Mehrkriterielle Entscheidungen im Bauwesen

Zavadskas, E. K. VGTU Vilnius; Peldschus, F. HTWK Leipzig

1 Allgemeine Bemerkungen

Die Technische Gediminas Universität Vilnius, Lehrstuhl Technologie der Bauproduktion, und die Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur, Lehrbereich Baubetrieb, haben sich seit mehreren Jahren mit Problemen der mehrkriteriellen Entscheidung im Bauwesen befaßt. Auf Grund der unterschiedlichen Herangehensweise werden für numerische Untersuchungen auch unterschiedliche Herangehensweisen benutzt. Das gemeinsame Ziel war immer eine optimale Variantenauswahl für baubetriebliche Produktionsprozesse.
Zur Unterstützung der numerischen Lösungen wurde gemeinsam das EDV-Programm LEVI entwickelt, welche heute wahlweise als deutschsprachige oder englischsprachige Version genutzt werden kann. Das Programm LEVI ermöglicht Entscheidungsprobleme verschiedener Art zu lösen.

2 Programmaufbau

2.1 Eingabewerte

Jedes zu lösende Problem wird durch eine Matrix beschrieben. Diese enthält Varianten (Zeilen) und Kriterien (Spalten). Die Varianten sind Ausdruck einer Menge real existierender Situationen für ein Problem. Alle betrachteten Varianten werden mit den gleichen Kriterien bewertet. Die Ergebnisse der Bewertung werden in die Matrix eingetragen. Die Kriterien haben gewöhnlich unterschiedliche Dimensionen. Aus diesem Grund ist die Wirksamkeit nicht direkt vergleichbar. Eine Ausnahme bildet die Anwendung von dimensionslosen Bewertungsziffern nach einem Punktsystem. Dieses beinhaltet jedoch in hohem Maße subjektive Einflüsse und sollte daher nur in Ausnahmefällen benutzt werden.
Um die Schwierigkeiten der unterschiedlichen Dimensionen für die verschiedenen Kriterien zu umgehen wird das Verhältnis zum Optimalwert gebildet. Damit werden gleichzeitig die Diskrepanzen, die durch die unterschiedlichen Größenordnungen der Optimalwerte entstehen, beseitigt. Für das Verhältnis des Funktionswertes zum Optimalwert existieren unterschiedliche Auffassungen. Es muß an dieser Stelle bemerkt werden, daß mit der Entscheidung über das Verhältnis zum Optimalwert auch die Lösung beeinflußt werden kann. Durch die Transformation erfolgt eine Abbildung auf das Intervall [1 ; 0] oder [1 ; ~ 0].
Für das Programm LEVI wurden folgende Transformationen benutzt:
Die **vektorwertige Transformation** wird vorrangig für die Lösungsmethode Abstand zum idealen Punkt benutzt. Sie kann wahlweise auch für andere Lösungsmethoden benutzt werden. Bei dieser Transformation auf das Intervall [1 ; 0] bleibt das Verhältnis der Werte erhalten.

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{2}}} \qquad (1)$$

Die **lineare Transformation** relativiert die Ausgangswerte auf eine Skala der Ausgangswerte. Die berechneten Werte sind von der Größe des Intervalls [a(io);a(iu)] abhängig und ändern sich deshalb mit der Veränderung des Intervalls.

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{iu}}{a_{io} - a_{iu}} \quad \text{, wenn } b_{ij} \text{ möglichst groß werden soll}$$

$$\tag{2}$$

$$b_{ij} = \frac{a_{io} - a_{ij}}{a_{io} - a_{iu}} \quad \text{, wenn } b_{ij} \text{ möglichst klein werden soll}$$

a_{io} – größter Wert, a_{iu} – kleinster Wert

Die Berechnung der **relativen Abweichung** (Jüttler/Körth) ist eine leistungsfähige Transformation. Die Anwendung dieser Transformation ist auf das Intervall [0...2 Min] beschränkt.

$$b_{ij} = 1 - \left| \frac{a_j^* - a_{ij}}{a_j^*} \right| \tag{3}$$

a(j*) – Optimalwert für das Kriterium

Bei der **nichtlineaten Transformation** (Peldschus) erfolgt die Berechnung der Werte unabhängig von der Intervallgröße. Die Werte weden jedoch stärker abgemindert als bei den anderen Transformationen.

$$b_{ij} = \left(\frac{\underset{i}{Min}\, a_{ij}}{a_{ij}} \right)^3 \quad \text{wenn } \underset{i}{Min}\ a_{ij} \text{ günstig ist}$$

$$\tag{4}$$

$$b_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{\underset{i}{Max}\, a_{ij}} \right)^2 \quad \text{wenn } \underset{i}{Max}\ a_{ij} \text{ günstig ist}$$

Nach erfolgter Transformation besteht die Möglichkeit die Kriterien mit den Faktoren $0 < q(j) < 1$ zu wichten. Die Summe der Wichtungsfaktoren sollte „1“ betragen, weil es sonst zu verfälschten Ergebnissen kommen kann. Da eine Wichtung immer subjektiv ist, sollen nur begründete Wichtungen benutzt werden.

2.2 Lösungsmethoden

Für die Lösungsmethoden erfolgt eine Unterscheidung in einseitige und zweiseitige Fragestellungen. Die einseitige Fragestellung orientiert auf einige bekannte Methoden der Variantenauswahl und der Bestimmung einer Rangfolge. Die zweiseitige Fragestellung orientiert auf ein spieltheoretisches Gleichgewicht als Ausdruck eines rationalen Verhaltens von zwei entgegengesetzten Interessengruppen und auf Lösungen für Spiele gegen die Natur.

2.2.1 Die einseitige Fragestellung

In der aktuellen Version ist nur die Methode “Abstand zum idealen Punkt“ berücksichtigt. Eine Ergänzung ist geplant.

Bei dieser Methode wird die Abweichung von der idealen Variante in einer Rangfolge ausgewiesen. Für die Lösung werden folgende Schritte bearbeitet:
Die Ausgangsmatrix wird entsprechend Formel (1) transformiert. Mit den so berechneten dimensionslosen Werten werden die Mengen a+ (ideale Variante) und a- (negativ ideale Variante) berechnet.

$$a^{+} = \left\{ \left\lfloor \left(\max_{i} f_{ij} \ / \ j \in J \right), \left(\min_{i} f_{ij} \ / \ j \in J' \right) \right\rfloor / \ i = \overline{1,m} \right\} = \left\{ f_1^{+}, f_2^{+}, ..., f_n^{+} \right\} \qquad (5)$$

$$a^{-} = \left\{ \left\lfloor \left(\min_{i} f_{ij} \ / \ j \in J \right), \left(\max_{i} f_{ij} \ / \ j \in J' \right) \right\rfloor / \ i = \overline{1,m} \right\} = \left\{ f_1^{-}, f_2^{-}, ..., f_n^{-} \right\} \qquad (6)$$

Dabei bedeutet J die Menge der Maximierungsaufgaben und J' die Menge der Minimierungsaufgaben.
Mit Abständen L+ und L-

$$L_i^{+} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(f_{ij} - f_j^{+} \right)^2} \quad ; \quad \forall i; i = \overline{1,m} \qquad (7)$$

$$L_i^{-} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(f_{ij} - f_j^{-} \right)^2} \quad ; \quad \forall i; i = \overline{1,m} \qquad (8)$$

wird die relative Nähe zur idealen Variante ermittelt.

$$K_i = \frac{L_1^{-}}{L_i^{+} + L_i^{-}}, \quad \forall i; \quad i = \overline{1,m} \qquad (9)$$

Die so berechneten Werte K(i) befinden sich im Intervall [0; 1] und lassen sich in einer fallenden Folge ordnen, die die gesuchte Rangfolge ergibt.
Die Intervallgrenzen erhält man für:

$$K_i = \begin{cases} 1, & if \ a_i = a^{+}; \\ 0, & if \ a_i = a^{-}. \end{cases} \qquad (10)$$

2.2.2 Die zweiseitige Fragenstellung

Bei der zweiseitigen Fragestellung wird in Spiele mit rationalem Verhalten und Spiele gegen die Natur unterschieden.

2.2.3 Spiele mit rationalem Verhalten

Für Spiele mit rationalem Verhalten erhält man im Idealfall eine Sattelpunktslösung (einfaches Min-Max-Prinzip) oder eine Strategiekombination (erweitertes Min-Max-Prinzip)

Einfaches Min – Max – Prinzip

$$\alpha = \max_{i} \min_{j} a_{ij} \qquad \beta = \min_{j} \max_{i} a_{ij} \qquad (11)$$

Wenn $\alpha = \beta = \gamma$ ist, erhält man als Lösung einen Sattelpunkt mit reinen Strategien (jeweils nur eine optimale Strategie für jeden Spieler) – triviale Lösung.

Erweitertes Min – Max – Prinzip
Es wird ein Gleichgewichtspunkt mit gemischten Strategien berechnet (Strategiekombination)

$$\max_i \min_j A(s_1, s_2) = \min_i \max_j A(s_1, s_2) = A(s_1^*, s_2^*) = \nu \tag{12}$$

2.2.2.2 Spiele gegen die Natur

Waldsche Regel
Diese Methode sucht die beste der schlechteste Lösung. Der Entscheidente verhält sich so, als ob für ihn immer der schlechteste Zustand eintritt - pessimistische Grundhaltung.

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \in S_1 \cap \max_i \min_j a_{ij} \right\} \tag{13}$$

Savage Kriterium
Es wird angestrebt, den Opportunitätsverlust zu minimieren. Der Opportunitätsverlust ist dabei die Differenz aus dem größten und dem erreichten Nutzen.

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \in S_1 \cap \min_i \max_j c_{ij} \cap c_{ij} = \left(\max_r a_{rs} \right) - a_{rs} \right\} \tag{14}$$

$r = \overline{1, m}$; $s = \overline{1, n}$

Nachteil der Methode: nicht optimale Strategien beeinflussen durch ihr Vorhandensein die Lösung.

Hurwicz - Regel
Die optimale Strategie wird auf der Basis des schlechtesten und des besten Ergebnisses berechnet. Diese aus dem Zeilenminimum und dem Zeilenmaximum gebildeten Größen werden mit dem Optimismusparameter zu einem gewogenen Mittel vereinigt.

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \in S_1 \cap \max_i h_i \cap h_i = \min_i a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij} \cap 0 \le \lambda \le 1 \right\} \tag{15}$$

Für den Wert $\lambda = 1$ erhält man die pessimistischste Lösung (Waldsche Regel).
Für $\lambda = 0$ werden nur die maximalen Werte berücksichtigt, größtes Risiko.

Laplace Regel
Die Lösung wird unter der Bedingung berechnet, daß alle Wahrscheinlichkeiten für die Strategien des Gegenspielers gleich sind.

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \in S_1 \cap \max_i \left(1/n \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) \right\} \tag{16}$$

Bayes Regel
Lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die Strategien des Gegenspielers angeben, dann kann als Lösung das Maximum für den Erwartungswert benutzt werden.

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \cap \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right) \cap \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\} \tag{17}$$

Hodges - Lehman - Regel
Mit diesem Kriterium kann des Vertrauen, das man in die Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten q(j) für die Strategien des Gegenspielers setzt, durch den Mischungsparameter λ ausgedrückt werden.

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \in S_1 \cap \max_i \left[\lambda \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} + (1-\lambda) \min_j a_{ij} \right] \cap 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \tag{18}$$

Für $\lambda = 0$, d.h. kein Vertrauen, erhält man die Lösung nach der Waldschen Regel. Ist das Vertrauen groß, d.h $\lambda = 1$ erhält man das Ergebnis der Bayes Regel.

2.2.3 Lösung für Produktionserien
Zur Berechnung einer optimalen Produktionsvariante für verschiedene Produkte erfolgt die Lösung mit einer gewichteten Matrix. Dabei werden für jedes Produkt eine Matrix mit den betrachteten Produktionsvarianten erstellt und nach den ausgewählten Kriterien bewertet. Die Summe aller Produktmatrizen multipliziert mit der Stückzahl wird durch die Gesamtstückzahl dividiert und führt zur gewichteten Matrix. Das Ergebnis wird mit den genannten Lösungsmethoden berechnet.

3. Anwendung
Das Programm LEVI wurde erarbeitet für die Dimensionierung baubetrieblicher Produktionsprozesse. In Anlehnung an das statische Gleichgewicht hat daher die spieltheoretische Gleichgewichtslösung eine besondere Bedeutung. Da die Realisierung des spieltheoretischen Gleichgewichtes im Bauprozeß nicht ohne weiteres möglich ist, werden auch Vergleichsrechnungen mit anderen Lösungsmethoden erforderlich.
Neben der praktischen Anwendung des Programms LEVI sollte hier auch das wissenschaftliche Interesse erwähnt werden. Es läßt sich bisher nicht einschätzen, welchen Einfluß die unterschiedlichen Transformationsmethoden auf das numerische Ergebnis haben. Ein weiteres Problem ist die nicht vorhandene Identität der Lösungen, was den Praktikern erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Es wird z.Z. daran gearbeitet, diese Fragen durch die Nutzung des Programms LEVI einer Beantwortung zuzuführen.