Näherungsverfahren zur Lösung eines Transportproblems der diskreten Schüttgutoptimierung

HEINER SCHREIER
TU BERGAKADEMIE FREIBERG

1. Problembeschreibung und mathematisches Modell

Gegenstand der Betrachtungen ist ein spezielles Tourenproblem der Schüttgutoptimierung, wie es in [1] und in allgemeinerer Form in [2] beschrieben wird. Man stelle sich als Realitätsbezug ein Transportunternehmen vor, das eine begrenzte Anzahl von gleichartigen Fahrzeugen in einem Fuhrpark stationiert hat. Vorgegebene Mengen von Schüttgut müssen von einer Kiesgrube zu mehreren Baustellen transportiert werden. Unterstellt man als Lieferzeitraum einen Tag, so darf die Schichtzeit für jeden einzelnen Fahrer nicht überschritten werden. Zu berücksichtigen sind auch Be- und Entladezeiten sowie unterschiedliche mittlere Geschwindigkeiten für Leer- bzw. Lastfahrten. Jedes Fahrzeug, das zu Schichtbeginn den Fuhrpark verläßt, führt zuerst eine Leerfahrt zur Kiesgrube durch. Danach folgen im Wechsel Lastfahrten von der Kiesgrube zu den Baustellen und Leerfahrten von den Baustellen zur Kiesgrube. Am Schichtende schließt jedes eingesetzte Fahrzeug mit einer Leerfahrt von einer Baustelle zum Fuhrpark. Gesucht ist die optimale Anzahl von einzusetzenden Fahrzeugen und die zugehörigen Tourenpläne mit dem Ziel der Minimierung der Transportkosten unter Beachtung aller Bedingungen.

Zur mathematischen Modellierung werden folgende Bezeichnungen verwendet:

F		Fuhrpark
D_0		Kiesgrube
D_j	j=1,...,n	Baustellen
h_0		Länge der Wegstrecke von F nach D_0
c_j	j=1,...,n	Länge der Wegstrecke von D_0 nach D_j
d_j	j=1,...,n	Länge der Wegstrecke von D_j nach D_0
h_j	j=1,...,n	Länge der Wegstrecke von D_j nach F
x_j	j=1,...,n	Anzahl der von D_0 nach D_j durchzuführenden Lastfahrten
r		Anzahl der verfügbaren Fahrzeuge
T		Schichtzeit
t		Be- und Entladezeit eines Fahrzeuges
G_1		mittlere Geschwindigkeit eines Fahrzeuges bei Leerfahrt
G_2		mittlere Geschwindigkeit eines Fahrzeuges bei Lastfahrt

Die Gesamtzahl der durchzuführenden Lastfahrten ist durch $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ gegeben.

Die benötigten Variable werden wie folgt vereinbart:

(A1) $w_0^v \in \{0;1\}$ $\quad v = 1,...,r$

$w_0^v = 1$, falls Fahrzeug v von F nach D_0 fährt.

(A2) $x_j^v \in \{0;1;...;x_j\}$ $\quad v = 1,...,r \qquad j = 1,...n$

Häufigkeit der Strecke D_0 nach D_j für Fahrzeug v

(A3) $y_j^v \in \{0;1;...;x_j\}$ $\quad v = 1,...,r \qquad j = 1,...n$

Häufigkeit der Strecke D_j nach D_0 für Fahrzeug v

(A4) $w_j^v \in \{0;1\}$ $\quad v = 1,...,r \qquad j = 1,...n$

$w_j^v = 1$, falls Fahrzeug v von D_j nach F fährt.

Die Restriktionen lassen sich wie folgt formulieren:

(A5) $w_0^v + \sum_{j=1}^n y_j^v = \sum_{j=1}^n x_j^v \qquad v = 1,...,r$

Flußbedingung für D_0

(A6) $y_j^v + w_j^v = x_j^v \qquad v = 1,...,r \qquad j = 1,...,n$

Flußbedingung für D_j

(A7) $w_0^v = 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^n x_j^v = 0 \qquad v = 1,...,r$

Nichteingesetzte Fahrzeuge führen keine Lastfahrten durch

(A8) $\sum_{v=1}^r x_j^v = x_j \qquad j = 1,...,n$

Erfüllung der Lieferbedingungen

(A9) $\frac{h_0}{G_1} w_0^v + \sum_{j=1}^n (\frac{c_j}{G_2} + t) x_j^v + \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{G_1} y_j^v + \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{G_1} w_j^v \leq T \qquad v = 1,...,r$

Berücksichtigung der Schichtzeit

Zur Realisierung des Zieles genügt die Minimierung der Leerfahrtstrecke:

(A10) $z = h_0 \sum_{v=1}^r w_0^v + \sum_{j=1}^n d_j \sum_{v=1}^r y_j^v + \sum_{j=1}^n h_j \sum_{v=1}^r w_j^v \longrightarrow \text{Min.}$

2. Ein heuristisches Lösungskonzept

In einer ersten Phase soll die Frage geklärt werden, wieviele Fahrzeuge (mindestens) eingesetzt werden müssen und welche zu den Leerfahrten gehörigen Teilstrecken wie oft zu befahren sind. Bei diesem sogenannten verdichteten Modell sind folgende Variable zu bestimmen:

(B1) $w_0 \in \{0; 1; ... : r\}$ Anzahl der Fahrten von F nach D_0,
entspricht der Zahl der einzusetzenden Fahrzeuge

(B2) $y_j \in \{0; 1; ...; x_j\}$ $j = 1, ...n$
Anzahl der Fahrten von D_j nach D_0

(B3) $w_j \in \{0; 1; ...; x_j\}$ $j = 1, ...n$
Anzahl der Fahrten von D_j nach F

Die Restriktionen (A5) bzw. (A6) werden zusammengefaßt:

(B4) $w_0 + \sum_{j=1}^{n} y_j = x$

(B5) $y_j + w_j = x_j$ $j = 1, ..., n$

Aus (A10) erhält man die Zielfunktion

(B6) $z = h_0 w_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j y_j + \sum_{j=1}^{n} h_j w_j \longrightarrow \text{Min.}$

Die einzelnen Ungleichungen zur Schichtzeit nach (A9) werden ebenfalls zusammengefaßt und haben in Verbindung mit der Zielfunktion (B6) die folgende Darstellung:

(B7) $h_0 w_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j y_j + \sum_{j=1}^{n} h_j w_j \leq G_1 T w_0 - G_1(tx + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{G_2} x_j)$

Das verdichtete Modell kann als ein vom Parameter w_0 abhängiges spezielles Knapsackproblem mit einer zusätzlichen Nebenbedingung an die Zielfunktionsvariable interpretiert werden, dessen Lösung recht einfach ist.

Hat man eine Optimallösung (w_0^0 , y_j^0 , w_j^0 , z^0 | $j = 1, ..., n$) des verdichteten Modells gefunden, so muß in einer zweiten Phase die Menge der zu fahrenden Teilstrecken, charakterisiert durch (w_0^0 , x_j , y_j^0 , w_j^0 | $j = 1, ..., n$), so auf die Fahrzeuge aufgeteilt werden, daß für jedes Fahrzeug eine zulässige Tour entsteht. Bezeichnet man mit q die Anzahl der einzusetzenden Fahrzeuge, dann gilt für die vorliegende Lösung $q = w_0^0$. O.B.d.A. werden die Fahrzeuge mit den Nummern $v = 1, ..., q$ eingesetzt. Das sogenannte Aufteilungsmodell beinhaltet die folgenden Restriktionen:

(C1) $\sum_{v=1}^{q} x_j^v = x_j$ $j = 1, ..., n$

(C2) $\sum_{v=1}^{q} y_j^v = y_j$ $j = 1, ..., n$

(C3) $\sum_{v=1}^{q} w_j^v = w_j$ $j = 1, ..., n$

jeweils für $v = 1, ..., q$ die Forderungen (A1) (A2) (A3) (A4) an die Variable, sowie Flußbedingungen (A5) (A6) und Schichtzeitbedingungen (A9), wobei $w_0^v = 1$ gilt

Zur Lösung des Aufteilungsmodells werden heuristische Verfahren eingesetzt.

Die Idee besteht darin, ausgehend von einer Grundtour die Touren der einzelnen Fahrzeuge schrittweise aus den zu befahrenden Teilstrecken zusammenzusetzen. Dabei werden gewisse Kriterien für die Auswahl der nächsten zu bearbeitenden Tour bzw. aufzunehmenden Teilstrecke verwendet. Ziel dieser Kriterien ist es, dafür zu sorgen, daß für ein lösbares Aufteilungsproblem das schrittweise Zusammenstellen der Touren in so wenig Fällen wie möglich zu keinem Ergebnis führt.

Kann für das Aufteilungsmodell keine zulässige Lösung mit den Heuristiken gefunden werden, so wird die Zahl der einzusetzenden Fahrzeuge q um Eins erhöht und mit dieser fixierten Fahrzeugzahl $w_0 = q$ das verdichtete Modell abermals gelöst und anschließend ein neues Verteilungsmodell aufgestellt. Bei dieser Vorgehensweise wird ein eventueller Verlust der Optimalität in Kauf genommen.

3. Numerische Experimente

Zur Untersuchung der Güte des Näherungsverfahrens liegt zum Vergleich ein exaktes Verfahren vor, das auf einem ähnlichen Konzept beruht. Es wurden 32000 zufällig erzeugte Testaufgaben mit praxisorientierten Daten ausgewertet und hinterfragt, für wieviel Prozent aller Testaufgaben der Zielfunktionswert der Näherungslösung mit dem optimalen Zielfunktionswert übereinstimmt. Für den Fall, daß die Näherungslösung einen schlechteren Zielfunktionswert besitzt, wurde die prozentuale Abweichung zum Optimalwert bestimmt.

	Testaufgaben	Optimallösung gefunden	prozentuale Abweichung
3 Baustellen	20000	95.85%	1.50%
4 Baustellen	10000	93.11%	1.18%
5 Baustellen	2000	91.20%	1.09%

Damit liefert das vorgestellte Verfahren für die erzeugten Testaufgaben zumindest sehr gute Näherungen. Eine Optimallösung wird nur bei Beispielen nicht gefunden, für die die sogenannte Pufferzeit $T_p = w_0^0 T - z^0$ sehr klein ist.

Überträgt man das vorgestellte Konzept auf den Fall mehrerer Kiesgruben, so treten beim zugehörigen Aufteilungsmodell zusätzliche Schwierigkeiten auf. Es werden weitere Kriterien für die Aufnahme einer Teilstrecke in eine zu bearbeitende Tour benötigt, um die Zusammenhangseigenschaft zu garantieren. Die Erfolgsquote sinkt insbesondere bei einer Teilklasse von Beispielen mit schwach besetzten Bedarfsmatrizen.

Literatur

[1] J. Klopfer: Verfahren zur Lösung eines Transportproblems der diskreten Schüttgutoptimierung, Diplomarbeit, TU Bergakademie Freiberg, 1995

[2] H. Schreier: Ein Tourenproblem der Schüttgutoptimierung, Dissertation, Bergakadmie Freiberg, 1981