Zur voll-probabilistischen Verallgemeinerung des klassischen Kraftgrößenverfahrens (KGV)

Von J. Biehounek und H. Grolik

1. Einführung

Mit dem Übergang vom deterministischen zu einem probabilistischen Sicherheitskonzept entsteht ein Interesse an leistungsfähige Bemessungsverfahren, die das in der Vergangenheit bewährte mit dem neuen Gedankengut so verbinden, daß möglichst große Teile der herkömmlichen Vorgehensweise, also der dazu erarbeiteten theoretischen Grundlagen und praktischen Erfahrungen sowie der unterstützenden Rechnerprogramme, übernommen werden können. Nachfolgend soll aufgezeigt werden, wie sich die klassischen Bemessungsverfahren von Stabtragwerken bei Wahrung ihrer seit langem bekannten mechanischen und mathematischen Substanz so modifizieren lassen, daß die ihnen eigenen Berührungspunkte von Mechanik und Stochastik hervortreten und nutzbar gemacht werden können. Es handelt sich um ein mathematisches Verfahren [1], welches sich auf die traditionellen Algorithmen „aufsetzen" läßt und in einer Schrittfolge, die in den Grundzügen dem bisherigen Vorgehen beim Weg- bzw. Kraftgrößenverfahren entspricht, zu den sicherheitsrelevanten Zustandsgrößen des Systems führt. Qualitativ neu gegenüber bisher bekannten voll-probabilistischen Verfahren (vgl. z. B. [2]) ist, daß diese Größen analytisch als Funktionen der im System wirkenden Zufallsgrößen (z. B. *E*-Moduln, Belastung) ausgedrückt werden. So kann der Einfluß einzelner Zufallswirkungen auf die Sicherheit beurteilt und die Versagenswahrscheinlichkeit durch Gegenüberstellung mit der Beanspruchbarkeit ermittelt werden. Die Methode wird am Beispiel des KGV erläutert.

2. Die voll-probabilistische Verallgemeinerung des Kraftgrößenverfahrens

2. 1 Einige Grundlagen

Ein wichtiger Bestandteil des *stochastischen Modells* eines bestimmten Tragwerks sind diejenigen Größen, die als Zufallsgrößen dafür verantwortlich sind, daß die Frage nach dem Versagen mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Mitteln beantwortet werden sollte. Zu denken ist beispielsweise an Querschnittskennwerte oder andere geometrische Abmessungen, an äußere Belastungen und Materialkonstanten. Diese Größen heißen *Basisvariable* und werden mit $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ bezeichnet. Im weiteren werden sie als stetige Zufallsgrößen mit einer gegebenen Verteilung betrachtet. Zum Modell gehört als zweiter Bestandteil ein analytisch formuliertes *mechanisches Gesetz*, das den Zusammenhang zwischen den äußeren Wirkungen und den Reaktionen des Systems über die Basisvariablen ausdrückt. Bei den hier interessierenden Stabtragwerken handelt es sich um ein System linearer Gleichungen. Schließlich muß als dritter Bestandteil des Modells ein *Grenzzustand* definiert werden, auf den sich die Versagenswahrscheinlichkeit bezieht. Analytisch läßt sich der Grenzzustand mit Hilfe einer *Grenzzustandsfunktion* $g(\eta_1,\cdots,\eta_l)$ erfassen, wobei die neuen Zufallsgrößen $\eta_1,\cdots\eta_l$ von den Basisvariablen $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ abhängen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist es möglich, ein Versagen des Systems für $g(\eta_1,\cdots,\eta_l)<0$ anzunehmen.

2.2 Das zufällige System der Elastizitätsgleichungen

Die mathematische Grundlage des KGV [3] ist ein System von f linearen Gleichungen für die f statisch Unbestimmten $x_1,\cdots,x_f$. Dieses *ursprüngliche System*

$$VX = R \tag{1}$$

mit der symmetrischen Koeffizientenmatrix V (Elastizitätsmatrix des klassischen KGV) stellt als mechanisches Gesetz einen Hauptbestandteil des stochastischen Modells dar. Dabei ist X

der Spaltenvektor der statisch Unbestimmten. Die Elemente von V ergeben sich aus den in den Stäben wirkenden Schnittkräften, wobei sich ein bestimmtes Element von V additiv aus den Beiträge der Stäbe zusammensetzt. Sind s Stäbe vorhanden, läßt sich V in eine Summe

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_s \tag{3}$$

von s Matrizen V_k des Typs (f,f) zerlegen. Über die V_k darf vorausgesetzt werden, daß a) jedem V_k genau eine Basisvariable ζ_k, $k = 1,\cdots,s$ der Widerstandsseite entspricht und diese b) in jedem Element $v_k^{(ij)}$ von V_k gemäß

$$V_k = \xi_k W_k \ , \qquad \xi_k = \frac{1}{\zeta_k} \tag{4}$$

als Faktor enthalten ist. Darauf beruht die Möglichkeit, Zufallsschwankungen der *E*-Moduln oder eine auf geometrische Imperfektionen zurückgehende Streuung der Trägheitsmomente als *qualitativ neues Moment* im KGV zu berücksichtigen. Da andrerseits die Matrizen W_k in der herkömmlichen Weise berechnet werden, ist mit der Darstellung (4) der Punkt erreicht, an dem sich Mechanik und Stochastik überschneiden. Erfahrungsgemäß sind die Zufallsschwankungen der Basisvariablen vergleichsweise kleine Störungen, die sich einem deterministischen Nominalwert als dem Hauptteil der Größe überlagern. Sachgerecht ist daher die Zerlegung

$$\zeta_k = m_{0k} + t_k \gamma_k \ , \quad k = 1,\cdots,s \tag{5}$$

von ζ_k in den Hauptteil m_{0k} und die stochastische Störung $t_k\gamma_k$. In (5) ist γ_k eine mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ normalverteilte Zufallsgröße (symbolisch $\gamma_k \sim N(0;1)$). Weil sich auch bei der in Gl. (1) rechts stehenden Matrix R der Belastungszahlen $r^{(i)}$, $i = 1,\cdots,f$ jedes Element aus Beiträgen der einzelnen Stäbe zusammensetzt, ist eine zu Gl. (3) analoge Zerlegung der rechten Seite R in Teilmatrizen $\xi_k \xi_{s+1} S_k$, $k = 1,2,\cdots,s$ möglich. Auch die Spaltenmatrizen S_k werden nach dem klassischen KGV ermittelt Für die Zufallsgröße ξ_{s+1} wird die Darstellung

$$\xi_{s+1} = q_0 + q_1\left[a_1\gamma_{s+1} + a_2\left(\gamma_{s+1}^2 - 1\right)\right] \tag{6}$$

benutzt, in der q_0, q_1 darauf hindeuten, daß ξ_{s+1} im Beispiel eine Streckenlast ist. Die Koeffizienten a_1, a_2 müssen so bestimmt werden, daß ξ_{s+1} einer vorgegebenen Verteilung genügt, was (näherungsweise) immer möglich ist.
Werden die Zufallsgrößen in die Elastizitätsgleichungen des KGV eingesetzt, entsteht ein *zufälliges System* linearere Gleichungen, bei dem sowohl die Koeffizientenmatrix als auch die Spalte der rechten Seiten Zufallsgrößen enthält. Es stellt die *probabilistische Verallgemeinerung* des Systems der Elastizitätsgleichungen des klassischen KGV dar und ist ein qualitativ neues Element der Theorie.

2.3 Das nichtzufällige Ersatzsystem

Die mit dem Eintreten von Zufallsgrößen sowohl in die Elemente der Koeffizientenmatrix als auch in die rechten Seiten hervorgerufenen Unsicherheiten übertragen sich auf die Lösung X. Sie wird zu einem Zufallsvektor. Da für die Zufallsschwankungen von Koeffizienten und Lösung die gleichen Zufallsgrößen verantwortlich sind, liegt es nahe, X gemäß

$$X = X^{(0)} + \sum_{i=1}^{s} X_i^{(1)}\gamma_i + \sum_{i=1}^{s} X_i^{(2)}\left(\gamma_i^2 - 1\right) + \gamma_{s+1}\sum_{i=1}^{s} X_i^{(1,1)}\gamma_i +$$

$$+X_{s+1}^{(1)}\gamma_{s+1}+X_{s+1}^{(2)}\left(\gamma_{s+1}^{2}-1\right). \qquad (7)$$

in eine Reihe nach orthogonalen Polynomen in den γ_k, $k=1,2,\cdots,s+1$ zu entwickeln [4]. Die nichtzufälligen Koeffizienten $X_k^{(1)},X_k^{(2)}$ usw. sind Matrizen vom Typ (f,1) und quantifizieren die von den γ_k ausgehenden Störungen. Die mit einem Taylorpolynom vergleichbare Entwicklung (7) läßt sich durch Glieder höherer Ordnung präzisieren. Erfahrungsgemäß werden aber deren Koeffizienten rasch kleiner, so daß bereits (7) zufriedenstellende Resultate liefert. Wegen $EX = X^{(0)}$ ist $X^{(0)}$ der Vektor der statisch Unbestimmten des klassischen KGV. Wird der Ansatz (7) in Gl. (1) eingesetzt, entsteht die endgültige Form der linken Seite LS des Gleichungssystems, in der 3+3s unbekannte Matrizen enthalten sind. Nämlich $X^{(0)},X_{s+1}^{(1)}$ und $X_{s+1}^{(2)}$ sowie die Matrizen $X_i^{(1)}$, $X_i^{(2)}$, $X_i^{(1,1)}$, $i=1,\cdots,s$. Die erforderlichen Gleichungen entstehen dadurch, daß man LS und R nacheinander mit den Zufallspolynomen $\gamma_0=1$, γ_i, $\left(\gamma_i^2-1\right)$ sowie γ_{s+1}, $\left(\gamma_{s+1}^2-1\right)$ multipliziert und den Erwartungswert bildet. Da insgesamt 3+3s Zufallsgrößen zur Verfügung stehen, liefert dieser Rechenschritt, der hier übergangen werden muß, aus LS und R jeweils die erforderliche Zahl 3+3s von Ausdrücken, die sich zu dem deterministischen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0V^{(0)}X^{(0)} & - & v\sum\limits_k V_k^{(0)}X_k^{(1)} & + & 2v^2\sum\limits_k V_k^{(0)}X_k^{(2)} & = & (1+v^2)R^{(0)}\\
(a_0V^{(0)}+v^2V_l^{(0)})X_l^{(1)} & - & vV_l^{(0)}X^{(0)} & - & 2vV_l^{(0)}X_l^{(2)} & = & -vR_l^{(0)}\\
2(a_0V^{(0)}+4v^2V_l^{(0)})X_l^{(2)} & + & 2v^2V_l^{(0)}X^{(0)} & - & 2vV_l^{(0)}X_l^{(1)} & = & 2v^2R_l^{(0)}\\
\left(a_0V^{(0)}+v^2V_l^{(0)}\right)X_l^{(1,1)} & - & vV_l^{(0)}X_{s+1} & & & = & -v_{s+1}va_1R_l^{(0)}\\
a_0V^{(0)}X_{s+1}^{(1)} & - & v\sum\limits_k V_k^{(0)}X_k^{(1,1)} & & & = & v_{s+1}(1+v^2)a_1R^{(0)}\\
2a_0V^{(0)}X_{s+1}^{(2)} & & & & & = & v_{s+1}(2+5v^2)a_2R^{(0)}
\end{array} \qquad (8)$$

$$l=1,\cdots,s$$

zusammenfügen. Aus seinen Lösung $X^{(0)},X_l^{(1)},X_l^{(2)},X_{s+1}^{(1)},X_{s+1}^{(2)}$ und $X_l^{(1,1)}$ ergeben sich die statisch Unbestimmten nach Gl. (7) in Abhängigkeit von den im Tragwerk auftretenden zufälligen Störungen.

3. Ein Beispiel

Um die praktische Handhabung des voll-probabilistischen KGV zu erläutern, wird als Beispiel ein Rahmen mit eingespannten Stielen aus dem Werkstoff S 235 betrachtet (Bild 1). Es handelt sich um ein 3-fach statisch unbestimmtes Tragwerk. Als Grenzzustandsbedingung wird das Versagen des Stielquerschnitt von Stab 1 in der Ecke der Verbindung zum Riegel, Stab 2 (Querschnitt e-e) betrachtet. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird unter der Voraussetzung ermittelt, daß zufällige Einflüsse von den Elastizitätsmoduln der Stäbe und von der Belastung ausgehen. Zu Vergleichszwecken wurde der Rahmen nach der DIN 18800, 11/90 ohne die Berücksichtigung von Zufallseffekten so bemessen, daß die maximale Spannung gerade den „zulässigen“ Wert $s=\frac{24}{1.1}=21{,}18\ kNcm^{-2}$ erreicht. Die hierfür angesetzte Streckenlast ergibt sich mit den Teilsicherheitsfaktoren für Eigenlasten q_E und eine angenommene Verkehrslast q_{VL} zu $q=1{,}35\cdot q_E+1{,}5\cdot q_{VL}=1{,}35\cdot 0.66+1{,}5\cdot 33{,}80=\ 51{,}59kNm^{-1}$. Dieser Wert ist nach DIN 18800 der Bemessungswert q_d .Bei Vernachlässigung des Eigengewichts folgt daraus aus mit $q_d=1{,}5\cdot q_k$ der charakteristische Wert $q_k=34{,}4\ kNm^{-1}$. Aus ihm wird der Erwar-

tungswert q_0 der Belastung ermittelt. Das Knicken bzw. Biegedrillknicken einzelner Stäbe des Rahmens wird ausgeschlossen.
Im *ersten Schritt* muß das System der Elastizitätsgleichungen nach der klassische KGM aufgestellt werden. Beim Berechnen der Elastizitätszahlen müssen allerdings die *E*-Moduln als Variable ersichtlich bleiben und dürfen nicht mit ihren Nominalwerten in die Rechnung eingesetzt werden. Im Beispiel gilt (*E*-Moduln in kNm^{-2} und die Trägheitsmomente in m^4)

$$V = 10^8 \begin{pmatrix} \frac{0{,}011444}{E_1} + \frac{0{,}011392}{E_2} + \frac{0{,}002135}{E_3} & -\frac{0{,}002452}{E_1} - \frac{0{,}001102}{E_2} & -\frac{0{,}0009188}{E_2} - \frac{0{,}0008008}{E_3} \\ & \frac{0{,}0007007}{E_1} + \frac{0{,}00012248}{E_2} & \frac{0{,}00006124}{E_2} \\ & & \frac{0{,}0001225}{E_2} + \frac{0{,}0004004}{E_3} \end{pmatrix} , \qquad (9)$$

woraus sich die Matrizen V_1, V_2, V_3 ablesen lassen, denen jeweils ein E-Modul entspricht. Der Anwender benötigt $V^{(0)}$ und $V_k^{(0)}$, $k = 1,2,3$. Sie entstehen aus V bzw V_k, wenn die *E*-Moduln mit ihrem Nominalwert m_0 eingesetzt werden. $V^{(0)}$ ist die Elastizitätsmatrix des klassischen KGV.
Auch die Behandlung der rechten Seite folgt dem klassischen KGV. Wie schon bei der linken Seite sind die Streckenlast q und die Elastizitätsmoduln als variable Größen auszuweisen. Im Beispiel gilt

$$R = 10^8 \begin{pmatrix} \frac{q \cdot 0{,}008252}{E_2} \\ -\frac{q \cdot 0{,}0007502}{E_2} \\ -\frac{q \cdot 0{,}0007502}{E_2} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Da offensichtlich alle Beiträge zu R dem Stab 2 zuzuschreiben sind, besitzt nur die Matrix $R_2^{(0)}$ von Null verschiedene Elemente. Sie ist mit $R^{(0)}$ identisch, das sich aus (10) mit den Nominalwerten der E-Moduln und der Streckenlast ergibt. Im weiteren sind die Zufallsgrößen durch Polynome Gaußscher Zufallsgrößen zu approximieren. Zieht man dazu bei der Streckenlast ξ_4 Gl. (6) heran, so genügt q für $a_1 = 0{,}975$, $a_2 = 0{,}1571$ einer Pearson-Typ-III-Verteilung [5] mit den Parametern $x_0 = 11{,}69 \;\; kNm^{-1}$, $r = 3$, $\lambda = 0{,}4$. Mit den bereitgestellten Größen kann das zufällige System der Elastizitätsgleichungen und sein nichtzufälliges Ersatzsystem angegeben werden. Dessen Lösung liefert die statisch Unbestimmten X_i, $i = 1,2,3$ des probabilistischen KGV in Abhängigkeit von den Zufallsgrößen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (Schwankungen der E-Moduln) und γ_4 (Belastungsschwankung). Von ersteren wird wie bei der klassischen Kraftgrößenmethode Gebrauch gemacht. Bei dem betrachteten statisch bestimmten Hauptsystem gilt

$$N_e = N_0(\gamma_4) - 0{,}43X_1 + 0{,}14X_2 + 0{,}14X_3 , \qquad M_e = -7{,}0X_1 + 1.0X_2 \; . \qquad (11)$$

daraus folgen die maximalen Normalsspannungen im Querschnitt an der Stelle *e-e* zu

$$\begin{aligned} \sigma_e = 88{,}29 + 1{,}11\gamma_1 - 1{,}07\gamma_2 - 0{,}038\gamma_3 - 0{,}033\gamma_1^2 - 0{,}037\gamma_2^2 - 0{,}0011\gamma_3^2 + \\ + 20{,}57\gamma_4 + 0.248\gamma_1\gamma_4 - 0{,}24\gamma_2\gamma_4 - 0{,}0086\gamma_3\gamma_4 + 3{,}32\gamma_4^2 \; . \end{aligned} \qquad (12)$$

Wie die Koeffizienten zeigen, spielt γ_4 eine dominierende Rolle. Die Unsicherheiten der E-Moduln werden von den Belastungsschwankungen so stark überlagert, daß sie praktisch nicht

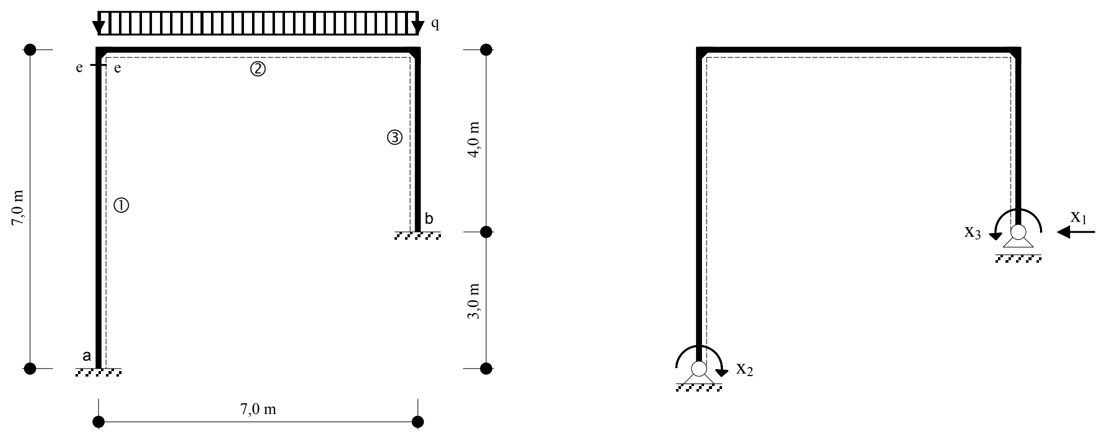
in Erscheinung treten. Die vom klassischen KGV gelieferte Spannung ist als Spezialfall in (12) enthalten: Sie ergibt sich durch Erwartungswertbildung zu $\sigma_{ek} = 88{,}29 Nmm^{-2}$.
Für das Beispiel wurde als Versagensweise das Erreichen der Fließspannung ϕ_y an einem Querschnittsrand der Stelle *e-e* festgelegt. Als Grenzzustandsfunktion eignet sich deshalb

$$g = \phi_y - \sigma_e . \tag{13}$$

Da Versagen für $g < 0$ eintritt, ist die Versagenswahrscheinlichkeit

$$P_f = P(g < 0). \tag{14}$$

Zur Berechnung von P_f benötigt man die Dichtefunktionen von *g*. Diese wiederum folgt aus den Dichtefunktionen f_ϕ von ϕ_y und f_σ von σ_e. Für die erstere finden sich empirischen Daten in der Literatur [6], die Dichte von f_σ muß aus Gl. (14) ermittelt werden. Wie eine auf $n = 20.000$ Realisierungen basierende Simulation zeigt, läßt sich f_σ durch eine Pearson-Verteilung mit den Parametern $\lambda = 0{,}097$, $r = 3{,}17$, $x_0 = 49$ erfassen. Aus den beiden Dichtefunktionen, deren relative Lage Bild 2 zeigt, folgt die Dichtefunktion f_g von *g* durch die numerische Auswertung eines Faltungsintegrals. Als Versagenswahrscheinlichkeit ergibt sich $P_f = 8{,}2 \cdot 10^{-6}$.



Stiele ①, ③:
IPEo 300, $I_{1,3}$ = 9990 cm^4 = 9990*10^8 m^4, $W_{1,3}$ = 658 cm^3, $A_{1,3}$ = 62,8 cm^2

Riegel ②:
IPEo 360, I_2 = 19050 cm^4 = 19050*10^8 m^4

Bild 1
Geometrie des Systems und statisch bestimmtes
Hauptsystem

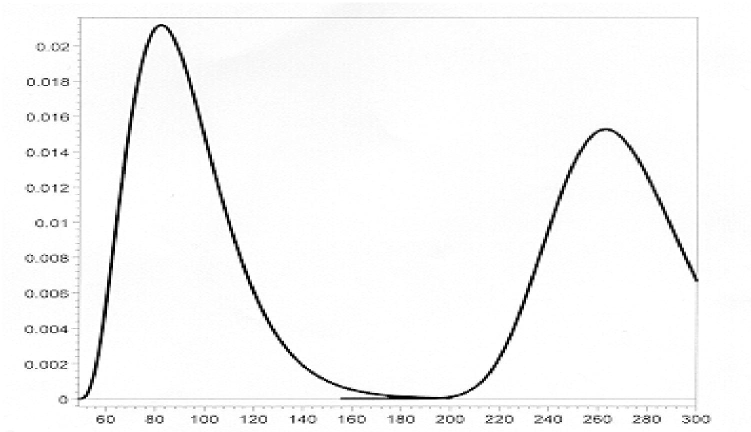


Bild 2
Dichtefunktion der Spannung (untere Kurve) im Querschnitt e-e im Vergleich mit der Dichtefunktion der Streckgrenze (obere Kurve)

Literatur

[1] *Biehounek, J, Grolik, H.* Zur voll-probabilistischen Verallgemeinerung des Kraftgrößenverfahrens Beiträge zur Wissenschaft, Technologie und Gestaltung, Hochschule Anhalt, Nr. 50/2000

[2] *Späthe, G.* Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen, Springer-Verlag 1992

[3] *Krätzig, W. B.* Tragwerke 2, Springer Verlag 1990

[4] *Ghanem, R.G., Spanos, P.D.* Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach, Springer-Verlag 1991

[5] *Plate, E.J.* Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure, Ernst & Sohn 1993

[6] *Warkentin, W.* Grundlagen zur Berechnung von Tragwerken in der Fördertechnik, Vieweg 1999