

Ermittlung von Spannungen am Rand eines elastischen Kontinuums

1. Differentialform der Bestimmungsgleichungen

Gegeben sind die Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ eines Gebiet V . Die differentielle Form der linearen Elastizitätstheorie ist eine Randwertaufgabe zweiter Ordnung für die Feldfunktionen $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ und \mathbf{u} :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{Kinematik} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{E}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{Konstitutivgleichung} \quad (2)$$

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_0 = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{Gleichgewichtsbedingung} \quad (3)$$

Der Rand F des Gebietes besitzt die Außennormale \mathbf{n} . Zur Förderung der Übersichtlichkeit wird vorausgesetzt, daß die Menge der Randpunkte $\mathbf{x} \in F$ disjunkt in eine Menge F_u mit eingepprägten Verschiebungen \mathbf{u}_0 und in eine Menge F_s mit eingepprägten Randspannungen s_0 zerlegt werden kann:

$$\mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{s} \quad \forall \mathbf{x} \in F \quad \text{Spannungs-Randspannungsbeziehung} \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \forall \mathbf{x} \in F_u \quad \text{Verschiebungsrandbedingung} \quad (5)$$

$$s = s_0 \quad \forall \mathbf{x} \in F_s \quad \text{Spannungsrandbedingung} \quad (6)$$

Die differentielle Form ist für die Anwendung der Finite Elemente Methode ungeeignet. Es wird daher mit der Methode der gewichteten Reste die Arbeitsgleichung des erweiterten Prinzips virtueller Verschiebungen abgeleitet. Durch die Erweiterung werden zusätzlich äußere Randspannungen s an den Punkten des Randes F_u gewonnen. Die Bestimmung derartiger Spannungen aus den Auflagerkräften ist bereits zu einem frühen Zeitpunkt der Entwicklung der Finite Elemente Methode von verschiedenen Autoren berichtet worden [1]-[4]. Die systematische Einordnung in die generalisierte Methode der gewichteten Reste sowie die quantitative Beurteilung der Ergebnisse ist neuartig und Gegenstand dieses Beitrags.

2. Das Prinzip virtueller Verschiebungen

Für die Herleitung des Prinzips virtueller Verschiebungen wird ein Ansatz \mathbf{u}^h für die Verschiebungen im Gebiet V gewählt. Die Dehnung $\boldsymbol{\epsilon}^h$, die Spannung $\boldsymbol{\sigma}^h$ und die Randspannung s^h werden mit den Gleichungen (1), (2) und (4) aus dem Ansatz \mathbf{u}^h ermittelt. Weder für den Spannungszustand im Gebiet noch für den Spannungsvektor auf dem Rand wird ein eigener Ansatz gewählt. Von dem Ansatz für die Verschiebung \mathbf{u}^h wird gefordert, daß er die eingepprägten Werte \mathbf{u}_0 auf dem Verschiebungsrand F_u annimmt. Dadurch sind die Gleichungen (1), (2), (4) und (5) *a priori* befriedigt. Es verbleiben die Gleichungen (3) und (6) für die Anwendung der Methode der gewichteten Reste:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_0) dV + \int_{F_s} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{s} - s_0) dF = 0 \quad (7)$$

Nach Anwendung des Integralsatzes von Gauß auf den ersten Term der Gleichung (10) folgt:

$$\Leftrightarrow \int_V -\delta (\mathbf{D}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV + \int_{F_u, F_s} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{S}\mathbf{n} dF + \int_{F_s} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{s} - s_0) dF = 0 \quad (8)$$

Die Variationen $\delta \mathbf{u}$ der Verschiebung sind auf dem Rand F_u unzulässig und entfallen daher in Gleichung (8). Aus der Substitution der *a priori* befriedigten Gleichungen (1), (2) und (4) folgt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der konventionellen Form:

$$\Leftrightarrow \int_V \delta(\mathbf{D}\mathbf{u})^T \mathbf{E}(\mathbf{D}\mathbf{u}) dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV + \int_{F_s} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 dF \quad (9)$$

Die Vorgehensweise impliziert, daß Lösungen nur für solche Verschiebungs- und Spannungsverläufe gefunden werden können, die dem gewählten Ansatz entsprechen. Beim Aufstellen der algebraischen Form dieses Prinzips muß berücksichtigt werden, daß die Variationen auf dem Rand F_u unzulässig sind. Sind in einem System mit n Freiheitsgeraden k Knotenverschiebungen eingepreßt, so werden aus Gleichung (9) nur $n-k$ Gleichungen gewonnen. Die restlichen k Gleichungen liefert die Gleichung (5).

3. Das Prinzip virtueller Verschiebungen in erweiterter Form

Für die Herleitung des erweiterten Prinzips virtueller Verschiebungen wird ein Ansatz \mathbf{u}^h für die Verschiebungen im Gebiet V und ein unabhängiger Ansatz \mathbf{s}^h für die Randspannung auf dem gesamten Außenrand F , aber nicht im Inneren des Gebietes V gewählt. Der Dehnungszustand ϵ^h und der Spannungszustand σ^h wird mit den Gleichungen (1) und (2) aus dem Ansatz \mathbf{u}^h ermittelt. Der Ansatz \mathbf{s}^h für die Randspannung wird so gewählt, daß er auf dem Spannungsrand F_s die eingepreßten Werte \mathbf{s}_0 annimmt. Dadurch sind die Gleichungen (1), (2) und (6) *a priori* befriedigt.

Die Gleichung (4) drückt die Verträglichkeit der Randspannung $\mathbf{S}^h \mathbf{n}$, die mit den Gleichungen (1) und (2) aus dem Ansatz \mathbf{u}^h ermittelt wird, mit der unabhängigen Randspannung des Ansatzes \mathbf{s}^h aus. Diese Gleichung ist im Gegensatz zum Prinzip in der konventionellen Form hier wegen der Unabhängigkeit der Ansätze \mathbf{u}^h und \mathbf{s}^h nicht befriedigt. Weiterhin wird im Gegensatz zum Prinzip in der konventionellen Form nicht gefordert, daß der Ansatz \mathbf{u}^h für die Verschiebung am Rand F_u die eingepreßten Werte \mathbf{u}_0 auf dem Verschiebungsrand F_u annimmt. Es verbleiben daher die Gleichungen (3), (4) und (5) für die Anwendung der Methode der gewichteten Reste:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_0) dV + \int_{F_u, F_s} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{s} - \mathbf{S} \mathbf{n}) dF + \int_{F_u} \delta \mathbf{s}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dF = 0 \quad (10)$$

Nach Anwendung des Integralsatzes von Gauß auf den ersten Term der Gleichung (10) folgt:

$$\Leftrightarrow \int_V -\delta(\mathbf{D}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV + \int_{F_u, F_s} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s} dF + \int_{F_u} \delta \mathbf{s}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dF = 0 \quad (11)$$

Die Variationen $\delta \mathbf{u}$ der Verschiebung sind auf dem gesamten Rand F zulässig. Aus der Substitution der *a priori* befriedigten Gleichungen (1), (2) und (6) folgt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der erweiterten Form:

$$\Leftrightarrow \int_V \delta(\mathbf{D}\mathbf{u})^T \mathbf{E}(\mathbf{D}\mathbf{u}) dV - \int_{F_u} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s} dF - \int_{F_u} \delta \mathbf{s}^T \mathbf{u} dF = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV + \int_{F_s} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 dF - \int_{F_u} \delta \mathbf{s}^T \mathbf{u}_0 dF \quad (12)$$

Die Vorgehensweise impliziert, daß bei der Formulierung der differentiellen Form der Bestimmungsgleichungen keine der Gleichungen, die nicht *a priori* befriedigt sind, in eine der anderen Gleichungen substituiert wird. Das gilt insbesondere für die Substitution von Gleichung (4) in Gleichung (6).

4. Algebraische Form des erweiterten Prinzips

Die Integralgleichung (12) wird in eine Summe von Elementintegralen zerlegt. Dafür wird der globale Ansatz für die Verschiebungen als Summe e lokaler Ansätze mit C_0 -Kontinuität ausgedrückt. Entsprechend der Zerlegung des Gebietes wird der globale Ansatz für die Randspannung auf dem Verschiebungsrand F_u als Summe r lokaler Ansätze mit C_0 -Kontinuität ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \sum_e \mathbf{u}_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) & \mathbf{u}_e(\mathbf{x}(\mathbf{z})) &= \phi_e(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{u}}_e & \hat{\mathbf{u}}_e &= \mathbf{R}_e \hat{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{x} \in V \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) &= \sum_r \mathbf{s}_r(\mathbf{x}(\mathbf{z})) & \mathbf{s}_r(\mathbf{x}(\mathbf{z})) &= \boldsymbol{\omega}_r(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{s}}_r & \hat{\mathbf{s}}_r &= \mathbf{R}_r \hat{\mathbf{s}} & \forall \mathbf{x} \in F_u \end{aligned} \quad (13)$$

Substitution der Ansätze (13) in die Arbeitsgleichung (12) liefert folgende Systembeiträge:

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{V_e} \delta(\mathbf{D}\mathbf{u})^T \mathbf{E}(\mathbf{D}\mathbf{u}) dV &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} && \text{Steifigkeit} && \mathbf{K} \\ \sum_r \int_{F_r} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s} dF &= \sum_r \delta \hat{\mathbf{u}}_r^T \mathbf{C}_r \hat{\mathbf{s}}_r = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{s}} && \text{Randgleichgewicht} && \mathbf{C} \\ \sum_e \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_0 dV &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \hat{\mathbf{p}}_{0e} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{p}}_0 && \text{Volumenlast} && \hat{\mathbf{p}}_0 \\ \sum_r \int_{F_r} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s}_0 dF &= \sum_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \hat{\mathbf{s}}_{0e} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{s}}_0 && \text{Flächenlast} && \hat{\mathbf{s}}_0 \\ \sum_r \int_{F_r} \delta \mathbf{s}^T \mathbf{u}_0 dF &= \sum_r \delta \hat{\mathbf{s}}_r^T \hat{\mathbf{u}}_{r0} = \delta \hat{\mathbf{s}}^T \hat{\mathbf{u}}_0 && \text{Flächenverschiebung} && \hat{\mathbf{u}}_0 \end{aligned} \quad (14)$$

Jede Variation der Stützwerte für sowohl die Verschiebungen im Gebiet V als auch die Randspannungen auf dem Rand F_u liefert eine Zeile des nachfolgenden symmetrischen, positiv semidefiniten, regulären, linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{u}} \\ \hline \hat{\mathbf{s}} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{p}}_0 + \hat{\mathbf{s}}_0 \\ \hline \hat{\mathbf{u}}_0 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{su} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{K}_{us} & \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{u}}_s \\ \hline \hat{\mathbf{u}}_u \\ \hline \hat{\mathbf{s}} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{p}}_{0s} + \hat{\mathbf{s}}_{0s} \\ \hline \hat{\mathbf{p}}_{0u} + \hat{\mathbf{s}}_{0u} \\ \hline \hat{\mathbf{u}}_0 \\ \hline \end{array} \quad (15)$$

Das Gleichungssystem (15) wird in drei positiv definite, reguläre lineare Gleichungssysteme zerlegt. Dazu wird der Stützwertevektor der Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}$ aufgeteilt in den Vektor $\hat{\mathbf{u}}_u$ der Stützwerte auf dem Verschiebungsrand F_u und in den Vektor $\hat{\mathbf{u}}_s$ für die übrigen Stützwerte. Aus der dritten Zeile der Zerlegung folgt ein symmetrisches Gleichungssystem für die unbekanntenen Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_u$:

$$\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{u}}_u = \hat{\mathbf{u}}_0 \quad (16)$$

Aus der Substitution der Lösung $\hat{\mathbf{u}}_u$ der Gleichung (16) in die erste Zeile der Zerlegung folgt ein symmetrisches Gleichungssystem für die unbekanntenen Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_s$:

$$\mathbf{K}_{ss} \hat{\mathbf{u}}_s = \hat{\mathbf{p}}_{0s} + \hat{\mathbf{s}}_{0s} - \mathbf{K}_{su} \hat{\mathbf{u}}_u \quad (17)$$

Aus der Substitution der Lösung $\hat{\mathbf{u}}_s$ aus Gleichung (17) und der Lösung $\hat{\mathbf{u}}_u$ aus Gleichung (16) in die zweite Zeile der Zerlegung folgt ein symmetrisches Gleichungssystem für die stetige Randspannungsverteilung $\hat{\mathbf{s}}$ auf dem Rand F_u :

$$\mathbf{C} \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{K}_{us} \hat{\mathbf{u}}_s + \mathbf{K}_{uu} \hat{\mathbf{u}}_u - \hat{\mathbf{p}}_{0u} - \hat{\mathbf{s}}_{0u} \quad (18)$$

Wenn der gegebene Verschiebungszustand $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ auf dem Rand F_u vom Ansatz für die Verschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ exakt erfaßt wird, dann nehmen die mit Gleichung (16) berechneten Stützwerte $\hat{\mathbf{u}}_u$ genau den gegebenen Wert an dieser Stelle an. Dann ist auch die Lösung für die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_s$ aus Gleichung (17) identisch zu dem Ergebnis, die aus der Anwendung des Prinzips in der konventionellen Form erhalten wird.

Die rechte Seite der Gleichung (18) liefert das integrale Residuum bezüglich des inneren Gleichgewichts, die Auflagerkräfte. Das Ergebnis $\hat{\mathbf{s}}$ aus Gleichung (18) ist ein Ausdruck für die verteilten Auflagerkräfte, den Randspannungen auf F_u . Sie stehen im Gleichgewicht mit den angreifenden Lasten. Diese Randspannungen sind Teil des erweiterten Prinzips und werden im Gegensatz zur Anwendung des konventionellen Prinzips nicht durch eine nachgeschaltete Gleichgewichtsbetrachtung ermittelt.

5. Anwendung

Anhand einer Modellaufgabe werden die durch die Erweiterung des Prinzips gewonnenen Randspannungen mit denen aus einer analytischen Lösung der Aufgabe sowie den durch Differentiation des Verschiebungsansatz gewonnenen Spannungen verglichen. Betrachtet wird eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit einem kreisförmigen Einschluß, dessen Radius R ist. Die Materialkonstanten von Lamé werden für den Einschluß mit μ_1 und λ_1 sowie für die Scheibe mit μ_2 und λ_2 bezeichnet. Der Einschluß unterliegt einem initialen, eingepprägten konstanten dilatatorischen Eigendehnungszustand des Betrags d_0 . Aufgrund der Rotationssymmetrie hängt die analytische Lösung der Aufgabe in Zylinderkoordinaten r, θ nur von der Koordinate r ab. Aus dem gleichen Grund sind auch die Verschiebung $u_\theta(r)$, die Dehnung $\epsilon_{r\theta}(r)$ sowie die Spannung $\sigma_{r\theta}(r)$ Null. Die analytische Lösung lautet:

$$\begin{aligned} u_r(r) &= C r \quad \forall r : r \leq R & u_r(r) &= C \frac{R^2}{r} \quad \forall r : r > R \\ \text{mit } C &= \frac{(\mu_1 + \lambda_1) d_0}{\mu_1 + \lambda_1 + \mu_2} \end{aligned} \quad (19)$$

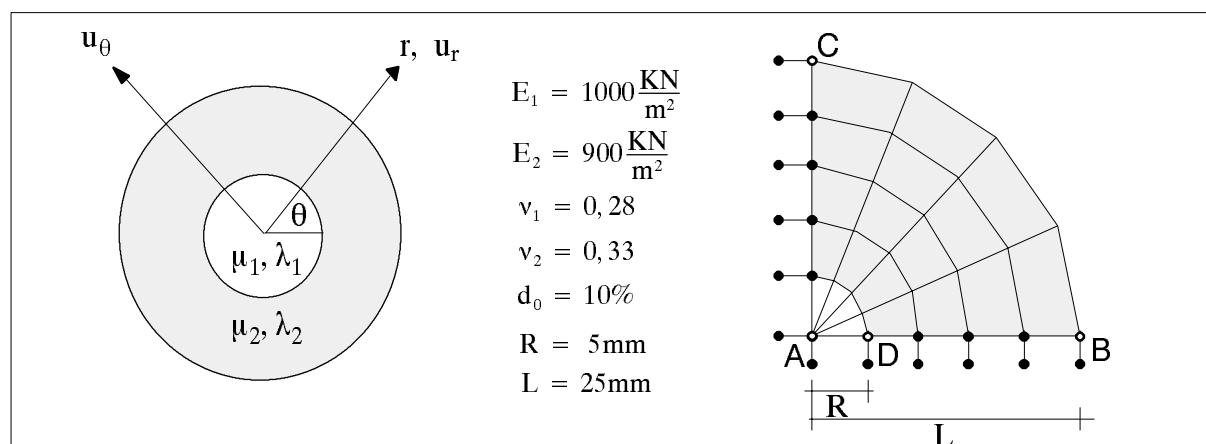


Bild 5.1 : Unendliche Scheibe mit Einschluß

In Bild 5.1 sind die Aufgabe, die gewählten Abmessungen und Materialparameter sowie eine Elementierung des Lösungsgebietes dargestellt. Für die Berechnung wird ein kreisförmiger Bereich aus dem Kontinuum geschnitten. Wegen der Symmetrie in Geometrie und Belastung wird nur ein Viertel des Ausschnitts modelliert. Die Randstücke zwischen den Punkten AB und AC des Symmetrierandes sind in der θ -Richtung gefesselt. Das Randstück BC gehorcht (19).

Der Einschluß wird mit linearen Dreieckselementen genähert. Für den übrigen Ausschnitt werden bilineare Viereckselemente eingesetzt. In Bild 5.2 ist die Radialverschiebung u_r , die Radialdehnung ϵ_{rr} und die Ringdehnung $\epsilon_{\theta\theta}$ der analytischen Lösung in Abhängigkeit der Koordinate r aufgetragen. Zusätzlich ist die Näherungslösung für u_r markiert, die mit der in Bild 5.1 dargestellten Elementierung durch Anwendung der Gleichung (17) gewonnen wird. Die Näherung für die Dehnungen ϵ_{rr} sowie $\epsilon_{\theta\theta}$ wird aus Gleichung (1) bestimmt. Dargestellt ist deren Wert im Flächenschwerpunkt des Elementes. Die Verschiebungen und dementsprechend die Dehnungen der Näherungslösung sind erwartungsgemäß zu gering. Die Diskontinuität in der Radialdehnung wird qualitativ reproduziert. Diese Ergebnisse sind identisch zu denjenigen, die aus der Anwendung des Prinzips in konventioneller Form gewonnen werden.

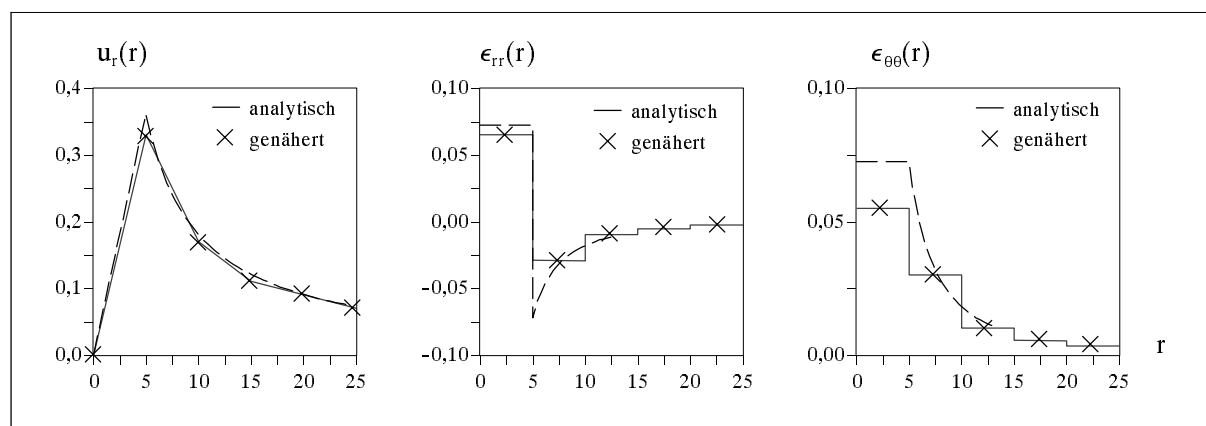


Bild 5.2 : Verschiebungen $u_r(r)$ sowie Dehnungen $\epsilon_{rr}(r)$ und $\epsilon_{\theta\theta}(r)$

Die Außennormale am Rand AB ist gleich an $\mathbf{n} = [0 \ -1]^T$. Dort ist die Randspannung \mathbf{s} der analytischen Lösung gleich an $\mathbf{s} = [0 \ -\sigma_{\theta\theta}]^T$. Das erweiterte Prinzip führt per Definitionem auf die exakte Lösung für die erste Komponente dieses Vektors. Von besonderem Interesse ist die Diskontinuität der analytischen Lösung an der Stelle $r = R$ für die zweite Komponente dieses Vektors. Mittels der Berechnung von Gleichung (18) liefert das erweiterte Prinzip eine Näherung für diese Komponente. Dabei ist wegen des C_0 -kontinuierlichen Ansatzes für die Randspannung \mathbf{s} auf dem Rand F_u der Verlauf dieser Näherung stetig. In Bild 5.3, links, ist der Verlauf dieser Näherung zusammen mit der analytischen Lösung und der Näherungslösung aus Differentiation der Verschiebungen aufgetragen. Die Spannungen aus Differentiation vermögen die Diskontinuität der Ringspannung $\sigma_{\theta\theta}(r)$ an der Stelle $r = R$ qualitativ wiederzugeben. Das Ergebnis aus der Anwendung der Erweiterung des Prinzips ist aufgrund der Annahme der Stetigkeit der Randspannungen kontinuierlich und damit unbefriedigend.

Das unbefriedigende Ergebnis kann durch geeignete Schnittführung verbessert werden: Die Verschiebungslösung wird für das gesamte Lösungsgebiet einmalig ermittelt. Der Einschluß wird aus der Scheibe ausgeschnitten. Die Analyse der Randspannung auf dem Schnitttrand wird mit der Gleichung (18) für das Randstück AD sowie das Randstück DB separat durchgeführt. Das damit erzielte Ergebnis für die Ringspannung $\sigma_{\theta\theta}$ ist auf der rechten Seite von Bild 5.3 dargestellt. Es ist ersichtlich, daß durch die Trennung des Lösungsgebiet in Teilgebiete mit homoge-

ner Materialbelegung das Ergebnis insbesondere an der Stelle $r = R$ wesentlich verbessert wird.

Eine verbesserte Beurteilung der Randspannung wird durch die Integration der Differenz von analytischer Ringspannung $\sigma_{\theta\theta}(r)$ zur Näherungslösung längs des Randes AB angestrebt. Das Integral kennzeichnet den Fehler in der Normalkraft. Dieser Fehler ist für die Erweiterung des Prinzips per Definitionem immer Null. Weiterhin das Quadrat der Abweichung integriert. Dafür wird das Randstück AB in die Teilstücke AD und DC zerlegt. In Bild 5.4 stellt sind die Abweichungen für verschiedene Gitter in Abhängigkeit derer Knotenanzahl k dargestellt.

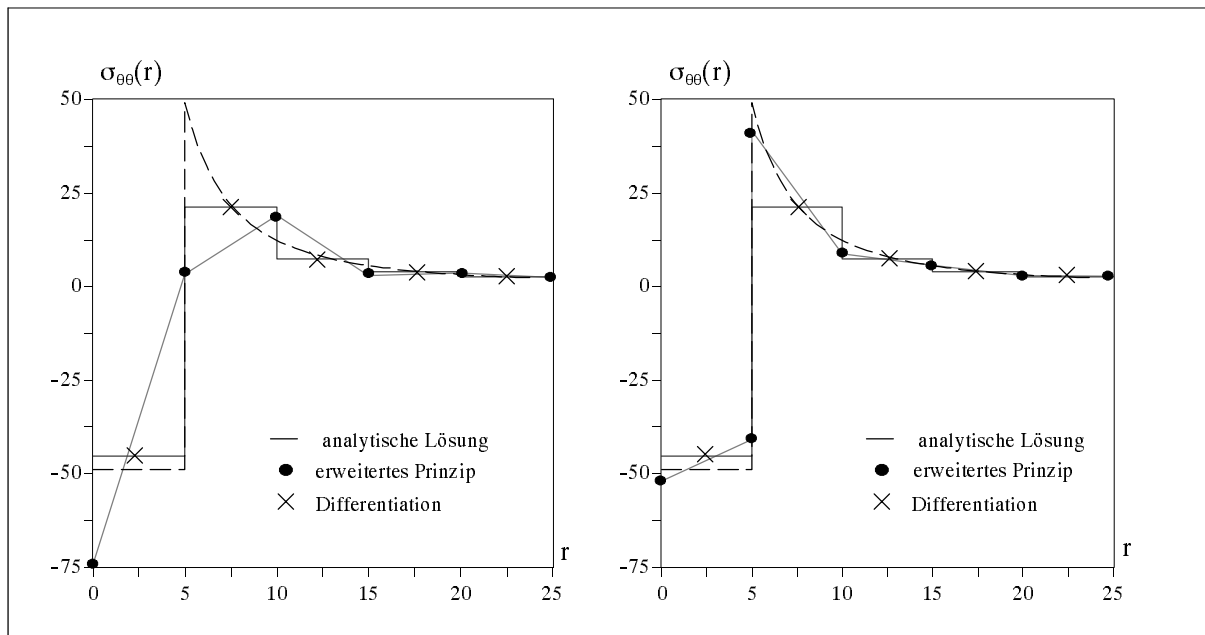


Bild 5.3 : Ringspannung $\sigma_{\theta\theta}(r)$ inhomogen (links) und homogen (rechts)

Der Fehler in der Normalkraft beträgt selbst für die feinste Elementierung noch 14% zum exakten Wert aus dem erweiterten Prinzip. Das Quadrat der Abweichung der Randspannung aus dem erweiterten Prinzip ist erheblich geringer als diejenige, die mit den Spannungen aus Differentiation bestimmt wird. Die Konvergenzraten, die aus den Ausgleichsgeraden der dargestellten Kurven ermittelt werden, sind weitgehend identisch.

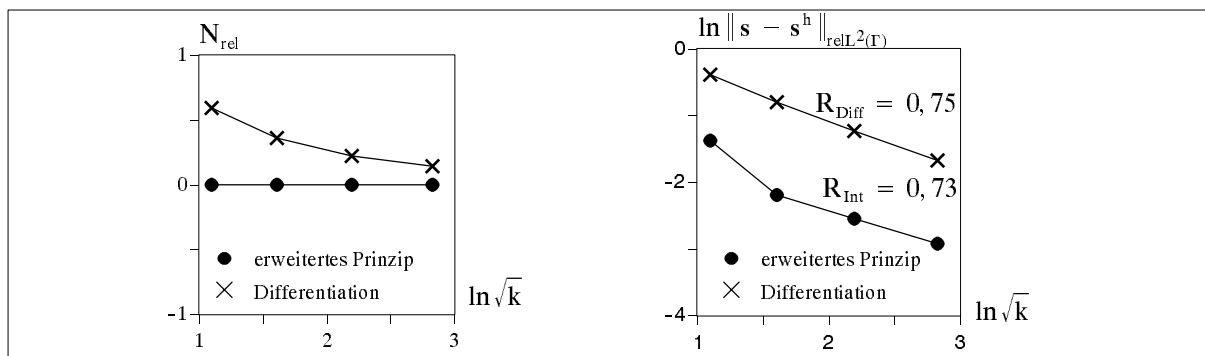


Bild 5.4 : Konvergenz N_{rel} und $\|s - s^h\|_{relL^2(\Gamma)}$ auf dem Rand Γ_{AB}

6. Zusammenfassung

Durch systematische Anwendung der Methode der gewichteten Reste konnte die Erweiterung des Prinzips virtueller Verschiebungen hergeleitet werden. Das zugehörige Funktional besitzt ein ausgeprägtes Minimum, sodaß eine robuste und effiziente numerische Ausführung gewährleistet ist. Aus der Erweiterung werden Randspannungen am Verschiebungsrand erhalten, die im Gleichgewicht zu den Belastungen stehen. Die Güte dieser Spannungen wurde an einer Modellaufgabe diskutiert. Dabei wurde durch Integration der Abweichung der Randspannung zur analytischen Lösung das Gleichgewicht für die Randspannung aus dem erweiterten Prinzip nachgewiesen und der Fehler im Gleichgewicht für die Randspannung, die durch Differentiation des Verschiebungsfeldes gewonnen wird, quantifiziert. Im Falle inhomogener Materialien und an Ecken des Lösungsgebietes müssen besondere Maßnahmen getroffen werden, um auch bei der Integration des Quadrats der Abweichung bessere Ergebnisse aus der Erweiterung des Prinzips zu erhalten. Die Konvergenzrate für die Randspannungen aus dem erweiterten Prinzip ist auch für andere untersuchte Aufgaben in gutem Einklang mit der aus Differentiation des Verschiebungsfeldes.

Literatur

- [1] Argyris J./ Mlejnek H.-P.
Die Methode der Finiten Elemente, Bd.2
Friedr. Vieweg&Sohn, Braunschweig, 1987
- [2] Babuska I.
The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers
Numer. Math. 20, S.179-192, 1973
- [3] Pahl, P. J.
Zur Berechnung von Spannungen in großflächigen Auflagern von Spezialbauwerken
Festschrift zum Ehrenkolloquium Prof. E. Hampe, HAB Weimar, 1993
- [4] Stein, E. / Ahmad, R.
An equilibrium method for stress calculation using finite element displacement models
Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg. 10 , S.175-198, 1977