Kirchheim ,A.*), Rudnicki ,A. **)

DIE DARSTELLUNG DES FAHRGÄSTEFLUSSES IM NAHVERKEHR ALS EIN STOCHASTISCHER PROZESS

1. Einleitende Bemerkungen :

Der Personennahverkehr als Teilsystem des städtischen Verkehrs wird wie alle anderen Teilsyteme durch zufällige Störungen beeinflußt . Die hierbei auftretenden realen Größen - im Unterschied zu geplanten Größen (z. B. Fahrpläne u.ä.) - stellen Zufallsgrößen dar , deren Verhalten durch ihre Verteilungsgesetze zu beschreiben sind . Es werden folgende Gruppen von Größen unterschieden , die den **ö**ffentlichen **P**ersonen**n**ah**v**erkehr (im weiterem :ÖPNV) bestimmen :

- Linienführung mit Fahrzeugfolge und Einwirkung anderer Verkehrsteilnehmer
- eingesetzte Fahrzeugtypen mit ihrer Kapazität , ihrer Zuverlässigkeit , Nutzerservice und Bedieneigenschaften für die Fahrzeugführer
- Auslastung und Passagierverhalten

Diese Größen sind gruppenübergreifend ; so kann durch Fahrzeugausfälle (z.B. geringe Zuverlässigkeit , ungünstige Bedieneigenschaften der Fahrzeuge) die Fahrzeugfolge auf der Linie wesentlich beeinflußt werden . Ebenso besteht ein wechselseitiger Zusammenhang zwischen Fahrzeugfolge und Nutzerservice auf der einen Seite und Passagierverhalten und Auslastung auf der anderen Seite . **ADAMSKI (1992)** betrachtet das Ein - und Aussteigverhalten der Passagier und den sich daraus ergebenden Einfluß auf die Haltedauern der Fahrzeuge an den jeweiligen Haltestellen . Neben der individuellen Ein- und Aussteigdauern der einzelnen Passagiere wirken sich die Ein- und Aussteigregeln und die Anzahl einsteigender und aussteigender Fahrgäste auf die Haltedauer aus . Die Haltedauern beeinflussen andererseits die Fahrplantreue der eingesetzten Fahrzeuge und somit die Zuverlässigkeit der Linie des ÖPNV .

In diesem Vortrag soll der Zusammenhang zwischen Fahrzeugfolge auf einer Linie und der Anzahl der einsteigenden Personen untersucht werden . Beobachtungen über die Ankunftszeiten von Personen (Zeitpunkte ihres Eintreffens) an Haltestellen wurden von **RUDNICKI (1977 , 1992)** erfaßt und ausgewertet. Die dort gewonnen Ergebnisse bilden die Grundlage für die vorgenommene Modellierung **.**

2. Modell der Personenankünfte an einer Haltestelle

*) Bauhaus- Univers. Weimar , Wiss.-Bereich Mathemat. Opt. & Operat. Research,
Coudraystr. 13 , D - 99421 Weimar

**)Cracow Univers. of Technology , Institut of Roads and Railway , ul. Warszawska 24
31- 155 Krako´w , Poland

Um den Ablauf der Passagierankünfte zu beschreiben , wird von der Überlagerung zweier Punktprozesse ausgegangen .

$T^{ö}_0$, $T^{ö}_1$, $T^{ö}_2$, … sind die realen (nicht fahrplanmäßigen)Ankunftzeiten der Fahrzeuge (öffentlichen Verkehrsmittel : hier Bus) an einer Haltestelle der betrachteten Linie .

In einem ausgewählten Zeitabschnitt eines Tages kann dieser Punktprozeß als ein modifizierter Erneuerungsprozeß angenommen werden. Schließt man die Übergänge zwischen den Tagesabschnitten aus den Betrachtungen aus , so kann man von einem gewöhnlichen Erneuerungsprozeß ausgehen . Die Busankunftszeitpunkte werden als Erneuerungszeitpunkte und die Zwischenzeiten als Erneuerungszeiten gedeutet . Der Zeitraum $[T^{ö}_{n-1}, T^{ö}_n]$ wird im weiteren als Periode bezeichnet .

$Z_n := T^{ö}_n - T^{ö}_{n-1}$ ist die Dauer der n-ten Periode (Periodenlänge) . Diese Z_n stellen die Erneuerungsdauern des obigen Erneuerungsprozesses dar .

In die jeweilige Perioden ist der Ankunftsprozeß der Passagiere an einer Haltestelle eingebettet . Da für die Busfolge ein gewöhnlicher Erneuerungsprozeß vorausgesetzt wird , genügt es , eine beliebige Periode aus diesem Prozeß herauszugreifen und zu betrachten .

T_k : Zeitpunkt , an dem die k - te Person in der betrachteten Periode an der Haltestelle eintrifft , um auf den nächsten Bus zu warten (k = 0, 1, 2, …).

Es wird vorausgesetzt : $T_0 = T^{ö}_{n-1}$ und $T_k \in [T^{ö}_{n-1}, T^{ö}_n]$

Häufig nimmt man , daß die Zeitpunkte T_k einen stationären Poissonprozeß bilden . Die Untersuchungen von **RUDNICKI** zeigen ,daß dies nicht der Fall ist. Bezeichnet man mit S_k den Zeitraum zwischen zwei eintreffenden Personen ($S_k := T_k - T_{k-1}$ für k = 1, 2, 3, …) , so kann man i. Allg. hier nicht voraussetzen , daß die Zufallsvariablen S_1 ,S_2 ,S_3 ,… identisch und unabhängig verteilt sind .

Das Verteilungsgesetz der Zwischenzeit S_k hängt von der zeitlichen Entfernung (Instationarität) zur Ankunftszeit des nächsten Busses ab . Die statistischen Untersuchungen deuten an , daß diese zeitlichen Entfernungen sich durch unterschiedlichen Ankunftsraten der Passagiere in den Verteilungsgesetze auswirken . Auf welche Ankunftszeit des Busses - die fahrplanmäßige oder die tatsächliche - man den zeitlichen Abstand beziehen muß, hängt von dem Charakter der Haltestelle ab . Es werden hier zwei Arten von Haltestellen unterschieden :

(a) Haltestellen mit hoher Busfrequenz (z. B. Busfolge im Mittel aller 5 Minuten oder kürzer).

(b) Haltestelle mit geringer Busfrequenz (z. B. Busfolge im Mittel aller 15 Minuten oder länger) .

Bei Haltestellen vom Typ (a) orientieren sich die Passagiere nicht an einem Fahrplan . Sie treffen zufällig an der Haltestelle ein oder beeilen sich , wenn der Bus sich der Haltestelle nähert und sie sich in der Nähe der Haltestelle befinden . Nähe bedeutet hier , der Passagier kann in die Buslinie einsehen und ist nicht weiter von der Haltestelle entfernt , als zulässig ist , um zu Fuß bis zur Busabfahrt diese Stelle noch zu erreichen . Durch das Annähern des Busses entsteht eine "Sogwirkung" , was sich durch einen Anstieg der Ankunftsrate bemerkbar macht . Nach der Abfahrt fällt diese Rate ab .

Bei der Haltestelle vom Typ (b) orientieren sich die Passagiere am Fahrplan . Sie treffen in der Nähe der planmäßigen Abfahrzeit häufiger an der Haltestelle ein , als weiter früher oder danach . Die Ankunftsrate ist eine schiefe Funktion über dem zeitlichen Abstand zum plan - mäßigen Ankunftszeitpunkt .

Um die Periode $[T^{ö}_{n-1} , T^{ö}_{n}]$ in der gleichen Richtung zu durchlaufen wie die Zeit selbst abläuft , wird folgende Transformation vorgenommen :

$v := t- t^{ö}_{n-1}$ mit $t \in [t^{ö}_{n-1} , T^{ö}_{n}]$ bei einer Haltestelle vom Typ (a) ; wobei $T^{ö}_{n-1} = t^{ö}_{n-1}$ bedeutet , daß der (n - 1)-te Bus im Zeitpunkt $t^{ö}_{n-1}$ abgefahren ist .
$v := t - t^{p}_{n-1}$ mit t^{p}_{n-1} als letzte (jüngste) Abfahrtzeitpunkt laut Fahrplan bei einer Haltestelle vom Typ (b) .

$\varphi(v)$: Ankunftsrate (Ankunftsintensität) im Zeitpunkt $T^{ö}_{n} + V$ mit $V = v$ bzw. $tp +v$

$N(v)$: Anzahl der im Zeitraum $[t^{p}_{n-1} , t)$ bzw. $[t^{ö}_{n-1} , t)$ eingetroffenen Passagiere mit $t = t^{p}_{n-1} + v$ bzw. $t = t^{ö}_{n-1} + v$.

Dann gilt - falls Grenzwert und Erwartungswert existieren -

$$\varphi(v) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{E(N(v + \Delta v) - N(v))}{\Delta dv} \qquad (1)$$

Falls der Passagierstrom ein stationärer Poissonstrom ist , gilt $\varphi(v) = \text{const.}$
Von den Größen , die sich aus dem Passagierstrom an einer Haltestelle ableiten lassen , sollen hier die Wartezeit auf den Bus und die Anzahl der einsteigenden Passagiere betrachtet werden .

3. **Beschreibung der Gesamtwartezeit der Passagiere an einer Haltestelle**

N_n: Anzahl der Passagiere , die in der n-ten Periode $[T^{ö}_{n-1} , T^{ö}_{n})$ an der Haltestelle eintreffen und dort auf den Bus warten .

T_k: der Zeitpunkt , an dem der k-te Passagier in der n-ten Periode eintrifft ; $k = 1, 2, \dots , N_n$

$W_k : = T^{ö}_{n} - T_k$ ist die Wartezeit des k - ten Passagiers an der Haltestelle .

Die Gesamtwartezeit W aller Personen an einer Haltestelle in einer Periode beträgt somit

$$W = \sum_{k=1}^{N_n} W_k = N_n \cdot Z_n - \sum_{k=1}^{N_n}\sum_{l=1}^{k} S_k = N_n \cdot Z_n - \sum_{k=0}^{N_n - 1}(N_n - k) \cdot S_{k+1} \qquad (2)$$

unter der Bedingung

$S_1 + S_2 + \ldots + S_k \leq Z < S_1 + S_2 + \ldots + S_k + S_{k+1}$, wenn das Ereignis $\{ N_n = k \}$ vorliegt .

Hieraus erhält man als mittlere Gesamtwartezeit

$$E(W) = E(N_n \cdot Z_n) - E\left(\sum_{k=0}^{N_n - 1}(N_n - k) \cdot S_{k+1}\right) , \qquad (3)$$

wobei im allgemeinen Fall eine stochastische Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen in (2) bzw. in (3) besteht .

An einer Haltestelle kann man davon ausgehen , daß der zeitliche Abstand Z_n Einfluß auf die Anzahl der wartenden Passagiere hat . Bzgl. der Gesamtstrecke haben auch die Passagierzahlen an den Haltestellen Einfluß auf die Busabstände Z_n . Dieser Einfluß wird nicht untersucht (hierzu siehe ADAMSKI) . Aus der obigen Annahme eines gewöhnlichen Erneuerungsprozesses folgt , daß in einem betrachteten Tagesabschnitt (z.B. 6:00 - 7:30 Uhr , 11: 00 - 13:00 Uhr o.ä.) die Z_n stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind .

Der Zustand der n-ten Periode zwischen zwei aufeinander folgender Busse wird durch die stochastische Größe (N_n , Z_n , S^n_1, S^n_2, … ,$S^n_{N_n}$) beschrieben . Wenn im weiteren der Index n weggelassen wird , erhält man unter Beachtung der entsprechenden Rand - und bedingten Verteilungen für die mittlere Gesamtwartezeit aller wartender Passagiere in einer Periode

$$E(W) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \cdot \{k \cdot E(Z / N = k) - \sum_{l=1}^{k}(k - l + 1) \cdot E(S_l / N = k)\} \qquad (4)$$

$$= \int_0^{\infty} t \cdot E(N / Z = t) \cdot f_Z(t) \cdot dt$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{k}(k - l + 1) \cdot \int_{t=0}^{\infty} E(S_l / Z = t, N = k) \cdot P(n = k / Z = t) \cdot f_Z(t) \cdot dt \qquad (4a)$$

Um die Wirkung der Typen der Haltestellen auf die Wartezeit darzustellen , ist die Ankunftsintensität $\varphi(t)$ aus (1) heranzuziehen , wobei für die Ankunft der Passagiere ein instationärer Poissonprozeß angenommen wird.

4. Ankunft der Passagiere an einer Haltestelle als instationärer Poissonprozeß

Um die beobachteten Veränderungen bei den Ankunftsintensitäten zu erfassen , wird das Modell des instationären Poisson-Prozesses bei **FAHRMEIR,L.;KAUFMANN, H.L. ; OST, F** (pp. 91 - 92) verwendet .

N(t) : Anzahl an Passagieren , die in der Zeitdauer t an der Haltestelle eintreffen .

Der Prozeß N(t) besitzt eine zeitabhängige Intensitätsfunktion $\varphi(t)$, so daß für die unabhängigen Zuwächse der Anzahl der eintreffenden Passagiere an der Haltestelle im Zeitpunkt t mit $0 < t < z$, wenn die betrachtete Periode die Dauer $Z = z$ hat , gilt :

$$P(N(t+h)-N(t) = 1) = \varphi(t) \cdot h + o(h) \text{ mit } \varphi(t) \geq \varphi_o > 0$$
$$P(N(t+h)-N(t) \geq 2) = o(h) \qquad (5)$$

Aus (5) erhält man für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zuwachses von N(t) in dem Zeitintervall [t , t+v) .

$$P(N(t+v) - N(t) = k) = \frac{[m(t+v) - m(t)]^k}{k!} \cdot e^{-[m(t+v)-m(t)]} \quad \text{für } k = 0,1,\ldots \qquad (6)$$

mit der Leitfunktion $m(t) := \int_0^t \varphi(x) \cdot dx$.

Da der Poissonprozeß instationär ist , sind die Zwischenankunftszeiten $S_1, S_2, \ldots$ i.allg. nicht identisch verteilt und stochastisch abhängig . Für die bedingte Verteilung $P(S_n < t\text{-}v \,/\, T_{n-1} = v)$ mit $T_{n-1} = S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1}$ erhält man

$$\begin{aligned} P(S_n < t-v \,/\, T_{n-1} = v) &= 1 - P(S_n \geq t-v \,/\, T_{n-1} = v) \\ &= 1 - P(N(t-v) - N(v) = 0) = 1 - \exp(-[m(t-v) - m(v)]) . \qquad (7) \end{aligned}$$

Man erhält für die Verteilung der Ankunftszeitpunkte T_n eine instationäre Erlangverteilung .

$$\begin{aligned} F_n(t) &= P(T_n < t) = P(S_1 + \ldots + S_n < t) \\ &= 1 - e^{-m(t)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m(t)^k}{k!} \qquad (8) \end{aligned}$$

Da die Busankunftszeiten $T^{\ddot{o}}_1, T^{\ddot{o}}_2, T^{\ddot{o}}_3, \ldots$ nach Voraussetzung einen Erneuerungsprozeß bilden , wird eine Periode herausgegriffen und o.B.d.Allg. ihr Beginn mit t=0 festgelegt . Setzt man voraus ,daß die Ankünfte der Passagiere nicht von der Gesamtzahl N der einsteigenden Passagiere abhängt und der Einfluß der Busabstände durch Intensitätsfunktion $\varphi(t)$ beschrieben wird , dann erhält man unter diesen Annahmen

$$\begin{aligned} E(W) &= \int_0^\infty t \cdot m(t) \cdot f_Z(t) \cdot dt \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{t=0}^{\infty} m(t)^k \cdot e^{-m(t)} f_Z(t) \cdot dt \sum_{l=1}^{k} \frac{k-l+1}{(l-1)!} \int_{s=0}^{\infty} m(s)^{l-1} e^{-m(s)} ds \qquad (9) \end{aligned}$$

5 . Anmerkungen zur Intensitätsfunktion φ(t)

Um die Integrale auswerten zu können , sind Annahmen über die Struktur von $\varphi(t)$ zu treffen .

In **RUDNICKI** werden Erhebungen vorgestellt , anhand derer Schätzungen von $\varphi(t)$ erfolgten ,wobei man von der Definition (1) ausgeht . An Stelle des Grenzwertes werden die Quotienten für endliche Zeitabschnitte verwendet :

$$\varphi(t) \approx \frac{E(N(t+\Delta t)) - E(N(t))}{\Delta t}$$

Das Zeitintervall (Periode)zwischen aufeinander folgender Busse wird in zeitliche Abschnitte zerlegt und für die einzelnen Abschnitte über mehrere Busse die Mittelwerte gebildet . Diese Mittelwerte sind Schätzungen für die Erwartungswerte $E(N(t + \Delta t))$ und $E(N(t))$. Wenn hinreichend viele Perioden untersucht wurden , kann man die Mittelwerte in Näherung als normalverteilt annehmen . Es ist dann möglich , gefundene Unterschiede auf Signifikanz zu testen .

Um die in (9) auftretenden Integrale möglichst einfach zu halten , empfiehlt sich , $\varphi(t)$ durch eine Treppenfunktion zu approximieren . Da man von der Hypothese ausgeht , daß in einer Periode der Verlauf der Intensitätsfunktion für alle Perioden gleich ist , bedeutet dies , daß $\varphi(t)$ eine periodische Funktion ist ; d. h.

$$\varphi(z_1+\ldots+z_k + v) = \varphi(z_1+\ldots+z_n + v)$$, wobei die z_i Periodenlängen sind.

Die Intensitätsfunktion benötigt man auch , wenn man die Parameter der Gesamtwartezeit W an einer Haltestelle durch Simulationsverfahren schätzen möchte .

Literatur :

ADAMSKI , A. : Probabilistic Models of Passengers Service Processes at bus stop . Transpn. Res. - B , 26B (1992) , 4 pp. 253 - 259

FAHRMEIR , L. ; KAUFMANN , H. ; OST , F. : Stochastische Prozesse. Carl Hanser Verlag , München Wien 1981 , S. 91 - 92

RUDNICKI , A. : Potoki pasazéro´w w miejskiej komunikacji zbiorowej jako procesy stochastyczne . Czasopismo Techniczne 81 (1977) 5 , pp. 16 - 21

RUDNICKI , A. ; Probabilistyczne mierniki oceny punctualnos´ci obslugi pasazéro´w w komunikacji zbiorowej
Polskaja Akademia Nauk - Oddzial w Krakowie
Komisja Budownicta - Problemy inzýnierii ladowej 1992 , pp. 135 - 146