch das lokale Trag- und Verformungsverhalten der Verankerungsstäbe im Porenbeton. Durch diese Kombination lassen sich die Kräfte in der Bewehrung wirklichkeitsnah bestimmen.

5.1 Modell zur Bestimmung der Dehnungsverteilung

Das bewehrte Bauteil ist ein Verbundsystem, bestehend aus dem Bewehrungskorb und dem umgebenden Porenbeton. Prinzipiell können beide Komponenten getrennt voneinander betrachtet werden, wobei ein besonderes Augenmerk auf der Interaktion der Verbundmaterialien liegt. Der Porenbeton wird als Kontinuum angesehen. Die äußeren Belastungen bewirken eine Verformung dieses Kontinuums. Da das Tragwerk als ebenes Problem betrachtet wird, treten nur Verschiebungen in zwei Richtungen auf. Lokale Effekte senkrecht zur Mittelebene bleiben unberücksichtigt. Das Verformungsfeld \bar{U} setzt sich aus den Anteilen der Horizontalverschiebung \bar{u} und der Vertikalverschiebung \bar{v} zusammen

$$\bar{U} = [\bar{u}, \bar{v}]. \quad (5.1)$$

Aus dem Verschiebungsfeld \bar{U} lassen sich mit den bekannten Gleichungen der technischen Mechanik (Abschnitt 3.1) die Verzerrungen für das Betonkontinuum in kartesischen Koordinaten (Gleichungen 5.3) bzw. in den Hauptachsen (Gleichungen 5.3) bestimmen.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (5.3)$$

Die Bewehrung wird als Stabwerk betrachtet, das mit dem Betonkontinuum verbunden ist. Im Hinblick auf die Kopplung zwischen Bewehrung und Beton bestehen beträchtliche Unterschiede zwischen Bauteilen aus Porenbeton und Bauteilen aus Normalbeton. Bei Normalbeton kommen profilierte Bewehrungsstäbe zum Einsatz. Diese gewährleisten aufgrund ihrer Verzahnung mit dem Beton eine kontinuierliche Lastübertragung. In der Literatur lassen sich verschiedene Ansätze für die Berücksichtigung von Relativverschiebungen zwischen Stahl und Beton finden. Cedolin [27] schlägt zum Beispiel eine multilineare Verbund-Schlupf-Beziehung vor, während Sigrist [167] ein einfacheres starr-plastisches Gesetz wählt. Für baupraktische Berechnungen hat sich allerdings die Annahme eines starren Verbundes als hinreichend genau erwiesen [194]. Diesen Ansatz kann man für Bauteile mit kontinuierlichem Verbund verwenden. Hier sind die Verschiebungen des Betons und der Bewehrung gleich.

$$[\bar{u}, \bar{v}]_{\text{Beton}} = [\bar{u}, \bar{v}]_{\text{Bewehrung}} \quad (5.4)$$

Im globalen Berechnungsmodell werden für die Bewehrungsstäbe nur axiale Beanspruchungen berücksichtigt. Die Ermittlung der Dehnungen erfolgt durch eine Gleichsetzung der entsprechenden Dehnungskomponente der Bewehrung mit der des Betons.

$$\epsilon_{\text{Bewehrung}} = \epsilon_{\text{Beton}} \quad (5.5)$$

In Abschnitt 4.1 wird erläutert, dass für den Porenbeton anstelle profilierter Stäbe glatter Bewehrungsstahl verwendet wird, der mit einem Korrosionsschutz versehen ist. Der Haftverbund ist klein und versagt bereits bei kleinen Relativverschiebungen. Im Berechnungsmodell

wird er nicht angesetzt. Die Kraftübertragung erfolgt nur an diskreten Lasteinleitungsstellen (z.B. angeschweißte Querstäbe). Die Verträglichkeitsbedingungen können, wenn überhaupt, nur an diesen Kopplungspunkten erfüllt werden. Infolge der Konzentration der Kräfte an den Einleitungsstellen treten kleine Verschiebungen zwischen Bewehrungskorb und Porenbeton auf. Bei großen Belastungen sind diese Verschiebungen irreversibel, da die Porenstruktur zusammengedrückt wird.

Für das Berechnungsmodell werden Relativverschiebungen an den diskreten Verankerungspunkten i mit $\Delta [u_i, v_i]$ definiert. Die Verträglichkeitsbedingungen für den bewehrten Porenbeton werden nur für die Verankerungsstellen formuliert:

$$[u_i, v_i]_{\text{Beton}} = [u_i, v_i]_{\text{Bewehrung}} + \Delta [u_i, v_i]. \quad (5.6)$$

Für Bauteile mit diskretem Verbund ermittelt man die Dehnung aus der Verschiebungsdifferenz der Lasteinleitungspunkte (z.B. $(u_{i+1} - u_i)$). Eine Interaktion von Bewehrung und Porenbeton zwischen den Kopplungspunkten wird nicht berücksichtigt. Die Dehnungen sind abschnittsweise konstant. Um die Nachgiebigkeit der Verankerung auf die Stahldehnung zu berücksichtigen, wird ein zusätzlicher Term $(\Delta u / \Delta x)$ eingeführt. Dieser beinhaltet die Effekte der Bettung des Verankerungsstabes im Porenbeton und die daraus resultierenden Relativverschiebungen Δu .

$$\epsilon_{\text{Bewehrung}} = \frac{u_{i+1} - u_i + \Delta u}{\Delta x} \quad (5.7)$$

Die Ermittlung der Dehnungen für eine lotrechte Bewehrung (z.B. Bügel) erfolgt analog. Für die Bestimmung der Relativverschiebungen $\Delta [u_i, v_i]$ wird ein lokales Berechnungsmodell auf Basis des in Abschnitt 4.5.3 entwickelten Algorithmus aufgestellt. Die Ergebnisse des lokalen Modells werden in das globale Modell integriert.

5.2 Annahmen zum Materialverhalten

5.2.1 Einführung

Für das Berechnungsmodell wird anstelle einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung für das Materialgesetz eine energetische Formulierung als Formänderungsarbeits-Dehnungs-Gesetz (W- ϵ -Diagramm) verwendet. Dies hat mehrere Vorteile. Einerseits wird die Integration der Arbeitslinie des Materials im Vorfeld der eigentlichen Berechnung durchgeführt und spart Berechnungsaufwand. Andererseits können Singularitäten bzw. Störstellen (z.B. Risse im Beton) bereichsweise verschmiert angenommen werden. Durch die Integration des Materialgesetzes bzw. durch die Integration der Formänderungsarbeit über das Volumen können z.B. die Effekte der Rissbildung in diesem Bereich erfasst werden, ohne genaue Kenntnis der Lage der Risse oder der Rissweiten zu haben.

Das vorgestellte Berechnungsmodell ist nicht an die Verwendung eines spezifischen Materialgesetzes gebunden. Im Folgenden werden verschiedene Ansätze verglichen, die sich für die Verwendung bei bewehrten Beton- bzw. Porenbetonbalken eignen.

5 Alternatives Berechnungsmodell für bewehrte Porenbetonelemente

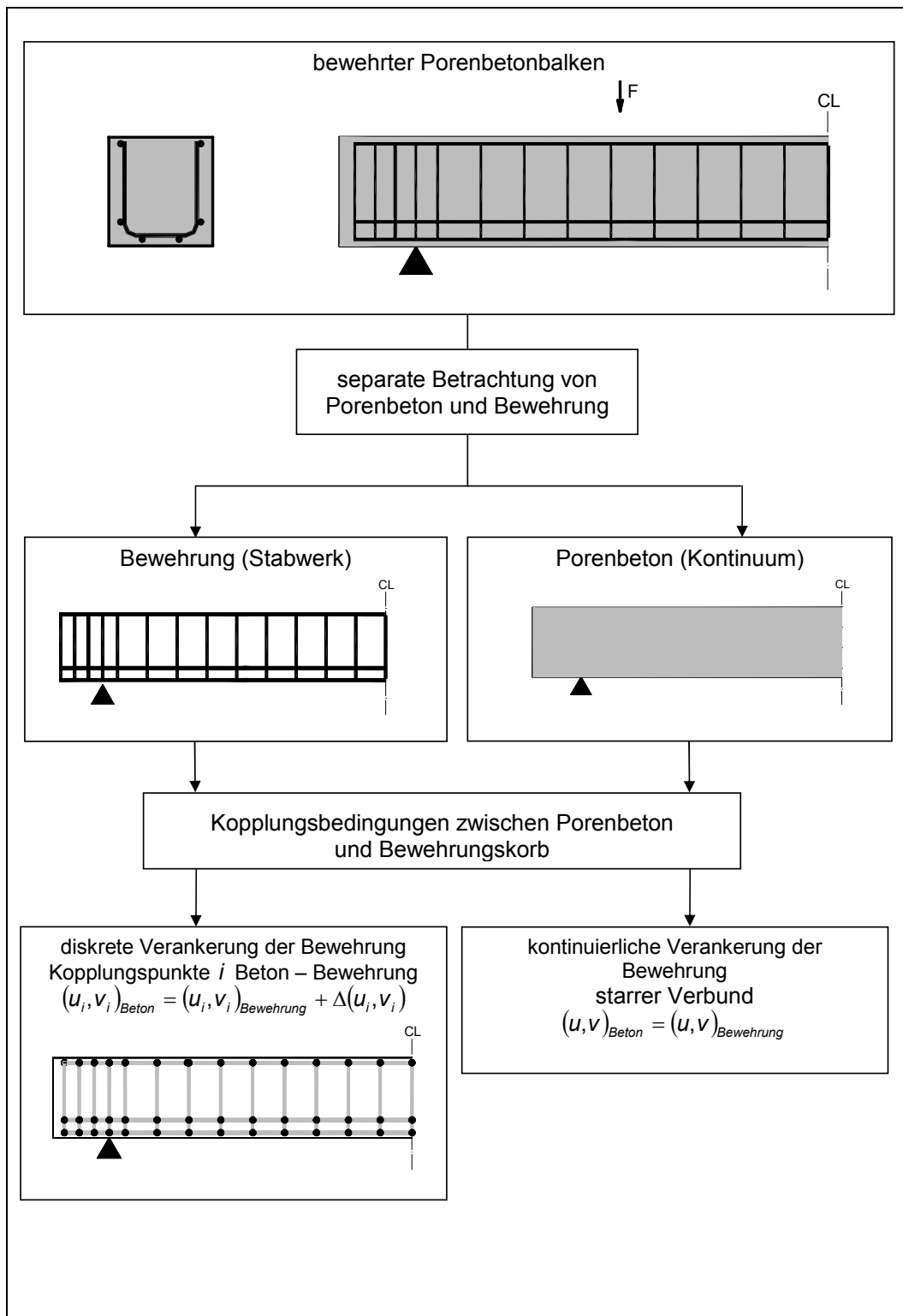


Abbildung 5.1: Zerlegung des Modells in Betonanteil und Bewehrungsanteil

5.2.2 Materialverhalten von Beton und Porenbeton

Die Ermittlung der Dehnungen des Porenbetons erfolgt im Berechnungsmodell in den Hauptachsen. Das Materialgesetz wird für beide Hauptachsen unabhängig voneinander angesetzt. Der bewehrte Porenbetonbalken wird wie eine orthogonal bewehrte Scheibe betrachtet. Durch die Risse entstehen abgegrenzte Betonfelder (Betonssäulen), über die weiterhin Druckkräfte übertragen werden. Die senkrecht dazu wirkenden Zugkräfte werden teilweise durch die Bewehrung und teilweise durch den Beton (Mitwirkung zwischen den Rissen) übertragen.

Materialverhalten in der Zugzone

Bis zum Erreichen der Zugfestigkeit wird der Beton bzw. der Porenbeton als linear-elastisches Material angenommen. Es gilt das Hooke'sche Gesetz und die Formänderungsarbeit erhält man durch Integration der linearen Arbeitslinie

$$W_{ct} = \int \sigma(\epsilon) d\epsilon = 0,5 \cdot E_c \cdot \epsilon^2. \quad (5.8)$$

Wird die Zugfestigkeit überschritten, treten erste Risse auf. Direkt im Riss werden Zugkräfte nur durch den Stahl übertragen. Zwischen den Rissen beteiligt sich der Beton an der Übertragung der Zugkräfte (Abbildung 5.2 (a)). Die Zugspannungen im Porenbeton zwischen den Rissen sind kleiner als die einaxiale Zugfestigkeit. Andernfalls würden weitere Risse auftreten.

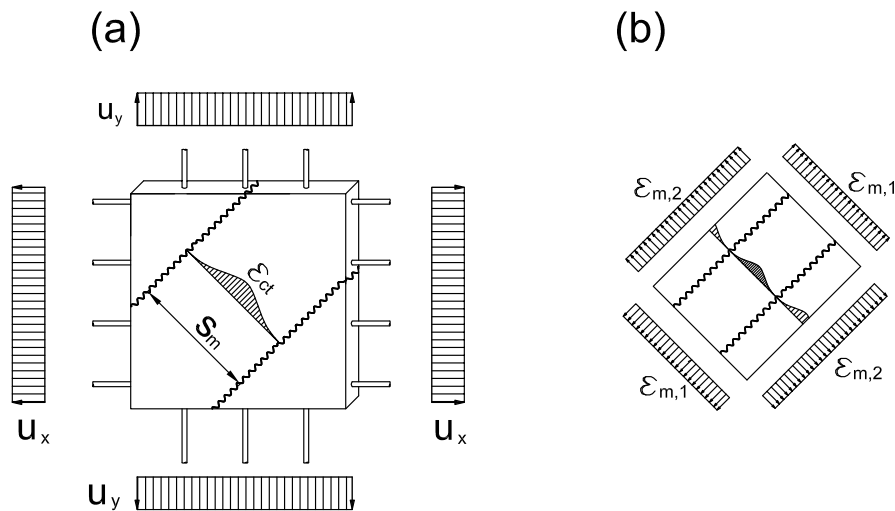


Abbildung 5.2: Gerissenes Membranelement

Mit den verwendeten Ansätzen ist es nicht möglich, die genaue Lage der Risse zu lokalisieren oder direkt Rissweiten zu bestimmen. Die Auswirkung der Rissbildung und der damit einhergehende Steifigkeitsabfall soll näherungsweise berücksichtigt werden. Es erfolgt eine abschnittsweise Mittelung der Dehnungen in den Hauptachsen (Abbildung 5.2 (b)). Die Risse werden verschmiert im Modell berücksichtigt. In Abbildung 5.3 sind verschiedene Ansätze dargestellt, mit denen eine mittlere Dehnung in das Berechnungsmodell implementiert wer-

5 Alternatives Berechnungsmodell für bewehrte Porenbetonelemente

den kann. Die Funktionen für die Formänderungsarbeits-Dehnungs-Linie werden aus bekannten Spannungs-Dehnungs-Gesetzen gewonnen. Zur Veranschaulichung sind beide Funktionen dargestellt. Für die eigentliche Berechnung wird nur die Formänderungsarbeits-Dehnungs-Beziehung verwendet.

Modell (a) zeigt ein linear-elastisches Material ohne Rissbildung. Führt man ein linear-elastisch - ideal-plastisches Modell ein, bei dem das plastische Niveau die Größe der Zugfestigkeit besitzt (b), so erhält man eine Überschätzung der Steifigkeit des gerissenen Scheibenelementes. Der andere Extremfall einer vollständigen Vernachlässigung der Dehnungen zwischen den Rissen (c) führt zu einer Unterschätzung der Steifigkeit des Betonelementes, da die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen ignoriert wird. Um die gemittelten Dehnungen in einem Materialgesetz zu berücksichtigen, wird ein Modell mit einer effektiven Zugfestigkeit für Dehnungen größer als die Grenzdehnung ϵ_{ct} vorgeschlagen. Den einfachsten Ansatz stellt eine konstante mittlere Spannung dar, die kleiner als die Zugfestigkeit ist (Modell (d)). Diese kann mit einem Koeffizienten α beschrieben werden

$$f_{ct,eff} = \alpha \cdot f_{ct}. \quad (5.9)$$

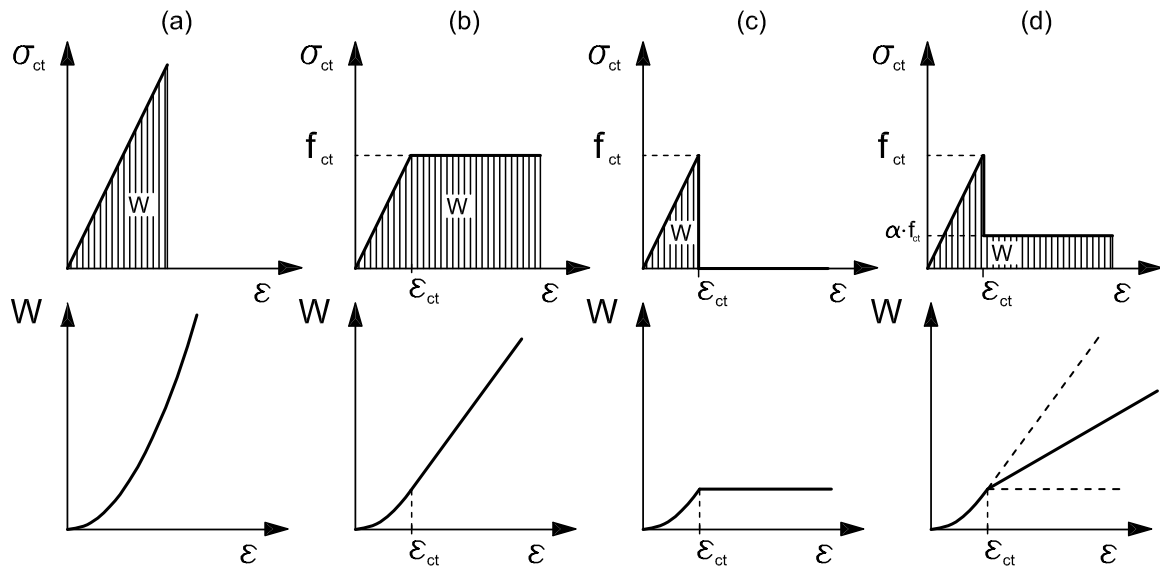


Abbildung 5.3: Ansätze für das Materialverhalten in der Zugzone

Die Modelle (b) und (c) sind implizit im Modell (d) für $\alpha = 1,0$ bzw. $\alpha = 0$ enthalten und stellen die jeweils möglichen Grenzen dar. Der Verlauf der Formänderungsarbeits-Dehnungs-Linie (W - ϵ -Diagramm) für die Modelle (b) bis (d) ist für Dehnungen oberhalb der Grenzdehnung ϵ_{ct} linear. Der Anstieg der Geraden ist durch den Parameter α charakterisiert. Eine weitere Vereinfachung wäre durch eine generelle Abminderung der Zugfestigkeit auf einen Wert $\alpha \cdot f_{ct}$ denkbar. Damit würde im σ - ϵ -Diagramm das Dreieck oberhalb der Linie für $\alpha \cdot f_{ct}$ bei der Formänderungsarbeit unberücksichtigt bleiben. Da sich für die numerische Berechnung bei diesem Vorgehen keine Vorteile ergeben, wird auf diese weitere Vereinfachung im Berechnungsmodell verzichtet.

Das Materialgesetz für die Zugzone des Porenbetons wird durch folgende Gleichung charakterisiert (Modell (d)):

$$W_{ct}(\epsilon) = \left\{ \begin{array}{ll} 0.5 \cdot E_c \cdot \epsilon^2 & \text{für } \epsilon \leq \epsilon_{ct} \\ (0.5 - \alpha) \cdot E_c \cdot \epsilon_{ct}^2 + \alpha \cdot E_c \cdot \epsilon_{ct} \cdot \epsilon & \text{für } \epsilon > \epsilon_{ct} \end{array} \right\}. \quad (5.10)$$

Für den Normalbeton und den Porenbeton wird keine prinzipielle Unterscheidung des Ansatzes für das Materialverhalten in der Zugzone durchgeführt, da sich beide Werkstoffe analog verhalten. Anpassungen sind über die Dehnung bei Erreichen der Zugfestigkeit ϵ_{ct} bzw. den Parameter α möglich.

Materialverhalten in der Druckzone

Den einfachsten Ansatz für eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung im Bereich bis zum Erreichen der Druckfestigkeit stellt ein linearer Verlauf dar. Die Verwendung eines linearen Ansatzes für Porenbeton wird unter anderem durch Janovic [76] und Aroni [15] vorgeschlagen und durch die derzeit gültige Norm DIN 4223:2003 [5] bestätigt. Henseleit [67] und Tartsch [177] ermitteln einen nichtlinearen Zusammenhang der Druckspannungs-Stauchungs-Kurve für Porenbeton. Eine Arbeitslinie, die durch Versuche ermittelt wird, kann z.B. durch einen Polynomansatz beschrieben werden.

$$\sigma = A \cdot \epsilon^3 + B \cdot \epsilon^2 + C \cdot \epsilon \quad (5.11)$$

Für Normalbeton findet man einen nichtlinearen Ansatz für die Arbeitslinie in der DIN 1045-1 [8]. Diese eignet sich nur bedingt für den Einsatz im hier vorgestellten Berechnungsmodell. Eine analytische Integration der Spannungs-Dehnungs-Linie ist nicht möglich, so dass sich der Rechenaufwand für eine numerische Ermittlung der W - ϵ -Linie erhöht. Neben einer Approximation durch ein Polynom kann der von Kaufmann [84] vorgeschlagene Ansatz verwendet werden. Dieser stellt für den Normalbeton eine gute Näherung dar und kann geschlossen integriert werden. Die Völligkeit der Arbeitslinie von Normalbeton ist größer als die des Porenbetons (Abbildung 5.4, links), so dass der Ansatz nach Kaufmann für Porenbeton nicht geeignet ist.

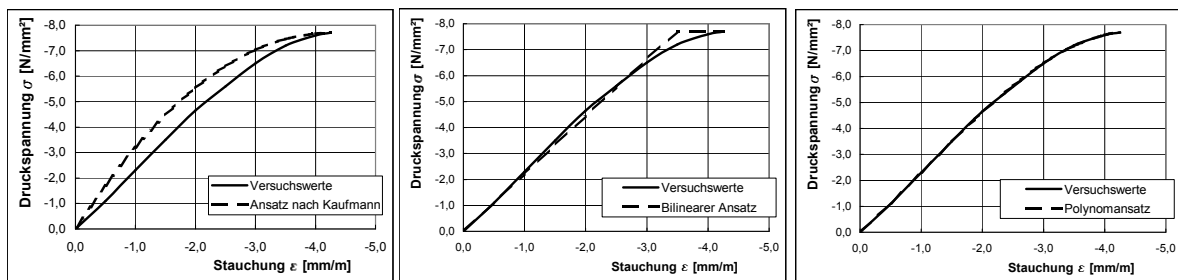


Abbildung 5.4: Vergleich verschiedener Ansätze für die Spannungs-Dehnungs- Beziehung mit Versuchsergebnissen von Tartsch [177] (Versuchskörper H 157)

Die Formänderungsarbeit für die drei Fälle in Abbildung 5.4 lässt sich durch Integration der Arbeitslinie bestimmen. Bei einem Überschreiten der Druckfestigkeit wird ein ideal-plastisches

5 Alternatives Berechnungsmodell für bewehrte Porenbetonelemente

		Spannung	spezifische Formänderungsenergie
bilinearer Ansatz	$\epsilon \geq \epsilon_{cc}$	$\sigma = E_c \cdot \epsilon$	$W = \frac{E_c \cdot \epsilon^2}{2}$
	$\epsilon < \epsilon_{cc}$	$\sigma = f_{cc}$	$W = E_c \cdot \epsilon \cdot \epsilon_{cc} - \frac{E_c \cdot \epsilon_{cc}^2}{2}$
Polynomansatz	$\epsilon \geq \epsilon_{cc}$	$\sigma = A\epsilon^3 + B\epsilon^2 + C\epsilon$	$W = \frac{A\epsilon^4}{4} + \frac{B\epsilon^3}{3} + \frac{C\epsilon^2}{2}$
	$\epsilon < \epsilon_{cc}$	$\sigma = f_{cc}$	$W = \frac{A\epsilon_{cc}^4}{4} + \frac{B\epsilon_{cc}^3}{3} + \frac{C\epsilon_{cc}^2}{2} + f_{cc}(\epsilon - \epsilon_{cc})$
Ansatz nach Kaufmann	$\epsilon \geq \epsilon_{cc}$	$\sigma = f_{cc} \cdot \frac{2 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_{cc} - \epsilon^2}{\epsilon_{cc}^2}$	$W = f_{cc} \cdot \frac{\epsilon^2 \cdot \epsilon_{cc} - \frac{1}{3} \cdot \epsilon^3}{\epsilon_{cc}^2}$
	$\epsilon < \epsilon_{cc}$	$\sigma = f_{cc}$	$W = \frac{2}{3} \cdot f_{cc} \cdot \epsilon_{cc} + f_{cc}(\epsilon - \epsilon_{cc})$

Tabelle 5.1: Materialgesetze für die Druckzone

Verhalten angenommen. Entfestigung nach Erreichen der Druckfestigkeit wird nicht berücksichtigt. Die zugehörigen Gleichungen sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Vergleicht man die Formänderungsarbeit der einzelnen Materialansätze, so ist ersichtlich, dass sowohl die mit der bilinearen Spannungs-Dehnungs-Linie ermittelten Werte als auch die mit dem Polynomansatz bestimmten Werte eine sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten von Tartsch [177] liefert. Für die Verwendung bei Porenbeton kann das bilineare Modell als hinreichend genau angesehen werden. Aufgrund seiner einfacheren mathematischen Beschreibung erhält es den Vorzug vor einem Polynomansatz. Das Materialmodell von Kaufmann liefert aufgrund der größeren Völligkeit der Spannungs-Dehnungs-Linie für Porenbeton zu große Abweichungen. Dieser Ansatz ist für Normalbeton besser geeignet, da er der Arbeitslinie der DIN 1045-1 [8] näherungsweise entspricht.

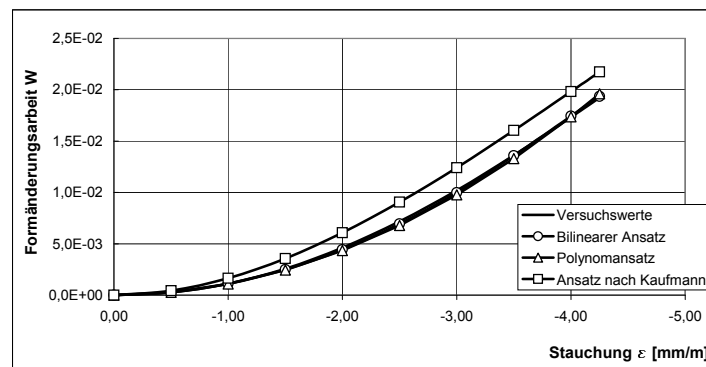


Abbildung 5.5: Vergleich der Formänderungsarbeit der verschiedenen Ansätze mit Versuchsergebnissen von Tartsch [177] (Versuchskörper H 157)

5.2.3 Materialverhalten des Bewehrungsstahles

Aufgrund der Verankerungsproblematik ist die Beanspruchung der Bewehrung in Porenbetonbauteilen geringer als beim Normalbeton. Insbesondere erreichen die Spannungen in den Bügeln nicht die Streckgrenze des Materials. Die Biegezugbewehrung wird im Feld nicht ausreichend verankert, so dass eine größere Völligkeit der Zugkraftlinie beobachtet werden kann ([40], [188]). Wenn die Endverankerung ausreichend dimensioniert ist und ein Schlupf der Bewehrung weitestgehend verhindert wird, kann die Spannung in der Längsbewehrung die Streckgrenze erreichen und der Stahl fließt.

Praktische Bedeutung hat heutzutage nur noch der Betonstahl BSt 500 mit einer Streckgrenze von 500N/mm^2 . Die Eigenschaften sind beispielsweise in der DIN 488 [10] geregelt. Hinsichtlich der Verformungseigenschaften besitzt der Bewehrungsstahl einen Elastizitätsmodul von ca. 200000 bis 210000N/mm^2 .

Für den Bewehrungsstahl wird ein linear elastisch - ideal plastisches Materialmodell gewählt. Bis zum Erreichen der Streckgrenze gilt ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Darüber hinaus wird ein plastisches Verhalten angenommen:

$$\sigma = \begin{cases} -f_y & \text{für } \epsilon_s < -\epsilon_y \\ E_s \cdot \epsilon_s & \text{für } -\epsilon_y \leq \epsilon_s \leq \epsilon_y \\ f_y & \text{für } \epsilon_s > \epsilon_y \end{cases} \quad (5.12)$$

Die Formänderungsarbeit des Materials erhält man durch Integration der Arbeitslinie des Bewehrungsstahles.

$$W_y = \begin{cases} E_s \cdot (-\epsilon_y) \epsilon_s - \frac{E_s \cdot \epsilon_y^2}{2} & \text{für } \epsilon_s < -\epsilon_y \\ \frac{E_s \cdot \epsilon_s^2}{2} & \text{für } |\epsilon_s| \leq \epsilon_y \\ E_s \cdot \epsilon_y \epsilon_s - \frac{E_s \cdot \epsilon_y^2}{2} & \text{für } \epsilon_s > \epsilon_y \end{cases} \quad (5.13)$$

Abbildung 5.6 stellt die Spannungs-Dehnungs-Beziehung dem W - ϵ -Diagramm gegenüber.

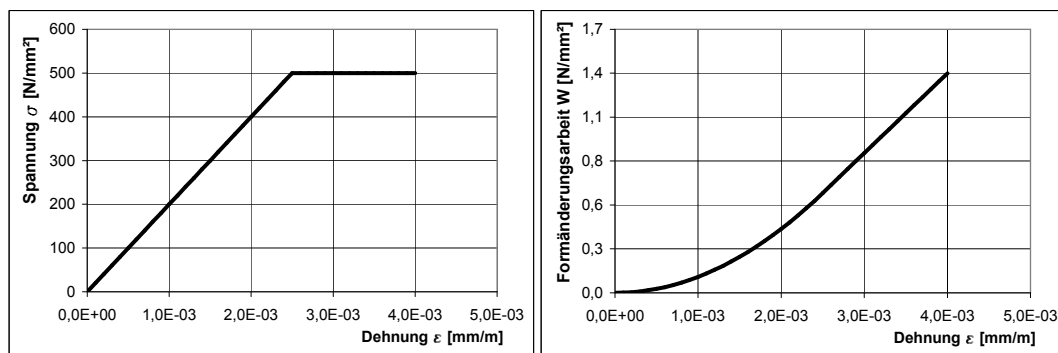


Abbildung 5.6: Materialgesetz des Bewehrungsstahls

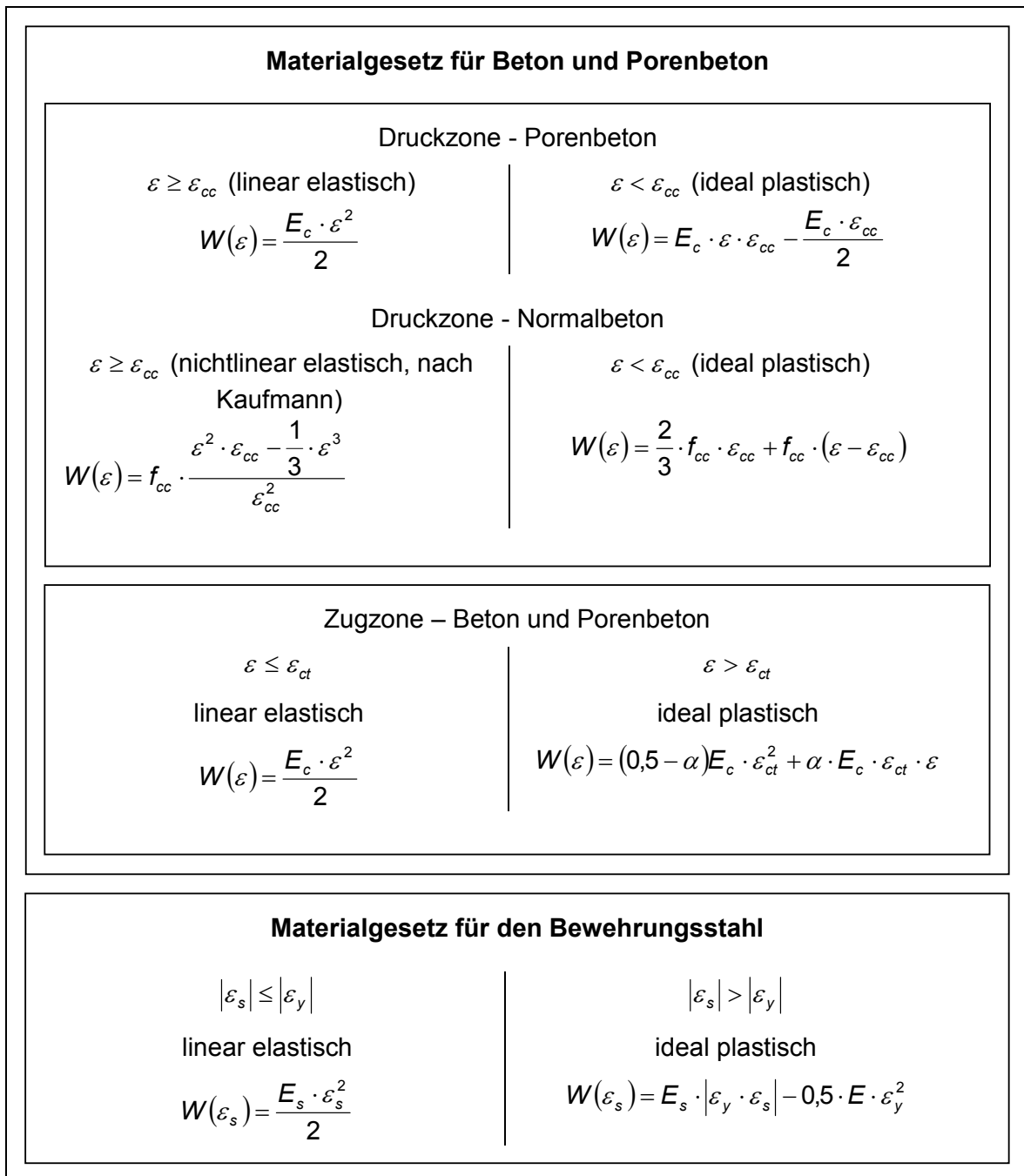


Abbildung 5.7: Materialgesetze für das Berechnungsmodell

5.3 Berechnungsalgorithmus

Die Lösung des mechanischen Problems erfolgt über eine direkte Minimierung des Gesamtpotentials des Tragwerkes. Hierfür ist die Aufstellung einer Extremalaufgabe mit einer Zielfunktion und zugehörigen Nebenbedingungen erforderlich.

5.3.1 Aufstellen der Zielfunktion für die Extremalaufgabe

Das Gesamtpotential Π setzt sich aus dem Potential der inneren Kräfte Π_i und dem Potential der äußeren Kräfte Π_a zusammen. Im Gleichgewichtszustand nimmt das Gesamtpotential ein Minimum an. Die Zielfunktion der Extremalaufgabe lautet

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a \Rightarrow \text{Minimum.} \quad (5.14)$$

Die Variationsparameter für die Zielfunktion 5.14 stellt das Feld der Verschiebungen \bar{U} des Bauteils dar. Aus den Verschiebungen lassen sich die Dehnungen an jeder Stelle des Körpers bestimmen. Mit dem Materialgesetz (W- ϵ -Diagramm) ist die Verteilung der spezifischen Formänderungsenergie bekannt.

Das Potential der inneren Kräfte besteht aus den Anteilen des Betons $\Pi_{i,c}$ und des Bewehrungsstahls $\Pi_{i,s}$.

$$\Pi_i = \Pi_{i,c} + \Pi_{i,s} \quad (5.15)$$

Der Beton wird als Kontinuum betrachtet. Die potentielle Energie der inneren Kräfte für den Beton erhält man durch Integration der Formänderungsarbeit über das Bauteilvolumen. Unter der Annahme, dass die Dehnungen quer zur Tragwerksebene konstant sind, erhält man

$$\Pi_{i,c} = B \cdot \int \int W(\epsilon_1, \epsilon_2) dx dy. \quad (5.16)$$

Die Bewehrung ist als stabförmiges Bauteil modelliert. Im globalen Tragsystem können nur Zug- bzw. Druckkräfte aufgenommen werden. Die potentielle Energie erhält man durch Integration der Formänderungsarbeit über die Stablängsachse.

$$\Pi_{i,s} = A_s \cdot \int W(\epsilon_s) dl \quad (5.17)$$

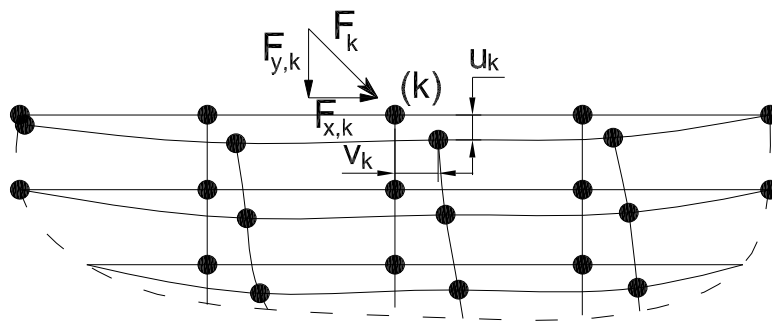


Abbildung 5.8: Potential der äußeren Kräfte für Einzellasten

Das Potential der äußeren Kräfte ermittelt man für Einzellasten durch Multiplikation der Kraft mit der Verschiebung in Kraftrichtung am jeweiligen Angriffspunkt (Abbildung 5.8).

$$\Pi_{a,F} = \sum_k F_{x,k} \cdot u_k + F_{y,k} \cdot v_k \quad (5.18)$$

5 Alternatives Berechnungsmodell für bewehrte Porenbetonelemente

Für beliebige Streckenlasten ist das Potential der äußeren Kräfte durch folgendes Integral gegeben:

$$\Pi_{a,p} = \int p_x(x) \cdot u(x) dx + \int p_y(y) \cdot v(y) dy. \quad (5.19)$$

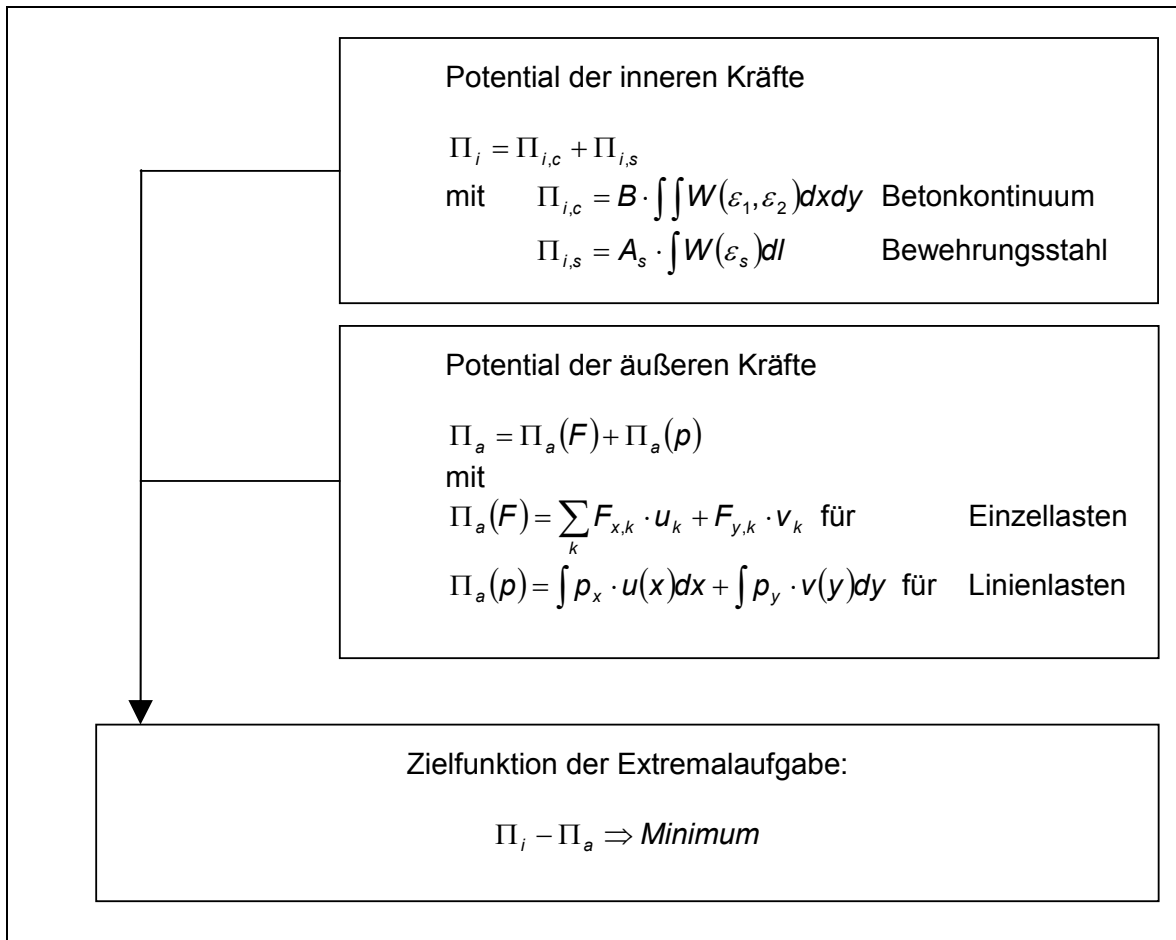


Abbildung 5.9: Zielfunktion der Extremalaufgabe

5.3.2 Nebenbedingungen der Extremalaufgabe

Die globalen Lagerungsbedingungen sind als Nebenbedingungen der Extremalaufgabe zu definieren. An den jeweiligen Positionen der Lagerstellen werden den Verschiebungen feste Werte zugeordnet (z.B. $v_{x1,y1} = 0$ für ein vertikales Punktlager an der Position $x = x_1$ und $y = y_1$). Auf diese Weise können auch Symmetriebedingungen eingeführt werden.

Neben den globalen Lagerungsbedingungen ist es möglich, lokale Nebenbedingungen zu berücksichtigen. Diese beinhalten z.B. den Schlupf der Bewehrung oder eine Nachgiebigkeit der Verankerung der Längs- bzw. Querkraftbewehrung. Für das Berechnungsmodell werden die lokalen Verschiebungen des Verankerungsstabes der Querkraftbewehrung als Vorverfor-

mungen berücksichtigt. Diese Verschiebungen werden mit dem lokalen Modell des Verankerungsstabes ermittelt.

5.3.3 Lösen der Extremalaufgabe

Aus dem Feld der Verschiebungen muss die Konfiguration gefunden werden, für die die Zielfunktion $(\Pi_i - \Pi_a)$ ein Minimum annimmt. Für die Bestimmung dieses Extremwertes stehen die Methoden der mathematischen Optimierung zur Verfügung (Abschnitt 3.4). Die Extremalaufgabe wird in ein nichtlineares Optimierungsproblem überführt. Die Verschiebungen \bar{u} und \bar{v} stellen die Lösungsmenge dar, welche nicht beschränkt ist. Aufgrund ihrer Komplexität ist eine exakte Lösung der Optimierungsaufgabe nicht möglich. Es muss daher auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden. Die Verwendung von Computerprogrammen ist unumgänglich. Für die Verifizierung des Berechnungsmodells im folgenden Kapitel wird die Tabellenkalkulation Microsoft EXCEL verwendet. In diese Standardsoftware kann ein *Solver* zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme integriert werden.

5.4 Diskretisierung von Tragwerk und Querschnitt

Um die Extremalaufgabe in eine Optimierungsaufgabe zu überführen, ist es notwendig, das Tragwerk zu diskretisieren. Bewehrte Porenbetonbauteile werden üblicherweise als Balken oder einachsig gespannte Platten gefertigt. Das Berechnungsmodell wird für die Anwendung auf diese Bauteile abgestimmt. Aus der Balkentheorie ist bekannt, dass die Differenz der Vertikalverschiebung über die Balkenhöhe sehr gering ist. Im Rahmen der Bernoulli-Hypothese bleiben diese unberücksichtigt. Im hier vorgestellten Modell werden die Schubverzerrungen bzw. die Bügelkräfte direkt ermittelt. Daher ist es erforderlich, ein ebenes Problem zu betrachten.

Die Verschiebungsfelder \bar{u} und \bar{v} stellen die Unbekannten dar. Für die Berechnung werden Stützstellen für die Verschiebungen an diskreten Punkten im Tragwerk festgelegt. Eine Bestimmung von Zwischenwerten erfolgt über geeignete Funktionen. Um den geringen Verschiebungsdifferenzen über die Bauteilhöhe Rechnung zu tragen und die Zahl der Unbekannten zu begrenzen, werden für die Vertikalverschiebungen drei Stützstellen über die Balkenhöhe gewählt. Die Horizontalverschiebung wird mit fünf Stützstellen approximiert (Abbildung 5.11).

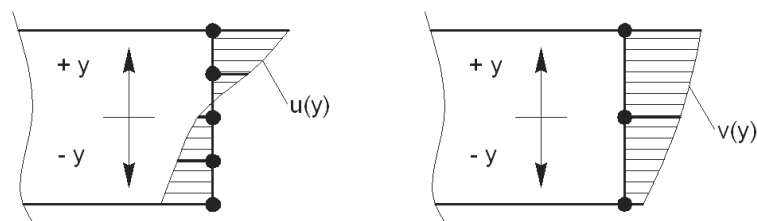


Abbildung 5.10: Verschiebungen am Querschnitt

5 Alternatives Berechnungsmodell für bewehrte Porenbetonelemente

Zwischenwerte der Verschiebungen werden mit Taylorpolynomen als Verlaufsfunktion über die Balkenhöhe bestimmt. Aufgrund der unterschiedlichen Anzahl der Stützstellen erhält man verschiedene Polynomansätze für die Horizontal- bzw. Vertikalverschiebungen. Für drei Stützstellen erfolgt der Ansatz durch ein Polynom 2. Grades und für fünf Stützstellen durch ein Polynom 4. Grades. Gleichung 5.20 beschreibt die Verschiebungen am Querschnitt über die Balkenhöhe.

$$\begin{aligned}
 u(y) &= a_0 + a_1 \cdot y + \frac{a_2 \cdot y^2}{2} + \frac{a_3 \cdot y^3}{6} + \frac{a_4 \cdot y^4}{24} \\
 v(y) &= b_0 + b_1 \cdot y + \frac{b_2 \cdot y^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

Die Parameter $a_0 - a_4$ und $b_0 - b_2$ sind eindeutig durch die Verschiebungen an den Stützstellen bestimmt. Es lässt sich ein Gleichungssystem aufstellen, dessen Lösung die Parameter liefert. Tabelle 5.2 enthält die Koeffizienten der Taylorpolynome für Gleichung 5.20.

$a_0 = y_3$	$b_0 = y_2$
$a_1 = \frac{y_1 - 8 \cdot y_2 + 8 \cdot y_4 - y_5}{6 \cdot h}$	$b_1 = \frac{y_3 - y_1}{2 \cdot h}$
$a_2 = \frac{y_1 - 16 \cdot y_2 + 30 \cdot y_3 - 16 \cdot y_4 + y_5}{3 \cdot h^2}$	$b_2 = \frac{y_3 - 2 \cdot y_2 + y_1}{h^2}$
$a_3 = \frac{-4 \cdot y_1 + 8 \cdot y_2 - 8 \cdot y_4 + 4 \cdot y_5}{h^3}$	
$a_4 = \frac{16 \cdot y_1 - 64 \cdot y_2 + 96 \cdot y_3 - 64 \cdot y_4 + 16 \cdot y_5}{h^4}$	

Tabelle 5.2: Koeffizienten in Gleichung 5.20

In Balkenlängsrichtung werden Zwischenwerte für die Verschiebungen approximiert. Es kommen im Randbereich lineare und im Mittelbereich kubische Funktionen zum Einsatz (Abbildung 5.11). Aufgrund der diskreten Auflagerung der Einfeldträger sind höherwertige Funktionen im Randbereich problematisch. Es ergeben sich numerische Probleme aufgrund der singulären Lasteinleitung. Der kubische Ansatz im Mittelbereich erlaubt eine Reduzierung der erforderlichen Verformungsparameter und somit eine Reduzierung der Unbekannten.

Mit diesen Ansatzfunktionen werden die Verschiebungen an jedem Punkt des Tragwerkes eindeutig beschrieben. Die Dehnungen über die Balkenhöhe werden direkt durch Differentiation der Taylorpolynome gewonnen. Unter Berücksichtigung der Materialbeziehungen (W- ϵ -Diagramm) wird die spezifische Formänderungsenergie für das Porenbetonkontinuum bestimmt.

Der Bewehrungsstahl ist im globalen Modell als eindimensionales Stabelement definiert, welches nur Zug- oder Druckkräfte überträgt. Die Verschiebungen des Stabes ergeben sich in Abhängigkeit der Verbund- bzw. Kopplungseigenschaften. Bei Porenbetonbauteilen wird, unter Vernachlässigung des Verbundes, die Dehnung zwischen den Kopplungsstellen konstant angenommen. Sie leitet sich aus der Verschiebungsdifferenz der Verankerungspunkte ab. Die Nachgiebigkeit der Verankerung der Querkraftbewehrung wird in einem lokalen Modell bestimmt und als Vorverformung im globalen Modell berücksichtigt. Für den Schlupf bzw. die

5.5 Nachgiebigkeit der Verankerungspunkte der Bewehrung

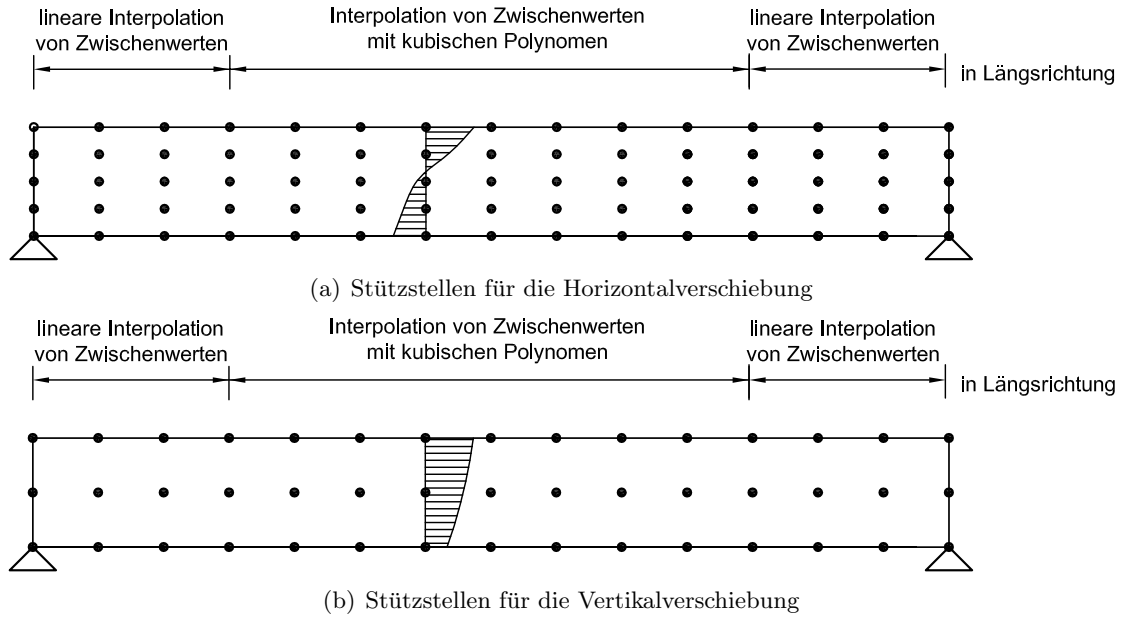


Abbildung 5.11: Stützstellen für die unbekannten Verschiebungsparameter

Nachgiebigkeit der Biegezugbewehrung werden zusätzliche Parameter Δu eingeführt, die die Relativverschiebung zwischen Porenbeton und Bewehrung beschreiben. Die Kopplung erfolgt über nichtlineare Federelemente (Abschnitt 5.5).

Für das diskretisierte Tragwerk lässt sich das Integral zur Bestimmung des Potentials der inneren Kräfte (Gleichung 5.16) nicht geschlossen lösen. Daher ist es notwendig, die spezifische Formänderungsenergie numerisch zu integrieren. Das Integral über die Balkenhöhe wird mit Hilfe der Gaußschen Quadraturformel [24] gelöst. Für die vergleichenden Berechnungen in Kapitel 6 werden zehn Stützstellen gewählt. Diese Anzahl der Stützstellen hat sich als hinreichend genau erwiesen. Die Stützstellen y_k sowie die Wichtungsfaktoren ω_k sind in Tabelle 5.3 aufgeführt. Für einen Vertikalschnitt j wird das Integral über die Querschnittshöhe in eine Summe gewandelt.

$$\Pi_{i,c,j} = \frac{H}{2} \cdot \sum_{k=1}^{10} \omega_k \cdot W_{x=x_j, y=y_k}(\epsilon_1, \epsilon_2) \quad (5.21)$$

Die Integration in Balkenlängsrichtung wird numerisch mit Hilfe der Trapezformel ausgeführt.

$$\Pi_{i,c} = L \cdot \left(\frac{\Pi_{i,c,1}}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} \Pi_{i,c,j} + \frac{\Pi_{i,c,n}}{2} \right) \quad (5.22)$$

5.5 Nachgiebigkeit der Verankerungspunkte der Bewehrung

Im Abschnitt zu den Besonderheiten des Tragverhaltens bewehrter Porenbetonbauteile (Kapitel 4) wird darauf eingegangen, dass der Verbund zwischen Bewehrungsstahl und Poren-

5 Alternatives Berechnungsmodell für bewehrte Porenbetonelemente

$y_1 = -0,9739$	$\omega_1 = 0,0667$
$y_2 = -0,8651$	$\omega_2 = 0,1495$
$y_3 = -0,6794$	$\omega_3 = 0,2191$
$y_4 = -0,4334$	$\omega_4 = 0,2693$
$y_5 = -0,1489$	$\omega_5 = 0,2955$
$y_6 = 0,1489$	$\omega_6 = 0,2955$
$y_7 = 0,4334$	$\omega_7 = 0,2693$
$y_8 = 0,6794$	$\omega_8 = 0,2191$
$y_9 = 0,8651$	$\omega_9 = 0,1495$
$y_{10} = 0,9739$	$\omega_{10} = 0,0667$

Tabelle 5.3: Stützstellen und Koeffizienten der Gauß-Quadratur für $n=10$

beton nicht anrechenbar ist. Eine ausreichende Kopplung der beiden Verbundwerkstoffe ist nur an diskreten Stellen gegeben. Die Kraftübertragung von den Verankerungsstäben auf den Porenbeton erfolgt durch eine Bettungsreaktion, die kleine Verschiebungen des Bewehrungskorbes im Beton zur Folge hat. Diese Bettungsreaktionen treten sowohl für die Verankerung der Querkraftbewehrung als auch für die Verankerung der Biegezugbewehrung auf. Als Folge der kleinen Verschiebungen kann bei Versuchen (z.B. Wehr [188] oder Daschner [40]) ein Schlupf der Endverankerung beobachtet werden. Eine unzureichende Endverankerung der Längsbewehrung führt zu einem sekundären Biegeversagen. Aus der Verschiebung des Verankerungsstabes der Querkraftbewehrung lässt sich die geringe Auslastung der Bügel ableiten. Die Auszugsversuche von Wehr [188] zeigen, dass ein Fließen der Querkraftbewehrung keine praktische Bedeutung hat.

Im Berechnungsmodell wird das Tragverhalten des Verankerungsstabes als lokales Problem betrachtet. Der Verankerungsstab der Querkraftbewehrung wird analog Abschnitt 4.5.3 als gebetteter Balken modelliert. Die resultierenden Verschiebungen werden als Vorverformungen im globalen Berechnungsmodell berücksichtigt. Diese haben eine direkte Auswirkung auf die Dehnung der Querkraftbewehrung. Für die Verankerung der Längsbewehrung werden Feder-elemente eingeführt, deren nichtlineare Steifigkeit man im Vorfeld bestimmt.

Um den Einfluss des Bewehrungsschlupfes bzw. der Verankerungssteifigkeit auf die Ergebnisse zu ermitteln, werden im Folgenden anhand der Versuchsergebnisse von Wehr (Abschnitt 6.1) drei Modelle untersucht (Abbildung 5.12):

- B1) starre Kopplung an den Verankerungsstellen
- B2) Nachgiebigkeit der Verankerungsstellen der Querkraftbewehrung
- B3) Nachgiebigkeit der Verankerungsstellen der Querkraft- und Längsbewehrung

Im Modell B1) werden die Verschiebungen zwischen Porenbeton und Bewehrung an den Kreuzungspunkten (Verankerungsstellen) miteinander gekoppelt. Relativverschiebungen zwischen den Verbundkomponenten treten an diesen Punkten nicht auf. Das Modell B2) berücksichtigt

5.5 Nachgiebigkeit der Verankerungspunkte der Bewehrung

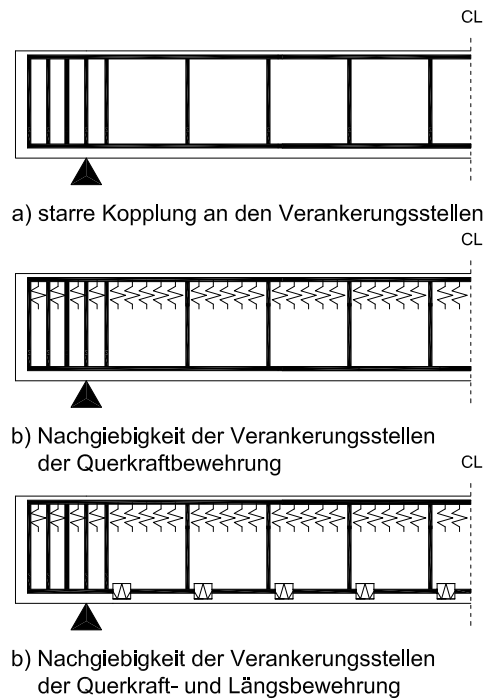


Abbildung 5.12: Modelle zur Beschreibung der Nachgiebigkeit der Bewehrung

den Einfluss der Bettung des Verankerungsstabes auf die Kraft in der Querkraftbewehrung. Modell B3) wird um den Einfluss der Verankerungsbereiche der Längsbewehrung erweitert. Ein Endschlupf der Bewehrung kann nur in Modell B3) auftreten.

Verankerung der Querkraftbewehrung

Die Kräfte der Bügelbewehrung werden über einen Verankerungsstab in den Beton eingeleitet. Die Auszugsversuche von Wehr [188] sowie die Vergleichsrechnungen in Kapitel 4 zeigen, dass für kleine und mittlere Beanspruchungen ein linearer Zusammenhang zwischen der Belastung und der Verschiebung des Verankerungsstabes angenommen werden kann. Überschreiten die Leibungspressungen σ_b die Druckfestigkeit des Porenbetons, kommt es zu einer Komprimierung der Poren und die Verschiebungen wachsen überproportional an.

Der Verankerungsstabdurchmesser besitzt einen wesentlichen Einfluss auf das Verformungsvermögen. Ein dünner Verankerungsstab weist bei gleicher Belastung größere Verschiebungen auf. Die Eindrückung des Verankerungsstabes in den Porenbeton bedingt eine Verschiebung der Knotenpunkte und eine Reduzierung der Dehnungen der Querkraftbewehrung.

Die Dehnung der Querkraftbewehrung ϵ_B wird aus der Verschiebungsdifferenz der Schweißknoten am Verankerungsstab v_o und an der Biegezugbewehrung v_u ermittelt (Abbildung 5.13). Da ein Verbund zwischen Porenbeton und Bewehrung vernachlässigt wird, ergibt sich eine konstante Dehnung im Bügel.

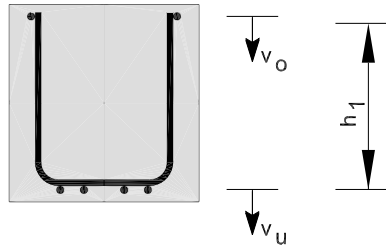


Abbildung 5.13: Ermittlung der Dehnungen im Bügelschenkel

$$\epsilon_B = \frac{v_u - v_o}{h_1} \quad (5.23)$$

Die Verschiebungswerte v_o und v_u beziehen sich auf das Betonkontinuum. Um eine Nachgiebigkeit des Verankerungsstabes zu berücksichtigen, muss eine zusätzliche Verschiebungskomponente Δv des oberen Knotenpunktes eingeführt werden.

$$\epsilon_B = \frac{(v_u - v_o) + \Delta v}{h_1} \quad (5.24)$$

Die Verschiebungsdifferenz Δv lässt sich durch ein lokales Modell mit dem in Abschnitt 4 vorgestellten Berechnungsverfahren ermitteln. Der Verankerungsstab ist als gebetteter Balken idealisiert. Es wird eine nichtlineare Bettungsfunktion für den Porenbeton sowie ein elastisch plastisches Materialverhalten für den Verankerungsstab angesetzt. Die Belastung ist durch die Kraft im Bügel gegeben. Die resultierenden Verschiebungen des lokalen Modells werden als Vorverformungen Δv in das globale Modell übertragen und bei der Ermittlung der Dehnungen der Querkraftbewehrung berücksichtigt. Die Ermittlung der Endverformung erfolgt iterativ.

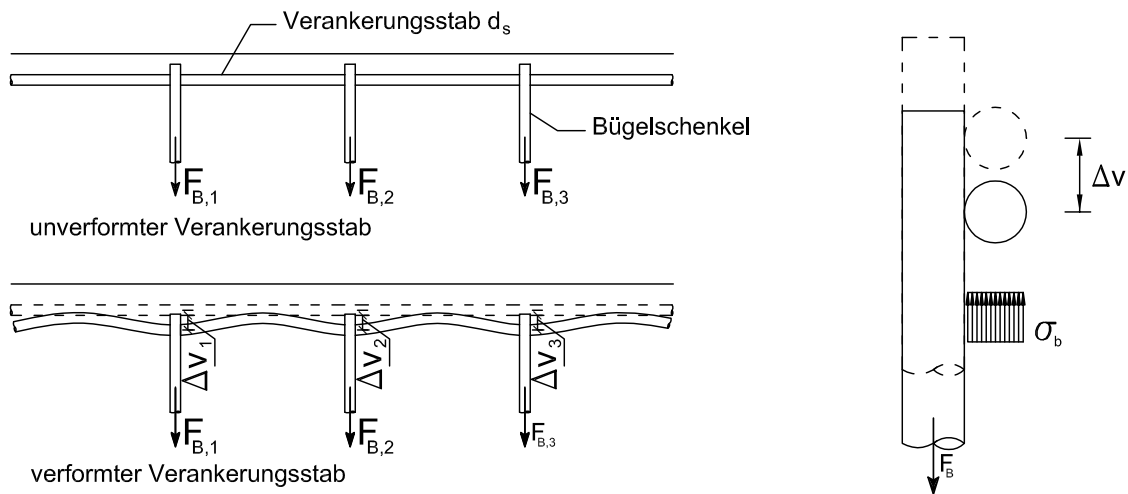


Abbildung 5.14: Verformungsverhalten des Verankerungsstabes

Das lokale Berechnungsmodell wird als separate Extremalaufgabe formuliert und mit den Methoden der mathematischen Optimierung gelöst. Die Trennung in ein lokales und ein globales Modell ist erforderlich, da sich die Einflussbereiche der Verankerungsstellen in Abhängigkeit des Bügelabstandes und der Belastung überlagern.

Verankerung der Längsbewehrung

Die Verankerung der Längsbewehrung erfolgt durch angeschweißte Querstäbe bei nicht querkraftbewehrten und durch die Bügel bei querkraftbewehrten Bauteilen. Aufgrund des vernachlässigten Verbundes erhält man für den Bewehrungsstahl einen treppenförmigen Verlauf der Dehnungen in Balkenlängsachse (Abbildung 5.15). Die Querstäbe leiten die Kräfte über eine Bettungsreaktion in den Porenbeton. Es treten kleine Relativverschiebungen auf. Im Vergleich zum Stahlbeton (kontinuierliche Lasteinleitung über Verbund) erhält man für bewehrte Porenbetonbauteile eine völligere Zugkraftlinie. Die Verankerungsknoten entziehen sich der Last und die Endverankerung wird stärker beansprucht. Die Querstabanordnung bzw. die Anzahl der Querstäbe beeinflusst die Zugkraft der Längsbewehrung maßgeblich.

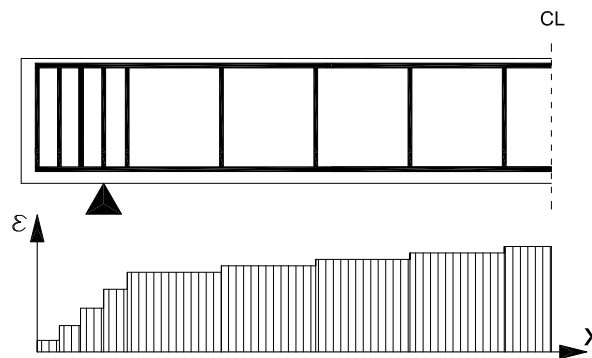


Abbildung 5.15: Dehnungsverteilung in der unteren Längsbewehrung

Für das Berechnungsmodell wird eine Nachgiebigkeit der Verankerung der Längsbewehrung über ein nichtlineares Federelement realisiert. Die Verschiebung eines Knotenpunktes der Bewehrung setzt sich aus den Anteilen der Verschiebung des Betonkontinuums und der Relativverschiebung $u_{F,j}$ zusammen. Die Dehnung der Längsbewehrung im Abschnitt i beträgt:

$$\epsilon_{l,i} = \frac{(u_{j+1} + u_{F,j+1}) - (u_j + u_{F,j})}{\Delta x}. \quad (5.25)$$

Die Relativverschiebungen $u_{F,j}$ zwischen Porenbeton und Bewehrungskorb stellen zusätzliche Unbekannte für das globale Berechnungsmodell dar und erzeugen über das Federelement einen zusätzlichen Anteil für das Potential der inneren Kräfte $\Pi_{i,Verankerung}$. Die Last-Verschiebung-Beziehung des Federelementes wird im Vorfeld mit dem Modell des gebetteten Balkens (Abschnitt 4.5.3) bestimmt. Es können beliebige nichtlineare Funktionen $K(u_F)$ verwendet werden.

5 Alternatives Berechnungsmodell für bewehrte Porenbetonelemente

$$\Pi_{i, \text{Verankerung}} = \int K(u_F) du_F \quad (5.26)$$

Die Steifigkeit der Verankerung ist neben dem Porenbeton vom Durchmesser des Verankerungsstabes und von der Anzahl der Längsbewehrungsstäbe bzw. der Bewehrungsanordnung quer zum Balken abhängig. Abbildung 5.16 zeigt die Ermittlung der Funktion K für eine Porenbetonplatte aus dem Versuchsprogramm von Daschner. Es zeigt sich eine Zweiteilung der Ergebnisse. Bis die Leibungspressung des Verankerungsstabes die Druckfestigkeit des Porenbetons erreicht, wächst die Verschiebung näherungsweise linear an. Danach reduziert sich die Steifigkeit wesentlich. Für das Berechnungsmodell lässt sich die Funktion $K(u_F)$ durch einen bilinearen Ansatz approximieren.

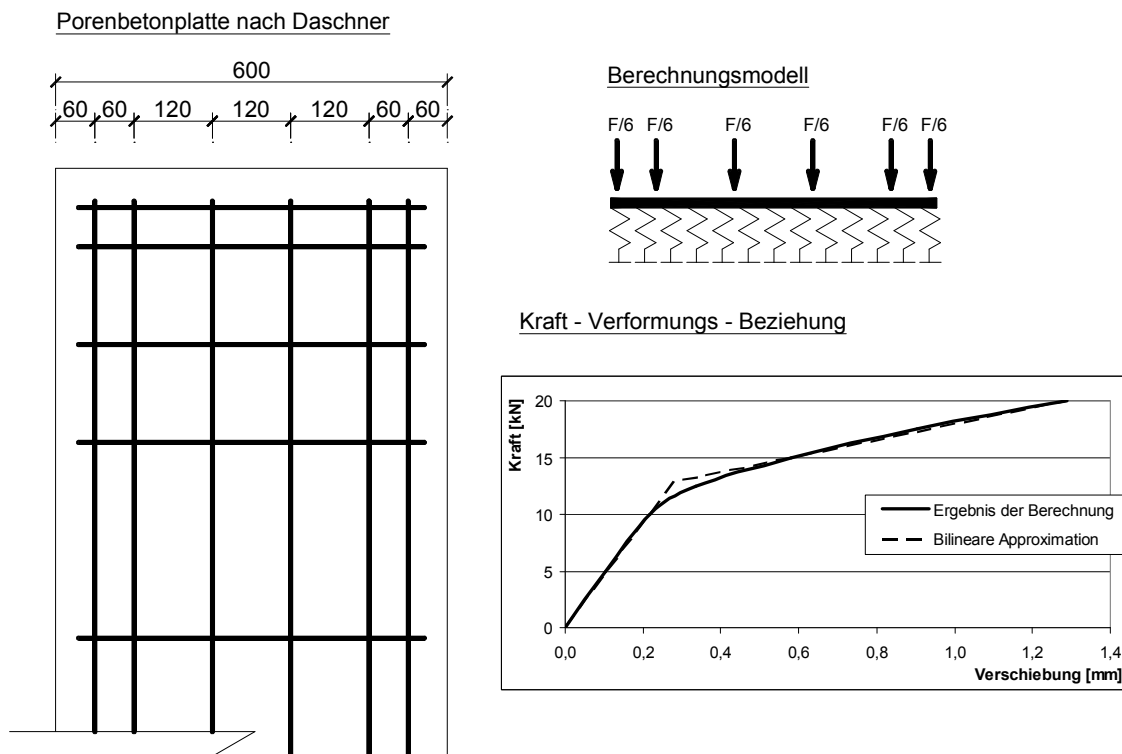


Abbildung 5.16: Ermittlung der Kraft-Verformungs-Beziehung für eine Versuchsplatte von Daschner

An den Auflagerstellen muss die Restzugkraft der Bewehrung verankert werden. Aufgrund der kleinen Verschiebungen der Verankerungsstellen im Feld wird die Endverankerung stärker belastet. Daher erfolgt bei bewehrten Porenbetonbauteilen eine Konzentration von Querstäben am Auflager. Die Verankerungsstäbe liegen teilweise hinter den theoretischen Auflagern. Im Berechnungsmodell wird nur das Tragwerk zwischen den theoretischen Lagerstellen modelliert. Um die zusätzlichen Verankerungsstellen der Längsbewehrung zu berücksichtigen, wird die Steifigkeit der weiteren Stäbe am Lager zusammengefasst. Die Verschiebung $u_{F,j}$ am Auflager entspricht dem Endschlupf der Bewehrung.

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

Das im vorherigen Kapitel entwickelte Berechnungsmodell wird anhand von in der Literatur dokumentierten Versuchen verifiziert. Die Versuche an querkraftbewehrten Porenbetonbalken von Wehr [188] liefern Informationen zu Verformungen, Bruchlast, Bewehrungsschlupf und Dehnungen im Porenbeton und in der Längs- bzw. Bügelbewehrung. Anhand der Versuche werden Berechnungsreihen durchgeführt, um den Einfluss der Verankerung der Bewehrung auf das Trag- und Verformungsverhalten zu bewerten.

Ein nach DIN 4223:2003 [163] bemessener Porenbetonbalken wird hinsichtlich seines Spannungs- und Verformungszustandes analysiert.

Umfangreiche experimentelle Untersuchungen zu nicht querkraftbewehrten Porenbetonplatten führt Daschner [40] durch. Er betrachtet einachsig gespannte Platten und legt sein Hauptaugenmerk auf die Beurteilung der Tragfähigkeit der Endverankerung. Dabei führt er Versuche an Platten mit und ohne Endwinkeln durch, um eine Aussage über den Einfluss des Endschlupfes zu treffen. Die Vergleichsrechnungen zeigen, dass das Berechnungsmodell ebenfalls bei Bauteilen ohne Querkraftbewehrung einsetzbar ist.

Neben der Anwendung des Berechnungsmodells auf bewehrte Porenbetonbauteile wird ein weiteres mögliches Anwendungsgebiet aufgezeigt. Ein Stahlbetonbalken kann als Sonderfall für das Modell betrachtet werden. Nimmt man einen starren Verbund zwischen Beton und Bewehrungsstahl an, so vereinfacht sich die Berechnung, da die Problematik der Nachgiebigkeit der Lasteinleitungsbereiche nicht auftritt. Es sind nur geringe Modifikationen notwendig, um einen Stahlbeton T-Balken zu analysieren.

Abschließend wird gezeigt, dass die gewonnenen Ergebnisse als Basis für ein deformationsbasiertes Bemessungskonzept verwendet werden können.

6.1 Querkraftbewehrte Porenbetonbalken

Wehr [188] führt an der Bauhaus-Universität Weimar umfangreiche Untersuchungen zur Querkrafttragfähigkeit von Porenbetonbalken durch. Dabei betrachtet er verschiedene Einflussparameter. Neben dem Bügelabstand werden unter anderem der Verankerungsstabdurchmesser, die Schubslankheit und der Längsbewehrungsgrad variiert. Die Ergebnisse dieser Versuche dienen als Basis für die folgenden Vergleichsrechnungen. Als Messergebnisse stehen neben der Bruchlast der Balken, die Kräfte in den Bügelschenkeln, die Dehnung der Längsbewehrung sowie die Randdehnung des Porenbetons und der Schlupf der Biegezugbewehrung zur Verfügung.

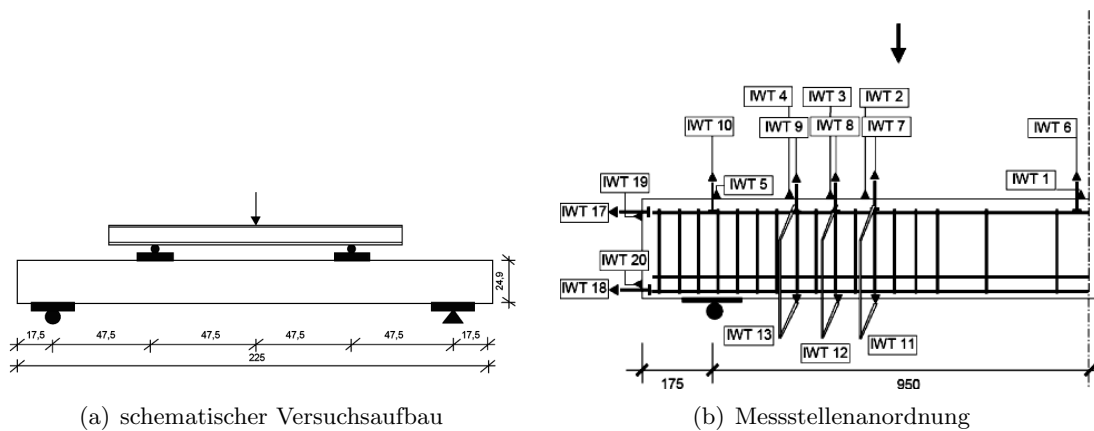


Abbildung 6.1: Versuchsaufbau und Messstellenanordnung nach Wehr [188]

Die Balken sind zweiseitig gelenkig gelagerte Einfeldträger mit einer Stützweite von 1,90m. Die Belastung erfolgt kraftgesteuert über einen Hydraulikzylinder jeweils in den Drittelpunkten. Der grundlegende Versuchsaufbau und die Anordnung der einzelnen Messstellen ist in Abbildung 6.1 dargestellt.

Es werden die Porenbetonbalken der Versuchsreihen VI/3/13/1a-4a betrachtet. Bei diesen vier Versuchsreihen wird der Bügelabstand in 5cm Abständen von 5cm bis 20cm variiert. Alle weiteren Parameter sind konstant. Die Abmessungen der Balken sowie Angaben zur Bewehrung sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Die Reihe VI/3/13/1a besteht aus vier und die drei weiteren Versuchsreihen aus jeweils fünf Einzelversuchen.

Ausgangspunkt der Versuchsbalken ist die Zulassung der Hebel Stürze Z2.1-23 [17]. Es handelt sich um Rechteckquerschnitte mit einer Breite $B = 24\text{cm}$ und einer Höhe $H = 25\text{cm}$. Die Längsbewehrung besteht aus Bewehrungsstäben mit einem Durchmesser $d = 10\text{mm}$. Die Bewehrung in der Druckzone stellt gleichzeitig den Verankerungsstab der Bügel dar. Die Querkraftbewehrung wird aus zweiseitigen offenen Bügeln $d = 6,5\text{mm}$ hergestellt. Der Bügelabstand von 5cm entspricht der Zulassung [17]. Die Variation der Abstände beeinflusst die Interaktion der Verbundmaterialien. Kleinere Abstände als 5cm werden nicht untersucht, da sie schweißtechnisch schwer zu realisieren sind und eine unwirtschaftliche Bemessung darstellen [188]. Im Auflagerbereich muss eine ausreichende Verankerung der Längszugbewehrung

Versuchsreihe VI/3/13/3a

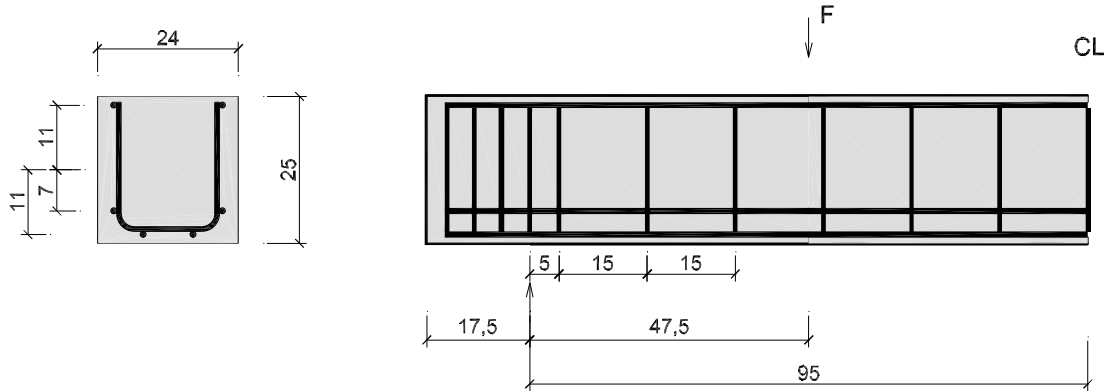


Abbildung 6.2: Abmessungen und Bewehrungsanordnung für Versuchsreihe VI/3/13/3a

sichergestellt werden. Hier wird von Wehr bei den vier Versuchsreihen eine einheitliche enge Verbügelung im Abstand von 5cm vorgenommen. Die schematische Bewehrungsanordnung ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Ein Teil der zur Verankerung der Längsbewehrung verwendeten Bügel befindet sich hinter dem ideellen Auflager.

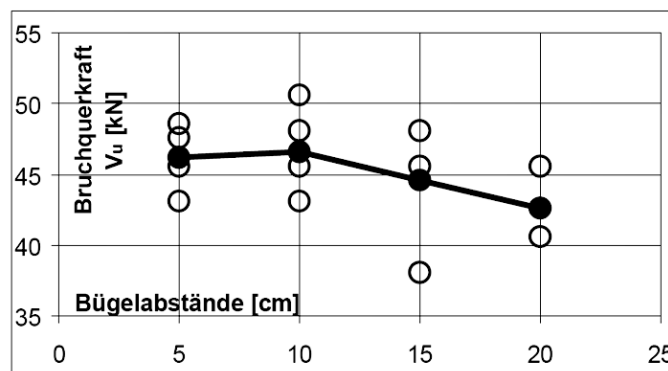


Abbildung 6.3: Entwicklung der Bruchquerkraft nach Wehr [188]

Die Versuche werden jeweils bis zum Bruch gefahren. Die Bruchquerkraft beträgt im Mittel ca. $46,6\text{ kN}$ (Bügelabstand 5cm) bis ca. $42,6\text{ kN}$ (Bügelabstand 20cm). Abbildung 6.3 stellt den Verlauf der Bruchquerkraft für verschiedene Bügelabstände dar. Die durchgezogene Linie repräsentiert die Mittelwerte der Versuche. Die Streuung der Ergebnisse kann aus den Einzelergebnissen abgelesen werden. Für einen Abstand von 5cm und 10cm wird näherungsweise die gleiche Bruchkraft ermittelt. Mit steigendem Bügelabstand nimmt diese ab. Wehr gibt für alle durchgeführten Versuche ein Betonversagen an. Ein Bewehrungsbruch oder ein Versagen der Schweißverbindung des Bewehrungskorbes können nicht beobachtet werden. Da der Beton das Versagen des Bauteils bedingt, tritt dieses plötzlich und ohne Vorankündigung ein.

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

In Abhängigkeit der konstruktiven Ausbildung treten unterschiedliche Versagensmechanismen auf. Bei Bügelabständen von 5cm und 10cm (Versuchsreihen VI/3/13/1a und VI/3/13/2a) bedingt ein Abplatzen der seitlichen Betondeckung im querkraftbeanspruchten Bereich das Versagen. Für die Versuchsbalken mit einem Bügelabstand von 15cm und 20cm (Versuchsreihen VI/3/13/3a und VI/3/13/4a) tritt vorwiegend ein Versagen der Betondruckzone im momentenkonstanten Bereich als Versagensmechanismus auf. Wehr führt dieses Versagen auf eine höhere Beanspruchung der Verankerungsbereiche der Längszugbewehrung zurück. Aufgrund der vergrößerten Bügelabstände stehen nicht mehr ausreichend Querstäbe zur Verankerung der Kräfte zur Verfügung. Der Endschlupf der Bewehrung wird größer und es kommt zu einem Einschnüren der Druckzone des Porenbetons (sekundäres Biegeversagen).

Versuchsserie	Breite	Höhe	Bewehrungsgrad	Verankerungsstabdurchmesser	Bügelabstand	Bügel-durchmesser
	[cm]	[cm]	[%]	[mm]	[cm]	[mm]
VI/3/13/1a	24	25	0,62	10	5	6,5
VI/3/13/2a	24	25	0,62	10	10	6,5
VI/3/13/3a	24	25	0,62	10	15	6,5
VI/3/13/4a	24	25	0,62	10	20	6,5

Tabelle 6.1: Abmessungen der betrachteten Versuchsbalken [188]

Mit dem vorgestellten Berechnungsmodell werden Vergleichsberechnungen zu den vier Versuchsreihen VI/3/13/1a bis VI/3/13/4a der Balkenversuche von Wehr durchgeführt. Um den Einfluss der Verankerungsbereiche der Querkraft- und Biegezugbewehrung zu betrachten, soll bei drei Berechnungsreihen (B1-B3) der Lasteinleitungsbereich unterschiedlich modelliert werden. In der ersten Reihe B1 ist keine Nachgiebigkeit der Verankerungspunkte berücksichtigt. Der Porenbeton bleibt punktuell starr mit dem Bewehrungskorb gekoppelt. Zwischen den Lasteinleitungspunkten müssen die Verträglichkeitsbedingungen zwischen Porenbeton und Bewehrung nicht eingehalten werden.

Die zweite Berechnungsreihe B2 berücksichtigt eine Nachgiebigkeit der Verankerungsbereiche der Querkraftbewehrung. Der Verankerungsstab wird als gebetteter Balken modelliert und erlaubt Relativverschiebungen zwischen Porenbeton und Bewehrung. Die nachgiebige Verankerung bewirkt eine Entlastung der Bügel und führt zu Lastumlagerungen.

Die Berechnungsreihe B3 stellt zusätzlich zur nachgiebigen Bügelverankerung eine Nachgiebigkeit der Verankerungsbereiche der Längsbewehrung sowie einen Schlupf der Endverankerung in Rechnung. Damit erhöht sich die Völligkeit der Zugkraftlinie der Längsbewehrung und die Belastung der Endverankerung.

Für die Druckfestigkeit des Porenbetons wird, ausgehend von den Materialuntersuchungen Wehrs, ein Wert von $f_{cc} = -0,56kN/cm^2$ angesetzt. Versuche zur Zugfestigkeit sind nicht dokumentiert, so dass der Wert mit 12% der Druckfestigkeit $f_{ct} = 0,12 \cdot |f_{cc}| \cong 0,07kN/cm^2$ angenommen wird. Als Faktor für die wirksame Zugfestigkeit im gerissenen Porenbeton wird ein Wert von $\alpha = 0,4$ angesetzt. Bis zum Erreichen der Festigkeit des Porenbetons wird

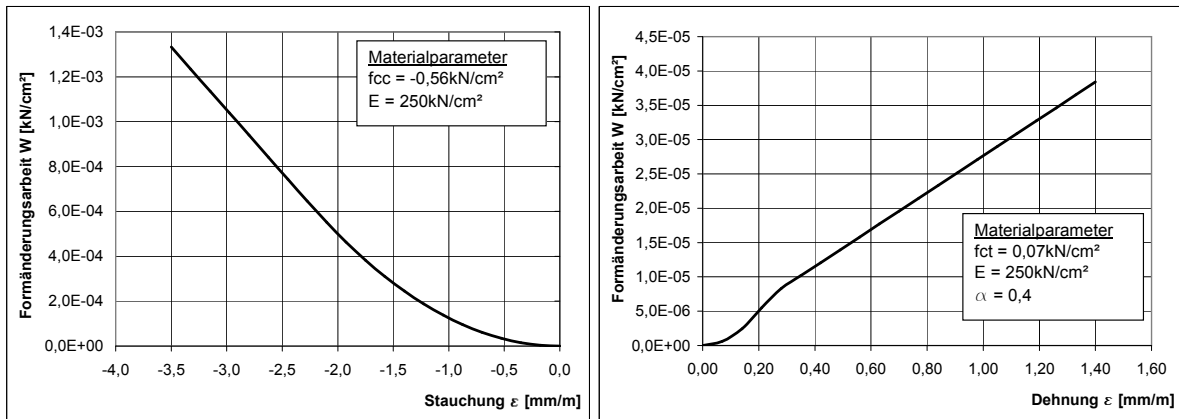


Abbildung 6.4: Formänderungsarbeit-Dehnungs-Beziehung für die Versuchsbalcken

eine lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung angenommen. Der Elastizitätsmoduls beträgt $E = 250 \text{ kN/cm}^2$. Mit diesen Angaben lässt sich das in Abbildung 6.4 dargestellte Materialgesetz für den Porenbeton als Formänderungsarbeit-Dehnungs-Beziehung (W - ϵ -Diagramm) aufstellen. Dieses wird zur Bestimmung der spezifischen Formänderungsenergie des Porenbetons in den Hauptachsen verwendet.

6.1.1 Berechnungsreihe B1 mit starren diskreten Verankerungsstellen der Bewehrung

In der Berechnungsreihe B1 werden die Verschiebungen des Bewehrungskorbes an den Kreuzungspunkten (Verankerungsstellen) starr mit dem Porenbeton gekoppelt. Relativverschiebungen der Verankerungspunkte treten nicht auf. Da die Bettung der Bewehrung im Porenbeton nicht betrachtet wird, erfolgt keine Aufteilung in ein lokales (Verankerungsstab) und ein globales (Tragwerk) Berechnungsmodell. Es wird nur die globale Tragwirkung berücksichtigt.

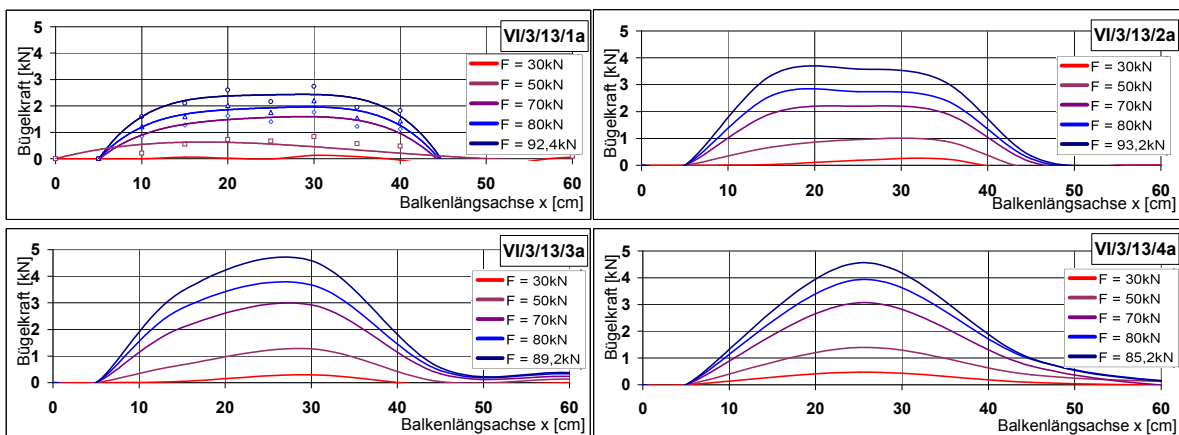


Abbildung 6.5: Kräfte in den Bügelschenkeln - Berechnungsmodell B1

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

Die berechneten Kräfte in den Bügelschenkeln sind in Abbildung 6.5 für die einzelnen Balken und für verschiedene Laststufen entlang der Balkenlängsachse dargestellt. Bei Abständen der Querkraftbewehrung von 5cm und 10cm ergibt sich für die Berechnung eine gleichmäßige Verteilung der Kräfte in den Bügeln entlang der Balkenlängsachse. Bei größeren Abständen treten Spitzenwerte im Abstand von 20-30cm vom ideellen Auflager auf.

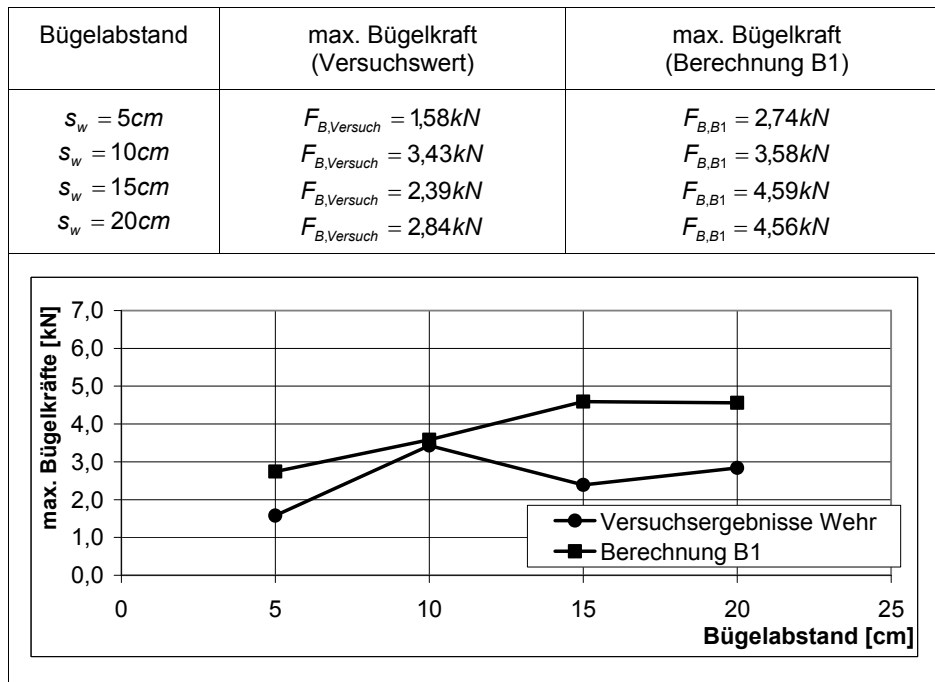


Abbildung 6.6: Vergleich der Bügelkräfte im Bruchzustand

Abbildung 6.6 zeigt die von Wehr ermittelten maximalen Kräfte in den Bügelschenkeln¹ im Bruchzustand und einen Vergleich mit den berechneten Kräften. Besonders bei großen Bügelabständen liegen die berechneten über den gemessenen Werten. Die Abnahme der maximalen Bügelkräfte bei großen Bügelabständen (15cm bzw. 20cm) wird durch den Ansatz starrer Kopplungspunkte nicht wiedergegeben. Die größten Kräfte werden im Versuch bei Balken mit einem Bügelabstand von 10cm gemessen. Das Berechnungsmodell liefert für größere Abstände weiter anwachsende Bügelkräfte. Die Vergrößerung des Abstandes von 15cm auf 20cm hat keinen Einfluss auf die maximalen berechneten Bügelkräfte. Eine eindeutige Abhängigkeit der Kräfte vom Schubbewehrungsgrad kann weder durch die Versuchswerte noch durch die Berechnung mit dem Modell B1 abgeleitet werden.

Berechnet man die Spannung in der Querkraftbewehrung, so liegt diese bei Werten zwischen $\sigma_{Bu} = 82,6\text{N/mm}^2$ und $\sigma_{Bu} = 137,4\text{N/mm}^2$ (Vergleichsrechnung B1) bzw. $\sigma_{Bu} = 48\text{N/mm}^2$ bis $\sigma_{Bu} = 103\text{N/mm}^2$ (Versuchswerte). Die Spannungen sind deutlich unterhalb der Streckgrenze. Sowohl die Versuche als auch die Berechnungen mit dem Modell B1 bestätigen die Aussage vorangegangener Untersuchungen ([76], [145]), dass ein Fließen der Querkraftbewehrung als Versagensursache weitestgehend ausgeschlossen werden kann.

¹Mittelwert aus mehreren Messungen

Die berechneten Bügelkräfte gehen mit entsprechend großen Leibungspressungen unter dem Verankerungsstab der Querkraftbewehrung einher (Abbildung 6.7). Da keine lokale Berechnung für den Verankerungsstab durchgeführt wird, erfolgt die Ermittlung der Pressungen unter der vereinfachten Annahme einer Gleichverteilung unterhalb des Verankerungsstabes. Diese Annahme scheint für kleine Bügelabstände gerechtfertigt, liefert allerdings für große Abstände zu kleine Werte, da ein Abklingen infolge der Bettungsreaktion nicht berücksichtigt wird. Die Konzentration der Kräfte direkt unter dem Verankerungsstab ist abhängig von den Steifigkeitsverhältnissen und kann nur mit einem lokalen Modell bestimmt werden.

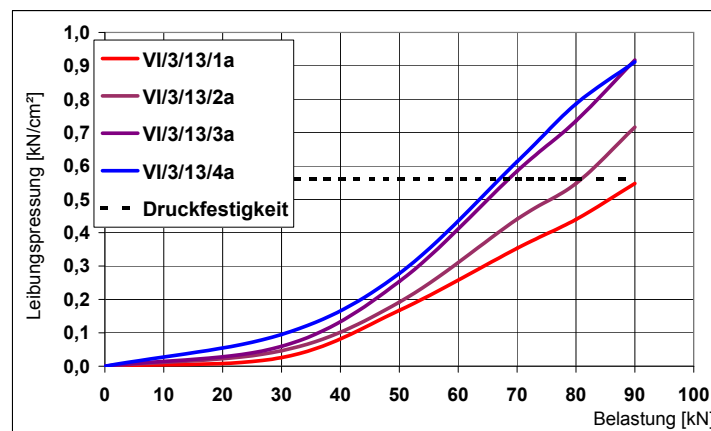


Abbildung 6.7: Leibungspressung infolge der berechneten Bügelkräfte - Berechnungsmodell B1

In Abbildung 6.7 ist mit einer gestrichelten Linie die Druckfestigkeit des verwendeten Porenbetons eingetragen. Während bei Reihe VI/3/13/1a mit 5cm Bügelabstand die Druckfestigkeit erst unmittelbar bei der Bruchlast erreicht wird, liegen die Leibungspressungen bei 15cm bzw. 20cm Bügelabstand bereits bei ca. 75% der Bruchlast im Bereich der Druckfestigkeit. Die theoretischen Leibungsspannungen liegen teilweise erheblich über der Festigkeit des Porenbetons. Für das Bauteil bedeuten diese großen Druckbeanspruchungen eine Komprimierung der Poren des Betons unterhalb des Verankerungsstabes. Der Beton kann die auftretenden Kräfte nicht abtragen und weicht der Belastung aus. Es findet eine Verschiebung des Verankerungsstabes statt und die Bügel werden entlastet.

Das Berechnungsmodell B1 kann die Kräfte in der Querkraftbewehrung nicht hinreichend genau beschreiben. Die Beanspruchungen der Bügel werden überschätzt. Der Effekt verstärkt sich mit wachsendem Abstand der Bügel. Die in den Versuchen beobachtete Tendenz, dass bei großen Bügelabständen die maximale Kraft im Bügelschenkel sinkt, kann nicht abgebildet werden. Zurückführen lässt sich dieser Umstand auf die hohen Leibungspressungen unter dem Verankerungsstab der Querkraftbewehrung. Die theoretischen Pressungen übersteigen im Bruchzustand die Porenbetonfestigkeit deutlich. Eine Vernachlässigung der Bettung des Verankerungsstabes im Porenbeton ist nicht gerechtfertigt.

6.1.2 Berechnungsreihe B2 mit diskreten Verankerungsstellen der Bewehrung und Nachgiebigkeit der Bügelverankerung

Für die Berechnungsreihe B2 wird zusätzlich zum Modell B1 eine Nachgiebigkeit der Querkraftverankerung berücksichtigt. Das Ergebnis des vorangegangenen Abschnitts zeigt, dass unterhalb des Verankerungsstabes große Pressungen auftreten. Um die entstehenden Verschiebungen zu beschreiben, wird der Verankerungsstab in einem lokalen Berechnungsmodell als kontinuierlich gebetteter Balken modelliert. Die Kräfte der Bügelchenkel stellen die Belastung des Balkens dar. Der Porenbeton ist das bettende Material.

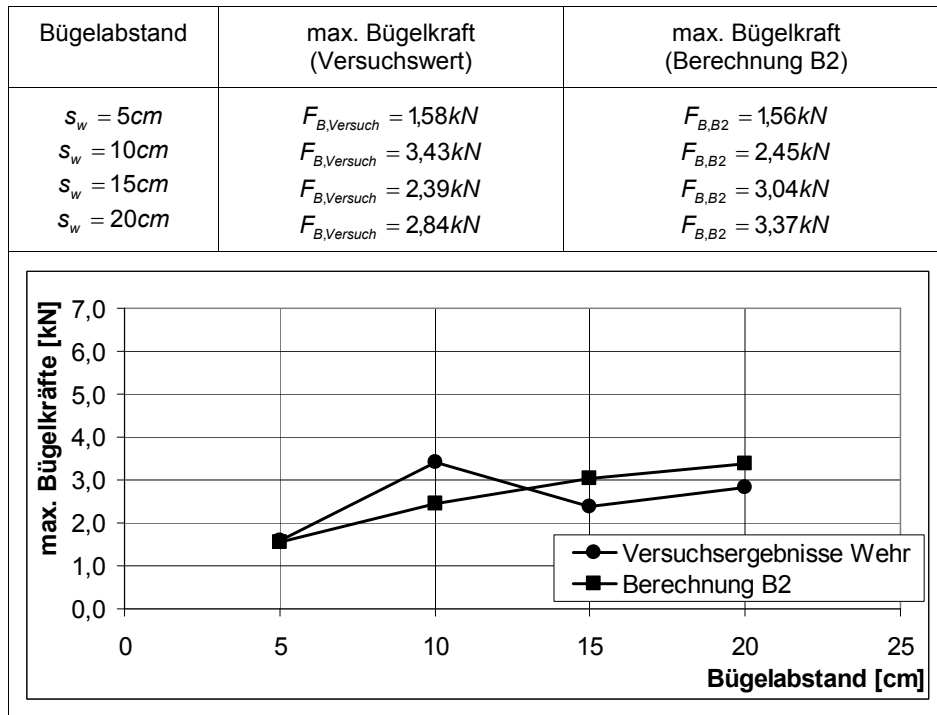


Abbildung 6.8: Vergleich der Bügelkräfte im Bruchzustand

In den Abschnitten 4.5.3 bzw. 5.5 wird das Berechnungsmodell zur Bestimmung des Verformungsverhaltens eines gebetteten Bewehrungsstabes vorgestellt. Dieses Modell wird mit der Berechnung des Porenbetonbalkens gekoppelt. Man betrachtet ein globales System zur Ermittlung der inneren Kräfte des Balkens und ein lokales System zur Beschreibung des Verankerungsstabes. Ausgangspunkt sind die berechneten Bügelkräfte aus dem Modell B1, die die Belastung des Verankerungsstabes darstellen. Die Vertikalverschiebung des Verankerungsstabes werden als Vorverformung Δv der Bügelchenkel in das Berechnungsmodell übertragen. Diese Vorverformungen gehen direkt in die Bestimmung der Dehnung der Querkraftbewehrung ein und haben eine entlastende Wirkung. Die Bestimmung der endgültigen Verschiebungen erfolgt iterativ.

Für das Bettungsverhalten des Porenbetons wird die in Abschnitt 4.5.3 vorgeschlagene trilineare Beziehung verwendet. Bis die Leibungspressung einen Wert von 90% der Druckfestigkeit des Porenbetons erreicht, kommt ein linearer Bettungsmodul zum Einsatz. Um den

6.1 Querkraftbewehrte Porenbetonbalken

plastischen Verformungen bzw. Strukturveränderungen (Komprimierung der Porenstruktur) des Porenbetons bei hohen Druckbeanspruchungen Rechnung zu tragen, erfolgt eine Abminderung der Steifigkeit der Bettung. Im Bereich zwischen 90%-100% der Druckfestigkeit wird die Steifigkeit auf 50% des Ursprungsbettungsmoduls abgemindert. Für größere Druckspannungen erfolgt eine Reduzierung auf 10%. Infolge der nichtlinearen Bettung wird ein größerer Bereich zur Abtragung der Kräfte auf den Porenbeton herangezogen.

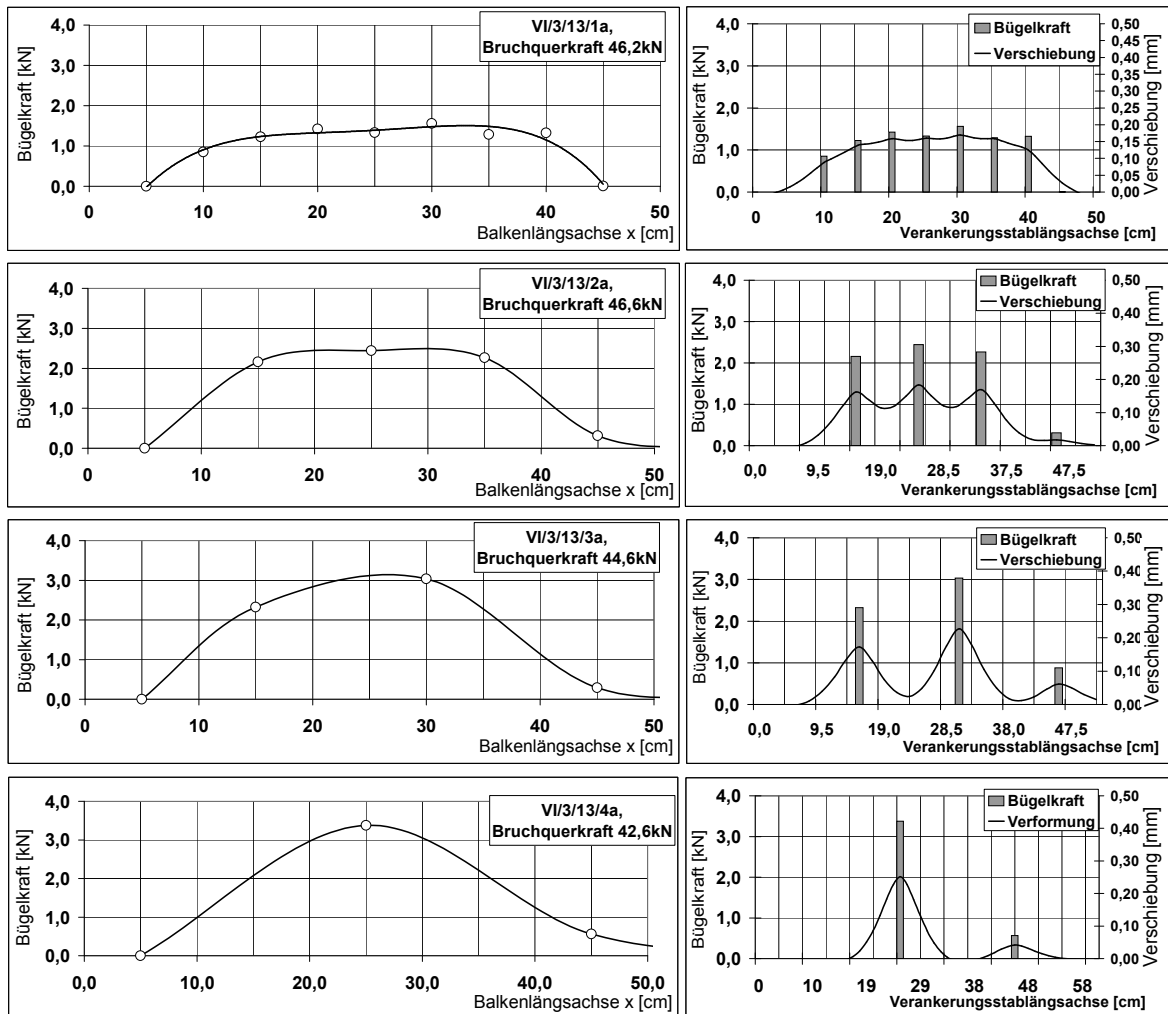


Abbildung 6.9: Kräfte in den Bügelschenkeln und Nachgiebigkeit der Verankerung für das Modell B2

Für den Verankerungsstab wird ein linear elastisch - ideal plastisches Materialmodell verwendet. Bei dünnen Verankerungsstäben bzw. großen Kräften kann die Streckgrenze erreicht werden. Es bilden sich plastische Gelenke an den Lasteinleitungsstellen (Schweißknoten des Bewehrungskorbes). Ein Versagen des Schweißknotens wird nicht in das Berechnungsmodell implementiert. Dieser Versagenszustand ist während der Balkenversuche nicht eingetreten, da sich die Kräfte in den Bügelschenkeln auf einem niedrigen Niveau befinden. Eine Überprüfung des Knotens kann mit den berechneten Kräften durchgeführt werden.

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

Abbildung 6.8 zeigt einen Vergleich der berechneten Bügelkräfte des Modells B2 mit den Messungen im Bruchzustand (Maximalkraft in den Bügelschenkeln). Eine Vergrößerung der Bügelabstände führt zu einer kontinuierlichen Steigerung der Bügelkräfte, wobei die berechneten Werte die Größenordnung gut wiedergeben. Die Tendenz, dass der Maximalwert der Bügelkraft bei einem Abstand von 10cm auftritt und dass die maximalen Kräfte bei einer Steigerung des Bügelabstandes wieder sinken, kann nicht wiedergegeben werden.

In Abbildung 6.9 sind neben dem Verlauf der Bügelkräfte über die Balkenlängsachse die Verschiebungen des Verankerungsstabes im lokalen Modell dargestellt. Während sich für kleine Bügelabstände (5cm) eine kontinuierliche Verschiebung ergibt, erhält man für Abstände von 10cm bis 20cm lokal begrenzte Verschiebungsspitzen. Diese sind umso ausgeprägter, je größer der Abstand der Bügel ist. Eine Gleichverteilung der Leibungspressungen, wie in Abbildung 6.7 angewendet, liefert zu kleine Werte und kann die Konzentration an den Knotenpunkten nicht wiedergeben. Eine nennenswerte gegenseitige Beeinflussung der Lasteinleitungsbereiche ist nur für die beiden ersten Berechnungsreihen VI/3/13/1a und VI/3/13/2a gegeben.

Die berechneten Verschiebungen wachsen in Abhängigkeit der Bügelabstände kontinuierlich an. Für einen Abstand von 5cm beträgt die maximale Relativverschiebung für die Last im Bruchzustand $\Delta v = 0,17mm$ und für einen Abstand von 20cm $\Delta v = 0,25mm$. Die Verschiebungen aus dem lokalen Modell werden jeweils auf das globale Modell übertragen und reduzieren direkt die Dehnungen in den Bügelschenkeln.

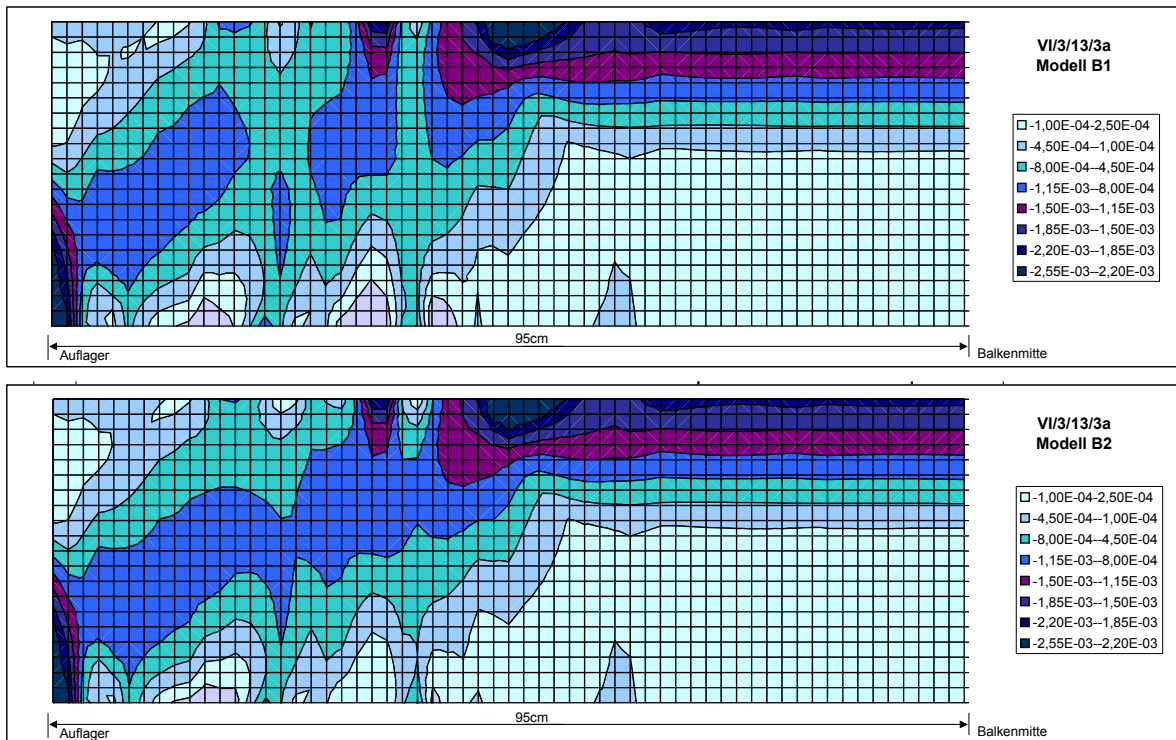


Abbildung 6.10: Vergleich der kleinsten Hauptdehnung für das Berechnungsmodell B1 und B2

Die Entlastung der Bügel führt zu einer Umlagerung der inneren Kräfte. Es muss ein größerer Anteil der Querkraft durch direkte Lastabtragung in das Auflager geleitet werden. Dies lässt sich durch einen Vergleich der kleinsten Hauptdehnungen zeigen (Abbildung 6.10). Die nach Modell B2 berechneten Dehnungen des Porenbetons sind vom Betrag größer und lassen eine deutlichere Druckstrebe zum Auflager erkennen. Aus den Dehnungen lassen sich für die Druckstrebe Spannungen ableiten, die bei ca. 50 Prozent der Druckfestigkeit des Porenbetons liegen. Ein Versagen der geneigten Betondruckstrebe ist nicht zu erwarten.

Ein Vergleich der Dehnungen der Biegezugbewehrung der Berechnungsreihen B1 und B2 mit den von Wehr gemessenen Werten zeigt Abbildung 6.11. Die Völligkeit der Zugkraftlinie in den Berechnungen ist geringer als die der Versuchswerte. Dieser Effekt tritt mit zunehmendem Bügelabstand stärker hervor. Die berechnete Zugkraft im Auflagerbereich ist viel geringer als die von Wehr gemessenen Werte.

Das Berechnungsmodell B2 kann die Kräfte in der Querkraftbewehrung besser abbilden als das Modell B1, kann aber nicht alle Tendenzen wiedergegeben. Das bei den Versuchen festgestellte Maximum der Bügelkräfte für einen Abstand von 10cm sowie die Reduzierung der Bügelkräfte bei einer weiteren Vergrößerung des Abstandes kann nicht abgebildet werden. Die geringe Völligkeit der Zugkraftlinie bei der Berechnung ist ein Indiz dafür, dass die Verankerung der Längsbewehrung in das Modell einbezogen werden muss. Mit den Modellen B1 und B2 lässt sich keine realistische Aussage über die zu verankernde Längskraft der Bewehrung am Auflager treffen.

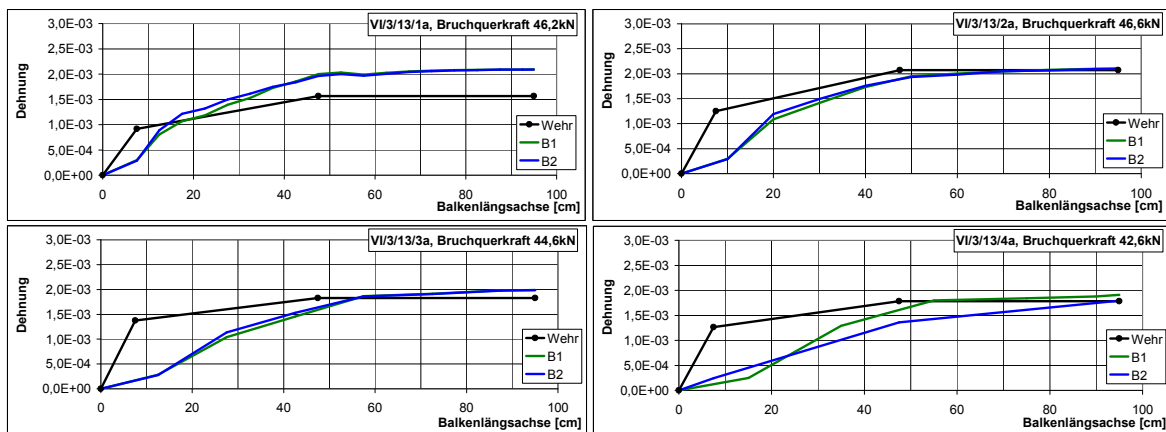


Abbildung 6.11: Vergleich der Dehnungen der unteren Bewehrungslage

6.1.3 Berechnungsreihe B3 mit diskreten Verankerungsstellen der Bewehrung, Nachgiebigkeit der Bügelverankerung und der Verankerung der Längsbewehrung

Die Verankerung der Biegezugbewehrung erfolgt über die Bügel, welche die Kraft auf den Porenbeton übertragen. Hier ist ebenfalls von einer Bettung der Verankerungsstäbe im Porenbeton auszugehen. Die Verankerungskräfte erzeugen Leibungspressungen im Beton, die zu

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

kleinen Verschiebungen der Bügel führen. Diese Verschiebungen bewirken eine Umlagerung der Kräfte in der Längsbewehrung. Die Völligkeit der Zugkraftlinie der Bewehrung nimmt zu und die am Auflager zu verankernde Kraft steigt an. Je weniger Querstäbe zur Verfügung stehen, desto größer ist die am Auflager zu verankernde Kraft.

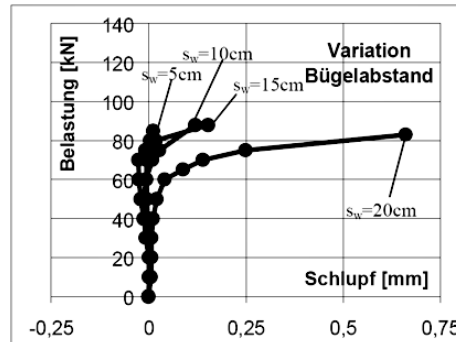


Abbildung 6.12: Schlupf der Längsbewehrung nach Wehr [188]

Die Verankerung am Auflager muss ausreichend bemessen sein, um die auftretenden Zugkräfte in den Porenbeton zu leiten. Bei den Versuchsbalken wird von Wehr unabhängig vom Bügelabstand im Feld ein Abstand der Bügel von 5cm gewahrt. Der Bereich umfasst insgesamt fünf Bügel, wobei drei Bügel über den theoretischen Auflagerpunkt hinausragen. Bei größeren Belastungen kann eine kleine Verschiebung der Endverankerung beobachtet werden. Diesen sogenannten Schlupf hat Wehr für die einzelnen Versuchsreihen gemessen. Abbildung 6.12 zeigt die Auswertung dieser Messungen. Bei niedrigen Beanspruchungsniveaus treten nur vernachlässigbar kleine Verschiebungen der Endverankerung auf. In diesem Bereich kann auch der Haftverbund noch teilweise wirksam sein. Ab ca. 50% der Bruchlast wachsen die Verschiebungen merklich an und fächern sich in Abhängigkeit des Bügelabstandes auf. Bei einem Abstand der Bügel von 5cm treten die geringsten Beanspruchungen der Endverankerung und auch die geringsten Schlupfwerte auf. Der Zusammenhang zwischen Belastung und Endschlupf ist hier über den gesamten Belastungszeitraum näherungsweise linear. Für mittlere Abstände (10cm und 15cm) nimmt der Endschlupf ab ca. 75% und für einen Abstand von 20cm schon ab 50% der Bruchlast überproportional zu. Bei den Versuchsbalken der Reihe VI/3/13/3a und VI/3/13/4a stellt Wehr ein sekundäres Biegedruckversagen fest. Dieses führt er auf ein Einschnüren der Betondruckzone infolge des Schlupfes zurück und bezeichnet den Effekt als fiktives Fließen der Längsbewehrung.

Für das Berechnungsmodell B3 wird eine Nachgiebigkeit der Verankerung der Längsbewehrung und eine Nachgiebigkeit der Endverankerung (Schlupf) eingeführt. Die Kopplung von Porenbeton und Biegezugbewehrung erfolgt über ein Federelement mit bilinearer Charakteristik. Die Steifigkeit der Feder wird im Vorfeld in Abhängigkeit der Bewehrungsführung und des verwendeten Porenbetons ermittelt (Abschnitt 5.5). Für die Endverankerung werden die Bügel, die sich hinter dem theoretischen Auflager befinden, zusammengefasst und die Steifigkeit addiert. Die Verankerung der Querkraftbewehrung wird wie bei Modell B2 als lokales Modell abgebildet und die Verschiebungen an den Verankerungspunkten als Vorverformungen in das Modell integriert. Die Berechnung des Endzustandes erfolgt iterativ.

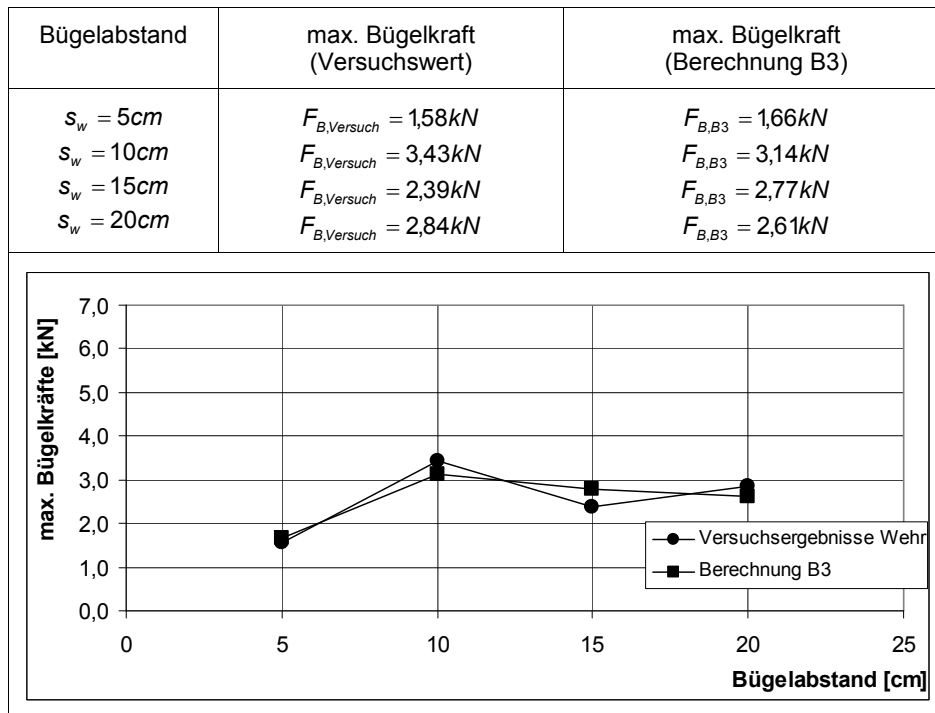


Abbildung 6.13: Vergleich der Bügelkräfte im Bruchzustand

Abbildung 6.13 zeigt den Vergleich der maximalen Kräfte der Bügelschenkel zwischen dem Berechnungsmodell B3 und den Versuchswerten von Wehr im Bruchzustand. Es kann eine sehr gute Übereinstimmung der Mittelwerten der Einzelversuche mit den Berechnungsergebnissen für alle vier Bügelabstände erzielt werden.

Die Diagramme 6.14 zeigen den Verlauf der Bügelkräfte über die Balkenlängsachse. Dabei sind jeweils die Versuchswerte von Wehr (schwarz) sowie die Ergebnisse der Vergleichsrechnungen B1 (grün), B2 (blau) und B3 (rot) eingetragen. Die dünnen schwarzen Linien sind die Ergebnisse der Einzelversuche und die dicke schwarze Linie ist der von Wehr bestimmte Mittelwert. Der Vergleich zeigt die Wirkung der Steifigkeit der Verankerung der Querkraft- und Längsbewehrung auf den Lastfluss und die Größe der Kräfte in den Bügeln.

Berechnungsreihe B3 zeigt gegenüber den Ergebnissen der Reihe B2 weitere qualitative Verbesserungen und kann die Größe der Kräfte in den Bügelschenkeln hinreichend genau beschreiben. Die Ergebnisse bestätigen, dass eine Annahme steifer Verankerungspunkte die Kräfte in den Bügeln überschätzt. Die Relativverschiebungen zwischen Porenbeton und Bewehrungskorb haben daher einen großen Einfluss auf die Kräfte in der Bewehrung und können nicht vernachlässigt werden.

Die Streuung der gemessenen Bügelkräfte der Einzelversuche (dünne schwarze Linien) steigt mit zunehmendem Bügelabstand an. Hier erfolgt die Kraftübertragung an wenigen Punkten und es treten lokale Effekte in den Vordergrund. Diese beeinflussen maßgeblich den Kraft-

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

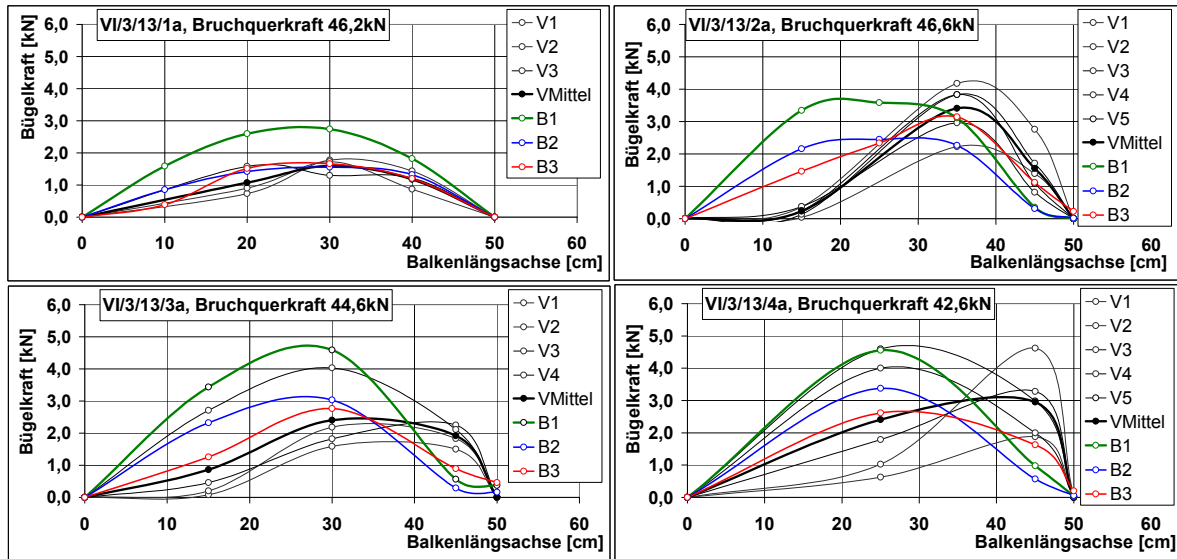


Abbildung 6.14: Vergleich der Biegelkräfte aus Versuch [188] und Berechnung

fluss. Bei einem Bügelabstand von 5cm kann man näherungsweise von einer kontinuierlichen Kraftübertragung sprechen. Hier ist die Streuung klein und das Berechnungsmodell B3 deckt sich sehr gut mit den Versuchsergebnissen. Bei mittleren Bügelabständen zeigt der rechnerische Verlauf der Biegelkräfte eine völligere Kurve zum Auflager hin. Zurückführen lässt sich dieser Umstand auf im Modell unberücksichtigte Effekte der Querkraftabtragung. Hier ist zum Beispiel eine Verdübelungswirkung der Bewehrung zu nennen. Diese beeinflusst die Neigung der Betondruckstrebe und begünstigen eine direkte Lastabtragung. Die Einzelversuche mit Bügelabständen von 20cm zeigen ein uneinheitliches Bild. Für den Bügel bei $x = 25\text{cm}$ variiert die gemessene Kraft in einem Bereich von $F_{Bu} = 0,7\text{kN}$ bis $F_{Bu} = 4,6\text{kN}$. Aufgrund der großen Bügelabstände hängt die Übertragung der Kräfte nur von wenigen Kopplungsstellen ab, welche zudem hoch beansprucht sind. Die Tragfähigkeit einer einzelnen Kopplungsstelle hat einen großen Einfluss auf den gesamten Lastfluss, so dass lokale Störungen bzw. eine lokal höhere Tragfähigkeit starke Streuungen der Messergebnisse erzeugen.

Abbildung 6.15 zeigt den Verlauf der Stahldehnung in der unteren Bewehrungslage. Durch die Berücksichtigung der nachgiebigen Verankerung steigt die Völligkeit der Zugkraftlinie bei der Berechnungsreihe B3 an und kann den qualitativen Verlauf der Versuchsergebnisse gut wiedergeben. Die beiden Berechnungsmodelle mit starrer Kopplung der Längsbewehrung (B1 und B2) liefern dagegen nur unzureichende Ergebnisse. Hier ist die Auslastung des Zuggurtes im Auflagerbereich geringer, so dass die Beanspruchung der Endverankerung unterschätzt wird.

Die berechneten Werte für den Schlupf der Endverankerung werden in Tabelle 6.2 mit den Versuchsergebnissen von Wehr verglichen. Eine Vergrößerung der Bügelabstände hat eine höhere Beanspruchung der Endverankerung und größere Schlupfwerte zur Folge. Hier ist eine Ursache für den von Wehr beobachteten Biegedruckbruch bei Balken mit großen Bügelabständen zu sehen. Allerdings zeigen die Versuche von Wehr, dass der Endschlupf teilweise starken Streuungen unterliegt. Besonders bei großen Bügelabständen treten große Unterschiede

6.1 Querkraftbewehrte Porenbetonbalken

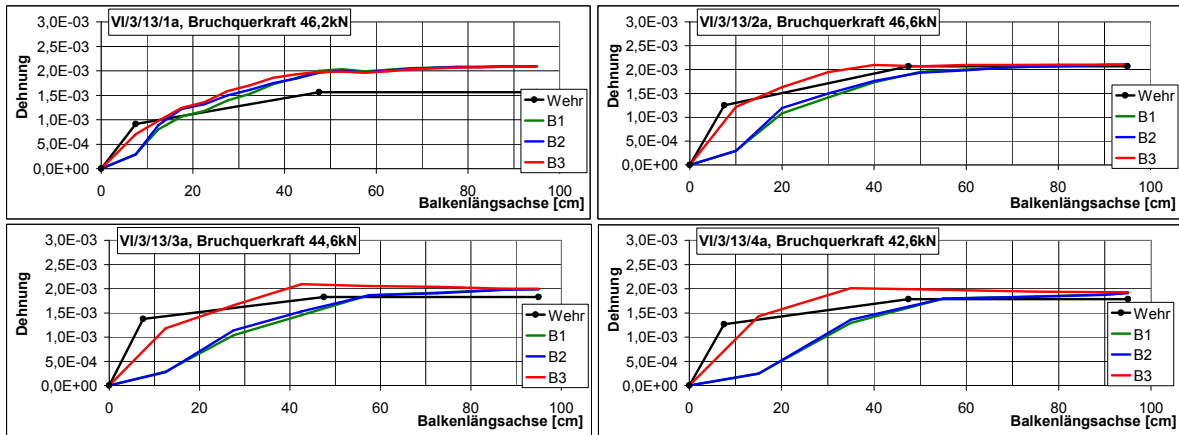


Abbildung 6.15: Vergleich der Dehnungen der unteren Bewehrungslage

de auf. Für die Serie VI/3/13/4a variiert der Endschlupf um den Faktor 10 bei den Einzelversuchen. Wie für die Verankerung der Querkraftbewehrung ist die Tragfähigkeit und das Verformungsverhalten von wenigen, hochbelasteten Verankerungsstellen abhängig, so dass die Schwankungen auf lokale Effekte zurückgeführt werden können. Das Versagen der Endverankerung führt zum Versagen des Balkens. Im Hinblick auf eine Bemessungsaufgabe muss der auftretende Endschlupf begrenzt werden, um die Tragfähigkeit zu gewährleisten.

Versuchsbalken	Bügelabstand	Vergleichsrechnung Modell B3	Versuchsergebnis Wehr min. / max. / Mittelwert
VI/3/13/1a	5cm	0,28mm	0,01mm / 0,04mm / 0,020mm
VI/3/13/2a	10cm	0,70mm	0,08mm / 0,46mm / 0,119mm
VI/3/13/3a	15cm	0,80mm	0,06mm / 0,35mm / 0,153mm
VI/3/13/4a	20cm	0,99mm	0,12mm / 1,25mm / 0,660mm

Tabelle 6.2: Schlupf der Längsbewehrung

Das Verformungsverhalten ist in Abbildung 6.16 anhand der Mittendurchbiegung für verschiedene Beanspruchungsniveaus dargestellt. Für geringe und mittlere Belastungen zeigt die Last-Verformungs-Kurve für alle Balken einen nahezu linearen Zusammenhang. Während der lineare Verlauf bei Bügelabständen von 5cm und 10cm fast bis zum Bruch beobachtet werden kann, treten bei größeren Bügelabständen nichtlineare Last-Verformungs-Kurven auf. Das Berechnungsmodell B3 kann das Verformungsverhalten bis in die Nähe der Traglast beschreiben. Bei Bügelabständen von 15cm und 20cm tritt im Versuch unmittelbar vor Erreichen der Bruchlast eine starke Zunahme der Vertikalverschiebung auf. Dies ist auf das Versagen der Endverankerung zurückzuführen und wird durch das Berechnungsmodell nicht abgedeckt.

Die Abbildungen 6.17 und 6.18 zeigen den Verlauf der Hauptdehnungen ϵ_1 und ϵ_2 für die vier berechneten Balken. Als Belastung ist jeweils die Bruchlast angesetzt. Für die Auswertung und Darstellung der Dehnungen wurde das Raster entsprechend erhöht. Mit dem in Abschnitt 5 vorgestellten Berechnungsansatz lassen sich Zwischenwerte ermitteln. Aufgrund der Symmetrie ist nur das halbe Tragwerk dargestellt. In Diagramm 6.17 mit den Dehnun-

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

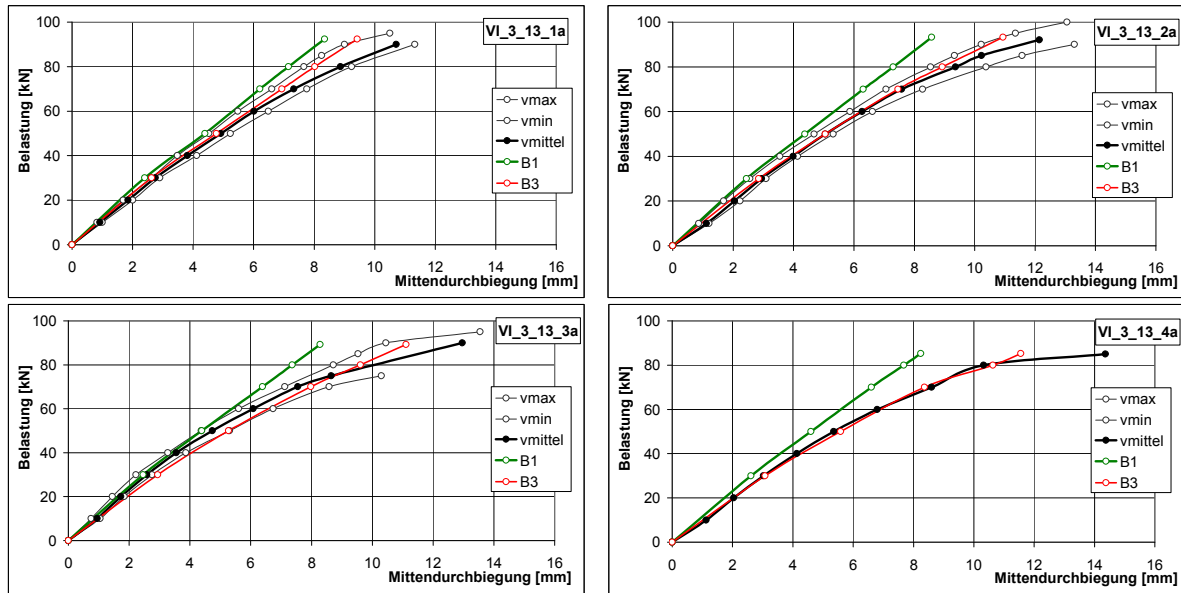


Abbildung 6.16: Mittendurchbiegung der Versuchsbalken [188] und Vergleichsrechnung

gen ϵ_2 ist die Ausbildung einer Druckstrebe von der Lasteinleitungsstelle zum Auflager erkennbar. Die Größenordnung der Dehnungen der Druckstrebe unterscheiden sich für die vier Berechnungen mit unterschiedlichen Bügelabständen kaum, so dass hier keine Abhängigkeit festgestellt werden kann. Die geneigte Druckstrebe zeigt für die Dehnungen Werte von ca. $\epsilon_2 = -1 \dots -1,2 \cdot 10^{-3}$. Die zugehörigen Spannungen sind kleiner als die Druckfestigkeit, so dass ein Betonversagen der geneigten Druckstrebe ausgeschlossen werden kann. Hohe Druckspannungen lassen sich zum einen am Auflager infolge der singulären Punktlagerung und zum anderen am Lastangriffspunkt identifizieren.

Die einzelnen Diagramme 6.18 mit den größten Hauptdehnungen ϵ_1 unterscheiden sich deutlicher. Hier zeigen sich bei Balken mit großen Bügelabständen Dehnungskonzentrationen im Bereich der Bügel. Aus der Dehnungsverteilung lässt sich ableiten, dass für Balken mit großen Bügelabständen größere Rissbreiten zu erwarten sind. Risse treten vor allem an den Verankerungsstellen der Biegezugbewehrung auf.

6.1 Querkraftbewehrte Porenbetonbalken

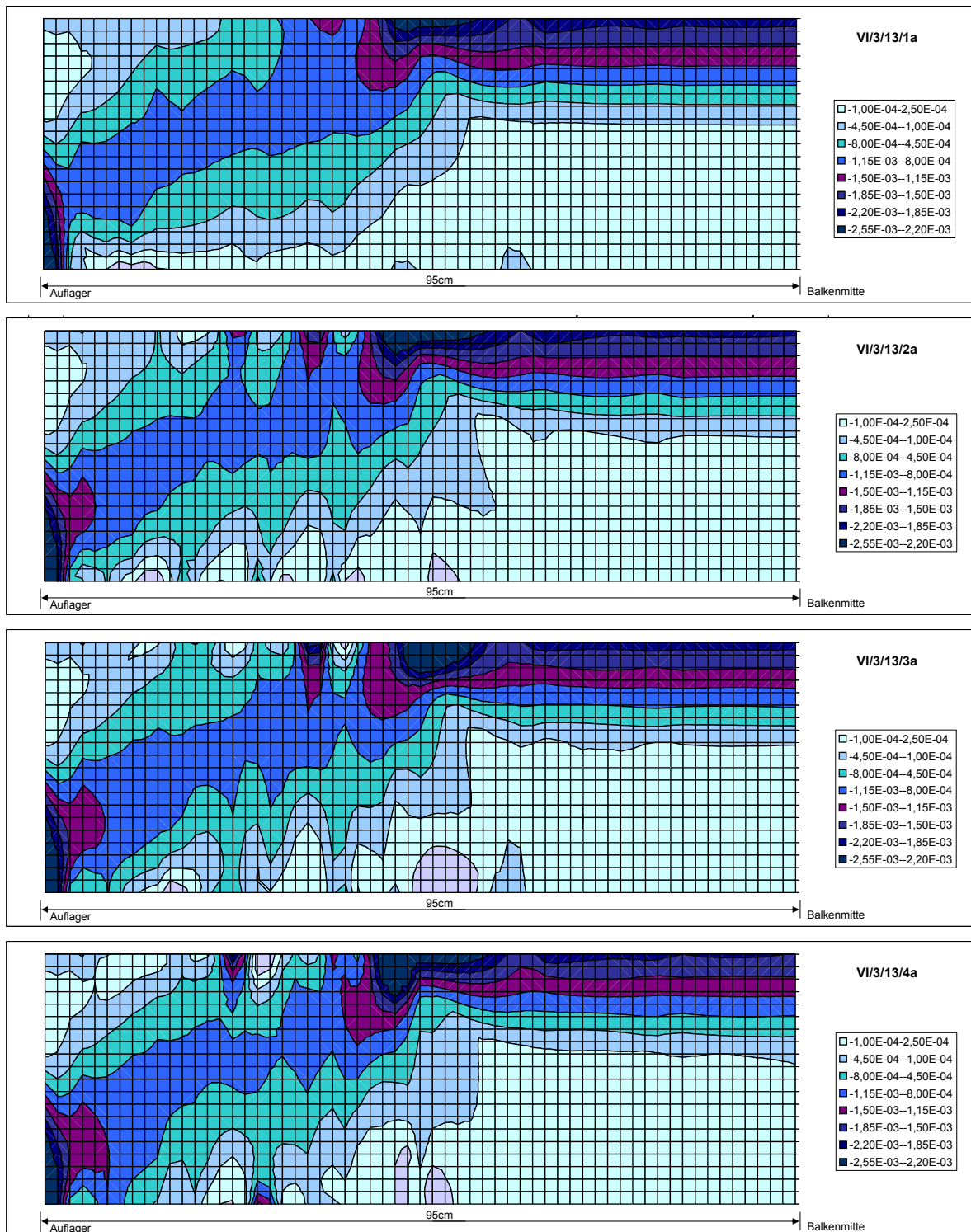


Abbildung 6.17: Kleinste Hauptdehnung ϵ_2 für Bruchquerkraft

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

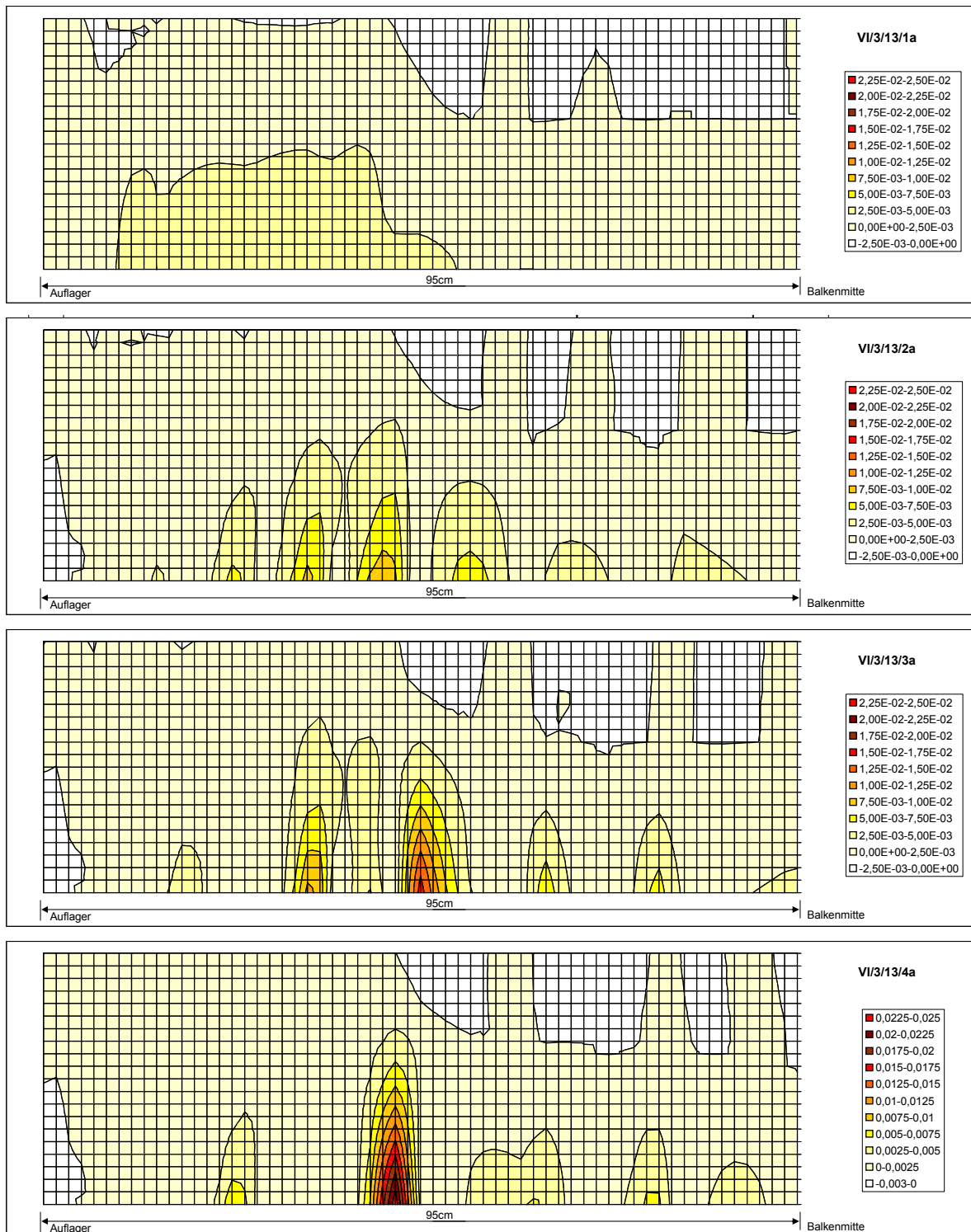


Abbildung 6.18: Größte Hauptdehnung ϵ_1 für Bruchquerkraft

6.2 Bewehrter Porenbetonbalken nach DIN 4223:2003

Im Porenbeton Bericht Nr. 23 [163] mit Erläuterungen zur DIN 4223:2003 [5] sind auf der dort beigefügten CD Bemessungsbeispiele zu bewehrten Porenbetonbauteilen enthalten. Im Beispiel Nr. 11 wird ein Fertigteilsturz für das Zwischenaufleger einer Geschossdecke aus Porenbeton bemessen. Dieses Beispiel soll mit dem vorgestellten Berechnungsmodell nachgerechnet werden.

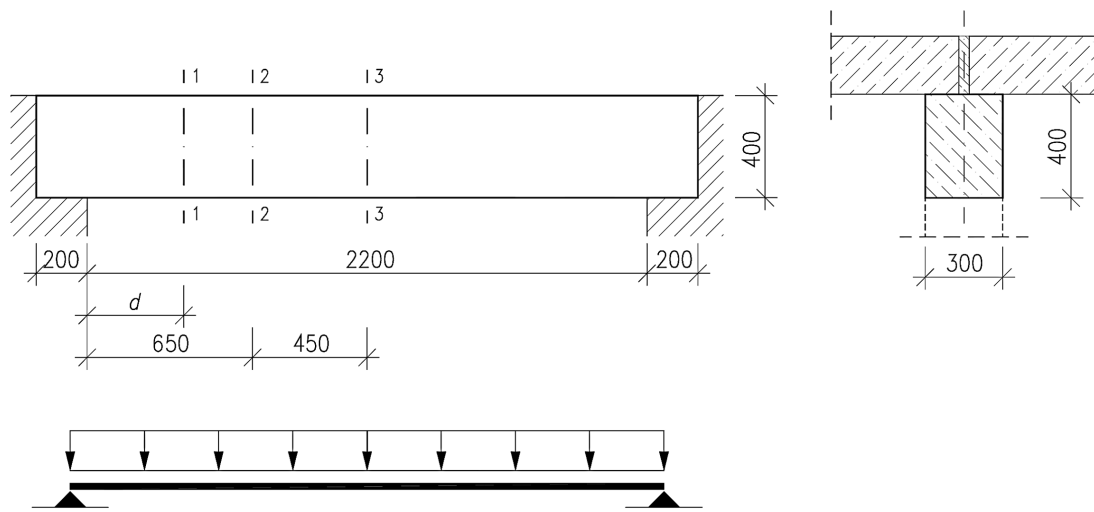


Abbildung 6.19: System und Querschnitt nach [163]

Das statische System sowie der Querschnitt des Porenbetonsturzes sind in Abbildung 6.19 dargestellt. Die Belastung erfolgt durch das Eigengewicht des Balkens und der Decke ($G_k = 9,85 \text{ kN/m}$) sowie einer Verkehrslast ($Q_k = 10,9 \text{ kN/m}$). Man erhält die drei Einwirkungskombinationen nach Tabelle 6.3, wobei die Nachweise für den Grenzzustand der Tragfähigkeit mit der Grundkombination und die Nachweise für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit mit den beiden anderen Kombinationen geführt werden.

Grundkombination	$E_d = 1,35 \cdot G_k + 1,5 \cdot Q_k$	$36,0 \text{ kN/m}$
häufige Einwirkungskombination	$E_{d,h} = G_k + 0,5 \cdot Q_k$	$20,0 \text{ kN/m}$
quasi-ständige Einwirkungskombination	$E_{d,s} = G_k + 0,3 \cdot Q_k$	$17,8 \text{ kN/m}$

Tabelle 6.3: Einwirkungskombinationen

Die detaillierte Bemessung des Balkens ist in [163] dargestellt und wird hier nicht näher erläutert. Die rechnerisch erforderliche Längsbewehrung beträgt $1,68 \text{ cm}^2$. Es werden 5 Bewehrungsstäbe $\varnothing 9 \text{ mm}$ mit einer Querschnittsfläche von $3,18 \text{ cm}^2$ gewählt, so dass sich ein Bewehrungsgrad von $\rho_l = 0,00279$ ergibt. Für die Querkraftbewehrung werden zweischnittige offene Bügel mit $\varnothing 6,5 \text{ mm}$ im Abstand von 10 cm angeordnet. In Feldmitte ist der Bügelabstand auf 15 cm vergrößert. Über dem Auflager ist nach DIN 4223:2003 mindestens eine

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

Zugkraft zu verankern, die dem Bemessungswert der Querkraft $V_{Sd} = 25,9 \text{ kN}$ entspricht. Die aufnehmbare Verankerungskraft eines Bügels ist mit $F_{RA,S} = 7,68 \text{ kN}$ berechnet, so dass mindestens vier Bügel im direkten Auflagerbereich zur Verfügung stehen müssen. Abbildung 6.20 zeigt die Bewehrungsanordnung für das Berechnungsbeispiel.

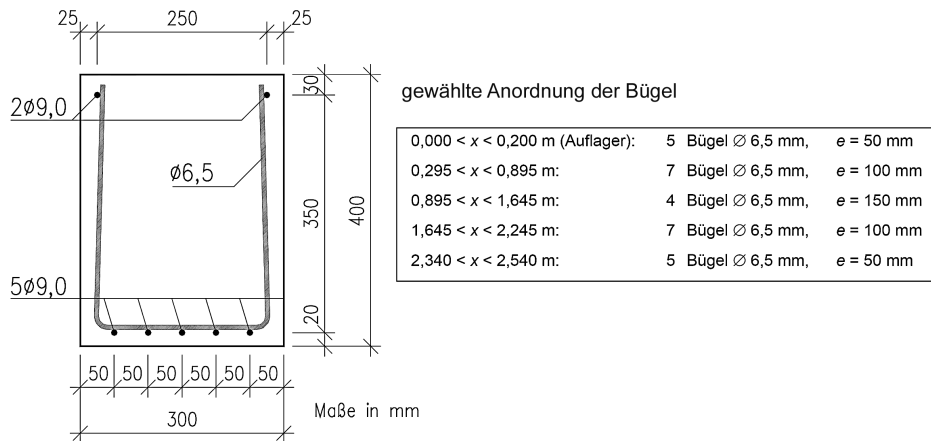


Abbildung 6.20: Bewehrungsanordnung für das Berechnungsbeispiel[163]

Für die Nachrechnung wird ein Berechnungsmodell analog zu Abschnitt 6.1.3 gewählt. Das dort verwendete Modell B3 berücksichtigt eine nachgiebige Verankerung der Längsbewehrung (Federelemente) sowie der Bügelbewehrung (lokales Modell des Verankerungsstabes). Für den Porenbeton wird die charakteristische Festigkeit mit einem Wert von $f_{cc} = -0,44 \text{ kN/cm}^2$ angesetzt. Der Elastizitätsmodul lässt sich aus der Rohdichteklasse 0,7 ermitteln. Er beträgt $E = 275 \text{ kN/cm}^2$. Die Formänderungsarbeits-Dehnungs-Beziehung des Porenbetons wird analog zu Abbildung 6.4 aufgestellt.

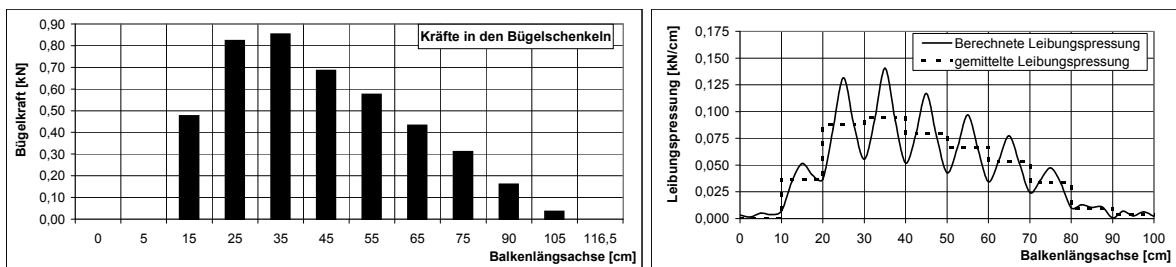


Abbildung 6.21: Kräfte in den Bügelschenkeln und Betonpressung unter dem Verankerungsstab der Bügel

Abbildung 6.21 zeigt die berechneten Kräfte in den Bügelschenkeln für die Bemessungslast $E_d = 36,0 \text{ kN/m}$. Die größten Bügelbeanspruchungen treten in einem Abstand von 25 bis 35 cm vom ideellen Auflager auf. Hier beträgt die Kraft im Bügelschenkel maximal $0,85 \text{ kN}$. Dies entspricht einer Spannung von $\sigma_B = 25,6 \text{ N/mm}^2$. Für eine angenommene gleichmäßige Verteilung der Kraft im Bügelschenkel auf den Verankerungsstab würde sich eine Leibungs-

6.2 Bewehrter Porenbetonbalken nach DIN 4223:2003

pressung von $\sigma_b = 0,09 \text{ kN/cm}^2$ ergeben. Die im Modell berechnete maximale Pressung unter dem Verankerungsstab beträgt dagegen $\sigma_b = 0,14 \text{ kN/cm}^2$. Im rechten Diagramm Abbildung 6.21 ist der Verlauf der Leibungspressung unter dem Verankerungsstab dargestellt (lokales Modell des Verankerungsstabes). Unterhalb der Lasteinleitungspunkte (Knotenpunkte) treten erwartungsgemäß die Spitzenwerte auf. Das Beanspruchungsniveau ist jedoch niedrig und beträgt ca. 32% der charakteristischen Druckfestigkeit.

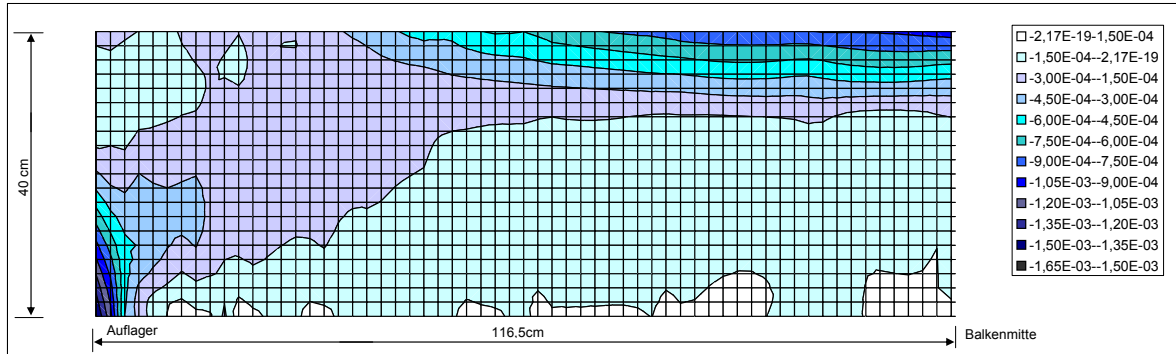


Abbildung 6.22: kleinste Hauptdehnung

Abbildung 6.22 zeigt die kleinsten Hauptdehnungen des Balkens für die Belastung von $E_d = 36,0 \text{ kN/m}$. Die Ausbildung einer geneigten Betondruckstrebe zum Auflager hin und somit die Sprengwerkwirkung ist deutlich erkennbar. Die Neigung dieser Druckstrebe stellt sich unter ca. 45° ein. Die Dehnungen in der Druckstrebe bewegen sich in einem Bereich von $\epsilon_c = -0,2 \cdot 10^{-3}$ bis $\epsilon_c = -0,35 \cdot 10^{-3}$, so dass man Spannungen von $\sigma_c = -0,05 \dots -0,10 \text{ kN/cm}^2$ erhält. Die Spannungen sind geringer als die Druckfestigkeit des Porenbetons.

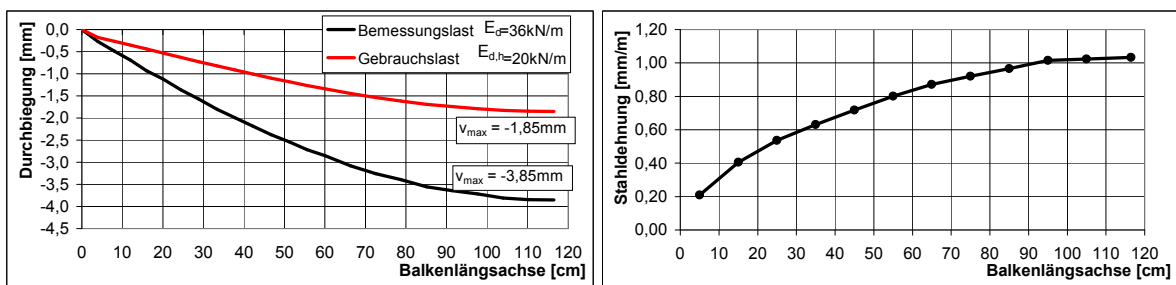


Abbildung 6.23: Durchbiegung des Balkens und Dehnung der Längsbewehrung für die Bemessungslast

Die beiden Diagramme in Abbildung 6.23 zeigen die Durchbiegung des Balkens für die Bemessungslast und die Gebrauchslast sowie die Dehnung der unteren Längsbewehrung für die Bemessungslast. Aus der Dehnung lässt sich eine maximale Spannung im Bewehrungsstahl von $\sigma_s = 20,5 \text{ kN/cm}^2$ in der Balkenmitte bestimmen.

Vergleich der Nachrechnung mit den Bemessungsregeln nach DIN 4223:2003-2

Die erforderliche Längsbewehrung nach DIN 4223:2003-2 [5] beträgt für den dargestellten Balken $A_{s,erf} = 1,68\text{cm}^2$. Da für die Längsbewehrung $5\varnothing 9\text{mm}$ gewählt wurden, ist bei einer Auslegungsspannung von $f_{yd} = 50/1,15 = 43,48\text{kN/cm}^2$ und einer Auslastung von ca. 53% eine Spannung von $\sigma_s = 23,0\text{kN/cm}^2$ zu erwarten. Die berechneten Spannungen für die gewählte Bewehrung betragen $\sigma_s = 20,5\text{kN/cm}^2$.

Ein Versagen der Bügelbewehrung infolge Zugspannungen ist für bewehrte Porenbetonbauteile nicht zu erwarten, da diese Kräfte in der Regel nicht über den Verankerungsstab auf den Porenbeton übertragen werden können. DIN 4223:2003-2 [5] definiert eine aufnehmbare Stahlspannung der Bügel σ_{swd} , die mittels der Faktoren K_1 , K_2 und K_3 die Besonderheiten der Verankerung der Bügel berücksichtigt. Für das Berechnungsbeispiel erhält man mit

$$K_1 = 0,33 \cdot \frac{e}{d_{sl}} = 0,33 \cdot \frac{25}{9,0} = 0,917 < 1,0 \quad (6.1)$$

$$K_2 = \frac{s_{sw}}{d_{sl}} = \frac{100}{9,0} = 11,1 < 14 \quad (6.2)$$

$$K_3 = 0 \quad \text{offene Bügel} \quad (6.3)$$

die aufnehmbare Stahlspannung

$$\sigma_{swd} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\alpha \cdot f_{ck}}{\gamma_{c2}} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{d_{sl}^2 + K_3^2 \cdot d_{sw}^2}{d_{sw}^2} < 200\text{N/mm}^2$$

$$\sigma_{swd} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{0,85 \cdot 4,4}{1,7} \cdot 0,917 \cdot 11,1 \cdot \frac{9,0^2}{6,5^2} = 54,7\text{N/mm}^2. \quad (6.4)$$

Die berechnete Stahlspannung in den Bügelschenkeln beträgt $24,7\text{N/mm}^2$ und liegt um den Faktor 2,2 unter der Spannung nach Gleichung 6.4, die für die Bemessung zugrunde gelegt wurde.

Die sich einstellende Pressung unter dem Verankerungsstab liefert für die Bemessungslast einen Wert von $\sigma_b = 0,14\text{kN/cm}^2$. Gegenüber der charakteristischen Druckfestigkeit des Porenbetons erhält man einen Faktor von 3,1.

Abbildung 6.24 zeigt die Kraft in der Biegezugbewehrung sowie die M/z-Linie, die anhand der Biegemomentenlinie ermittelt wurde. Der Hebelarm der inneren Kräfte z ist vereinfachend konstant über die Balkenlängsachse angenommen. Der Wert z ist dabei mit den Bemessungstafeln für die gewählte Bewehrung und das Bemessungsmoment ermittelt [163].

Die Kraft in der Biegezugbewehrung ist treppenförmig aufgetragen, da für den Stahl kein Verbund angesetzt ist. Am Auflager stehen insgesamt fünf Bügel zur Aufnahme der verbleibenden Zugkraft zur Verfügung. Drei der fünf Bügel liegen hinter dem ideellen Auflager. Die Nachrechnung ergibt für die fünf Bügel eine Restzugkraft von $25,8\text{kN}$. Dies korrespondiert gut mit der Forderung der DIN 4223-2 am Auflager mindestens eine Zugkraft in der Höhe des Bemessungswertes der Querkraft zu verankern ($V_{Sd} = 25,9\text{kN}$).

6.2 Bewehrter Porenbetonbalken nach DIN 4223:2003

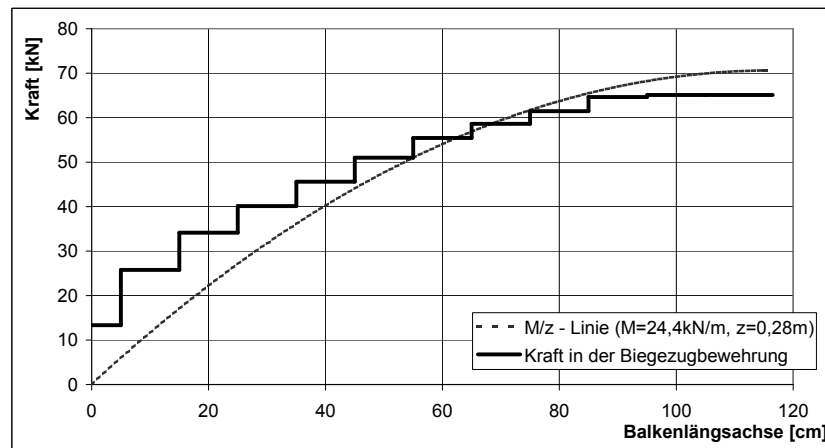


Abbildung 6.24: M/z-Linie und Kraft in der Biegezugbewehrung

Für den Nachweis der Gebrauchstauglichkeit erlaubt die DIN 4223-2 die Ermittlung der Durchbiegung im Zustand I für häufige Einwirkungskombinationen. Für das Beispiel erhält man unter Berücksichtigung der Bewehrung einen Wert von (siehe [163])

$$w_{el} = 1,09\text{ mm}.$$

Die Nachrechnung berücksichtigt sowohl die Rissbildung als auch einen möglichen Schlupf der Bewehrung und ergibt einen Wert von $w_{cal} = 1,85\text{ mm}$. Langzeiteffekte (Kriechen) sind nicht berücksichtigt.

6.3 Nicht querkraftbewehrte Porenbetonplatten

Im Rahmen des AiF-Forschungsvorhabens Nr. 9292 zur Schubtragfähigkeit längsbewehrter Porenbetonbauteile ohne Querkraftbewehrung ([37], [40]) führt Daschner umfangreiche Versuche durch. Dabei handelt es sich bei diesen Bauteilen um einachsige gespannte Platten. Der Hauptfokus der Versuche liegt auf der Untersuchung der Teilverankerung der Längszugkräfte im Feld und der Verankerung der verbleibenden Zugkräfte an den Auflagern. Ferner werden die Einflüsse der thermischen Vorspannung [41] und des Kriechens ([38], [39]) näher beleuchtet.

Die untersuchten Platten mit den Abmessungen 5000 x 600 x 250mm (Abbildung 6.25) sind mit einer Längsbewehrung von 6 \varnothing 8, 4 \varnothing 8 oder 4 \varnothing 10 ausgestattet. Die Festigkeit des Porenbetons entspricht den Klassen GB 3.3, 4.4 und 6.6. Bei Längsstäben \varnothing 8 kommen Querstäbe \varnothing 6 und bei Längsstäben \varnothing 10 kommen Querstäbe \varnothing 7 zum Einsatz. Dies entspricht den Mindestdurchmessern der DIN 4223:1978 [2]. Die Anordnung der Querstäbe variiert, um weitere Erkenntnisse über den Zugkraftverlauf zu gewinnen. Neben Platten mit einer Endverankerung durch Querstäbe untersucht Daschner vier Platten, deren untere Längsbewehrung mit Endwinkeln am Rand verankert sind.

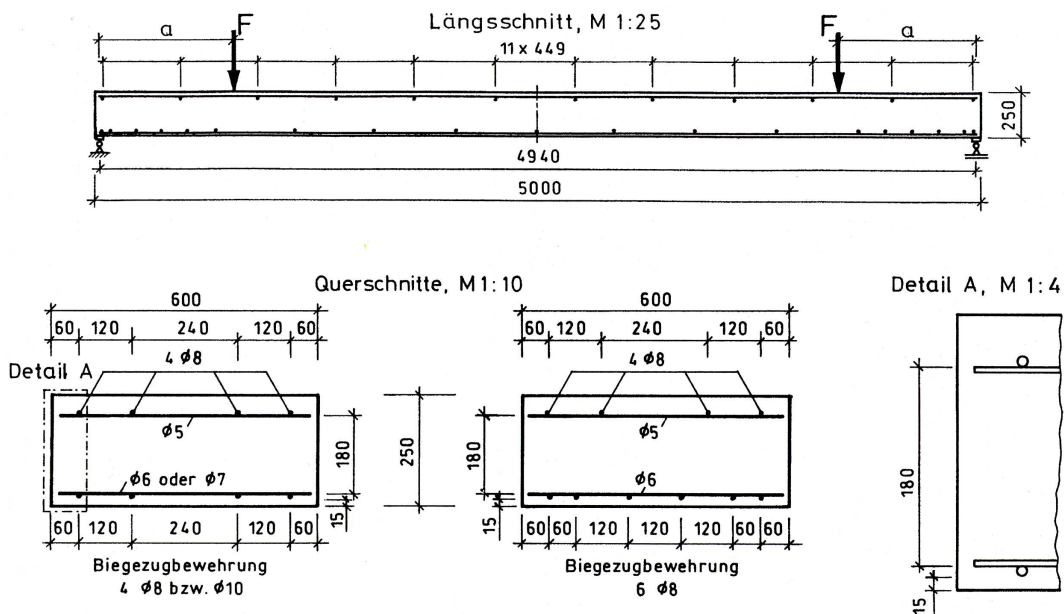


Abbildung 6.25: Abmessungen und Bewehrungsanordnung für die Versuchsplatten nach Daschner [40]

Mit dem in Abschnitt 5 entwickeltem Berechnungsmodell werden zwei Versuchsplatten (mit und ohne Endwinkel) nachgerechnet. Tabelle 6.4 können Details zu den beiden Platten Nr. 3 bzw. Nr. 9 entnommen werden. Abbildung 6.26 zeigt das Rissbild von Platte 3 sowie die Bewehrungsanordnung der Querstäbe. Die Endverankerung der Platte 3 besteht aus zwei Querstäben im unmittelbaren Auflagerbereich. Vier weitere Querstäbe befinden sich jeweils im Abstand von 150mm, während im Feld die Querstababstände auf 452,5mm vergrößert sind. Die Restzugkraft der Platte 9 wird über einen Winkel L 50mm x 50mm x 5mm mit

6.3 Nicht querkraftbewehrte Porenbetonplatten

einer Länge von 540mm verankert. Die Längsbewehrung ist mit dem Endwinkel verschweißt. Im Auflagerbereich befinden sich vier Querstäbe $\varnothing 6$ mm im Abstand von 200mm. Die weiteren Querstäbe $\varnothing 6$ mm sind im Abstand von 465mm im Feld verteilt.

		Versuchsplatte 3	Versuchsplatte 9
Würfeldruckfestigkeit	f_{cc} [kN/cm^2]	-0,57	-0,58
Biegezugbewehrung	$n_L \times d_L$	6 x 8mm	6 x 8mm
Verankerungsstab		6mm	6mm
Endwinkel		Nein	Ja
Lastpunkt	a [cm]	115	115
Bemessungsmoment	$M_{u,Bem}$ [kNm]	24,0	23,9
Moment unter Gebrauchslast	M_G [kNm]	13,73	13,66
Querkraft unter Gebrauchslast	Q_G [kN]	11,8	11,66

Tabelle 6.4: Versuchsplatte nach Daschner

In Platte 3 und 4 Streckgrenze der Biegezugbewehrung erreicht
 Rissnummern mit Kreis: Klaffende Risse, Rissbreite unter 1,5facher Gebrauchslast mind. 0,40 mm

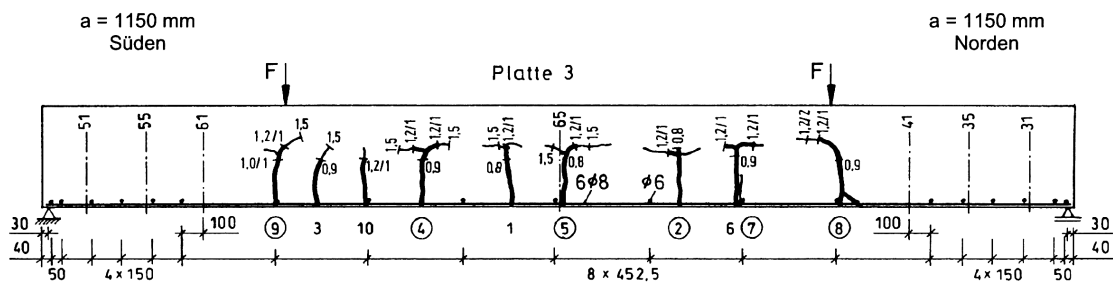


Abbildung 6.26: Platte 3

Bei den Versuchen wird die Belastung stufenweise auf die Gebrauchslast gesteigert und dann gehalten. Anschließend erfolgen 100 Lastwechsel zwischen dem 0,5-fachen und dem 1,2-fachen der Gebrauchslast, bevor die Last weiter stufenweise bis zum Versagen erhöht wird. Durch die mehrfache Be- und Entlastung ist davon auszugehen, dass der Haftverbund zwischen Porenbeton und Bewehrung nicht mehr wirksam ist. Bei ca. der Hälfte der untersuchten Platten tritt ein Versagen infolge Fließens der Stahlzugbewehrung auf. Als weiterer Versagensmechanismus kann ein plötzlicher Verankerungsbruch mit einhergehendem Abplatzen der Betondeckung beobachtet werden. Die Bruchlast liegt im Mittel bei dem 2,23-fachen der Gebrauchslast für Platten ohne Endwinkel bzw. dem 2,37-fachen der Gebrauchslast für Platten mit Endwinkeln [40].

Abbildung 6.27 zeigt die gemessene Mittendurchbiegung und den Verlauf des Schlupfes der Längsbewehrung für Platte 3. Im Mittel beträgt die Durchbiegung ca. 19mm unter Gebrauchslast und 55mm unter der Bruchlast. Dabei bleibt anzumerken, dass die Streuung der Werte unter Bruchlast sehr groß ist, was Daschner auf die unterschiedlichen Bruchursachen zurückführt. Bei einem Verankerungsbruch ergeben sich beispielsweise deutlich kleinere Durchbiegungen als bei einem Biegezugversagen der Längsbewehrung. Unter Gebrauchslast

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

treten bei allen Versuchsplatten nur geringe Werte für den Schlupf der Längsbewehrung auf. Im Bruchzustand nimmt der Schlupf teilweise stark zu, wobei hier ebenfalls eine starke Streuung der gemessenen Werte auftritt. Erwartungsgemäß treten bei den Platten mit Endwinkeln nur sehr geringe Werte für den Schlupf der Bewehrung auf.

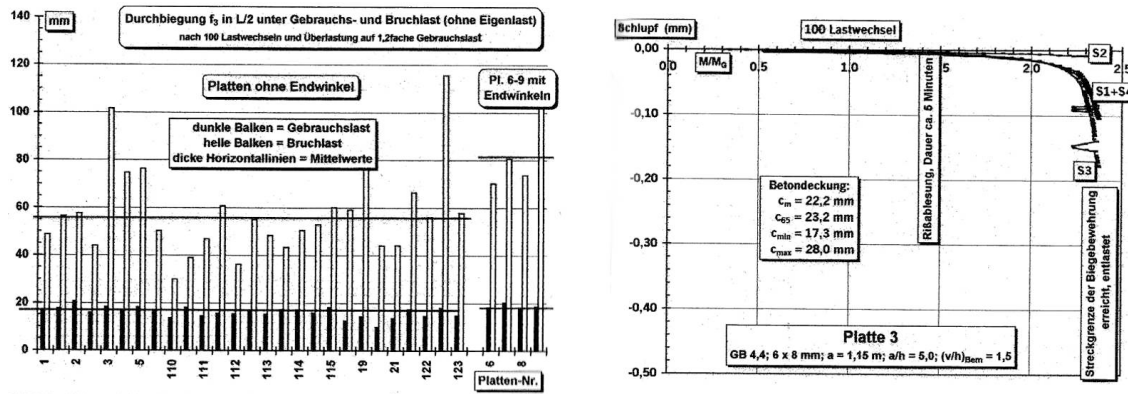


Abbildung 6.27: Mittendurchbiegung der Versuchsplatten und Verlauf des Schlupfes der Verankerung nach Daschner [40]

Da die Platten keine Bügelbewehrung besitzen, vereinfacht sich die Berechnung. Im Energieausdruck wird der Anteil der Querkraftbewehrung zu Null gesetzt. Die durch die Querkraft bedingten Zugspannungen müssen vollständig durch den Porenbeton übertragen werden. Das Berechnungsmodell besteht nur aus dem globalen Tragwerksmodell. Das lokale Modell des Verankerungsstabes der Querkraftbewehrung existiert nicht. Die Verankerung der Längsbewehrung wird über Federelemente realisiert. Das Materialverhalten ist in Abbildung 6.28 dargestellt. In der Druckzone entspricht es einem linear elastisch - ideal plastischen Körper mit einer Druckfestigkeit von $f_{cc} = -0,57 \text{ kN/cm}^2$ (Platte 3). Da von Daschner der Elastizitätsmodul nicht experimentell bestimmt wird, kommt der Rechenwert nach [163] in Abhängigkeit der Trockenrohdichte zum Ansatz

$$E_{cm} = 5 \cdot (\rho_c \cdot 10^3 - 150) = 5 \cdot (0,62 \cdot 10^3 - 150) = 2350 \text{ N/mm}^2. \quad (6.5)$$

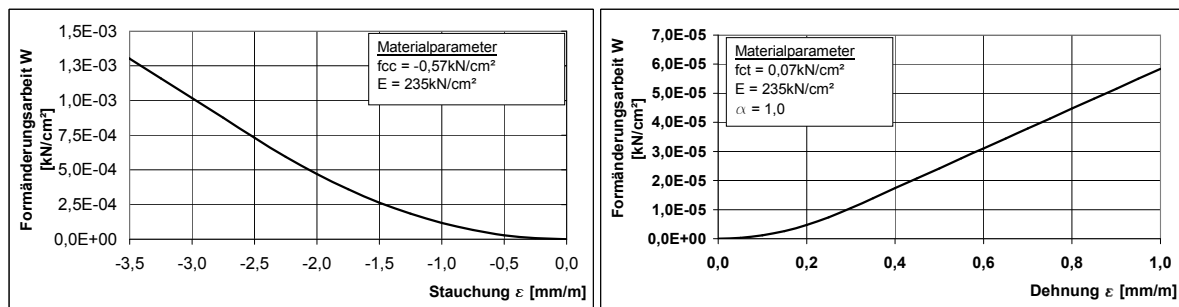


Abbildung 6.28: Formänderungsarbeits-Dehnungs-Beziehung für den Porenbeton

6.3 Nicht querkraftbewehrte Porenbetonplatten

Die Betonzugfestigkeit ist ebenfalls mit dem Rechenwert $f_{ct} = 0,12 \cdot |f_{cc}|$ berücksichtigt. Der Parameter α , der die Mitwirkung des Betons bei Zugspannungen charakterisiert, ist mit 1,0 angenommen. Die Berücksichtigung der nachgiebigen Verankerung der Längsbewehrung für Platte 3 erfolgt mit einem Federelement analog Abbildung 5.16. Bei der Platte mit Endwinkel wird die Bewehrung am Auflagerrand starr mit dem Beton gekoppelt ($\Delta u = 0$).

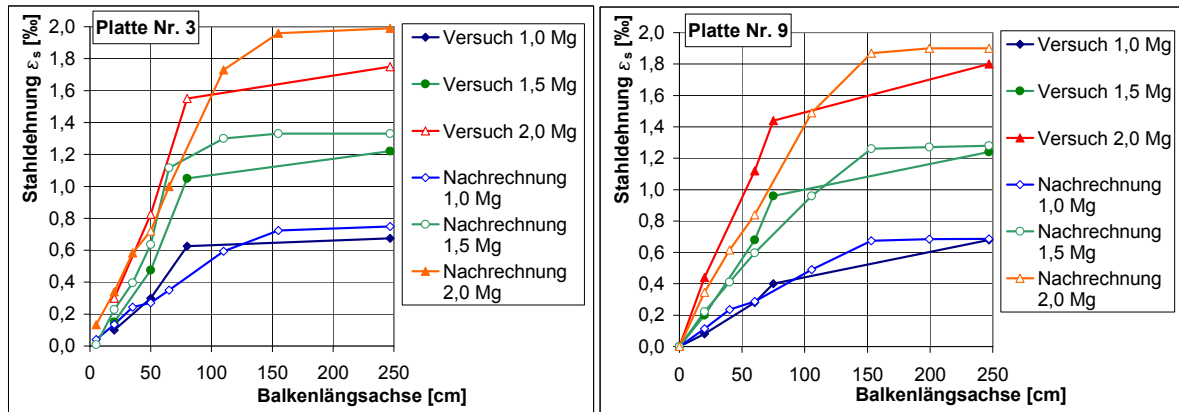


Abbildung 6.29: Stahldehnung längs der Platte

In Abbildung 6.29 ist die Stahldehnung der unteren Biegezugbewehrung längs der Balkenachse für verschiedene Belastungssituationen grafisch aufgetragen. In den Messergebnissen sind die Dehnungen infolge thermischer Vorspannung und der Belastung durch das Eigengewicht der Platte nicht enthalten. Die Stahldehnung in der Balkenmitte unter Gebrauchslast beträgt ca. $\epsilon_s = 0,68 \cdot 10^{-3}$. Dies entspricht einer Stahlspannung von $\sigma_s = 136 \text{ N/mm}^2$. Die Stahldehnung steigt für die zweifache Gebrauchslast auf etwa den 2,6- bis 2,7-fachen Wert an. Bei beiden Nachrechnungen kann für die Gebrauchslast eine gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten festgestellt werden. Für die zweifache Gebrauchslast zeigen die gemessenen Werte einen völligeren Verlauf der Zugkraftlinie. Dies lässt vermuten, dass die Verankerungsbereiche der Längsbewehrung - stärker als im Modell berücksichtigt - nachgeben und einen größeren Anteil der Zugkraft zum Auflager leiten.

Tabelle 6.5 zeigt einen Vergleich der berechneten Werte mit den Ergebnissen aus dem Versuch für die Platten unter Gebrauchslast. Für die Mittendurchbiegung werden geringfügig größere Werte berechnet. Die Dehnung der Bewehrung sowie die maximale Stauchung im Porenbeton können sehr gut abgebildet werden. Für den Schlupf der Längsbewehrung bleibt anzumerken, dass für den Fall der Verwendung eines Endwinkels ein Schlupf im Berechnungsmodell per Definition ausgeschlossen wurde.

Die wichtigsten Ergebnisse für den Bruchzustand sind in Tabelle 6.6 dargestellt. Den Ergebnissen der Nachrechnung sind die Mittelwerte der Versuchsergebnisse von Daschner gegenübergestellt. Für den Endschlupf werden sowohl der Minimal- als auch der Maximalwert angegeben. Die Mittelwerte sind für Platten ohne Endwinkel aus 27 Einzelversuchen und für Platten mit Endwinkeln aus 4 Einzelversuchen berechnet. Als Belastung für die Nachrechnung wird ebenfalls der Mittelwert angesetzt (2,25-fache Gebrauchslast für Platten ohne Endwinkel und 2,37-fache Gebrauchslast für Platten mit Endwinkeln).

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

		Platte Nr. 3		Platte Nr. 9	
		Versuch	Nachrechnung	Versuch	Nachrechnung
Durchbiegung	f [mm]	18,2	21,1	18,7	20,3
Schlupf (im Mittel)	s [mm]	0,004	0,014	0,025	0
Betonrandstauchung	$\epsilon_{b,o}$ [mm/m]	-0,77	-0,755	-0,79	-0,73
Stahldehnung	ϵ_s [mm/m]	0,68	0,74	0,68	0,69

Tabelle 6.5: Vergleich der Ergebnisse für die Platten unter Gebrauchslast

Ein Vergleich der Nachrechnung mit den Ergebnissen der Einzelversuche im Bruchzustand erscheint wenig sinnvoll, da die Messergebnisse starken Streuungen unterlegen sind. So schwankt z.B. die Mittendurchbiegung zwischen Werten von ca. 30mm und 115mm (Abbildung 6.27 (links)). Ein ähnliches Bild zeigt sich bei der Randstauchung des Betons ($-1,13 \cdot 10^{-3}$ bis $-3,30 \cdot 10^{-3}$) sowie der Stahldehnung ($1,46 \cdot 10^{-3}$ bis $2,27 \cdot 10^{-3}$). Ein Grund dafür lässt sich im progressiven Verlauf der Last-Schlupf-Beziehung finden. Abbildung 6.27 (rechts) zeigt den Verlauf für die Platte Nr. 3. Im Bereich der Gebrauchslast treten nur sehr geringe Schlupfwerte auf. Zwischen dem 1,5-fachen und dem 2-fachen der Gebrauchslast wächst der Schlupf langsam und im Bereich darüber stark an. Dieses Verhalten ist nicht eindeutig für alle Platten zu beobachten, beeinflusst aber die anderen Messwerte im Bruchzustand maßgeblich.

		Platte Nr. 3		Platte Nr. 9	
		Versuch	Nachrechnung	Versuch	Nachrechnung
Durchbiegung	f [mm]	57,7	60,0	81,9	63,0
Schlupf (max/min)	s [mm]	1,115/0	0,15	0,335/0	0
Betonrandstauchung	$\epsilon_{b,o}$ [mm/m]	-1,79	-1,75	-2,57	-1,83
Stahldehnung	ϵ_s [mm/m]	1,96	2,27	2,17	2,37

Tabelle 6.6: Vergleich der Ergebnisse für die Platten im Bruchzustand

Die Berechnungsergebnisse zeigen, dass das Tragverhalten im Gebrauchszustand sehr gut abgebildet werden kann. Im Bruchzustand zeigt sich ebenfalls eine gute Übereinstimmung der Mittelwerte der Versuche mit den Berechnungsergebnissen. Aufgrund der großen Streuung einzelner Messergebnisse sowie des nicht klar definierten Versagensmechanismus ist eine Vergleich einzelner Platten mit den Berechnungsergebnissen im Bruchzustandes nicht aussagekräftig.

6.4 Stahlbeton T-Balken

In den drei vorangegangenen Abschnitten wird das in dieser Arbeit entwickelte Modell zur Berechnung bewehrter Porenbetonbauteile verwendet. Prinzipiell ist eine Verwendung für Stahlbeton ebenfalls möglich. Dabei kann der Stahlbeton als (vereinfachter) Sonderfall angesehen werden. Zwischen Beton und Bewehrung existiert ein kontinuierlicher Verbund. Eine nachgiebige Verankerung bzw. ein Schlupf der Bewehrung spielen eine untergeordnete Rolle. Damit vereinfacht sich das Modell um die Unbekannten der Relativverschiebung zwischen Beton und Stahl.

Leonhardt und Walther führen in den 1960er Jahren umfangreiche Versuche an bewehrten und unbewehrten Stahlbetonbalken durch, um Erkenntnisse über das Querkrafttragverhalten zu erlangen [104]. Neben verschiedenen Bewehrungsanordnungen untersuchen sie unterschiedliche Querschnittsgeometrien und Belastungssituationen. Abbildung 6.30 zeigt die verschiedenen Stahlbetonbalken, deren Bewehrungsanordnung, Belastungssituation und Querschnittsgeometrie.

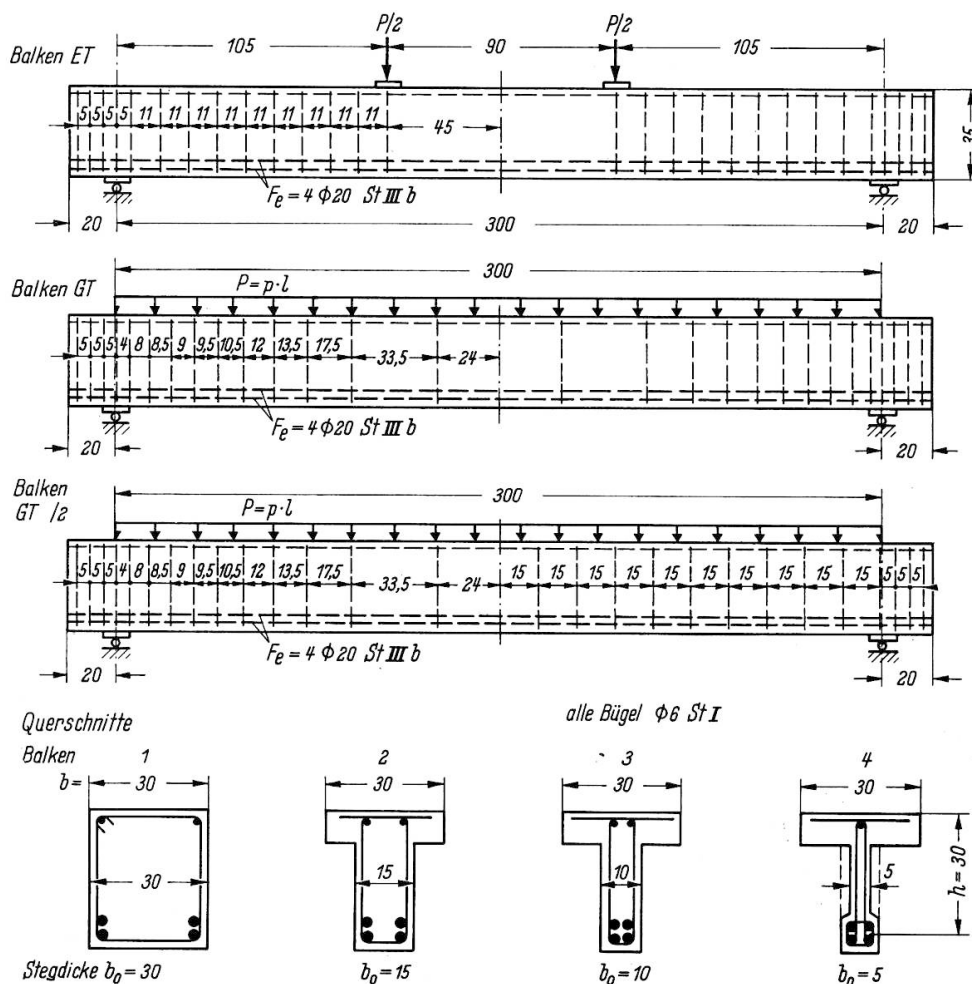


Abbildung 6.30: Versuchsbalken nach Leonhardt [104]

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

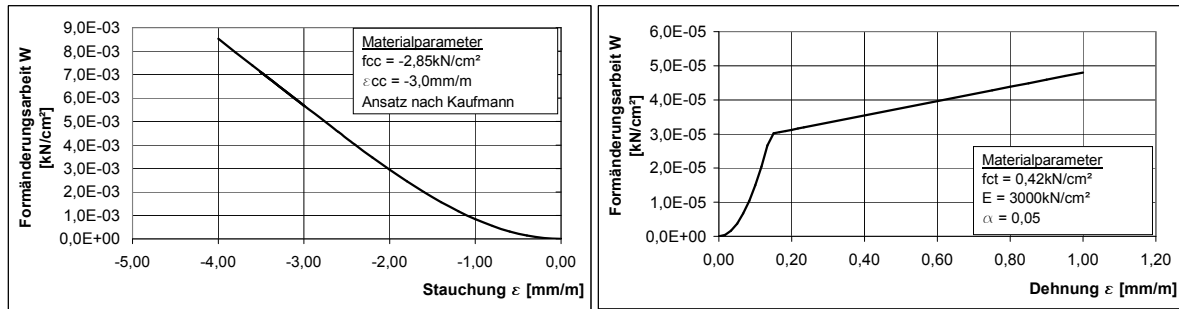


Abbildung 6.31: Formänderungsarbeits-Dehnungs-Beziehung für den verwendeten Beton

In der Versuchsreihe ET/GT soll der Einfluss der Stegbreite auf die Querkrafttragfähigkeit von T-Balken mit schwacher Bügelbewehrung überprüft werden. Ausgehend von einem Rechteckquerschnitt mit einer Breite von $B = 30\text{cm}$ und einer Höhe von $H = 35\text{cm}$ wird die Stegbreite auf 15cm, 10cm und 5cm verkleinert. Die Breite der 7,5cm dicken Gurtplatte wird bei 30cm konstant gehalten. Bei der Reihe ET werden vier T-Balken mit Einzellasten und bei der Reihe GT sechs Balken unter Gleichlast untersucht. Die Zugbewehrung besteht jeweils aus vier geraden Stäben (Rippenstahl BSt III) mit einem Durchmesser von 20mm. Als Querkraftbewehrung kommen zweischnittige, lotrechte Bügel aus Rundstahl (BSt I) zum Einsatz, welche die Längsbewehrung umschließen und oben rechtwinklig abgebogen sind. Der Bügelabstand der Einzellastbalken beträgt im Schubbereich konstant 11cm. Für die Gleichlastbalken werden die Bügel bei gleicher Anzahl in einer Hälfte entsprechend dem Querkraftverlauf verteilt und in der anderen Hälfte mit einem konstanten Abstand von 15cm verlegt.

Für die folgende Nachrechnung wird der Balken ET3 betrachtet. Dieser T-Träger besitzt eine Stegbreite von 10cm (Abbildung 6.30 - Balken 3) und wird durch zwei Einzellasten im Abstand von 105cm vom Auflager belastet. Die Betonfestigkeiten sind mit $f_{cc} = -2,85\text{kN/cm}^2$ für die Druckzone und $f_{ct} = 0,42\text{kN/cm}^2$ für den Zugbereich angegeben. Abweichend von den Berechnungen zu Porenbetonbalken wird für den Druckbereich des Normalbetons ein Materialansatz gewählt, der eine nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung berücksichtigt. Hierfür steht der Ansatz nach Kaufmann [84] zur Verfügung, der nahezu deckungsgleich zur DIN 1045-1 [8] ist, sich aber numerisch einfacher implementieren lässt (siehe Tabelle 5.1). In der Zugzone wird linear elastisches Verhalten bis zum Erreichen der Zugfestigkeit vorausgesetzt. Darüber hinaus kommt eine abgeminderte ideal-plastische Spannungs-Dehnungs-Beziehung zum Einsatz ($\alpha = 0,05$). Der Verlauf der Formänderungsarbeits-Dehnungs-Beziehung ist in Abbildung 6.31 dargestellt. Das Versagen des Balkens wird von Leonhardt als Schubbruch durch Fließen der Bügel und einer einhergehenden Zerstörung des Stegbetons und der Druckzone klassifiziert. Für die Längsbewehrung wird ein linear elastisch - ideal plastisches Materialverhalten angesetzt, wobei die Streckgrenze mit $f_y = 420\text{N/mm}^2$ angenommen wird. Die Querkraftbewehrung wird mit einem linear elastischen Verhalten modelliert.

Die Diagramme 6.32 zeigen die gemessenen Bügelkräfte sowie die durch Vergleichsrechnung ermittelten Kräfte entlang der Balkenlängsachse für verschiedene Laststufen. Aus den Versuchsergebnissen ist ersichtlich, dass für benachbarte Bügel die Beanspruchungen teilweise erheblich schwanken. Dies führt Leonhardt auf die Lage der Schubrisse zurück. Geht man, wie im Berechnungsmodell, von einer verschmierten Rissbildung aus, erhält man einen kontinu-

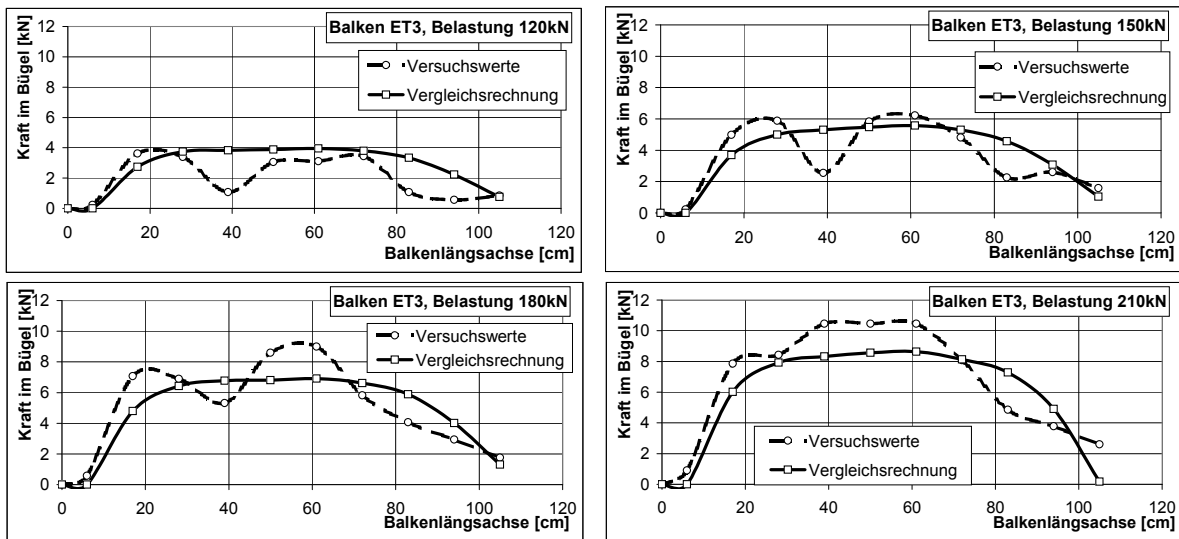


Abbildung 6.32: Verlauf der Bügelkräfte über die Längsachse im Versuchsbalken ET3

ierlichen Verlauf der Bügelbeanspruchungen. Für die Balken unter Einzellasten führen Leonhardt/Walther eine Mittelwertbildung der Bügelkräfte durch, um diesem Effekt Rechnung zu tragen. Ein Vergleich mit den Berechnungsergebnissen ist in Abbildung 6.33 dargestellt.

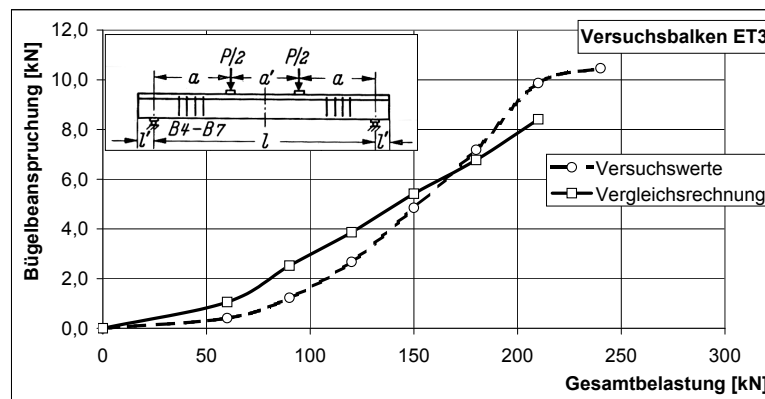


Abbildung 6.33: Mittelwert der Bügelkräfte in Abhängigkeit der Belastung

Für die Bügel der Versuchsbalken kommt ein Betonstahl BST I zum Einsatz, der eine Nennfestigkeit von $f_y = 220N/mm^2$ besitzt. Der von Leonhardt dokumentierte Zugversuch an BST I ergibt eine Streckgrenze im Bereich von $320 - 340N/mm^2$. Für eine Belastung von $180kN$ beträgt die Kraft im Bügelschenkel ca. $6,2kN$, so dass die Nennfestigkeit des Stahls erreicht wird. Für die Laststufe $240kN$ erhält man mit errechneten $8,8kN$ Bügelkraft eine Spannung von $311N/mm^2$, welche in der Nähe der gemessenen Streckgrenze liegt. Den Bruch infolge Fließens der Querkraftbewehrung geben Leonhardt/Walther für eine Belastung von $255kN$ an.

Abbildung 6.34 zeigt die Mittendurchbiegung des Balkens sowie die Stauchung des Betons.

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

Die Dehnung des Betons am Versuchs balken ist am Steg bei $x = 46\text{cm}$ (DD1 und DD3) sowie bei $x = 56\text{cm}$ (DD2 und DD4) unter jeweils 45° gemessen. Den Messwerten ist die kleinste Hauptdehnung des Betons in den betrachteten Schnitten gegenübergestellt. Die Nachrechnung liefert Werte für die Stauchung, die am unteren Rand und somit im Bereich der maximal gemessenen Werte für die Stauchung liegen. Der Neigungswinkel der kleinsten Hauptdehnung in Bezug auf die Balkenlängsachse liegt für die Nachrechnung bei ca. 40° .

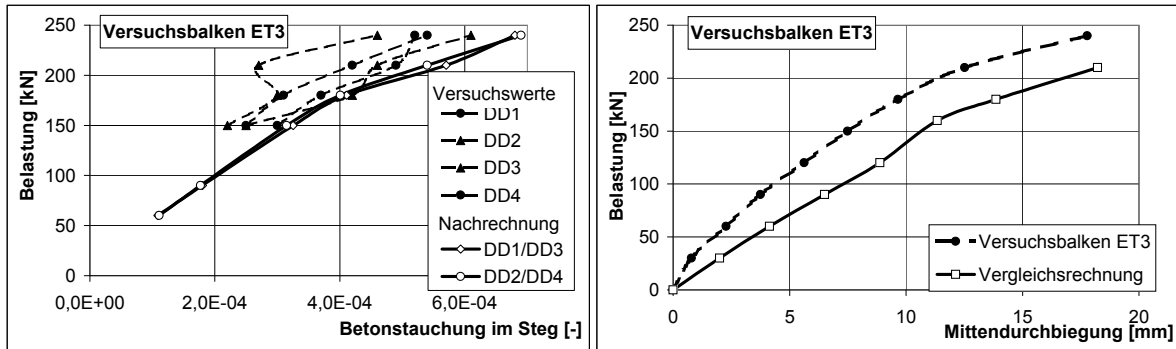


Abbildung 6.34: Betonstauchung im Steg und Mittendurchbiegung für Versuchs balken ET3

Das Berechnungsmodell liefert für die Mittendurchbiegung etwas größere Werte als der Versuch. Eine Ursache kann in der stärkeren Mitwirkung des Betons in der Zugzone liegen. Für die Vergleichsrechnungen wird diese mit dem Faktor $\alpha = 0,05$ angenommen. Eine stärkere Mitwirkung des Betons in der Zugzone hat eine versteifende Wirkung. Der berechnete Wert kann als obere Grenze für die Durchbiegung angesehen werden.

Die berechneten Hauptdehnungen für eine Gesamtbelastung von 210kN sowie das Rissbild nach dem Bruch des Balkens sind in Abbildung 6.35 dargestellt. Eine ausgeprägte Druckstrebe, wie sie bei bewehrten Porenbetonbalken beobachtet werden kann, ist nicht zu erkennen. Die größten Betonstauchungen treten im Bereich der Lasteinleitungsstelle auf. Die größten Risse sind im Schubbereich zwischen den Belastungspunkten und den Auflagern erkennbar. Hier sind auch die größten Dehnungen im Berechnungsmodell zu finden. Ein Ansatz zur Abschätzung von Rissbreiten wird im folgenden Abschnitt gegeben.

Der Balken ET3 versagt infolge Fließens der Bügelbewehrung sowie einer Zerstörung der Biegedruckzone im Bereich der Belastung. Die berechneten Bügelspannungen liegen für die Laststufe 240kN im Bereich der gemessenen Streckgrenze, so dass ein Versagen des Querschnittes mit dem Berechnungsmodell abgebildet werden kann.

Das vorgestellte Berechnungsmodell kann ohne Einschränkungen auf Stahlbetontragwerke angewendet werden. Im Vergleich zu Porenbetonbauteilen müssen für die Berechnung das Materialgesetz sowie die Verbundeigenschaften angepasst werden. Wird ein starrer Verbund vorausgesetzt, vereinfacht sich das Modell um die unbekannteren Relativverschiebungen zwischen Bewehrung und Beton. Der innere Kräfteverlauf in den Versuchs balken lässt sich gut beschreiben. Die berechneten Kräfte in den Bügelschenkeln korrespondieren mit den von Leonhardt/Walther gemessenen Versuchswerten.

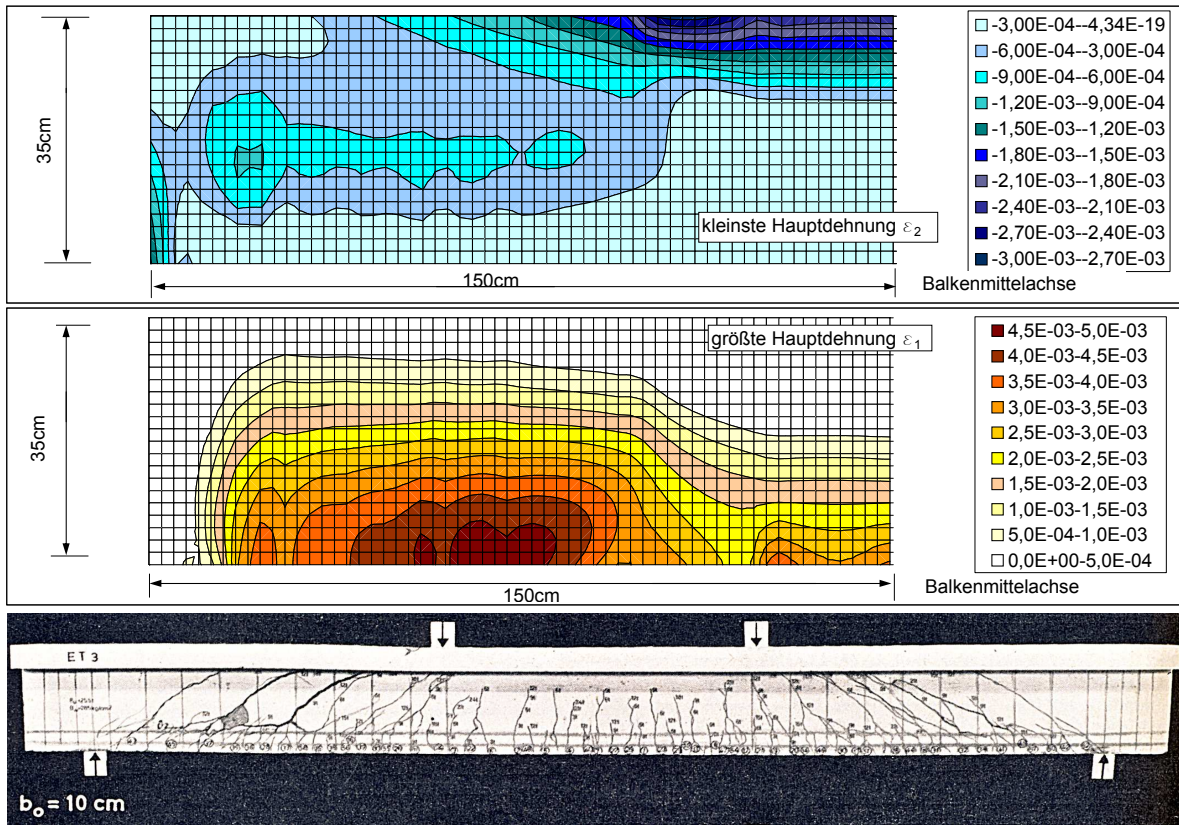


Abbildung 6.35: Rissbild nach dem Bruch [104] sowie berechnete Hauptdehnungen ϵ_1 und ϵ_2

6.5 Zusammenfassung der Vergleichsrechnungen

Die Vergleichsrechnungen zeigen, dass das in Abschnitt 5 entwickelte Berechnungsmodell das Trag- und Verformungsverhalten bewehrter Beton- und Porenbetonbalken wirklichkeitsnah abbilden kann. Im Folgenden werden die wesentlichen Ergebnisse dieser Vergleichsrechnungen zusammenfassend erläutert.

6.5.1 Dehnungen

Porenbeton

Die Dehnungen des Porenbetons bzw. Betons werden direkt aus den Verformungen (Verschiebungsfeld \bar{u} und \bar{v}) berechnet. Unter Zuhilfenahme der Verlaufsfunktionen für die Verschiebungen und grundlegender Gleichungen der technischen Mechanik können die Hauptdehnungen sowie die Neigung der Hauptdehnungen für jeden Punkt des Tragwerkes bestimmt werden. Für eine Bemessungsaufgabe können die berechneten Dehnungen mit definierten Grenzdehnungen verglichen werden, um eine Aussage über die Tragfähigkeit zu erhalten. Im querkraftbeanspruchten Bereich lässt sich für Porenbetonelemente eine geneigte Druckstrebe zum Auflager erkennen (Sprengwerkwirkung). Bei allen Vergleichsrechnungen sind die berechneten Dehnungen in der Druckstrebe unkritisch und liegen im elastischen Bereich.

Bewehrungsstahl

Für die Ermittlung der Dehnungen im Bewehrungsstahl wird eine Unterscheidung für die Art des Verbundes getroffen. Bei Porenbetontragwerken kann der Haftverbund vernachlässigt werden. Eine Interaktion zwischen Porenbeton und Bewehrung findet ausschließlich über Verankerungselemente (angeschweißte Querstäbe, Bügel) statt. Die Dehnung des Stahls zwischen den Verankerungselementen ist konstant. Sie wird aus der Verschiebungsdifferenz der Verankerungselemente in Längsrichtung der Bewehrung berechnet. Eine Nachgiebigkeit der Verankerungspunkte infolge der Bettung des Bewehrungsstahls im Porenbeton beeinflusst die Verschiebungsdifferenz und somit die Dehnung der Bewehrung. Dies führt zu einer Umlagerung der inneren Kräfte.

Bei kontinuierlichem Verbund (Stahlbeton) erfolgt eine direkte Kopplung der Dehnungen von Beton und Stahl entlang der Stahlachse. Prinzipiell ist hier ebenfalls die Berücksichtigung eines Verankerungsschlupfes möglich. Dieser liegt für Stahlbeton deutlich unter dem des Porenbetons und führt nur zu geringen Umlagerungen. Bei der Vergleichsrechnung (Abschnitt 6.4) wird darauf verzichtet. Messungen bezüglich eines möglichen Schlupfes der Bewehrung wurden von Leonhardt nicht durchgeführt.

Die Dehnungen der Längsbewehrung unterscheiden sich qualitativ zwischen kontinuierlichem und diskretem Verbund. Bei Porenbeton mit diskreten Verbundelementen erhält man unter Berücksichtigung einer Nachgiebigkeit eine völligeren Zugkraftlinie in Form einer Treppenkurve. Der Anteil der Kraft, die bis zum Auflager geleitet wird und dort verankert werden muss, ist größer. Die Zugkraftlinie und die am Auflager zu verankernde Kraft werden direkt aus den Dehnungen bestimmt.

6.5 Zusammenfassung der Vergleichsrechnungen

Bei einer entsprechenden Ausbildung der Endverankerung können die Dehnungen der Biegezugbewehrung eines bewehrten Porenbetonbauteils die Streckgrenze erreichen. Werden Grenzdeformationen definiert, kann eine Aussage über einen möglichen Versagenszustand getroffen werden.

Bei querkraftbewehrten Porenbetonbauteilen wird die Dehnung der Bügel aus den Verschiebungen der Verankerungsstellen ermittelt. Aufgrund des vernachlässigten Verbundes ist die Dehnung über die Höhe konstant. Infolge der nachgiebigen Verankerungsstäbe kann ein Fließen der Querkraftbewehrung für übliche Konstruktionen ausgeschlossen werden. Eine Definition von Grenzdeformationen ist wenig sinnvoll.

DIN 4223:2003 [5] gibt für die Querkraftbewehrung eine aufnehmbare Stahlspannung σ_{swd} an, welche die Wirkung der Verankerung der Bewehrung berücksichtigen soll. In Tabelle 6.7 wird dieser Wert mit den von Wehr [188] im Bruchzustand gemessenen Bügelkräften ($F_{w,exp}$) und den mit Modell B3 berechneten Bügelkräften ($F_{w,cal}$) verglichen. Die nach DIN 4223 berechneten Werte liegen über den gemessenen Werten. Der Maximalwert der aufnehmbaren Stahlspannung tritt bei großen Abständen (15cm und 20cm) der Querkraftbewehrung auf. Es kann abgelesen werden, dass die DIN 4223 die möglichen Kräfte in den Bügelschenkeln überschätzt. Vor allem bei größeren Bügelabständen wird die Tendenz einer Verringerung der Bügelkräfte nicht wiedergegeben.

Bauteil	Versuchsreihe	σ_{sw} [kN/cm ²] ²	$F_{w,code}$ [kN] ²	$F_{w,exp}$ [kN]	$F_{w,cal}$ [kN]
VI/3/13/1a	Wehr [188]	7, 17	2, 38	1, 58	1, 66
VI/3/13/2a	Wehr [188]	14, 34	4, 76	3, 43	3, 14
VI/3/13/3a	Wehr [188]	20, 08	6, 66	2, 39	2, 77
VI/3/13/4a	Wehr [188]	20, 08	6, 66	2, 85	2, 61

Tabelle 6.7: Beanspruchung in den Bügelschenkeln

6.5.2 Verformungen der Verankerungsbereiche

Die Vergleichsrechnungen mit unterschiedlichen Ansätzen für die Nachgiebigkeit der Verankerungsbereiche (Abschnitt 6.1) haben gezeigt, dass für bewehrte Porenbetonbauteile eine Berücksichtigung dieser Nachgiebigkeit zwingend erforderlich ist. Eine realistische Aussage über die Verteilung der inneren Kräfte kann man nur unter Einbeziehen der Bettung der Verankerungsstäbe treffen. Die Relativverschiebungen zwischen Bewehrung und Porenbeton sind Variablen für das Berechnungsmodell. Nach dem Lösen der Optimierungsaufgabe können die Verschiebungen direkt abgelesen werden.

Die Versuche von Wehr [188] zeigen, dass zwei Versagenszustände für querkraftbewehrte Porenbetonbauteile vorherrschen: Abplatzen der seitlichen Betondeckung der Querkraftbewehrung und sekundäres Biegeversagen infolge Verankerungsschlupf. Bei beiden Versagensarten treten unzulässige Relativverschiebungen zwischen Bewehrung und Porenbeton auf. Im Hinblick auf eine Bemessungsaufgabe müssen die Verschiebungen der Verankerungsstäbe

² σ_{sw} und $F_{w,code}$ nach [5] ohne Berücksichtigung des Sicherheitsfaktors $\gamma_c = 1,7$

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

begrenzt werden, um ein Versagen des Bauteils zu verhindern. Hierfür sind entsprechende Grenzwerte zu definieren.

6.5.3 Mittendurchbiegung

Für den Nachweis der Verformungen wird in der Norm DIN 4223-2:2003 [5] vorgeschlagen, die Durchbiegung auf Grundlage der linearen Elastizitätstheorie zu berechnen. Es darf für den Gebrauchszustand angenommen werden, dass sich der Querschnitt im Zustand I befindet. Für die Ermittlung der Steifigkeiten können die ideellen Trägheitsmomente angesetzt werden.

Die Verschiebungen des Tragwerkes stellen die Unbekannten des Berechnungssystems dar und können direkt abgelesen werden. Nichtlineare Effekte wie z.B. Rissbildung, Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen, Plastizierungen im Beton bzw. Bewehrungsstahl und Schlupf der Bewehrung sind berücksichtigt. Tabelle 6.8 zeigt einen Vergleich der berechneten Mittendurchbiegung mit experimentell ermittelten Werten. Der Wert v_{el} stellt die auf Basis der linearen Elastizitätstheorie berechneten Werte dar. Die Durchbiegung v_{exp} ist die aus der Literatur entnommene Durchbiegung und v_{cal} ist die mit dem vorgestellten Modell berechnete Durchbiegung. Die Tabelle zeigt, dass bereits im Gebrauchszustand die Durchbiegung der Balken bzw. Platten bei einer linearen Berechnung unterschätzt wird, während die durch das entwickelte Berechnungsmodell ermittelten Werte den experimentell gemessenen Werten sehr nahe kommen.

	Laststufe	v_{el} [mm]	v_{exp} [mm]	v_{cal} [mm]
Versuche Daschner [40] - Platte 3	Gebrauchslast	13,5	18,2	21,1
	Bruchlast	29,7	57,7	60,0
Versuche Wehr [188] - Balken VI/3/13/2A	40kN	2,3	3,9	4,1
	70kN	4,0	8,0	7,7
	93kN	5,3	12,0	10,5
Berechnungsbeispiel [163]	häufige EWK	1,09	—	1,85

Tabelle 6.8: Vergleich der Durchbiegungen

6.5.4 Abschätzung der Rissbreiten

Für das Berechnungsmodell wird das Konzept der verschmierten Rissbildung angewendet. Daraus folgt, dass Risse im Beton nicht direkt lokalisiert werden können. Die einzelnen Rissbreiten können ebenfalls nicht direkt bestimmt werden. Da die Dehnungen von Beton bzw. Porenbeton und Stahl bekannt sind, lassen sich die Rissweiten abschätzen.

Die Rissöffnung entspricht dem über die Risseinzugslänge s_r integrierten Dehnungsunterschied zwischen Beton und Bewehrung

$$w = s_r \cdot (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}). \quad (6.6)$$

Die Dehnung der Bewehrung kann direkt aus dem Berechnungsmodell ermittelt werden. Für die Abschätzung der Risseinzugslänge ist eine Unterscheidung für diskreten und kontinuierlichen Verbund notwendig.

Kontinuierlicher Verbund der Bewehrung mit dem Beton

Bei einem Einzelriss entspricht die Integrationslänge s_r der doppelten Einleitungslänge l_t . Am Ende der Einleitungslänge weisen Beton und Bewehrung identische Dehnungen auf. Bei einem abgeschlossenem Rissbild ergibt sich die größte Rissbreite aus dem maximal möglichen Rissabstand $s_{r,max}$. Ausgehend von einem Primärriss bildet sich ein weiterer Riss, wenn am Ende der Einleitungslänge die wirksame Betonfestigkeit $f_{ct,eff}$ erreicht ist. Nach Zilch [194] erhält man für Stahlbeton einen maximalen Rissabstand von

$$s_{r,max} \cong \frac{f_{ct,eff} \cdot d_s}{2 \cdot \tau_{sm} \cdot \rho_{s,eff}}. \quad (6.7)$$

Die Differenz der mittleren Dehnungen beträgt

$$\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} \cong \frac{\sigma_s}{E_s} - \beta_t \cdot \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{s,eff} \cdot E_s} \cdot (1 + \alpha_s \cdot \rho_{s,eff}), \quad (6.8)$$

so dass man die Rissbreite w_k bei abgeschlossenem Rissbild mit

$$w_k = \frac{f_{ct} \cdot d_s}{2 \cdot \tau_{sm} \cdot \rho_{s,eff}} \cdot \left(\frac{\sigma_s}{E_s} - \beta_t \cdot \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{s,eff} \cdot E_s} \cdot (1 + \alpha_s \cdot \rho_{s,eff}) \right) \quad (6.9)$$

angeben kann.

Die mittlere Stahldehnung ϵ_{sm} lässt sich direkt aus dem Berechnungsmodell ableiten. Abbildung 6.36 zeigt die Dehnung für den Versuchsbalken ET3 nach Leonhardt für die Laststufe von 210kN. Die Stahldehnung ist jeweils in drei Abschnitten gemittelt. Unter Zuhilfenahme von Gleichung 6.7 kann der maximale Rissabstand mit $s_{r,max} = 8,3cm$ abgeschätzt werden. Zum Vergleich gibt Leonhardt einen Rissabstand von $s = 6 \dots 8cm$ an. Mit $\epsilon_{cm} = \beta_t \cdot \epsilon_{ct}$ und $\beta_t = 0,6$ für kurzzeitige Belastungen [194] vereinfacht sich Gleichung 6.9 zu

$$w_k = \frac{f_{ct} \cdot d_s}{2 \cdot \tau_{sm} \cdot \rho_{s,eff}} \cdot (\epsilon_{sm} - \beta_t \cdot \epsilon_{ct}). \quad (6.10)$$

Für eine Abschätzung der Schubrisse kann Gleichung 6.10 ebenfalls verwendet werden. Die Dehnung der Bügel ist aus der Berechnung bekannt. Die Dehnungsdifferenz zwischen Beton und Stahl beträgt

$$\epsilon_{s,Bu} - \epsilon_{cm} = 1,55 \cdot 10^{-3} - 7,56 \cdot 10^{-5} = 1,47 \cdot 10^{-3}. \quad (6.11)$$

Unter der Annahme, dass sich in jedem Bügelschnitt nur ein Schubriss ausbildet, kann man für den Rissabstand die Höhe $s_{r,max} = 22,5cm$ setzen. Als maximale Rissbreite erhält man

$$w_{k,s} = 1,47 \cdot 10^{-3} \cdot 225mm = 0,33mm. \quad (6.12)$$

Die Bestimmung der mittleren Rissbreite ist in Abbildung 6.36 ausgeführt. Die mittlere Rissbreite für den Schubbereich (Bereich I) gibt Leonhardt mit $w_{k,m} = 0,07mm$ für die

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

Laststufe 210kN an. Eine Aussage zu den Rissbreiten im mittleren Bereich wird nicht getroffen. Die Rissbreite kann mit den beschriebenen Gleichungen und den Dehnungen aus dem Berechnungsmodell bestimmt werden. Abbildung 6.37 stellt die berechneten Rissweiten den gemessenen Werten gegenüber. Abweichungen zu den Versuchswerten treten sowohl für die Rissbreite in Stegmitte als auch für die Rissbreite in Höhe der Biegezugbewehrung nur im Bruchzustand auf.

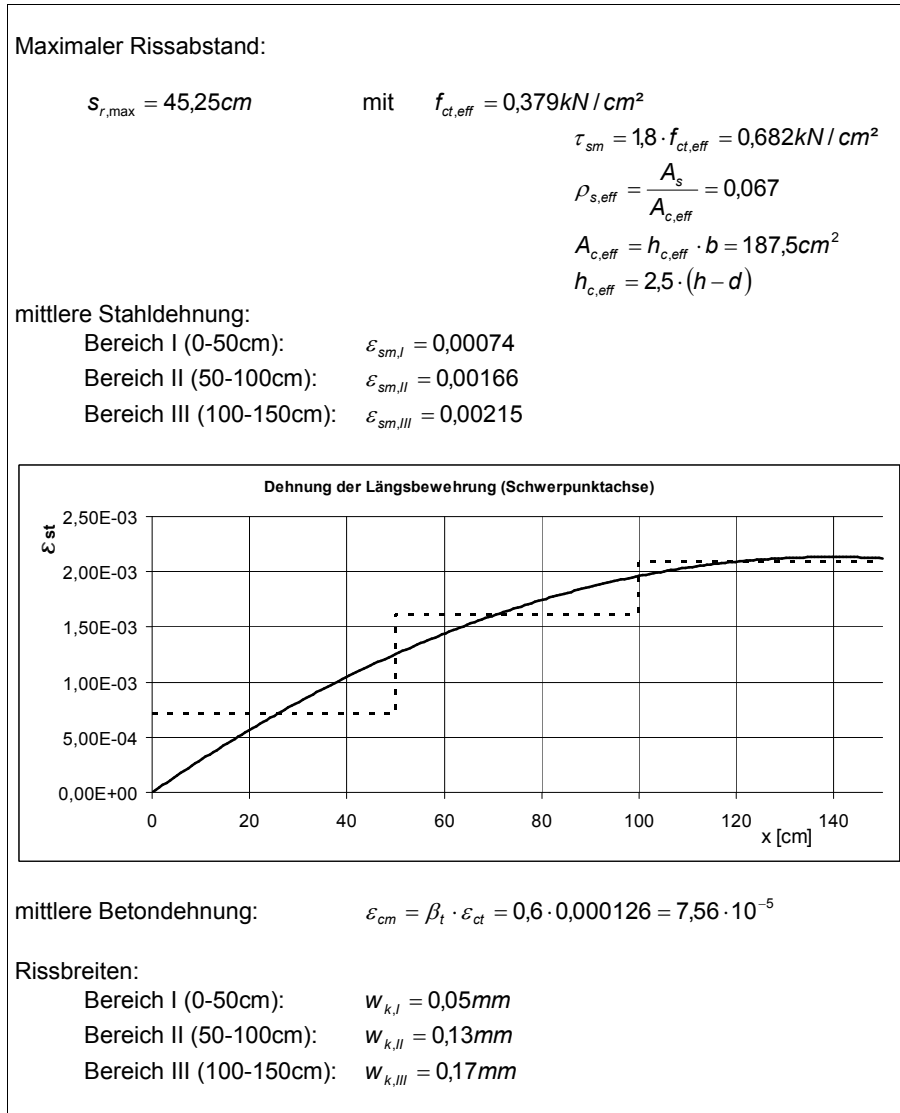


Abbildung 6.36: Bestimmung der Rissbreite für den Balken ET3

Diskreter Verbund der Bewehrung mit dem Beton

Bei Porenbetonbalken treten Biegerisse bevorzugt an den Stellen der Verankerungsstäbe der Längsbewehrung auf [40]. Vereinfachend kann man für den maximalen Rissabstand den Querstababstand setzen. Damit lässt sich eine maximale Rissbreite mit Gleichung 6.6 abschätzen.

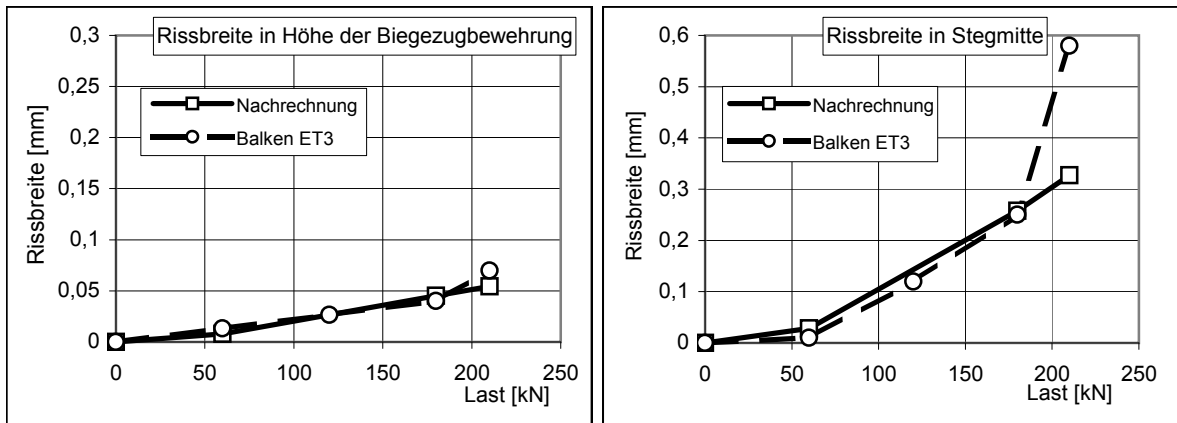


Abbildung 6.37: Bestimmung der Rissbreiten für Versuchsbalken ET3

Da die Versuche von Wehr [40] bzw. von Daschner [188] eine starke Streuungen sowohl bei der Rissbreite als auch bei der Rissanzahl aufweisen, ist eine Verkürzung der Risslänge nicht sinnvoll.

Für die berechnete Platte Nr. 3 nach Daschner (Abschnitt 6.3) erhält man unter Gebrauchslast eine Rissbreite von

$$s_k = 452,5 \text{ mm}$$

$$w_k(1,0 \cdot M_G) = 452,5 \text{ mm} \cdot (0,749 \cdot 10^{-3} - 0,175 \cdot 10^{-3}) = 0,26 \text{ mm}.$$

Die maximal gemessenen Rissbreiten der fünf Versuchsplatten der Reihe 3 schwanken zwischen 0,02mm und 0,3mm. Daschner gibt einen Mittelwert von 0,218mm an.

Wehr gibt in [188] keine expliziten Rissweiten für die einzelnen Versuche an. Eine Abschätzung der Biegerisse lässt sich analog zu den Versuchen von Daschner durchführen. Der Versuchsbalken VI/3/13/2a hat einen Bügelabstand von 100mm. Die Rissbreite für die Bruchlast erhält man zu

$$s_k = 100 \text{ mm}$$

$$w_k(VI/3/13/2a) = 100 \text{ mm} \cdot (2,05 \cdot 10^{-3} - 0,172 \cdot 10^{-3}) = 0,19 \text{ mm}.$$

Wendet man das oben beschriebene Verfahren für die Querkraftrisse an, so erhält man nur sehr kleine Rissweiten. Aufgrund der Nachgiebigkeit des Verankerungsstabes ist die Dehnung der Bügel klein, so dass sich nur eine kleine Dehnungsdifferenz $\epsilon_{s,Bu} - \epsilon_{cm}$ einstellt. Der Balken VI/3/13/2a mit 10cm Bügelabstand liefert eine theoretische Rissweite von $w_k = 0,07 \text{ mm}$ im Bruchzustand. Setzt man dagegen für ϵ_{sm} nicht die Dehnung der Bügel sondern eine mittlere Dehnung infolge der Vertikalverschiebung des oberen und unteren Randes $\epsilon_m = (w_{oben} - w_{unten})/H$ in Gleichung 6.6 ein so erhält man für die Rissweite einen Wert $w_k = 0,21 \text{ mm}$. Wehr gibt an, dass während der Versuche für die Bruchlast Rissweiten von bis zu 0,45mm gemessen wurden, macht aber keine weiteren Angaben dazu.

6 Verifizierung des vorgeschlagenen Berechnungsmodells

7 Zusammenfassung und Ausblick

Das Tragverhalten bewehrter Porenbetonelemente ist durch die Kopplungsbedingungen zwischen Bewehrung und Porenbeton gekennzeichnet. Aufgrund des unzureichenden Verbundes ist von einer diskreten Verankerung der Bewehrung auszugehen. Aus der geringen Steifigkeit des Porenbetons resultieren Relativbewegungen zwischen Bewehrungskorb und Porenbeton.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Berechnungsmodell entwickelt, das die Besonderheiten bei den Verbundeigenschaften zwischen Porenbeton und Bewehrung berücksichtigt und eine realistische Ermittlung der Kräfte in der Bewehrung ermöglicht. Für eine direkte Ermittlung von Bügelkräften querkräftbewehrter Bauteile werden Dehnungen senkrecht zur Balkenachse und Schubverzerrungen berücksichtigt. Das Tragverhalten wird durch einen zweiaxialen Spannungszustand beschrieben.

Das Berechnungsmodell wird auf Basis des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials als Extremalaufgabe formuliert. Der Minimalpunkt ist sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingung für den Gleichgewichtszustand. Die Extremalaufgabe wird in ein nichtlineares Optimierungsproblem überführt. Die Zielfunktion der Optimierungsaufgabe ist durch das Gesamtpotential beschrieben. Die Tragwerksverschiebungen stellen die Unbekannten dar.

Zur Lösung der Optimierungsaufgabe lassen sich vorhandene Routinen verwenden. Entsprechende Algorithmen werden durch Standardsoftware (Computeralgebrasysteme bzw. Tabellenkalkulationen) zur Verfügung gestellt. Die weite Verbreitung dieser Softwareprodukte (z.B. Microsoft EXCEL oder MathWorks Matlab) ermöglicht die einfache Anwendung des Berechnungsmodells.

Der Berechnungsalgorithmus ist unabhängig von der Materialformulierung, so dass die Verwendung nichtlinearer Funktionen keine besondere Anpassung erfordert. Das Materialgesetz wird in Form einer Formänderungsarbeits-Dehnungs-Beziehung in das Modell implementiert. Da es sich um eine integrale Formulierung handelt, können Unstetigkeiten (z.B. Risse) im Mittel berücksichtigt werden. Das Materialgesetz unterliegt dabei einzig der Einschränkung, dass ein stabiles Gleichgewicht des Tragwerkes möglich sein muss.

Die Kraft in der Bewehrung wird über Verankerungsstäbe auf den Porenbeton übertragen. An den diskreten Kopplungsstellen des Bewehrungskorbes mit dem Porenbeton treten Konzentrationen der Belastung auf. Es kommt zu Relativverschiebungen zwischen der Bewehrung und dem Porenbeton. Diese werden durch zusätzliche Parameter in das Berechnungsmodell integriert.

Der Bewehrungsstab kann als im Porenbeton gebetteter Balken aufgefasst werden. Bei einer Belastung senkrecht zur Stabachse treten unterhalb des Verankerungsstabes Leibungspressungen auf. Bei größeren Belastungen überschreiten die Pressungen die Festigkeit des Porenbetons

7 Zusammenfassung und Ausblick

und es tritt ein Steifigkeitsverlust der Bettung auf. Das Modell des elastisch gebetteten Balkens auf Basis der Differentialgleichung der Biegelinie kann weder die Steifigkeitsreduzierung der Bettung noch eine mögliche Entstehung plastischer Gelenke an den Lasteinleitungsstellen beschreiben. In der vorliegenden Arbeit wird für den Verankerungsstab ein numerisches Modell auf Basis des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials entwickelt. Damit lassen sich Auszugsversuche simulieren. Es wird gezeigt, dass das Verformungsverhalten durch die Verwendung einer trilinearen Bettungsfunktion und die Berücksichtigung eines linear elastisch - ideal plastischen Materialgesetzes für den Bewehrungsstahl hinreichend genau angenähert werden kann.

Die Nachgiebigkeit der Querkraftbewehrung ist durch die Verschiebungen des Verankerungsstabes definiert. In das Berechnungsmodell wird dies durch ein lokales Modell integriert. Der Verankerungsstab ist ein im Porenbeton gebetteter Balken. Die Lasteintragung erfolgt durch die Bügel. Unter Berücksichtigung eines nichtlinearen Materialgesetzes für den Stahl und einer nichtlinearen Bettungsfunktion werden die Verschiebungen des Verankerungsstabes bestimmt. Diese werden als Vorverformungen in das globale Modell übertragen und beeinflussen direkt die Kraft in den Bügelschenkeln.

Die Kraft aus der Längsbewehrung wird ebenfalls durch Verankerungsstäbe (Querstäbe oder Bügel) auf den Beton übertragen. Die im Porenbeton gebetteten Stäbe werden durch nichtlineare Federelemente simuliert. Eine Betrachtung als lokales Modell ist nicht erforderlich, da sich die Lasteinleitungsstellen nicht direkt untereinander beeinflussen. Die Steifigkeit der Federelemente wird im Vorfeld der eigentlichen Berechnung mit dem lokalen Modell des gebetteten Balkens bestimmt. Durch die Verschiebung der Kopplungspunkte der Längsbewehrung erhält man einen völligeren Verlauf der Zugkraftlinie.

Nachrechnungen zu Versuchen an bewehrten Porenbetonbalken und -platten ([41], [188]) zeigen, dass sich das Tragverhalten mit dem neuen Modell abbilden lässt. Der innere Kräftezustand und die Beanspruchung der Bügel bzw. der Längsbewehrung lässt sich in guter Übereinstimmung mit den Versuchswerten ermitteln.

Es hat sich gezeigt, dass bei einer Vernachlässigung der nachgiebigen Verankerung die Kräfte in den Bügelschenkeln deutlich überschätzt bzw. die am Auflager zu verankernde Kraft deutlich unterschätzt werden. Die Bettungsverformungen führen zu einer Umlagerung der Kräfte und zu einer Entlastung der Bügel. Die Ergebnisse der Vergleichsrechnungen bestätigen die Aussage, dass der Querkraftbewehrungsgrad bügelbewehrter Porenbetonbauteile nicht für eine Beurteilung der Tragfähigkeit herangezogen werden kann.

Die Vergleichsrechnungen zeigen, dass das Verformungsverhalten der Verankerungsstäbe den inneren Kräftezustand stark beeinflusst. Bisherige Untersuchungen betrachten vor allem die Tragfähigkeit der Verankerungsstäbe. Insbesondere für die Verankerung der Querkraftbewehrung spielt die in Auszugsversuchen ermittelten maximalen Kräfte nur eine untergeordnete Rolle. Die in praktischen Anwendungen auftretenden Kräfte in der Querkraftbewehrung von Balken sind zum Teil viel kleiner im Bruchzustand des Balkens. Eine möglichst genaue Kenntnis des Verformungsverhaltens der Verankerungsstäbe ist dagegen entscheidend für die Ermittlung des inneren Kräftezustandes.

Eine Anwendung des entwickelten Berechnungsmodells für Stahlbetonbalken ist möglich. Dieser kann als Sonderfall des Modells angesehen werden. Da die Problematik der nachgiebigen Verankerung nicht besteht, verringert sich die Zahl der Unbekannten. Zudem ist für den Stahlbeton die Annahme eines kontinuierlichen Verbundes gerechtfertigt. Die Nachrechnungen zu Versuchen von Leonhardt und Walther [104] liefern sowohl für die Kräfte in der Bewehrung als auch für die Stauchungen im Beton gute Übereinstimmungen mit den Versuchswerten.

Bei bewehrten Porenbetonbauteilen können vier vorherrschende Versagenszustände benannt werden:

- Betonversagen in der Biegedruckzone
- Abplatzen der seitlichen Betondeckung
- Verankerungsbruch der Biegezugbewehrung
- Fließen der Längsbewehrung

Zur Beschreibung eines Grenzzustandes bieten sich deformationsbasierte Konzepte an. Entsprechende Vergleichswerte können direkt (Verschiebungen, Dehnungen) aus dem Berechnungsmodell entnommen und mit zulässigen Werten verglichen werden. Die Definition von Grenzdehnungen der einzelnen Komponenten (Porenbeton, Stahl) bzw. von Grenzverschiebungen für die Verankerungsbereiche wird nicht durchgeführt und kann Ziel weiterer Forschungsarbeiten sein.

Die numerische Umsetzung des Berechnungsmodells in der vorliegenden Arbeit beschränkt sich auf den Anwendungsfall von bewehrten Balken und einachsigen gespannten Platten aus Porenbeton. Die Anwendung auf einen Stahlbeton-T-Träger (Abschnitt 6.4) zeigt, dass sich weitere Anwendungsgebiete durch wenige Modifikationen erschließen lassen. Prinzipiell lässt sich das dargestellte Berechnungsmodell auf andere Tragwerksformen (Scheiben, wandartiger Träger, Rahmen etc.) erweitern. Hierfür sind andere Verschiebungsansätze bzw. andere Diskretisierungen notwendig.

Es zeigt sich, dass das Berechnungsverfahren effektiv zur Berechnung komplexer Systeme mit vielen Unbekannten eingesetzt werden kann. Speziell bei der Verwendung nichtlinearer Material- und Kopplungsbeziehungen haben die Extremalprinzipien in Verbindung mit der mathematischen Optimierung Vorteile, da die numerischen Iterationsprozesse im Modell verankert sind und durch die Forderung nach dem Minimum des Gesamtpotentials gesteuert werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Anhang

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

lateinische Großbuchstaben

S	Spannungstensor
\bar{U}	Verschiebungsfeld
A	Querschnittsfläche
A_S	Matrix der Richtungskosinus der Fläche S
B	Querschnittsbreite
D	Elastizitätsmatrix
E	Elastizitätsmodul
E_{ct}^*	Entfestigungsparameter
F, F_x, F_y	Einzellasten
G	Schubmodul
G_f	spezifische Bruchenergie
H	Hesse-Matrix
H	Querschnittshöhe
I	Trägheitsmoment
K	Bettungsfunktion
L	Lagrange-Funktion
L	Länge
M	Biegemoment
Q	Querkraft
S	Entropie
T	Temperatur
U	innere Energie
V_u	Bruchquerkraft
W	spezifische Formänderungsenergie, Formänderungsarbeit
W_B	Formänderungsarbeit der Massenbeschleunigung

lateinische Kleinbuchstaben

\bar{d}^k	Abstiegsrichtung
\bar{n}	Normalenvektor
\bar{s}	Spannungsvektor
a/h	Schubslankheit
a_0-a_4, b_0-b_2	Koeffizienten der Taylor-Reihen
c	Bettungsmodul
d	statische Nutzhöhe
d_s	Stabdurchmesser der Bewehrung
f_b	Verbundfestigkeit
f_{cc}	Druckfestigkeit von Beton/Porenbeton

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

$f_{ct,eff}$	effektive Zugfestigkeit
f_{ct}	Zugfestigkeit von Beton/Porenbeton
f_y	Streckgrenze Bewehrungsstahl
k_U^e, Q	Faktor für die Bügelform nach Briesemann
k_1, k_2	Abminderungsfaktoren
l_f	Risszonenlänge
p_x, p_y	Linienlasten
s	Bügelabstand
$s_{r,max}$	max. Rissabstand
s_r	Rissabstand
u, v, w	Verschiebungen
v/h	Versatzmaß
w_k	Rissbreite
z	Hebelarm der inneren Kräfte

griechische Großbuchstaben

Π	Energiefunktional, Gesamtpotential
Π_a	Potential der äußeren Kräfte
Π_B	Potential der Bettung
Π_i	Potential der inneren Kräfte
Ψ	Polynomkoeffizienten

griechische Kleinbuchstaben

α	Koeffizient für effektive Zugfestigkeit
α_0	Völligkeitsgrad
β	Bettungsparameter
ϵ	Dehnungen
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	Hauptdehnungen
$\epsilon_{cc}, \epsilon_{ct}$	Grenzdehnungen von Beton
ϵ_{cm}	mittlere Betondehnung
ϵ_{sm}	mittlere Stahldehnung
ϵ_y	Grenzdehnungen Bewehrungsstahl
η	Schubdeckungsgrad
γ_c	Teilsicherheitsfaktor
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Schubgleitung
κ	Querschnittsverdrehung
λ_i	Lagrange-Multiplikatoren
ω_k	Wichtungsfaktoren der Gauss-Quadratur
ϕ	Winkel
ψ	Korrekturfaktor für die Schubgleitung
ρ	Dichte
ρ_c	Trockenrohddichte Porenbeton
ρ_l	Bewehrungsgrad der Längsbewehrung
ρ_w	Querkraftbewehrungsgrad
σ	Normalspannungen
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
σ_{bu}	Normalspannung im Bügel

σ_b	Leibungspressung
τ	Schubspannungen
τ_b	Verbundspannung
τ_o	zulässige Schubspannung nach DIN 4223:1958

Symbole

δ	Variationssymbol
∇	Gradient eines skalaren Feldes
∂/∂_x	partielle Ableitung

Abkürzungen

Abb.	Abbildung
bzw.	beziehungsweise
ca.	circa
DGL	Differentialgleichung
EIM	Energiemethode mit integraler Beschreibung des Materialverhaltens
et al.	und andere
etc.	und so weiter
FEM	Finite Elemente Methode
u.a.	und andere
z.B.	zum Beispiel

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

- [1] *DIN 4223:1958, Bewehrte Dach- und Deckenplatten aus dampfgehärtetem Gas- und Schaumbeton - Richtlinien für Bemessung, Herstellung, Verwendung und Prüfung.* Beuth Verlag GmbH, 1958
- [2] *DIN 4223:1978, Gasbeton, Bewehrte Bauteile, Entwurf 1978.* Beuth Verlag GmbH, 1978
- [3] *CEB FIP model code 1990.* Comite Euro-International du Beton, Lausanne, 1990
- [4] *DIN EN 12269-1, Bestimmung des Verbundverhaltens zwischen Bewehrungsstahl und dampfgehärtetem Porenbeton mit Hilfe der Balkenprüfung - Teil 1.* Beuth Verlag GmbH, 2000
- [5] *DIN 4223:2003, Vorgefertigte bewehrte Bauteile aus dampfgehärtetem Porenbeton.* Beuth Verlag GmbH, 2003
- [6] *Erläuterungen zur DIN 1045-1.* Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 525, Ernst & Sohn, 2003
- [7] *DIN EN 1992 Teil 1-1, Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken.* Beuth Verlag GmbH, 2004
- [8] *DIN 1045-1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton.* Beuth Verlag GmbH, 2008
- [9] *DIN EN 12602:2008, vorgefertigte bewehrte Bauteile aus dampfgehärtetem Porenbeton.* Beuth Verlag GmbH, 2008
- [10] *DIN 488: Betonstahl, Ausgabe 2009-08.* Beuth Verlag GmbH, 2009
- [11] ADAMI, K.: *Beitrag zur physikalisch nichtlinearen Analyse von Aussteifungssystemen mit Methoden der mathematischen Optimierung*, Bauhaus-Universität Weimar, Diss., 2003
- [12] AL-GHAZALY, H.A. ; MONFORTON, G.R.: Analysis of flexible frames by energy search. In: *Computers & Structures* 32 (1989), S. 75–86
- [13] ALT, W.: *Nichtlineare Optimierung.* Vieweg Verlag, Braunschweig, 2002
- [14] ARONI, S.: Shear strength of reinforced aerated concrete beams with shear reinforcement. In: *Materials and Structures* 23 (1990), S. 217–222
- [15] ARONI, S.: *Autoclaved Aerated Concrete: Properties, Testing and Design.* Rilem Technical Committees, 78-MCA and 51-ALC, 1993

Literaturverzeichnis

- [16] ARONI, S. ; CIVIDINI, B.: Shear strength of reinforced aerated concrete slabs. In: *Materials and Structures* 22 (1989), S. 443–449
- [17] BAUTECHNIK, Berlin Deutsches Institut f.: *Zulassung Hebel Stürze Z.-2.1-23*. 1986
- [18] BENKER, H.: *Mathematische Optimierung mit Computeralgebrasystemen*. Springer Verlag, 2003
- [19] BETTEN, J.: *Finite Elemente für Ingenieure 2*. Springer Verlag, 2004
- [20] BIRTEL, Veit: *Modellbildung und versuchsgestützte Analyse von Stahlbetonbalken mit zweiachsigen Querkraftbeanspruchungen*, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 2009
- [21] BORST, R. D. ; BICANCIC, N. ; H.MANG ; MESCHKE, G.: *Computational Modelling of Concrete Structures: Proceedings of the EURO-C Conference 1998, Badgastein, 31. March - 3. April 1998*. Balkema Publishers, 1998
- [22] BOUTROS, M. ; SAVERIMUTTO, L.: Anchorage capacity of reinforcing bars in autoclaved aerated concrete lintels. In: *Materials and Structures* 30 (1997), S. 552–555
- [23] BRIESEMANN, B.: *Die Schubtragfähigkeit bewehrter Platten und Balken aus dampfgehärteten Gasbeton nach Versuchen*. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Heft 314, Beuth Verlag, 1980
- [24] BRONSTEIN ; SEMENDJAJEW ; MUSIOL ; MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1997
- [25] CAROL, I. ; PRAT, P.C.: A Statically Constrained Microplane Model for the Smeared Analysis of Concrete Cracking. In: *International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, vol. 2*, 1990
- [26] CEDERWALL, K.: Tests on reinforced light-weight concrete beams. In: *RILEM, Proceedings of the Symposium held in Göteborg 1960* (1962), S. 167–172
- [27] CEDOLIN, L. ; CRUTZEN, Y.R.J. ; POLI, S. D.: Triaxial Stress Strain Relationship for Concrete. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 103, Nr. EM3 (1977), S. 423–439
- [28] CEDOLIN, L. ; POLI, S. D.: Finite element studies of shear critical reinforced concrete beams. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 103 (Juni 1977), S. 395–410
- [29] CHARNES, A. ; LEMKE, C.E. ; ZIENKIEWICZ, O.C.: Virtual Work, linear Programming and plastic limit analysis. In: *Proceedings of the Royal Society A* 251 (1959), S. 110–116
- [30] CHRISTOPHE, P.: *Der Eisen-Beton und seine Anwendung*. Tonindustrie-Zeitung, Berlin, 1905
- [31] COLLATZ, L. ; WETTERLING, W.: *Optimierungsaufgaben*. Springer Verlag, 1971
- [32] COLLINS, M.P. ; VECHIO, F.J.: A general shear design method. In: *ACI Structural Journal* 93 (1996), S. 36–45

- [33] COPE, R.J. ; RAO, P.V. ; CLARKE, L.A. ; NORRIS, P.: Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridge slabs. In: *C. Taylor, E. Hinton und D.R.J. Taylor, Numerical Methods for Non-Linear Problems, Pineridge Press* (1980), S. 457–470
- [34] CORNELISSEN, R.: Uniaxial tensile fatigue failure of concrete under constant amplitude and programme loading. In: *Magazine of concrete research* Vol. 36 (1984), S. 216–226
- [35] DANKERT, J. ; DANKERT, H.: *Technische Mechanik*. Teubner GmbH, 2004
- [36] DANTZIG, G.: *Lineare Programmierung und Erweiterungen*. Springer Verlag, 1966
- [37] DASCHNER, F. ; ZILCH, K.: *Abschlußbericht zum AiF-Forschungsvorhaben Nr. 9292, Schubtragfähigkeit bewehrter Porenbetonbauteile*. Technische Universität München, 1998
- [38] DASCHNER, F. ; ZILCH, K.: *Kriechen des Porenbetons im Bereich der zur Verankerung der Längsbewehrung dienenden Querstäbe und Tragfähigkeit der Verankerung*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 518, Beuth Verlag, 2001
- [39] DASCHNER, F. ; ZILCH, K.: *Kriechen von unbewehrtem Porenbeton*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 518, Beuth Verlag, 2001
- [40] DASCHNER, F. ; ZILCH, K.: *Schubtragfähigkeit längsbewehrter Porenbetonbauteile ohne Schubbewehrung*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 518, Beuth Verlag, 2001
- [41] DASCHNER, F. ; ZILCH, K.: *Thermische Vorspannung bewehrter Porenbetonbauteile*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 518, Beuth Verlag, 2001
- [42] DAWE, D.J.: A finite-deflection analysis of shallow arches by the discrete element method. In: *International Journal for numerical Methods in Engineering* 3 (1971), S. 529–552
- [43] DESAI, S.B.: Reinforced autoclaved aerated concrete roof slabs. In: *Proceedings of the international conference held at the University of Dundee* (2002), S. 523–532
- [44] DIENER, J.: *Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Berechnung langzeitbelasteter Bauteile aus Stahlbeton und Spannbeton unter besonderer Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens und der Rißbildung*, Bauhaus-Universität Weimar, Diss., 1998
- [45] DOWLING, N.E.: *Mechanical Behaviour of Materials*. Prentice Hall, 1998
- [46] DUDA, H.: *Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung*,. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 419, Ernst & Sohn, 1991
- [47] EIBL, J.I. ; STEMPNIEWSKI, L.: *Finite Elemente im Stahlbetonbau*. Betonkalender 1993, Teil 1, Ernst & Sohn, 1993
- [48] FAUSETT, L.: *Applied numerical analysis using MATLAB*. Prentice Hall, 1999
- [49] FENWICK, R.C. ; PAULAY, T.: Mechanisms of Shear Resistance of Concrete Beams. In: *ASCE Journal, Journal of the Structural Division* 94 (1968), S. 2325–2350

Literaturverzeichnis

- [50] FISCHER, J.: *Versagensmodell für schubslanke Balken*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 480, Ernst & Sohn, 1997
- [51] FLOEGL, H. ; MANG, H.: Tension Stiffening Concept Based on Bond Slip. In: *Journal of the Structural Division* Vol. 108 (1982), S. 2681–2701
- [52] FOX, R.L. ; STANTON, E.L.: Developments in Structural Analysis by Direct Energy Minimization. In: *AIAA Journal* 6 (1968), S. 1036–1042
- [53] FRANKLIN, H.A.: *Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames and Panels*. Berkeley, California, University of California, Diss., März 1970
- [54] GEIGER, C. ; KANZOW, C.: *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Springer Verlag, Berlin, 1999
- [55] GEIGER, C. ; KANZOW, C.: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer Verlag, Berlin, 2002
- [56] GERE, J.M. ; TIMOSHENKO, S.P.: *Mechanics of Materials*. CBS Publishers and Distributors, New Dehli, 1984
- [57] GILBERT, R.I. ; WARNER, R.F.: Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs. In: *Journal of the Structural Division, ASCE* Vol. 104 (1978), S. 1885–1899
- [58] GODYCKI-CWIRKO, T.: *Schubprobleme im Stahlbetonbau*. VDI-Verlag, 1973
- [59] GRIERSON, D.E. ; GLADWELL, G.M.L.: Collapse Load Analysis using Linear Programming. In: *Journal of the Structural Division* 97 (1971), S. 1561–1573
- [60] GROOTENBOER, H.J.: *Finite Element Analysis of two-dimensional reinforced Concrete Structures, taking Account of nonlinear physical Behaviour and the Development of discrete Cracks*, Delft, Diss., 1979
- [61] GRÜNBERG, J.: *Berechnung von ebenen Stahlbetonflächentragwerken im gerissenen Zustand mit der Methode der finiten Elemente*. Düsseldorf : Werner Verlag, 1974
- [62] GUTSCH, A.W.: *Stoffeigenschaften jungen Betons - Versuche und Modell*, TU Braunschweig, Diss., 1998
- [63] HADDADIN, M.J. ; HONG, S.T. ; MATTOCK, A.H.: Stirrup Effectiveness in Reinforced Concrete Beams with Axial Force. In: *ASCE Journal of the Structural Division* 97 (1971), S. 2277–2297
- [64] HAFTKA, R.T. ; KAMAT, M.P.: Simultaneous nonlinear structural analysis and design. In: *Computational Mechanics* 4 (1989), S. 409–416
- [65] HAMPE, E. ; RAUE, E. ; KALLER, W.: *Stahlbeton, Grundlagen*. Verlag für Bauwesen, Berlin, 1993
- [66] HANECKA, K. ; SIMOR, J. ; HANECKA, S.: Shear resistance of reinforced light-weight concrete beams. In: *CEB/FIP - concrete seminar, Helsinki*, 1974

- [67] HENSELEIT, O.: *Spannungsdehnungslinie von Gasbeton bei hoher Belastungsgeschwindigkeit, Forschungsbericht T 1240*. Universität Karlsruhe, Fraunhofer IRB Verlag, 1983
- [68] HERING, E. ; MARTIN, R. ; STOHRER, M.: *Physik für Ingenieure*. Springer Verlag, 2004
- [69] HERZOG, M.: Die Schubbruchlast von Spannbetonbalken nach Versuchen. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 67 (1972), S. 246–253
- [70] HERZOG, M.: Die Schubbruchlast von Spannbetonbalken nach Versuchen. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 69 (1974), S. 282–288
- [71] HILLERBORG, A.: Analysis of a Single Crack. In: *Fracture Mechanics of Concrete* (1983), S. 223–250
- [72] HILLERBORG, A.: Application of the fictitious crack model to different types of materials. In: *International Journal of Fracture* 51 (1991)
- [73] HORDIJK, D.A.: Tensile and Tensile Fatigue Behaviour of Concrete; Experiments, Modelling and Analysis. In: *Heron* Vol. 37, Nr. 1 (1992), S. 1–79
- [74] JANOVIC, K. ; GRASSER, E.: Researches for the design of reinforced aerated concrete beams. In: *Advances in Autoclaved Aerated Concrete: Proceedings of the 3rd Rilem International Symposium, Zurich, 14-16 October 1992*, S. 173–180
- [75] JANOVIC, K. ; GRASSER, E.: *Bemessung der Endverankerung der Längsbewehrung in auf Biegung und Schub beanspruchten Gasbetonbauteilen*. Technische Universität München, 1977
- [76] JANOVIC, K. ; GRASSER, E. ; KUPFER, H.: *Versuche zur Biege- und Schubtragfähigkeit von bewehrten Gasbetonbauteilen*. Fraunhofer IRB Verlag, 1975
- [77] JENDELE, L. ; CERVENKA, J. ; SAOUMA, V. ; PUKL, R.: On the choice between discrete or smeared approach in practical structural FE analysis of concrete structures. In: *ICADD4, Glasgow, 2000*
- [78] JIRASEK, M. ; ZIMMERMANN, T.: Rotating Crack Model with Transition to Scalar Damage. In: *Journal of Engineering Mechanics* (März, 1998), S. 277–284
- [79] JUNGWIRTH, D.: *Elektronische Berechnung des in einem Stahlbeton in gerissenem Zustand auftretenden Kräftezustandes unter besonderer Berücksichtigung des Querkraftbereichs*, TH München, Diss., 1968
- [80] KAMAT, M.P. ; HAYDUK, R.J.: Energy minimization versus pseudo force technique for nonlinear structural analysis. In: *Computers & Structures* 11 (1980), S. 403–409
- [81] KAMERLING, J.W. ; KUYT, B.: Über die Berechnung der Schubtragfähigkeit von Stahlbeton und Spannbetonbalken. In: *Beton- und Stahlbetonbau* (1976)
- [82] KANI, G.J.N.: The riddle of shear failure. In: *ACI Journal* 61 (1964), S. 441–467
- [83] KANI, G.J.N.: A rational theory for the function of web reinforcement. In: *ACI Journal* 66 (1969), S. 185–197

Literaturverzeichnis

- [84] KAUFMANN, W.: *Strength and Deformation of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces*, ETH Zürich, Diss., 1998
- [85] KNOTHE, K. ; WESSELS, H.: *Finite Elemente*. Springer-Verlag, 1991
- [86] KORDINA, K. ; BLUME, F.: *Empirische Zusammenhänge zur Ermittlung der Schubtragfähigkeit stabförmiger Stahlbetonelemente*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 364, Ernst u. Sohn, 1985
- [87] KORDINA, K. ; HEGGER, J.: Zur Schubtragfähigkeit von Stahlbeton- und Spannbetonbalken. In: *Beton und Stahlbetonbau* 82 (1987), S. 5–9
- [88] KOTSOVOS, M.D.: Effect of testing Techniques on the post-ultimate Behaviour of Concrete in Compression. In: *Materials and Structures, RILEM* 16, No. 91 (1983), S. 3–12
- [89] KOTSOVOS, M.D.: Compressive Force Path Concept: Basis for Reinforced Concrete Ultimate Limit State Design. In: *ACI Structural Journal* 85, Nr. 1 (1988), S. 64–75
- [90] KOTSOVOS, M.D. ; BOBROWSKI, J.: Design Model for Structural Concrete Based on the Concept of the Compressive Force Path Concept. In: *ACI Structural Journal* 90, No.1 (1993), S. 12–20
- [91] KOTSOVOS, M.D. ; MILIJA, N.P. ; KOTSOVOS, D.M.: Structural Concrete Behaviour: Separating Myths from Reality. In: *5th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Limassol*, 2005
- [92] KOTSOVOS, M.D. ; NEWMAN, J.B.: Generalized Stress-Strain Relations for Concrete. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 104, Nr. 4 (1978), S. 845–856
- [93] KRABS, W.: *Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung für Ingenieure*. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1983
- [94] KROLKIEWICZ, H. J.: Porenbeton - der Youngster unter den Baustoffen. In: *Baustofftechnik* (2001), S. 373–374
- [95] KUPFER, H.: Erweiterung der Mörsch'schen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit. In: *CEB Bulletin d'Information No. 40* (1964)
- [96] KUPFER, H.: *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 229, Ernst & Sohn, 1973
- [97] KURRER, K. E.: *Geschichte der Baustatik*. Ernst und Sohn, 2002
- [98] LANGHAAR, H.L.: *Energy Methods in Applied Mechanics*. Wiley and Sons, Inc., 1962
- [99] LAUBE, M.: *Werkstoffmodell zur Berechnung von Temperaturspannungen in massigen Betonbauteilen im jungen Alter*, TU Braunschweig, Diss., 1990
- [100] LAUPA, A. ; SIESS, C.P. ; NEWMARK, N.M.: *Strength in Shear of Reinforced Concrete Beams*. University of Illinois Bulletin, 1955

- [101] LEISER: *Angewandte Wirtschaftsmathematik - Modellierung und Bearbeitung von Fallstudien mit EXCEL*. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 2000
- [102] LEONHARDT, F.: Die verminderte Schubdeckung bei Stahlbeton-Tragwerken. In: *Der Bauingenieur* 40 (1965)
- [103] LEONHARDT, F. ; MÖNNIG, E.: *Vorlesungen über Massivbau, Teil 1: Grundlagen zur Bemessung im Stahlbetonbau*. Springer Verlag, 1984
- [104] LEONHARDT, F. ; WALTHER, R.: *Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 151, Ernst u. Sohn, 1962
- [105] LEONHARDT, F. ; WALTHER, R. ; DILGER, W.: *Schubversuche an Durchlaufträgern*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 163, Ernst u. Sohn, 1964
- [106] LINSE, D. ; STEGBAUER, A.: *Festigkeit und Verformungsverhalten von Leichtbeton, Gasbeton, Zementstein und Gips unter zweiachsigen Kurzzeitbeanspruchungen*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 254, Ernst & Sohn, 1976
- [107] LUSCHE, M.: *Beitrag zum Bruchmechanismus von auf Druck beanspruchtem Normal- und Leichtbeton mit geschlossenem Gefüge*. Schriftenreihe der Zementindustrie, Heft 39, 1972
- [108] MALLEE, R.: *Zum Schubtragverhalten stabförmiger Stahlbetonelemente*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 323, Ernst & Sohn, 1981
- [109] MARK, P.: Optimierungsmethoden zur Biegebemessung von Stahlbetonquerschnitten. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 98 (2003), S. 511–519
- [110] MARK, P.: Stahlbetonträger mit zweiachsiger Querkraftbeanspruchung: Fachwerkmodelle, Experiment und Bemessungsansatz. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 99 (2004), S. 744–753
- [111] MARK, P.: Ein Bemessungsansatz für zweiachsig durch Querkräfte beanspruchte Stahlbetonbalken mit Rechteckquerschnitt. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 100 (2005), S. 370–375
- [112] MARK, P.: *Zweiachsig durch Biegung und Querkräfte beanspruchte Stahlbetonträger*. Schriftenreihe des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau (Habilitationsschrift), Shaker Verlag, 2006
- [113] MARK, P. ; STANGENBERG, F.: Instandsetzungsplanung von Stahlbetontragwerken mit Optimierungsverfahren von Tabellenkalkulationen. In: *Anwendung der Optimierung in der nichtlinearen Tragwerksanalyse* Festschrift anlässlich des 65. Geburtstages von Prof. Dr.-Ing. habil. Erich Raue (2007), S. 85–95
- [114] MARTI, P. ; MONSCH, O. ; SCHILLING, B.: *Ingenieur-Betonbau*. Vdf Hochschulverlag, 2005
- [115] MARX, S.: *Anwendung der mathematischen Optimierung bei der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Analyse von Stahlbetontragwerken*, Bauhaus-Universität Weimar, Diss., 2000

Literaturverzeichnis

- [116] MATSUMURA, A.: Shear strength and behavior of reinforced autoclaved lightweight cellular concrete members. In: *Transactions of the Architectural Institute of Japan* (1984)
- [117] MIER, J.G.M. van: *Strain softening of concrete under multiaxial loading conditions*, TU Eindhoven, Diss., 1984
- [118] MIER, J.G.M. van: Fracture of Concrete under Complex Stress. In: *Heron* Vol. 31 (1986), S. 1–90
- [119] MOODY, K.G. ; VIEST, I.M. ; ELSTNER, R.C. ; HOGNESTAD, E.: Shear Strength of Reinforced Concrete Beams Part 1 - Test of Simple Beams. In: *ACI Journal* 51 (1954), S. 317–332
- [120] MOOSECKER, W.: *Zur Bemessung der Schubbewehrung von Stahlbetonbalken mit möglichst gleichmäßiger Zuverlässigkeit*, TU München, Diss., 1979
- [121] MÖRSCH, E.: *Die Bemessung im Eisenbetonbau*. Verlag Konrad Wittwer Stuttgart, 1950
- [122] MÜLLER, W.H. ; FERBER, F.: *Technische Mechanik für Ingenieure*. Fachbuchverlag Leipzig, 2005
- [123] MUTTONI, A. ; ETH ZÜRICH, IBK Bericht Nr. 1. (Hrsg.): *Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990
- [124] MUTTONI, A. ; THÜRLIMANN, B. ; SCHWARTZ, J.: *Design of Concrete Structures with Stress Fields*. Birkhäuser Verlag, 1997
- [125] NGO, D. ; SCORDELIS, A.C.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. In: *ACI Journal* 64 (1967), S. 152–163
- [126] NIEUWENBURG, D. van ; BLAERE, B. de: Bond tests on autoclaved aerated concrete. In: *Laboratorium Magnel voor Betononderzoek* (Universität Gent, 1995)
- [127] NILSSON, S.: Compressive reinforcement of light-weight concrete. In: *RILEM, Proceedings of the Symposium held in Göteborg 1960* (1962), S. 203–211
- [128] NOVOZHILOV, V.V.: *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*. Dover Publications INC., 1999
- [129] OHKUBO, S. ; WATADA, Y. ; FUJIWAKI, T.: Nonlinear analysis of truss by energy minimization. In: *Computers & Structures* 27 (1987), S. 129–145
- [130] PAUSER, A.: *Eisenbeton 1850 - 1950*. MANZ Verlags- und Universitätsbuchhandlung, Wien, 1994
- [131] PORENBETON, Bundesverband: Neue DIN 4223 für vorgefertigte Bauteile aus bewehrtem Porenbeton. (2006)
- [132] PRAGER, W.: Lineare Ungleichungen in der Baustatik. In: *Schweizerische Bauzeitung* Vol. 80, Heft 19 (1962), S. 315–320

- [133] RAGSDALE, C.: *Spreadsheet modeling and decision analysis: A practical introduction to management science*. Thomson/South-Western, 2004
- [134] RASHID, Y.R.: Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete. In: *Nuclear Engineering and Design* 7 (1968), S. 334–344
- [135] RAUE, E.: Untersuchungen der Grenzlast von Flächentragwerken aus Stahlbeton. In: *Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar* (1982)
- [136] RAUE, E.: Berechnung von Balken unter Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität. In: *Technische Mechanik* 10 (1989)
- [137] RAUE, E.: Berechnung von Balkentragwerken unter Berücksichtigung von Plastifizierungen. In: *Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar* 35 (1989)
- [138] RAUE, E.: Berechnung von Balkentragwerken unter Berücksichtigung von Schnittgrößenumlagerungen. In: *Bauplanung - Bautechnik* 44 (1990)
- [139] RAUE, E.: Lineare und nichtlineare Tragwerksanalyse mit den Methoden der Mathematischen Optimierung. In: *XII. IKM Weimar, Berichte Band I* (1990)
- [140] RAUE, E.: Nichtlineare Querschnittsanalyse als Optimierungsproblem. In: *Bautechnik* 82 (2005), S. 796–809
- [141] RAUE, E.: Nichtlineare Querschnittsberechnung und mathematische Optimierung. In: *Anwendung der Optimierung in der nichtlinearen Tragwerksanalyse* Festschrift anlässlich des 65. Geburtstages von Prof. Dr.-Ing. habil. Erich Raue (2007), S. 61–74
- [142] RAUE, E.: Alternative mathematical modelling in the analysis of reinforced concrete structures. In: *The 8. International Conference Modern Building Materials, Structures and Techniques*, Vilnius May 19-21. 2004
- [143] RAUE, E. ; BARTHL, J.: Berechnung von Zylinderschalen, Kreis- und Kreisringplatten mit elastisch-plastischem Materialverhalten mit Methoden der linearen und quadratischen Optimierung. In: *XII. IKM Weimar, Berichte Band I* (1990)
- [144] RAUE, E. ; BARTHL, J. ; KASSAHUN, W.: Beitrag zur Berechnung von umfangsgelagerten Rechteckplatten unter Berücksichtigung von Schnittkraftumlagerungen mit Hilfe der linearen und quadratischen Optimierung. In: *Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar* 35 (1989)
- [145] REGAN, P.E.: Shear in reinforced aerated concrete. In: *The international Journal of Lightweight Concrete* 1 (1979), S. 47–61
- [146] REHM, G.: *Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 138, Ernst & Sohn, 1961
- [147] REINECK, K.H.: Ein mechanisches Modell für Stahlbetonbauteile ohne Stegbewehrung. In: *Bauingenieur* 66 (1991), S. 157–165

Literaturverzeichnis

- [148] REINECK, K.H.: Ein mechanisches Modell für Stahlbetonbauteile ohne Stegbewehrung. In: *Bauingenieur* 66 (1991), S. 323–332
- [149] REINHARDT, H.W.: Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete. In: *Heron* Vol. 29 (1984)
- [150] REMMEL, G.: *Zum Zug- und Schubtragverhalten von Bauteilen aus hochfestem Beton*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 444, Ernst & Sohn, 1994
- [151] RICHARDS, T.H.: *Energy Methods in Stress Analysis*. Ellis Horwood Limited, 1977
- [152] RITTER, W.: Die Bauweise Hennebique. In: *Schweizerische Bauzeitung* (1899), S. 41–43
- [153] RITZ, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. In: *Journal für reine und angewandte Mathematik* Bd. 135 (1908), S. 1–61
- [154] ROMBACH, G.: *Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau*. Ernst und Sohn, 2007
- [155] ROOS, W.: *Zur Druckfestigkeit des gerissenen Stahlbetons in scheibenförmigen Bauteilen bei gleichzeitig wirkender Querkzugbelastung*. Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau, TU München, Heft 2, 1995
- [156] ROTS, J.G.: *Computational Modeling of Concrete Fracture*, Delft University of Technology, Diss., 1988
- [157] RÜSCH, H.: *Gas- und Schaumbeton, Schubsicherung von bewehrten Balken*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 121, Ernst & Sohn, 1956
- [158] RUSSWURM, D.: Betonstähle für den Stahlbetonbau. In: *Institut für Stahlbetonbewehrung e.V., München, Bauverlag GmbH* (1993)
- [159] SCHÄFFLER, H.: *Gas- und Schaumbeton, Druckfestigkeit nach verschiedener Lagerung*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 133, Ernst & Sohn, 1959
- [160] SCHÄFFLER, H.: *Gas- und Schaumbeton, Verankerung der Bewehrung*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 136, Ernst & Sohn, 1960
- [161] SCHLAICH, J. ; SCHAEFER, K. ; SCHELLING, G.: *Druck und Querkzug in bewehrten Betonelementen*. Fraunhofer IRB Verlag, 1982
- [162] SCHRAMM, R.: Porenbeton - Chronik einer Entwicklung. In: *Mauerwerk* 12 (2008), S. 346–350
- [163] SCHWARZ, P. ; STANKOWSKI, T. ; KIRMSE, H. ; LANGER, P. ; BERTRAM, D. ; BLASCHKE, R. ; LANGSDORF, A. ; FLASSENBERG, G.: *Porenbeton Bericht 23: Erläuterungen zu DIN 4223:2003*. Bundesverband Porenbeton, 2006
- [164] SEIFFART, E. ; MANTEUFFEL, K.: *Lineare Optimierung*. Teubner Verlag, Leipzig, 1985
- [165] SELL, R. ; ZELGER, C.: *Festigkeit und Verformung von Gasbeton unter zweiaxialer Zug-Druck-Beanspruchung und Versuche über den Verbund bei bewehrtem Gasbeton*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 209, Ernst & Sohn, 1970

- [166] SHORT, A.: Tests on the bond strength and durability of reinforced aerated concrete. In: *RILEM, Proceedings of the Symposium held in Göteborg 1960* (1962), S. 247–267
- [167] SIGRIST, V.: *Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern*, ETH Zürich, Diss., 1995
- [168] SOFTWAREDOKUMENTATION: *Nichtlineare Systemanalyse, Finite Elemente*. Infograph GmbH, 2010
- [169] SPECHT, M.: *Ein durchgängiges Ingenieurmodell zur Bestimmung der Querkrafttragfähigkeit im Bruchzustand aus Stahlbeton mit und ohne Vorspannung der Festigkeitsklassen C12 bis C115*. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Heft 453, Beuth Verlag, 1995
- [170] STADIE, R.: *Festigkeits- und Verformungsverhalten von kurzfaserverstärktem Porenbeton*, Technische Universität Berlin, Diss., 2008
- [171] STEGBAUER, A.: *Beitrag zur Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken mit wirklichkeitsnahen Materialgesetzen unter besonderer Berücksichtigung des Plattenbalkens*, TU München, Diss., 1974
- [172] STENGER, F.: *Tragverhalten von Stahlbetonscheiben mit vorgespannter externer Kohlenstofffaser-Schubbewehrung*, ETH Zürich, Diss., 2001
- [173] STÖCKER, H.: *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*. Verlag Harri Deutsch, 2007
- [174] SUIDAN, M. ; SCHNOBRICH, W.C.: Finite element analysis of reinforced concrete. In: *ASCE Journal of Structural Division* 99 (1973), S. 2109–2122
- [175] SZABO, I.: *Einführung in die Technische Mechanik*. Springer-Verlag GmbH, 1975
- [176] SZABO, I.: *Höhere Technische Mechanik*. Springer Verlag Berlin, 1977
- [177] TARTSCH, E.: *Bewertung der Dauerstandsfestigkeit von dampfgehärtetem Porenbeton auf der Grundlage von Kurzzeitversuchen*, Bauhaus-Universität Weimar, Diss., 2008
- [178] TAYLOR, H.P.J.: Shear Strength of Large Beams. In: *ASCE Journal, Journal of the Structural Division* 98 (1972), S. 2473–2490
- [179] THÜRLIMANN, B. ; GROB, J.: Bruchwiderstand und Bemessung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. In: *Schweizer Bauzeitung* 40 (1976)
- [180] THÜRLIMANN, B. ; GROB, J.: Ultimate shear strength and Design of Reinforced Concrete Beams under Bending and Shear. In: *IVBH Abhandlungen, Band 36 II* (1976), S. 105–120
- [181] TIMOSHENKO, S.: *Strength of Materials, Part 2: Advanced Theory and Problems*. CBS Publishers & Distributors, New Dehli, 2002
- [182] VECCHIO, F.J. ; COLLINS, M.P.: The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear. In: *Journal of the American Concrete Institute* 83 (1986), März/April, Nr. 2, S. 219–231

Literaturverzeichnis

- [183] VONK, R.A.: A micromechanical investigation of softening of concrete loaded in compression. In: *Heron* Vol. 38 (1993), S. 1–94
- [184] WALTHER, R.: Über die Berechnung der Schubtragfähigkeit von Stahl- und Spannbetonbalken - Schubbruchtheorie. In: *Beton- und Stahlbetonbau* (1962), S. 261–271
- [185] WALTHER, R. ; LEONHARDT, F.: Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme. In: *Beton- und Stahlbetonbau* (1962), S. 40–44
- [186] WANG, T. ; LU, M. ; WANG, L.: Stress Strain Relation for Concrete under Triaxial Loading. In: *16th ASCE Engineering Conference, University of Washington, Seattle, 2003*
- [187] WEBER, H. ; HULLMANN, H.: *Porenbeton Handbuch*. Bundesverband Porenbeton, 1998
- [188] WEHR, G.: *Untersuchungen zur Querkrafttragfähigkeit von querkraftbewehrten Elementen aus Porenbeton*, Bauhaus-Universität Weimar, Diss., 2001
- [189] WEIGLER, H. ; BECKER, G.: Zur Frage der Schubdruckfestigkeit von Beton. In: *Beton- und Stahlbetonbau* (1964), S. 101–105
- [190] WEIHE, S. ; KRÖPLIN, B. ; BORST, R. de: Classification of Smeared Crack Models Based on Material and Structural Properties. In: *International Journal of Solids and Structures* Vol. 35 (1998), S. 1289–1308
- [191] WEITZMANN, R.: *Bemessungskonzept für Stahlbetontragwerke auf der Grundlage deformationsbasierter Grenzzustandsbetrachtungen*, Bauhaus-Universität Weimar, Diss., 2000
- [192] WOLFENSBERGER, R.: *Traglast und optimale Bemessung von Platten*, ETH Zürich, Diss., 1964
- [193] ZIENKIEWICZ, O. C.: *Methode der finiten Elemente*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1977
- [194] ZILCH, K. ; ZEHETMAIER, G.: *Bemessung im konstruktiven Betonbau*. Springer Verlag, 2010
- [195] ZSUTTY, T.: Shear strength prediction for separate categories of simple beam tests. In: *ACI Journal* 68 (1971), S. 138–143
- [196] ZYCKOWSKI, M.: *Combined Loadings in the Theory of Plasticity*. PWN - Polish Scientific Publishers, 1981