

# Numerische Approximation makroskopischer Verkehrsmodelle mit der Methode der Finiten Elemente

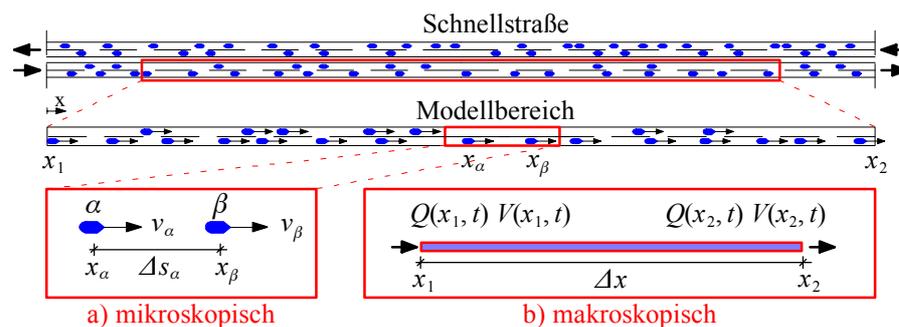
Dipl.-Ing. Martin Rose, Dr.-Ing. Peter Milbradt  
 Institut für Bauinformatik, Universität Hannover

## Einleitung

Die in den letzten Jahren stark angestiegene Mobilität im Personen- und Güterverkehr hat die Leistungsfähigkeit, Sicherheit und Umweltverträglichkeit der Verkehrssysteme nachhaltig beeinträchtigt. Zur Lösung der bestehenden Verkehrsprobleme ist eine ganzheitliche Verkehrsplanung mit dem Ziel der bestmöglichen Nutzung der bestehenden Verkehrsanlagen erforderlich. Dazu zählt unter anderem die Verkehrsleittechnik zur Steuerung von Verkehrsabläufen auf Schnellstraßen. Für eine Vielzahl von Maßnahmen der Verkehrsleittechnik reicht es nicht aus, lediglich den aktuellen Verkehrszustand mit Messungen zu erfassen. Um möglichst wirkungsvolle Steuerungen zu gewährleisten, sind darüber hinaus dynamische Verkehrsprognosen erforderlich. Hierzu werden Echtzeitsimulationen von Verkehrsabläufen benötigt, die gut mit makroskopischen Verkehrsmodellen durchgeführt werden können. Makroskopische Modelle bilden den Verkehr als kontinuierliche Fahrzeugströme ab. Es besteht daher eine gewisse Analogie zu den Modellen der Strömungsmechanik. In diesem Artikel wird gezeigt, dass sich numerische Verfahren, insbesondere die Methode der Finiten Elemente, die sich zur Lösung von Modellen der Strömungsmechanik bewährt haben, auch zur Lösung makroskopischer Verkehrsmodelle eignen.

## Grundlagen makroskopischer Verkehrsmodelle

Der Verkehrsablauf auf einer Schnellstraße wird durch die Bewegung mehrerer Fahrzeuge in dieselbe Richtung auf jeweils einer Fahrbahn charakterisiert. Zur Modellierung dieses Verkehrsablaufs, bei der die Betrachtung des Bereichs einer Richtungsfahrbahn ausreicht (Abbildung 1 oben), existiert eine Vielzahl von Modellansätzen. Neben mikroskopischen Modellen, die den Verkehrsablauf als Menge von Einzelfahrzeugen abbilden (Abbildung 1a), stellen makroskopische Modelle, die den Verkehrsablauf als kontinuierlichen Fahrzeugstrom beschreiben (Abbildung 1b), die Grundlage für Verkehrsprognosen dar.



**Abbildung 1:** Mikroskopische und makroskopische Verkehrsmodellierung

Die Beschreibung des Verkehrsablaufs durch makroskopische Modelle beschränkt sich im Gegensatz zu mikroskopischen Modellen ausschließlich auf makroskopische Größen. Zwei dieser Größen werden an Querschnitten der Richtungsfahrbahn gemessen. Dies sind zum einen der Verkehrsfluß  $Q(x, t)$ , der die Fahrzeuganzahl  $N$  pro Zeitintervall  $\Delta t$  an einem Querschnitt  $x$  beschreibt, und zum anderen die mittlere Geschwindigkeit  $V(x, t)$ , die das Mittel der Geschwindigkeiten aller Fahrzeuge  $v_\alpha$  bei  $x$  im Intervall  $\Delta t$  darstellt:

$$Q(x, t) := N/\Delta t \quad V(x, t) := \frac{1}{N} \sum_{t \leq t_\alpha \leq t + \Delta t} v_\alpha(x) \quad (1)$$

Ein Übergang dieser mittleren Werte auf integrale Größen führt zur Modellvorstellung des Verkehrsablaufs als ein Kontinuum. Mit der Annahme, die Fahrzeuge gedanklich zu einem Kontinuum “verflüssigt” oder “verdampft” zu haben, lassen sich die makroskopischen Größen unabhängig von der Fahrzeuganzahl bestimmen. So gilt etwa in den makroskopischen Verkehrsmodellen analog zur Strömungsmechanik die Flußrelation für ein Kontinuum:

$$Q(x, t) = \frac{N \Delta x}{\Delta x \Delta t} = \rho(x, t)V(x, t) \quad (2)$$

Hiermit wird die Verkehrsdichte  $\rho(x, t)$  eingeführt. Die Bedeutung der Fahrzeuganzahl  $N$  muß durch die Annahme eines Kontinuums für den Verkehrsablauf neu definiert werden, da  $N$  in einem Kontinuum nicht mehr einer Summe von Einzelfahrzeugen entsprechen kann. Sinnvoll ist die gedankliche Gleichsetzung von  $N$  mit der Masse eines homogenen Körpers und so mit einem Integral der Dichte  $\rho(x, t)$  über dem betrachteten Streckenabschnitt  $\Delta x$ :

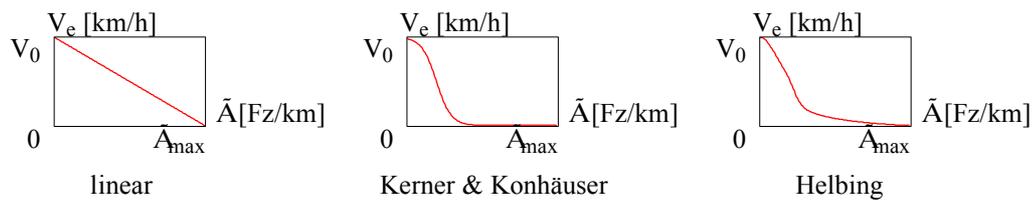
$$N = \int_{\Delta x} \rho(x, t) dx \quad (3)$$

Makroskopische Verkehrsmodelle bestehen aus mindestens zwei Bestimmungsgleichungen: Analog zur Strömungsmechanik beschreibt die Kontinuitätsgleichung (4) unter Berücksichtigung des Massenerhalts die zeitliche Änderung der Verkehrsdichte. Die Geschwindigkeitsgleichung (5) beschreibt die zeitliche Änderung der mittleren Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} + \rho(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (V_e(\rho) - V(x, t)) \quad (5)$$

Die beiden ersten Terme der linken Seite der Geschwindigkeitsgleichung (5) stellen die lokale und konvektive Beschleunigung dar. Der dritte Term wird Antizipationsterm genannt. Er bildet den Einfluß des stromabwärtigen Verkehrsablaufs in Form des Verkehrsdrucks  $P$  auf den Zustand am Ort  $x$  ab. Der Term der rechten Seite heißt Anpassungsterm. Er stellt die Anpassung der mittleren Geschwindigkeit  $V(x, t)$  an eine Gleichgewichtsgeschwindigkeit  $V_e(\rho)$  mit einer Anpassungszeit  $\tau$  dar.  $V_e(\rho)$  beschreibt die dichteabhängige mittlere Geschwindigkeit im homogenen und stationären Zustand des Verkehrsablaufs. Da ein solcher Zustand praktisch nicht messbar ist, gibt es für das sogenannte Fundamentaldiagramm  $V_e(\rho)$  eine Vielzahl von unterschiedlichen Vorschlägen (Abbildung 2):



**Abbildung 2:** Verschiedene Fundamentaldiagramme  $V_e(\rho)$

Zur allgemeinen Formulierung existiert eine große Anzahl verschiedenartiger makroskopischer Verkehrsmodelle. Im folgenden wird am Beispiel des Modells von Kerner und Konhäuser [2] die numerische Umsetzung makroskopischer Verkehrsmodelle gezeigt. Das Modell zeichnet sich durch eine dichteabhängige Druckparametrisierung mit konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_0^2$  und durch einen zusätzlichen Diffusionsterm zur Abbildung einer Verkehrszähigkeit mit konstanter Viskosität  $\mu$  aus. Die Gleichung (5) erscheint so für das Modell von Kerner und Konhäuser wie eine Navier-Stokes-Gleichung:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho(x, t)} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{\tau} (V_e - V(x, t)) \quad (6)$$

## Numerische Umsetzung

Zur Simulation des Verkehrsablaufs auf einer Schnellstraße mit Hilfe eines makroskopischen Verkehrsmodells ist eine numerische Näherung ihrer kontinuierlichen Modellansätze erforderlich, da im allgemeinen keine geschlossene analytische Lösung existiert. Die nichtlinearen orts- und zeitabhängigen partiellen Differentialgleichungen (4) und (5) sind mit ihren Anfangs- und Randbedingungen durch numerische Verfahren in eine diskrete Modellformulierung zu überführen. Dazu wird hier das Modell von Kerner und Konhäuser in eine Matrixschreibweise mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{u}(x, t)$  überführt:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \mathbf{f} \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho(x, t) \\ V(x, t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} V(x, t) & \rho(x, t) \\ \frac{c_0^2}{\rho(x, t)} & V(x, t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\rho(x, t)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{V_e(\rho) - V(x, t)}{\tau} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sowohl das Modell von Kerner und Konhäuser als auch alle anderen makroskopischen Verkehrsmodelle werden derzeit mit der Methode der Finiten Differenzen gelöst. Aufgrund des dominanten Transportcharakters der Gleichungen muß dabei ein hoher Aufwand zur Stabilisierung getrieben werden. Ausgehend von den guten Erfahrungen beim Einsatz Finiter Elemente in der Strömungsmechanik wird eine Realisierung mit der Methode der Finiten Elemente für makroskopische Verkehrsmodelle vorgestellt.

Mit der Methode der Finiten Elemente wird eine Ortsapproximation vorgenommen, die formal von der Näherung in der Zeit getrennt betrachtet werden kann. Die Finite-Elemente-Approximation ergibt ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem, das mit standardisierten Zeitschrittverfahren gelöst wird.

Für die Herleitung der Finiten-Elemente-Approximation wird zunächst der unendliche Raum der Lösungsfunktionen durch einen endlichen Teilraum ersetzt. Dieser Teilraum wird durch  $N$  Ansatzfunktionen  $\phi_i(x)$  aufgespannt:

$$\mathbf{u}(x, t) \rightarrow \mathbf{u}_h(x, t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{c}_i(t) \phi_i(x), \quad \mathbf{c}_i(t) = [\rho_i(t) \quad V_i(t)]^T \quad (8)$$

Das Ersetzen des Zustandsvektors  $\mathbf{u}(x, t)$  durch seine Approximation  $\mathbf{u}_h(x, t)$  führt zu einem Defekt  $\mathbf{d}(\mathbf{c}_i)$  der Differentialgleichungen (7):

$$\mathbf{d}(\mathbf{c}_i) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \frac{\partial \mathbf{c}_i(t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A} \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \mathbf{c}_i(t) - \sum_{i=1}^N \mathbf{B} \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} \mathbf{c}_i(t) - \mathbf{f} \quad (9)$$

Ziel ist es nun, diesen Defekt  $\mathbf{d}(\mathbf{c}_i)$  zu minimieren. Erfolgt die Minimierung durch Orthogonalisierung des Defekts bezüglich des Raums der Ansatzfunktionen, so ergibt sich das Standard-Galerkin-Verfahren. Für die Orthogonalisierung wird das Skalarprodukt aus  $\mathbf{d}(\mathbf{c}_i)$  und jeder der  $N$  Ansatzfunktionen  $\phi_j(x)$  zu Null gesetzt:

$$\int_0^{\Delta x} \phi_j(x) \mathbf{d}(\mathbf{c}_i) dx = \mathbf{0} \quad (10)$$

Das Standard-Galerkin-Verfahren neigt bei Transportdominanz der Gleichungen zu physikalisch unrealistischen Schwingungen in der Lösung. Durch Kombination mit einem Verfahren, das die Lösung eher glättet, wird nun versucht, die nicht gewünschten Schwingungen zu unterdrücken. Auf diese Weise entsteht ein Petrov-Galerkin-Verfahren:

$$\int_0^L \left( \mathbf{I} \phi_j(x) + \alpha \mathbf{A} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \right) \mathbf{d}(\mathbf{c}_i) dx = 0 \quad (11)$$

Die Zahl  $\alpha$  wird als Upwinding-Koeffizient bezeichnet. Ein optimaler Upwinding-Koeffizient  $\alpha_{opt}$  konnte für matrizenförmige Vorfaktoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  in Vektorgleichungen wie (7) bisher nicht gefunden werden. Für skalarwertige Vorfaktoren läßt sich jedoch  $\alpha_{opt}$  bei einer äquidistant in  $\Delta x$  eingeteilten Strecke herleiten und beweisen [1]:

$$\alpha_{opt} = \frac{|\beta_{opt}| \Delta x}{2|a|} \quad \beta_{opt} = \coth(|Pe|) - \frac{1}{|Pe|} \quad Pe := \frac{a}{b} \Delta x \quad (12)$$

Die dabei verwendete Peclet-Zahl  $Pe$  beschreibt das Verhältnis der Konvektion zur Diffusion. Bei dem Versuch, die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  durch repräsentative Skalare  $a$  und  $b$  zu ersetzen, hat sich die naheliegende Verwendung der Spektralnorm  $\|\cdot\|_2$  als ungeeignet erwiesen. Die Wahl des Betrags vom betragsmäßig größten Eigenwert hat dagegen in numerischen Simulationen zu sehr guten Ergebnissen geführt. Der Grund hierfür könnte in der Analogie zur Berechnung der Charakteristik der zugrundeliegenden Gleichungen zu sehen sein. Ein Beweis hierfür gibt es jedoch noch nicht. Angewandt auf das Modell von Kerner und Konhäuser ergeben sich so aus den Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  die skalaren Größen  $a = V + c_0$  und  $b = \mu/\rho$ . Eingesetzt in Gleichung (11) ergibt sich damit ein Upwinding-Koeffizient von:

$$\alpha = \frac{|\coth(|Pe|) - 1/|Pe|| \Delta x}{2(V + c_0)}, \quad Pe = \frac{(V + c_0) \Delta x}{\mu/\rho} \quad (13)$$

Die analytische oder numerische Integration der Gleichung (11) führt unter Verwendung linearer Ansatzfunktionen zum globalen Gleichungssystem:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{M} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 4I & I & & & I \\ I & 4I & I & & \\ & I & \ddots & \ddots & I \\ & & \ddots & I & 4I \\ I & & & I & 4I \end{bmatrix} + \frac{a}{2} \begin{bmatrix} & -A & & & A \\ A & & -A & & \\ & A & & \ddots & \\ & & \ddots & A & -A \\ -A & & & & A \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \vdots \\ \dot{c}_N \end{bmatrix} \quad (14)$$

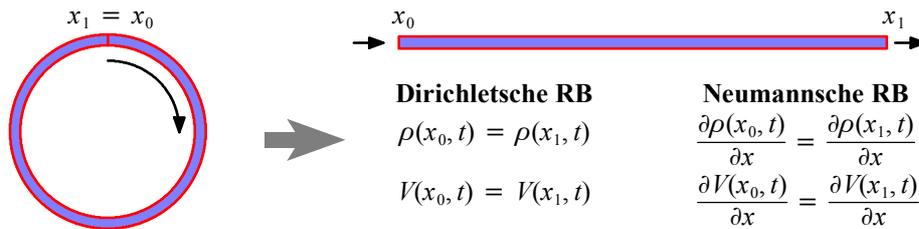
Die Lösung des Gleichungssystems (14) kann entweder durch die Bildung der inversen Matrix  $\mathbf{M}^{-1}$  oder die Verwendung eines Gleichungslösers erfolgen. In Zusammenhang mit der Zeitapproximation kann bei hinreichend kleinem Zeitschritt die Matrix  $\mathbf{M}$  auf eine Diagonalmatrix reduziert werden, indem die Nebendiagonalen für den vorhergehenden Zeitpunkt berechnet und von der rechten Seite subtrahiert werden:

$$\mathbf{M}_{diag} \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{r} - \mathbf{M}_{rest} \dot{\mathbf{c}}_{alt}, \quad \mathbf{M}_{diag} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 4I & & \\ & \ddots & \\ & & 4I \end{bmatrix} \quad (15)$$

Auf diese Weise ergibt sich ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem, das sich mit standardisierten Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen bestimmen läßt. Die Dynamik der beschreibenden Größen legt eine automatische Schrittweitensteuerung nahe. Die verwendete Steuerung stellt sicher, dass zum einen der Zeitschritt immer kleiner als der Courant-Schritt ist und zum anderen eine vorgegebene Genauigkeit eingehalten wird.

## Anwendung

Die vorgestellte numerische Approximation des makroskopischen Verkehrsmodells von Kerner und Konhäuser ist in JAVA implementiert. Im folgenden wird die Wirkung einer kleinen Störung in einem anfänglich homogenen Verkehrsablauf bei unterschiedlichen Verkehrsdichten betrachtet. Als Modellbereich wird eine Ringstraße gewählt, sodass die Gesamtanzahl der Fahrzeuge (die globale Dichte  $\rho_H$ ) während der Simulation konstant bleibt. Die Anordnung als Ringstraße führt zu periodischen Randbedingungen der Simulation (Abbildung 3). Die Modellparameter werden zunächst wie in [2] gewählt: Die Länge der Strecke ist  $30 \text{ km}$ , die Anpassungszeit beträgt  $\tau = 6 \text{ s}$ , die Viskosität  $\mu = 60 \text{ m/s}$  und es wird das Fundamentaldiagramm von Kerner und Konhäuser übernommen.



**Abbildung 3:** Periodische Randbedingungen für eine Ringstraße

Obwohl dieses Beispiel in der Realität so nie auftritt, lässt sich daran doch deutlich die Entstehung typischer Verkehrsphänomene wie Staus oder Stop-and-Go-Wellen zeigen. Es hat sich gezeigt, dass die Entstehung der Phänomene nicht auf globale Dichteänderungen zurückzuführen ist, sondern eine lokale Erscheinung darstellt.

Der Verkehrsablauf bei einer niedrigen globalen Dichte  $\rho_H$  wird freier Verkehr genannt. In diesem Fall können sich die Fahrzeuge unabhängig von den anderen bewegen. Bei der Verkehrssimulation mit  $\rho_H \approx 12.5 \text{ Fz/km}$  verschwindet die aufgebrachte Anfangsstörung nach wenigen Minuten. Dies entspricht auch den Beobachtungen im realen Verkehrsablauf.

Wird die globale Dichte auf  $\rho_H = 25 \text{ Fz/km}$  erhöht, so entsteht mit der Zeit aus der Anfangsstörung ein typischer Stau mit einem Dichtecenter, wo die Geschwindigkeit auf Null reduziert ist, einem größer werdenden Bereich niedriger Dichte und einem Übergangsbereich zur globalen Verkehrsdichte (Abbildung 4a). Nach genügend langer Zeit ist eine Stauwelle entstanden, die sich unverändert mit konstanter Geschwindigkeit stromaufwärts bewegt.

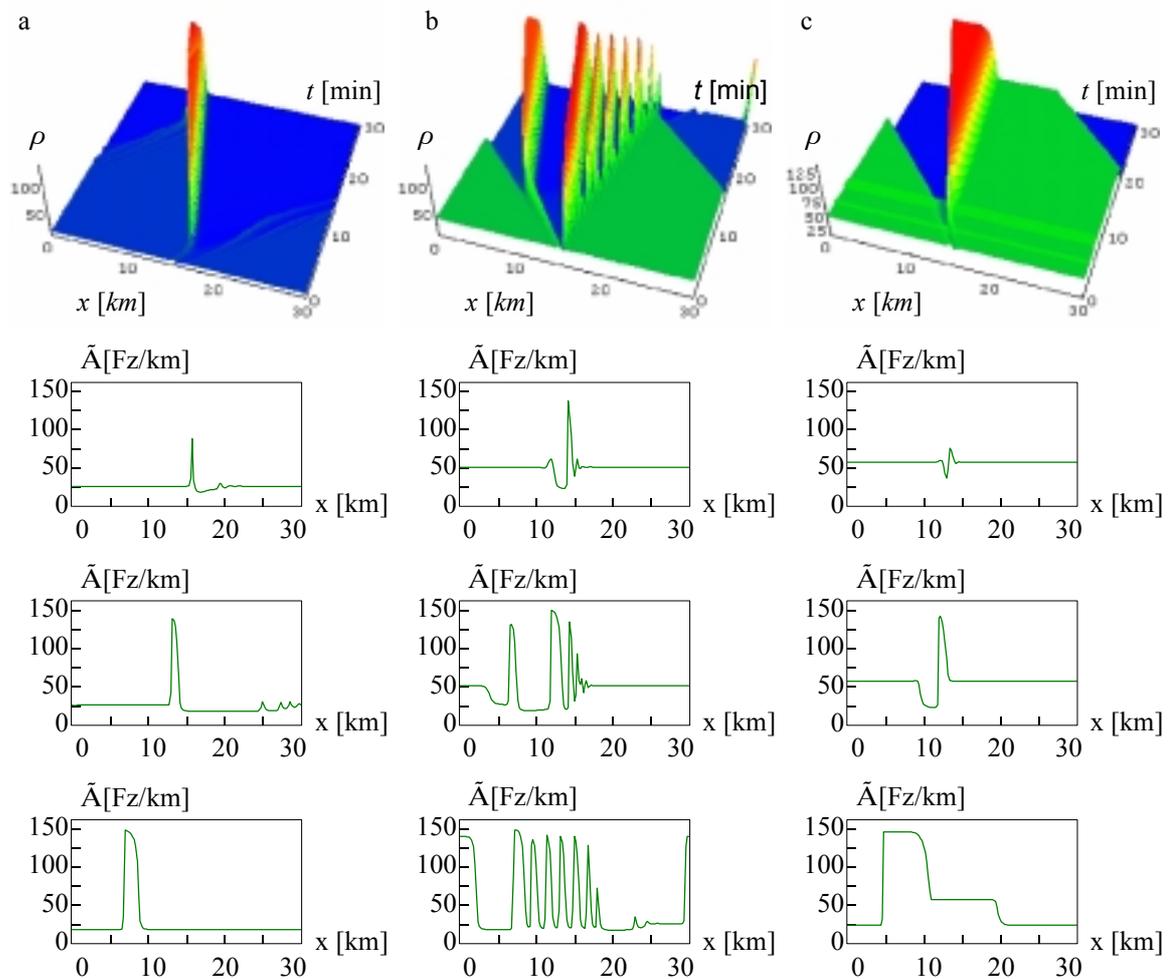
Bei einer mittleren globalen Dichte entwickeln sich aus der Anfangsstörung mehrere Dichtecenter, die mit einer mehr oder weniger großen Regelmäßigkeit aufeinander folgen (Abbildung 4b). Das Phänomen ist als Stop-and-Go-Welle im Verkehr bekannt.

Bei  $\rho_H = 56.25 \text{ Fz/km}$  entsteht eine regelmäßige Struktur des Verkehrsablaufs, die als Dipolschicht bezeichnet wird (Abbildung 4c). Aus der Anfangsstörung entsteht ein Bereich konstanter niedriger Dichte  $\rho < \rho_H$  stromabwärts gefolgt von einem Bereich sehr hoher Dichte  $\rho > \rho_H$ . Beide Bereiche werden im Laufe der Zeit breiter.

Bei weiterer Erhöhung der globalen Dichte ( $\rho_H \geq 60 \text{ Fz/km}$ ) ist der Verkehrsablauf so dicht, dass die Anfangsstörung wie beim freien Verkehr nach wenigen Minuten verschwindet.

### Fazit und Ausblick

Bei der Simulation treten außer den im Modell begründeten Instabilitäten (Staus, Stop-and-Go-Wellen, ...) im Bereich mittlerer Dichten keine Oszillationen mit dem Upwinding-Petrov-Galerkin-Verfahren auf. Dies ist insofern bemerkenswert, als dass die steilen Gradienten beispielsweise für eine Staufront oder den Übergang von einer niedrigen zu einer hohen Dipolschicht numerisch schwer zu beherrschen sind. Versuche mit einigen Finite-Differenzen-Verfahren haben spätestens bei der Simulation der Dipolschichten zu Oszillationen und Programmabstürzen geführt. Das vorgestellte Upwinding-Petrov-Galerkin-Verfahren hat sich nicht nur bei dem Modell von Kerner und Konhäuser als geeignet erwiesen, auch für andere makroskopische Verkehrsmodelle konnte es mit Erfolg eingesetzt werden [4]. Schon mit einem einfachen Euler-Verfahren und einer Zeitschrittsteuerung kann das Petrov-Galerkin-Verfahren die Modelle für einen  $30 \text{ km}$  langen Modellbereich bei äquidistanten Ortsintervallen von  $20 \text{ m}$  in Echtzeit simulieren. Die Erweiterung auf Streckennetze, der Einsatz adaptiver Aufteilungen und die Anwendung von Parallelrechnern wird die Möglichkeit eröffnen, große Verkehrsnetze zu simulieren.



**Abbildung 4:** Dichteentwicklung bei  $\rho_H = 25 \text{ Fz/km}$  (a),  $\rho_H = 50 \text{ Fz/km}$  (b) und  $\rho_H = 56.25 \text{ Fz/km}$  (c) in Form eines Zeitverlaufs sowie zu den Zeitpunkten  $t = 3 \text{ min}$ ,  $t = 11 \text{ min}$  und  $t = 30 \text{ min}$ .

## Danksagung

Die Autoren danken der Alfred Krupp von Bohlen und Hallbach-Stiftung, die die Arbeit durch ein Stipendium auf dem Gebiet der Verkehrswissenschaften gefördert hat.

## Referenzen

- [1] Christine, I.; Griffiths, G.F.; Mitchell, A.R.; Zienkiewicz, O.C. (1976): *Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives*. International Journal of Numerical Methods in Engineering 10, 1389-1396
- [2] Kerner, B.S.; Konhäuser, P. (1996): *A New Approach to Problems of Traffic Flow Theory*. In: Lesort, J.B. (ed.): Transportation and Traffic Theory, Pergamon
- [3] Milbradt, P. (1995): *Zur mathematischen Modellierung großräumiger Wellen- und Strömungsvorgänge*. Diss. Institut für Bauinformatik, Universität Hannover
- [4] Rose, M. (1999): *Simulation makroskopischer Verkehrsabläufe auf der Basis Finiter Elemente*. Stipendiumsbericht an die Alfred Krupp von Bohlen und Halbach-Stiftung, Essen.