

Berechnungsmodell der Polystyrol-Massiv-Rippendecken

1. Einleitung

Neue Konstruktionsentwicklungen erwarten von Bauingenieuren auch neue Berechnungs- und Analysenmethoden. Zu solchen Konstruktionen gehören Polystyrol-Massiv-Rippendecken. Die Decken, die eine wichtige Rolle im Neubau sowie in der Sanierung und Rekonstruktion von Altbauten spielen, haben eine umfangreiche Technologiebeschreibung, jedoch relativ kleine Berechnungsbase zur statischen Analyse der Ausnutzungs- und Statischfestigkeitsparametern. In den Vortrag wurde eine Methode zu Analyse solche Decken dargestellt. Das interessante Problem befindet sich in der sogenannten zweiten Phase, wenn der Decke keine elastische Platte ist. Eine wichtige Rolle bei Berechnung spielen die veränderte Steifigkeit und Rheology.

2. Die Deckenkonstruktion

Eine Gruppe der Polystyrol-Massiv-Rippendecken haben verschiedene technologische Entwicklungen, doch das statische Schema für die ganze Gruppe vereinheitlichen kann. Aus diesem Grund man zeigt nur eine Konstruktionslösung für die Euromac-2. Die folgenden Abbildungen 1a und 1b zeigen schematisch der Polystyrol-Massiv-Rippendecken EUROMAC 2.

Die Formelemente bestehen aus 600 mm breiten und 160 mm hohen Polystyrol-Hartschaumkörpern mit je 4 integrierten Hohlräumen, deren Einzelabmessung sich auf 65 mm mal 85 mm beläuft. Je nach Anwendung kann die Länge der einzelnen Hartschaumkörper bis zu 4300 mm betragen.

Zwischen dem ersten und zweiten sowie zwischen dem dritten und vierten Hohlraum sind Aussteifungsbleche aus 1 mm starkem Stahl eingebracht. Sie garantieren die Tragfähigkeit während der Verlegearbeiten, d.h. die Elemente sind problemlos begehbar.

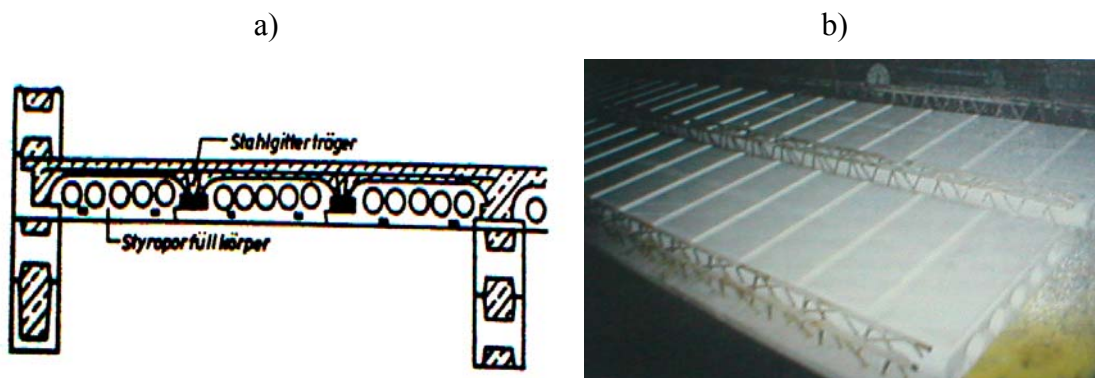


Abb. 1. Schnittdarstellung der Polystyrol-Massiv-Rippendecke EUROMAC 2.

Die Deckenelemente sind mit einem Gewicht zwischen 16 und 20 kg/m² anzusetzen. Das Material ist schwer entflammbar. (Der Feuerwiderstand des Styropors wird mit M 1 angesetzt, in Verbindung mit Gipsputz mit M 0).

Im Bereich der Stoßstellen der Elemente, d.h. im Abstand von 600 mm, werden die mit Beton zu verfüllenden Bewehrungen in Form von Gitterträgern und eventuellen Zusatzverstärkung eingebracht. Die Stahlträger werden vorgefertigt. Wie stark die Bewehrung ausfällt, richtet sich nach dem Nutzungszweck des Bauwerkes, insbesondere nach Anforderungen hinsichtlich der Spannweiten und der aufzunehmenden Lasten.

Die zu einer eventuellen Aufstockung verwendeten Hartschaumkörper sind 400 mm breit und 80 mm hoch. Ihre Länge richtet sich nach dem Grundelement. Schließlich ist eine Stahlmatte aufgebracht, die als Bewehrung in der aus Frischbeton der Betonklasse B 250 zu gießenden Druckplatte dient. Vor dem Vergießen werden noch Abdeckhauben zum Zwecke etwaiger Überbrückungen darunterliegenden Mauerwerks auf die Bewehrung aufgelegt (siehe Abb. 2). Diese Bleche erfüllen eine statische Funktion bei der Verbindung der Deckenelemente über den Mauerauflägern.

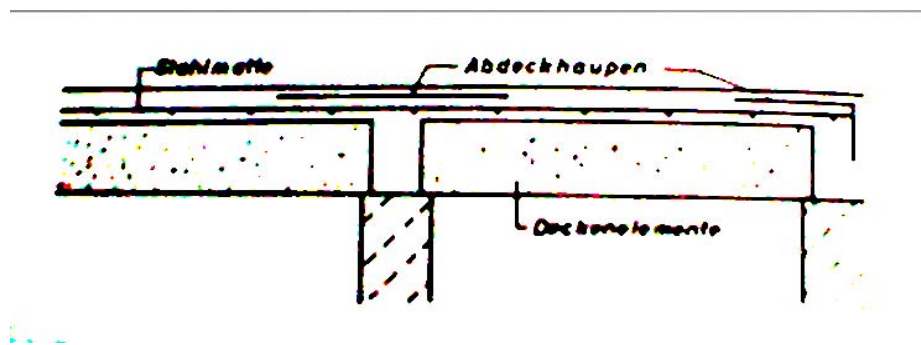


Abb.2. Verlegung der Abdeckhauben

3. Theoretische und experimentelle Grundlage des Systems

3.1. Berechnungsmodell in der klassischen Theorie der Platten in Anwendung zu den Polystyrol-Massiv-Rippendecken

Das Berechnungsmodell, das für die Rippendecke meistens angenommen ist, ist eine gebogene, anisotropische, elastische Platte. Das Berechnungsmodell kann auch einen Ausgangspunkt für eine theoretische Analyse der Polystyrol-Massiv-Rippendecken sein.

Die Grundlage der klassischen Plattentheorie ist wohl für die anisotropen Rippendecken von Gehring [4], Boussinesq [1] und Voight [9] bekannt, obwohl die gegenwertigen Form der Theorie sowie die Lösungen des Spannungs- und Dehnungszustandes von Huber [5] und Timoshenko [8] behandelt wurden. Die allgemeine Lösungsform ist von den physischen Verbindungen, meistens als verallgemeinerten Hookeprinzip vorgestellt, sowie von den Dehnungszustand- und Gleichgewichtgleichungen. Eine Elastizitätsmatrix E_{ij} hat - für die gebogene, anisotropische, elastische Platte - in der Beziehung:

$$\sigma_i = E_{ij} \varepsilon_j \quad (3.1)$$

folgende, allgemeine Form:

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{66} \end{bmatrix}$$

Von Gleichgewichtsbedingungen können Innenkräfte errechnet werden:

$$M_i = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sigma_i z \, dz \quad (3.3)$$

wo: d - Dicke der Platte.

$$\mathbf{M}_i = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_i = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

Annehmend von allgemeinen Abhängigkeiten:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \tau_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.4)$$

man erhält somit letztlich:

$$\mathbf{M}_i = \begin{Bmatrix} - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ - \left(D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ - \left(D_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (3.5; 3.6)$$

D_{ij} - ein allgemeiner Ausdruck bezeichnet die Steifigkeit.

Ähnlich kann man die Querkräfte bestimmen:

$$\mathbf{T}_i^E = \left\{ \begin{array}{l} - \left(D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \\ - \left(D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \end{array} \right\} \quad (3.7; 3.8)$$

In der Polystyrol-Massiv-Rippendecken kann man die charakteristische für das Material die elastische Konstante E_x , E_y , G_{xy} , ν einführen. In den Gleichungen (3.5–3.8) kann man die Innenkräfte in der vollen Form darstellen:

$$\mathbf{M}_i = \left\{ \begin{array}{l} -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -D_y \left(\nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -2D_{xy} \left(1 - \nu_x \nu_y \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}; \quad \mathbf{T}_i = \left\{ \begin{array}{l} -D_x \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left[\nu_y + 2 \frac{G_{xy}}{E_x} (1 - \nu_x \nu_y) \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\ -D_y \left(\left[\nu_x + 2 \frac{G_{xy}}{E_y} (1 - \nu_x \nu_y) \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \end{array} \right\} \quad (3.9 - 10)$$

Die Steifigkeitsparametern nehmen hier folgende Werte an:

$$D_\alpha = \frac{E_\alpha h^3}{12(1-\nu^2)}; \quad \text{wo: } \alpha \in \langle x, y \rangle; \quad D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.11)$$

Von der Differentialgleichung (3.9) werden die Durchbiegungs- und Drehwinkelwerte bestimmt. Die fehlenden Integralbeiwerte bekommt man von den Randbedingungen, die für jeden Fall bezeichnend sind.

Der Thermoelastizitätseinfluss, als der Effekt, der in den Polystyrol-Massiv-Rippendecken kleine Rollen spielt, vernachlässigt wurde.

3.2. Theoretische Lösung der Polystyrol-Massiv-Rippendecken als Stahlbeton Platte in der I und II Phase

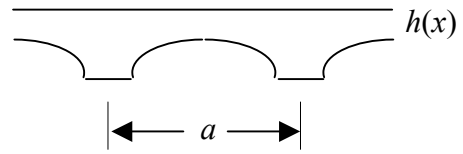
Die theoretische Aufgabe, die im Abschnitt 3.1 vorgestellt wurde, berücksichtigt direkt nicht manche Eigenarten, die charakteristisch für Polystyrol-Massiv-Rippendecken, sind. Zum Beispiel hat der Elastizitätsmodul im bestimmten Spannungszustand in jeder Richtung eine (im statistischen Verständnis) Festwerte. Von der anderen Seite hat das E-Modul in Abhängigkeit vom Belastungsniveau oder Betonalter die veränderlichen Werte. Bei Zuwachs des Spannungszustandes treten die charakteristischen für Stahlbetonkonstruktionen Phasen – Plastifizierung und Risszustände – im Beton auf. Es gibt auch charakteristischen konstruktiven Vereinfachungen, wie Einführung der Ersatzquerschnitte für Bewehrung und Annahme über die Nullebene, wo

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \text{ usw.}$$

Die Umstände lassen bei der Berechnung Polystyrol-Massiv-Rippendecken die Stahlbetoneigenschaften berücksichtigt. Die Steifigkeitswerte (3.11) ist von der Voraussetzung über die

mittleren Werte des Bogenmomentes M_x , M_y und den Krümmungen $\partial^2 w / \partial x^2$ und $\partial^2 w / \partial x \partial y$ bezeichnet:

$$M_y = -\frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{a} \int_0^a h^3(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.12)$$



$$M_x = -\frac{E}{12(1-\nu^2)} h^3(x) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M_y \frac{12(1-\nu^2)}{E} \frac{1}{a} \int_0^a \frac{1}{h^3(x)} dx; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -M_{xy} \frac{12(1+\nu)}{E} \frac{1}{h^3(x)} \quad (3.14)$$

$$\text{wo: } \nu_x = \frac{D_{12}}{D_{22}} = \nu \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}; \quad \nu_y = \frac{D_{12}}{D_{11}} = \nu \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}$$

Nach der Integrierrechnung der Gleichungen 3.12-3.14 und Berücksichtigung des Bewehrungseinfluss es ergibt sich folgende Berechnung:

$$D_x = D_{11} = [E_c / (1 - \nu^2)] [(a / 12 \beta) + n\mu_x d e_x^2 / (1 + n\mu_x)] \quad (3.15)$$

$$D_y = D_{22} = [E_c / (1 - \nu^2)] [(\gamma / 12 a) + n\mu_y d e_y^2 / (1 + n\mu_y)] \quad (3.16)$$

$$D_{xy} = D_{66} / (1 - \nu_x \nu_y) = (1 - \nu) D_x / 2 (1 - \nu_x \nu_y) \quad (3.17)$$

$$D_{12} = \nu_x D_y = \nu_y D_x = \nu D_{11}$$

$$\beta = (b_1 / d_1^3) + (b_2 / d_2^3); \quad \gamma = b_1 d_1^3 + b_2 d_2^3$$

$$n = E_s / E_c; \quad \mu_x = A_{sx} / A_c^{y-y}; \quad \mu_y = A_{sy} / A_c^{x-x}$$

wo:

a - Abstand der Rippen (in die Achsen);

d_1 - die mittlere Dicke der Platte zwischen der Rippen;

d_2 - die größte Dicke der Platte;

b_1 - das Licht zwischen den Rippen;

b_2 - Rippenbreite;

e_x - Abstand der Bewehrungsmittel in der Richtung der x-Achse von der Mittelebene der Platte

e_y - Abstand der Bewehrungsmittel in der Richtung der y-Achse von der Mittelebene der Platte

E_s ; E_c - E-Modul für Stahl und für Beton;

ν - Poisson-Zahl;

A_{sx} ; A_{sy} - Stahlquerschnitt in der Richtung der X- und Y-Achse;

A_c^{x-x} ; A_c^{y-y} - Betonquerschnitt in der senkrechten Fläche zu der Richtung der X- und Y-Achse

Für die früher bestimmte Steifigkeit (3.15-3.17) kann man jetzt die Differentialgleichung der Deckenplatte in folgende Form darstellen:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad (3.18)$$

Als das statische Schema der Polystyrol-Massiv-Rippendecken ist eine Platte mit den folgenden Unterstützungen zu annehmen:



Für die bezeichneten Randbedingungen des Polystyrol-Massiv-Rippendecken ist die Lösung mit einer doppelten, tryghonometrischen Reihe oder mit einer einzelnen Fourier's Reihe zu erzielen. Die Lösung der Differentialgleichung ist eine Summe des allgemeinen und partikularen Integral. Die geschlossene Lösung ist hier möglich, wenn die Steifigkeit D einen konstanten Wert hat.

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^n A_k ch \alpha_k y + B_k sh \alpha_k y + C_k y ch \alpha_k y + D_k y ch \alpha_k y + \frac{4q}{D \pi k \alpha_k^4} \sin \alpha_k x; \quad (3.19)$$

wo: $\alpha_k = k \pi / L_1$

Die Integralkonstante ist von den Randbedingungen abhängig.

Bei verschiedenen Werten der Steifigkeiten $D_x \neq D_y \neq D_{xy}$ ist die geschlossene Lösung möglich, auch wenn die Belastungsverteilung und die Randbedingungen der Durchbiegung als eine Funktion einer Variable darstellen. Der Zufall ist zum Beispiel, wenn die Belastung einer Funktion einer Variable ist und die Randbedingungen in einer senkrechten Richtung bekannt ist. Die Lösung für die gleichmäßig verteilte Belastung hat folgende Darstellung:

$$w(x, y) = \frac{L^4}{D_x} \left\{ g_1 \left[\frac{x}{45L} - \frac{\left(\frac{x}{L}\right)^3}{18} + \frac{\left(\frac{x}{L}\right)^4}{24} + \frac{\left(\frac{x}{L}\right)^5}{120} \right] + g_2 \left[\frac{7x}{360L} - \frac{\left(\frac{x}{L}\right)^3}{36} + \frac{\left(\frac{x}{L}\right)^5}{120} \right] \right\} \quad (3.20)$$

Die selbe Aufgabe ist komplizierter, wenn der Risseszustand (II-Phase) in der Decke zu berücksichtigen ist. Prinzipiell kann man in dem Thema zwei Konzeptionen vorstellen. Die erste nimmt eine Verminderung der Steifigkeit in der senkrechte zu den Rissesrichtungen:

$$\begin{aligned} D_x' &= D_x f_1(g, t) \\ D_y' &= D_y f_2(g, t) \\ D_{xy}' &= D_{xy} f_3(g, t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hier $f_i(g, t)$ ist eine experimentelle Funktion, sie beschreibt die Verminderung der Steifigkeit in Abhängigkeit von Belastungsniveau. Die Funktion kann auch die anderen Parametern berücksichtigen, zum Beispiel Zeit, welche die Veränderung des E-Modul beeinflusst. Die

experimentellen Abhängigkeiten sind für Balken (u.a. φ – und Ψ –Hypothese von Kuczynski [7]) bekannt. Mit der Hypothese können viele technische Aufgaben mit einer exakten Genauigkeit approximieren. Die Konzeption der Veränderung der Steifigkeit ist zwischen anderen auch in Eurocode 2 entwickelt.

Der andere Ausgangspunkt hat sogenannte diskretische Methoden von Borcz [2], die einen unveränderliche Werte der Steifigkeiten D_x , D_y , D_{xy} im Gebiet zwischen der Rissen an nimmt. In diesem Fall in den Gleichungen (3.21):

$$f_1(g,t) = f_2(g,t) = f_3(g,t) = 1$$

für $g \in \langle 0, g^{\text{zerst}} \rangle$; $t \in \langle 0, \infty \rangle$.

Die Methode nimmt die lokale Veränderung der Steifigkeit in den gerissenen Querschnitten an. In der Differentialgleichung ist jedoch der Risseinfluß nicht im Steifigkeitssegment, aber als äußere Belastung angeführt:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p + \sum_{i=1}^r r_i \delta_{,xx}(x - x_i) \delta_{,yy}(y - y_i) \quad (3.22)$$

wo: $i = 1 \dots r$ - das Rissnummer;

$r_i = r_{0i} - r_{1i} M^{\text{max}}$ - Winkeldisslokation im Risspunkt;

r_{0i} - die Winkeldisslokation im Risspunkt - die plastischen Deformationen;

$r_{1i} M^{\text{max}}$ - die Winkeldisslokation im Risspunkt - die elastischen Deformationen;

M^{max} - der maximale Biegemoment im gerissenen Querschnitt;

$\delta_{,\alpha\alpha}(\alpha - \alpha_i) = \partial^2 \delta(\alpha - \alpha_i) / \partial \alpha^2$; wo: $\alpha = \langle x, y \rangle$

$\delta(\alpha - \alpha_i)$ - Dirac's Funktion in Richtung der X- und Y-Achse;

$\delta(\alpha - \alpha_i) = \langle 0 \text{ für } \alpha \neq \alpha_i; \infty \text{ für } \alpha = \alpha_i \rangle$

Die Berechnungsmethode ist bequem für Balken und gleichartigen Platten, sowie Scheiben und Schallen. Die Anwendung der Methode an Rippendecken ist besonders günstig, wenn die Vereinfachung an den Balken oder gleichartigen Platten möglich ist. Die Bezeichnung der Einflußfunktion ermöglicht problemlos die verschiedenen Belastungsfälle zu lösen.

4. Ein Vergleich der theoretischen und experimentellen Ergebnissen. Zusammenfassung

Als Vergleich- und Berechnungsmodell ist eine anisotropische Platte angenommen. Die analytische Lösung ist für eine kontinuierliche, freiunterstützte Rippenplatte mit einer Belastung in einem Feld durchgeführt. Die ausgewählte Berechnungsmethode ist die Lösung mit einer einzelnen Fourierreihe.

Gleichzeitig wurde ein Experiment durchgeführt, wo die Dimensionen und Belastungen des geprüften Element solche, wie im Berechnungsmodell sind.

Die theoretischen Werte der maximalen Durchbiegungen sind 5 - 10 % größer als im Experiment. Es bedeutet eine größere Steifigkeit der Decke in der Wirklichkeit. Die größere Steifigkeit ist das Ergebnis der Konstruktionsbewehrung und der lokalen Zusammenarbeit zwischen Rippen und Platte, was in der Berechnung nicht berücksichtigt ist.

Die Prüfungen sind auch für eine ungerissene und gerissene Phase durchgeführt. Die Spannung-Dehnungsanalyse für den zweidimensionalen Zustand und der Umlagerungseffekt wurden experimentell beobachtet. Das Experiment hat die Werte des vorgestellten Berechnungsmodells der Polystyrol-Massiv-Rippendecken zu den Ingenieuranalyse bestätigt.

Summary

Calculating model of monolithic RC floors with styropor-filling

The mathematical model to calculation of monolithic RC floors with styropor-filling is presented. A way of analysis for the I and II phase of the work of element (plates with and without cracks) is shown. Existing solutions were used from classic theory of plates and it was shown how this theory it was been possible to use to current methods of calculations of reinforced concrete construction.

Literatur:

- [1]. Boussinesq M.J.: Complements a une etude sur la theorie de l'equilibre et de mouvement des solides elastiques. Journ. de Math. pures et appl. ser.3 vol.5/1879.
- [2]. Borcz A.: Teoria konstrukcji żelbetowych. Wybrane badania wrocławskie. Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 1986.
- [3]. Dąbrowski O.: Teoria dźwigarów powierzchniowych. Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 1987.
- [4]. Gehring F.: De aequationibus differentialibus quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definitur. Berlin 1860
- [5]. Huber M.T.: Einige Anwendungen der Biegunstheorie ortotroper Platten. Zeitschriften f. angew. Math. u. Mech. 6/1926 Nr 3.
- [6]. Kączkowski Z.: Plyty. Obliczenia statyczne. Arkady. Warszawa 1980.
- [7]. Kuczyński W.: Konstrukcje żelbetowe. Kontynuacja teorii żelbetu. Arkady. Warszawa 1972.
- [8]. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells. Second Edition..Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London 1959
- [9]. Voigt W.: Lehrbuch der Kristallphysik. Teubner Verlag 1910.