

---

**Preprint No. M 18/10**

**Remarks to generalized Petersen  
Graphs – Bemerkungen zu  
generalisierten Petersen**

Peter E. John

Oktober 2018

**URN:** urn:nbn:de:gbv:ilm1-2018200143

---

**Impressum:**

Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik  
Weimarer Straße 25  
98693 Ilmenau  
Tel.: +49 3677 69-3621  
Fax: +49 3677 69-3270  
<http://www.tu-ilmenau.de/math/>

# Remarks to generalized Petersen Graphs – Bemerkungen zu generalisierten Petersen Graphen

Peter E. John

Institut für Mathematik der Technischen Universität Ilmenau

In memoriam Horst Sachs, Ilmenau, 1927 – 2016

Schlagworte: kubischer Graph, verallgemeinerter Petersen Graph, I-Graph, Speichengraph, charakteristisches Polynom, Eigenwerte, Duplex eines Graphen, cospectraler Graph, Desargue-Levi Graph, einfache Polynombeziehungen

## 1. Einführung

Im Jahr 1891 erschien von dem Dänischen Mathematiker Julius Petersen (1839 - 1910) eine Arbeit<sup>(1)</sup> mit dem Titel "Die Theorie der regulären Graphen", in welcher die Faktorisierung regulärer Graphen untersucht wurde. Hier sind erstmals grundlegende Ergebnisse der Graphentheorie und der nach Petersen benannte Graph  $Pe = G(5, 2)$  (s. Abb. 1) publiziert. Dieser wird in vielen Veröffentlichungen als signifikantes Beispiel verwendet. In  $G(5, 2)$  steht die „5“ für den aus den  $u$ -Knotenpunkten gebildeten  $u$ -Kreis  $C^u$  und die „2“ bringt zum Ausdruck, dass der aus den  $v$ -Knotenpunkten gebildete  $v$ -Kreis  $C^v$  jeweils einen  $v$ -Knoten überspringt.

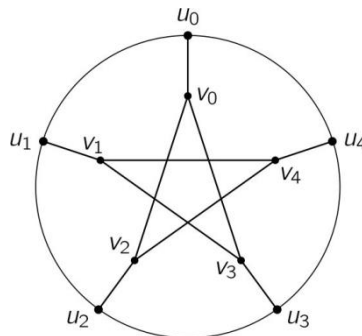


Abb. 1: Der Petersen-Graph  $Pe = G(5, 2)$

Es sei  $G = G(V; E)$  ein zusammenhängender Graph mit der Knotenpunktmenge  $V = V(G)$  und der Kantenmenge  $E = E(G) \subseteq V \times V$ . Die Anzahl der Knotenpunkte und Kanten von  $G$  werden mit  $n = n(G)$  bzw.  $m = m(G)$  bezeichnet.

Graph  $G$  heißt *kubisch (3-regulär)*, falls jeder seiner Knotenpunkte mit genau drei Kanten von  $G$  inzidiert, wobei Mehrfachkanten und Schlingen zugelassen sind. Sei  $s$  eine Schlinge, die sich am Knotenpunkt  $w$  von  $G$  befindet. Der Beitrag von  $s$  zur Valenz von  $w$  und zum Eintrag  $a_{ii}$  in der Adjazenzmatrix  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(G) = (a_{ij})$  von  $G$  ist 2.

Die Menge aller endlichen Graphen wie die aller endlichen kubischen Graphen werde mit  $\mathbf{G}$  bzw.  $\mathbf{G}^3$  bezeichnet. Zwei Graphen  $G, G' \in \mathbf{G}$  heißen *isomorph* (kurz:  $G \cong G'$ ), wenn es eine Bijektion  $\beta': V(G) \leftrightarrow V(G')$  gibt mit  $(u, v) \in E(G)$  genau dann, wenn  $(\beta'(u), \beta'(v)) \in E(G')$  für alle  $u, v \in V(G)$  ist.

Graph  $G$  heiße *paarer Graph*, falls seine Knotenpunkte so schwarz und weiß gefärbt werden können, dass jede Kante von  $G$  Knotenpunkte unterschiedlicher Farbe miteinander verbindet. Ist  $G$  paarer Graph, so hat jeder Kreis von  $G$  gerade Länge.

## 2. Der verallgemeinerte Petersen Graph

Es ist  $K_2 = (V(K_2), E(K_2))$  der vollständige Graph mit  $V(K_2) = \{u, v\}$  und  $E(K_2) = \{(u, v)\}$ . Der hier interessierende *verallgemeinerte Petersen Graph*  $G(c, k) \in \mathbf{G}^3$  ( $c = 1, 2, \dots; 0 \leq k \leq c - 1$ ) hat die Knotenpunktmenge  $V(G(c, k)) = \{u_i, v_i; i = 0, 1, \dots, c - 1\}$  und die Kantenmenge  $E(G(c, k)) = \{(u_i, u_{i+1}), (u_i, v_i), (v_i, v_{i+k}); i = 0, 1, \dots, c - 1 \text{ und der Index wird (mod } c) \text{ reduziert}\}$  (in Abb. 1 sind  $c = 5$  und  $k = 2$ ). Graph  $G(c, k)$  wird mit Hilfe von  $c$  Kopien des  $K_2$  und den entsprechenden  $u$ - und  $v$ -Kreisen konstruiert. Die Menge der verallgemeinerten Petersen-Graphen werde mit  $\mathbf{PG}$  bezeichnet. Diese Graphen sind zuerst von H. S. M. Coxeter<sup>(2)</sup> und K. Bannai<sup>(3)</sup> untersucht worden. In einer Arbeit von R. Gera und P. Stanica<sup>(4)</sup> findet der interessierte Leser die Herleitung des charakteristischen Polynomes (siehe hierzu Punkt 3) von Graphen aus  $\mathbf{PG}$  mittels zirkulanter Matrizen. A. W. Dudek<sup>(5)</sup> untersucht bei wachsendem  $c$  Grenzwerte von Eigenwerten verallgemeinerter Petersen Graphen.

### Bobachtung 1:

Graph  $G(c, k)$  hat insgesamt  $n = 2c$  Knotenpunkte und  $m = 3c$  Kanten falls  $c > 1$  und  $k > 0$  sind. Ist  $k = 0$ , so hat  $G(1, 0)$  eine Kante und zwei Schlingen und die Graphen  $G(c > 1, 0)$  haben genau  $2c$  Kanten und  $c$  Schlingen (s. Abb. 2).

Graph  $G(c, k > 0)$  ist paarer Graph genau dann, wenn  $c$  gerade und  $k$  ungerade sind. Man färbe z. B. die Knotenpunkte  $u_i$  und  $v_{i+1}$  für  $i$  gerade weiß und für  $i$  ungerade schwarz, wobei der Index (mod  $c$ ) genommen wird.

Es sei  $g = \text{ggT}(c > 1, k > 1)$  der größte gemeinsame Teiler von  $c$  und  $k$ . Graph  $G(c, k)$  hat im Falle  $g = 1$  neben dem Kreis  $C^u$  einen Kreis  $C^v$  der Länge  $c$  und im Falle  $g > 1$  genau  $g$   $C^v$ -Kreise der Länge  $c/g$ . Die beiden Graphen  $G(c, k)$  und  $G(c, c - k)$  sind isomorph. Deshalb kann  $k \leq c/2$  gewählt werden. Ist  $k = c/2 > 1$ , so findet man im Graphen  $G(c = 2k, k)$  genau  $k$  *Doppelkanten* (Kreise der Länge 2, mitunter auch als „Zweiecke“ bezeichnet, siehe Watkins<sup>(6)</sup> und Abb. 6), womit er auch zur Menge  $\mathbf{PG}$  gehört.

In den kleinsten Graphen von  $\mathbf{PG}$  (siehe Abb.2) findet man neben den  $u - v$ -Kanten

in  $G(1, 0)$ : zwei Schlingen  $(u_0 - u_0, v_0 - v_0)$ ,

in  $G(2, 0)$ : eine Doppelkante  $(u_0 - u_1 - u_0)$  und zwei Schlingen  $(v_0 - v_0, v_1 - v_1)$  und

in  $G(2, 1)$ : zwei Doppelkanten  $(u_0 - u_1 - u_0, v_0 - v_1 - v_0)$ .

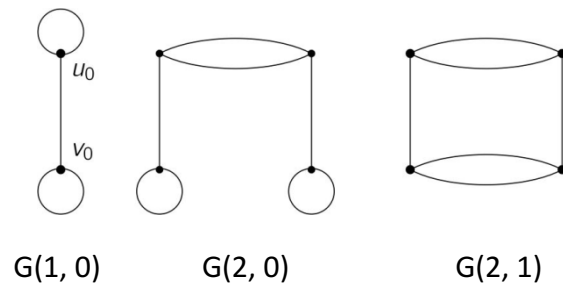


Abb. 2: Die drei kleinsten verallgemeinerten Petersen Graphen

Eine interessante Erweiterung der verallgemeinerten Petersen Graphen stellen die seit 1988 aus dem Foster Census<sup>(7)</sup> bekannten I-Graphen dar.

Der I-Graph  $I(c, k_1, k_2)$ ,  $1 \leq k_1, k_2 < c$  und  $k_1, k_2 \neq c/2$ , hat die Knotenpunktmenge  $V(I) = \{u_i, v_i; i = 0, 1, \dots, c - 1\}$  und die Kantenmenge  $E(I) = \{(u_i, u_{i+k_1}), (u_i, v_i), (v_i, v_{i+k_2}); i = 0, 1, \dots, c - 1, \text{ wobei der Index (mod } c) \text{ gew\u00e4hlt wird}\}$ . Somit ist jeder verallgemeinerte Petersen Graph auch ein I-Graph, denn es ist  $G(c, k) = I(c, 1, k)$ . Allerdings ist die Umkehrung falsch: nicht jeder I-Graph ist zugleich ein Graph aus **PG** (siehe Punkt 6, Abb. 12). I-Graphen haben T. Pisanski<sup>(8,9)</sup> und Mitarbeiter umfassend untersucht.

Eine weitere M\u00f6glichkeit, den Petersen Graph zu verallgemeinern, ist durch die *Y- und H-Graphen* von J. D. Horton und I. Z. Bouwer<sup>(10)</sup> gegeben. Der Y-Graph z. B. besteht 4 Segmenten mit je  $v$  Knotenpunkten. Das zentrale Segment  $S_0$  hat  $v$  isolierte Knotenpunkte  $x_{0j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, v$ , w\u00e4hrend in den anderen drei Segmente  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , die Knotenpunkte  $x_{ij}$  jeweils einen Kreis bilden (hier k\u00f6nnte auch weiter verallgemeinert werden!). Es ist Knotenpunkt  $x_{ij}$  mit Knotenpunkt  $x_{i,j+k_i}$  verbunden, wobei der zweite Index modulo  $v$  gew\u00e4hlt wird; man beachte:  $1 \leq k_1, k_2, \dots, k_v < v$ . Zum Schlu\u00df f\u00fcge man noch diejenigen Kanten ein, welche die vier Segmente untereinander verbinden:  $x_{0j}$  wird f\u00fcr  $i = 1, 2, 3$  mit  $x_{ij}$  verbunden. Der resultierende Graph  $Y(v; k_1, k_2, k_3)$  hat genau  $4v$  Knotenpunkte und ist 3-regul\u00e4r. Der H-Graph enth\u00e4lt genau sechs Segmente, wobei die zwei zentralen Segmente mit sich und je zwei weiteren Segmenten, \u00e4hnlich dem Y-Graph, verbunden sind.

Graph  $G \in \mathbf{G}$  habe die Knotenpunktmenge  $V(G) = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  und die Kantenmenge  $E(G) = \{(i, j); i, j \in V(G)\}$ . Der *Duplex*  $D = D(G) = (V(D), E(D))$  von Graph  $G$  wird folgenderma\u00dfen konstruiert: Ist  $i \in V(G)$ , so sind  $i', i'' \in V(D)$ . Der Kante  $(i, j) \in E(G)$  werden die beiden Kanten  $(i', j')$ ,  $(i'', j'') \in E(D)$  zugeordnet. F\u00e4rbt man die Knotenpunkte  $i', j'$  z.B. wei\u00df und die Knotenpunkte  $i'', j''$  schwarz, so verbindet jede Kante von  $D$  einen wei\u00dfen mit einem schwarzen Knotenpunkt. Befindet sich am Knotenpunkt  $w$  von  $G$  eine Schlinge  $s$ , so geht diese in einen Kreis  $C_2$  mit den beiden Knotenpunkten  $w'$  und  $w''$  \u00fcber.

In dieser Arbeit wird eine einfache M\u00f6glichkeit zur Berechnung des charakteristischen Polynoms und der Eigenwerte f\u00fcr jeden Graphen  $G(c, k) \in \mathbf{GP}$  aufgezeigt. Die Spektren der I-Graphen k\u00f6nnen ganz analog gefunden werden.

F\u00fcr welche Graphen  $G = G(c, k)$  ist der Duplex  $D = D(G)$  wieder ein verallgemeinerter Petersen Graph  $D = D(G) = D(c, k) = G(c_D, k_D)$ ?

Daran schlie\u00dft sich eine Bemerkung zum Desargue-Levi-Graph<sup>(11,12)</sup>  $DL = G(10, 3)$  an, wobei

ein Graph  $G^*$  angegeben wird, der zu DL co- bzw. isopektral aber nicht isomorph ist. Den Abschluss dieser Arbeit bilden Beziehungen der charakteristischen Polynome verallgemeinerter Petersen Graphen, sowie von Speichen- und I-Graphen.

### 3. Charakteristisches Polynom und Eigenwerte

Es sei  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(G)$  die  $n \times n$ -Adjazenzmatrix eines Graphen  $G \in \mathcal{G}$ . Mit der  $n \times n$ -Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_n$  ist das *charakteristische Polynom*  $p_G(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$  von  $G$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  gegeben.  $\lambda^0$  ist ein *Eigenwert* von Matrix  $\mathbf{A}$  und somit von Graph  $G$ , falls  $p_G(\lambda^0) = 0$  ist<sup>(13,14)</sup>. Das *Spektrum von Graph  $G$*  ist eine Zusammenfassung aller Lösungen der Gleichung  $p_G(\lambda) = 0$ , also aller Eigenwerte mit ihren Vielfachheiten.

Die Berechnung des charakteristischen Polynoms  $p_G(\lambda)$  von  $G = G(c, k)$  gestaltet sich wegen dessen Symmetrie recht einfach<sup>(15,16)</sup>. Dem Graphen  $G = G(c, k)$  werden zunächst die  $c$  Graphen  $\mathcal{G}(l, k) = G^w(1, 0)$ ,  $l = 0, 1, \dots, c - 1$ , zugeordnet, wobei  $G^w(1, 0)$  ein schlingengewichteter  $G(1, 0)$  ist (s. Abb. 3), deren Adjazenzmatrizen  $\mathfrak{A}(l, k) = \mathbf{A}(\mathcal{G}(l, k))$  die einfache Gestalt

$$\mathfrak{A}(l, k) = \begin{pmatrix} 2 \cos(2l\pi/c) & 1 \\ 1 & 2 \cos(2kl\pi/c) \end{pmatrix} \text{ haben.} \quad (1)$$

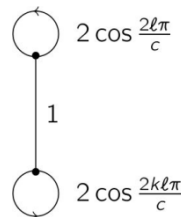


Abb. 3: Der Graph  $\mathcal{G}(l, k)$  und  $l = 0, 1, \dots, c - 1$

Man beachte, dass  $\mathcal{G}(0, k) = G(1, 0)$  ist.

Mit  $\mathfrak{A}(l, k)$  ist das charakteristische Polynom von  $\mathcal{G}(l, k)$  gegeben zu

$$p_{\mathcal{G}(l, k)}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(2l\pi/c) + \cos(2kl\pi/c))\lambda + 4 \cos(2l\pi/c)\cos(2kl\pi/c) - 1, \quad (2)$$

wobei  $l = 0, 1, \dots, c - 1$  durchläuft. Polynom  $p_{\mathcal{G}(l, k)}(\lambda)$  wird *Faktorpolynom* genannt.

Das Polynom des Graphen  $G = G(c, k)$  ergibt sich somit als Produkt der  $c$  Faktorpolynome zu

$$p_G(\lambda) = \prod_{l=0}^{l=c-1} p_{\mathcal{G}(l, k)}(\lambda). \quad (3)$$

Mit Gleichung (2) sind die Eigenwerte der Graphen  $\mathcal{G}(l, k)$  in Abhängigkeit von  $l = 0, 1, \dots, c - 1$  gegeben zu

$$\lambda_{1,2} = [\cos(2l\pi/c) + \cos(2kl\pi/c)] \pm \sqrt{([\cos(2l\pi/c) - \cos(2kl\pi/c)]^2 + 1)}$$

Für den Petersen Graphen  $P_5 = G(5, 2)$  findet man

$$\lambda_{11,12} = [\cos(2l\pi/5) + \cos(4l\pi/5)] \pm \sqrt{([\cos(2l\pi/5) - \cos(4l\pi/5)]^2 + 1)}, l = 0, 1, \dots, 4$$

und somit die Eigenwerte  $3^1, 1^5, -2^4$ ; die Hochzahlen geben deren Vielfachheit an.

Das charakteristische Polynom von  $P_5$  ist  $p_{P_5}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^5(\lambda + 2)^4$ .

An dieser Stelle soll ein spezielles Ergebnis für das charakteristische Polynom  $p_G(\lambda)$  für Graphen  $G = G(c, k)$  gegeben werden, das später noch benötigt wird.

Satz 1:

Sei  $G = G(c > 1, k > 1)$  ein verallgemeinerter Petersen Graph und  $c$  gerade.

Ist  $k$  gerade so gilt  $p_G(\lambda) = (\lambda^2 - 5)q_G(\lambda)$  und  $q_G(\lambda)$  ist ein Polynom vom Grad  $(2c - 2)$ .

Bei ungeradem  $k$  enthält das Polynom  $p_G(\lambda)$  den Faktor  $(\lambda^2 - 5)$  nicht.

Beweis von Satz 1:

In  $G = G(c, k)$  ist  $c$  gerade.

Ein Vergleich von  $(\lambda^2 - 5)$  mit Gleichung (2) führt zu den beiden Gleichungen

$$\cos(2l\pi/c) + \cos(2kl\pi/c) = 0 \text{ und } \cos(2l\pi/c)\cos(2kl\pi/c) = -1, l = 0, 1, \dots, c-1. \quad (4)$$

Dieses Gleichungssystem (4) in den Unbekannten  $a = \cos(2l\pi/c)$  und  $b = \cos(2kl\pi/c)$  hat das Lösungspaar  $(a, b) \in \{(1, -1), (-1, 1)\}$ . Für  $a = 1$  ist Parameter  $l = 0$  und beide Gleichungen sind nicht erfüllt.

Ist  $a = -1$ , so wähle man  $l = c/2$ . Es ergeben sich die Gleichungen

$$a + b = \cos(\pi) + \cos(k\pi) = 0 \text{ und } ab = \cos(\pi)\cos(k\pi) = -1.$$

Beide Gleichungen sind für  $\cos(k\pi) = 1$  erfüllt, falls  $k$  gerade ist.

Ist  $l \neq 0$  bzw.  $l \neq c/2$ , so kann der Faktor  $(\lambda^2 - 5)$  nicht auftreten. ☺

Beispiel:

Die charakteristischen Polynome der in Abb. 2 dargestellten Graphen sind:

$$p_{G(1,0)}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

$$p_{G(2,0)}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 2\lambda^2 + 20\lambda - 15 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 5) \text{ und}$$

$$p_{G(2,1)}(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = (\lambda^2 - 2\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = (\lambda^2 - 9)(\lambda^2 - 1).$$

## 4. Der Duplex

Zunächst betrachte man die einfache

Beobachtung 2:

Jeder Kreis  $C_n \in \mathbf{G}$  hat als Duplex den Kreis  $D(C_n) = C_{2n}$ , falls  $n$  ungerade ist und für  $n$  gerade hat  $D(C_n)$  zwei isomorphe Kopien des Kreises  $C_n$ .

Denn sind die Knotenpunkte des Kreises  $C_n$  fortlaufend mit  $0, 1, \dots, n-1$  nummeriert, so wird für den Duplex  $D = D(C_n)$  zunächst jedem Knotenpunkt  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  ein weißer und ein schwarzer Knotenpunkt  $i'$  bzw.  $i''$  zugeordnet und diese  $2n$  Knotenpunkte in der oben gegebenen Weise miteinander verknüpft. Ist  $n$  ungerade, so erhält man den Kreis  $0'-1''-2'-\dots-(n-2)''-(n-1)''-0''-1'-\dots-(n-2)''-(n-1)''-0'$ .

Wird  $n$  gerade gesetzt, so ergeben sich die beiden Kreise  
 $0'-1''-2'-\dots-(n-2)'-(n-1)''-0'$  und  $0''-1'-2''-\dots-(n-2)''-(n-1)''-0''$ .

☺

Satz 2:

Es sei  $D = D(G) \in \mathbf{G}$  der Duplex eines Graphen  $G \in \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(G)$  bzw.  $\mathbf{B} = \mathbf{A}(D)$  sind deren Adjazenzmatrizen und  $\mathbf{I}_{2n}, \mathbf{I}_n$  bezeichnen die  $2n$ - bzw.  $n$ - dimensionale Einheitsmatrix. Das charakteristische Polynom  $p_D(\lambda)$  von  $D = D(G)$  errechnet sich zu

$$p_D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_{2n} - \mathbf{B}) = p_G(\lambda) p_G(-\lambda), \tag{5}$$

wobei  $p_G(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$  das charakteristische Polynom von Graph  $G$  ist.

Beweis von Satz 2:

Duplex  $D = D(G)$  von  $G$  hat die Adjazenzmatrix  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}' \\ \mathbf{A}'' & 0 \end{pmatrix}$ , wobei  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}''$  die

transponierte Matrix von  $\mathbf{A}$ , also  $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}'^T$  ist. Sei  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}', \mathbf{v}'')^T$  ein Eigenvektor von Graph  $D$  zum Eigenwert  $\lambda$ , also  $\mathbf{B}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ . Nach Umformung ergeben sich  $\mathbf{A}'\mathbf{v}'' = \lambda \mathbf{v}'$  und  $\mathbf{A}''\mathbf{v}' = \lambda \mathbf{v}''$ . Die beiden Gleichungen bleiben erhalten, falls  $\lambda$  durch  $-\lambda$  und  $\mathbf{v}''$  durch  $-\mathbf{v}''$  ersetzt werden. Das bedeutet aber: Ist  $(\mathbf{v}', \mathbf{v}'')^T$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ , so ist  $(\mathbf{v}', -\mathbf{v}'')^T$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $-\lambda$ .

☺

Zur Konstruktion des Duplex  $D = D(G)$  von  $G = G(c, k)$  wird eine vereinfachte Knotenpunktnumerierung eingeführt:

Graph  $G = G(c, k) \in \mathbf{PG}$  hat die Knotenpunktmenge  $V = V(G) = \{u_i, v_i; i = 0, 1, \dots, c-1\}$  und die entsprechende Kantenmenge  $E = E(G)$ . Es ist zweckmäßig, jedem Knotenpunkt  $w \in V(G)$  eine Zahl  $z(w)$  folgendermaßen zuzuordnen:  $z(u_i) = i$  und  $z(v_i) = c + i$ . Diese Nummerierung ist für die Konstruktion des Duplex  $D = D(G) = D(c, k)$  von  $G = G(c, k)$  übersichtlicher. Den Kanten  $(i, i+1)$ ,  $(i, c+i)$  und  $(c+i, c+i+k)$  von  $G$  entsprechen in  $D$  die Kanten  $(i', (i+1)'')$ ,  $(i'', (i+1)')$  bzw.  $(i', (c+i)'')$ ,  $(i'', (c+i)')$  bzw.  $((c+i)', (c+i+k)'')$ ,  $((c+i)'', (c+i+k)')$ ,  $k = 0, 1, \dots, c-1$  und  $(c+i)$  bzw.  $(c+i+k)$  sind  $(\text{mod } c)$  zu nehmen.

In Abb. 4 ist für den Petersen Graphen  $P_5 = G(5, 2)$  aus Abb. 1 die Konstruktion seines Duplex  $D(P_5) = G(10, 3)$  dargestellt. Knotenpunkt  $0'$  hat in  $D = D(G)$  neben  $c''$  die beiden Nachbarknoten  $1''$  und  $(c-1)''$  und Knotenpunkt  $5''$  hat die Nachbarn  $0'$ ,  $7'$  und  $8'$ .

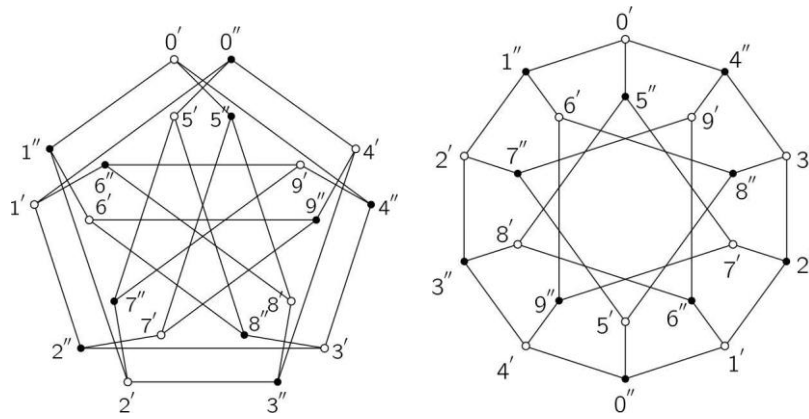


Abb. 4: Konstruktion des Graphen  $D(\text{Pe}) = D(5, 2) = G(10, 3)$

**Frage:**

Für welche Graphen  $G = G(c, k)$  ist der Duplex  $D = D(G)$  wieder ein verallgemeinerter Petersen Graph  $D = G(c_D, k_D)$  mit den Parametern  $c_D$  und  $k_D$ ?

Offensichtlich ist  $G = G(c, k)$  mit  $c$  gerade und  $k$  ungerade ein paarer Graph und somit ergibt sich als Duplex  $D(G)$  ein Graph mit zwei Komponenten, die isomorph zu  $G(c, k)$  sind (Beobachtung 2). Deshalb bleiben noch zwei Fälle zu untersuchen:

- $c$  ungerade und  $k$  beliebig sowie
- $c$  und  $k$  gerade.

**Satz 3:**

Der Duplex  $D = D(c, k)$  mit  $0 \leq k < c$  ist mit  $c$  ungerade ein verallgemeinerter Petersen Graph  $D = D(c, k) = G(c_D, k_D)$  falls

$c_D = 2c$  und

$k_D = c - k$ , falls  $k$  gerade bzw.  $k_D = k$ , falls  $k$  ungerade ist.

**Beweis von Satz 3:**

Es sei  $G = G(c, k)$  mit  $0 \leq k < c$  ein verallgemeinerter Petersen Graph und  $c$  ungerade.

Der Kreis  $C^u$  von  $G$  mit ungerader Länge  $c$  ist durch die Transformation von  $G$  in  $D$  in einen Kreis der Länge  $c_D = 2c$  (Knotenpunkte:  $0''-1''-2''-3''- \dots -(c-2)''-(c-1)''-0''-1''- \dots -(c-2)''-$

$(c-1)''-0''$ ) übergegangen. Zur Berechnung des  $k_D$ -Wertes betrachte man folgende Kanten: Knotenpunkt  $c''$  ist in  $D$  verbunden mit  $0', (c+k)'$  und  $(2c-k)'$ . Die beiden zuletzt genannten Punkte sind in  $D$  mit den Punkten  $k''$  bzw.  $(c-k)''$  verbunden (s. Abb. 5).

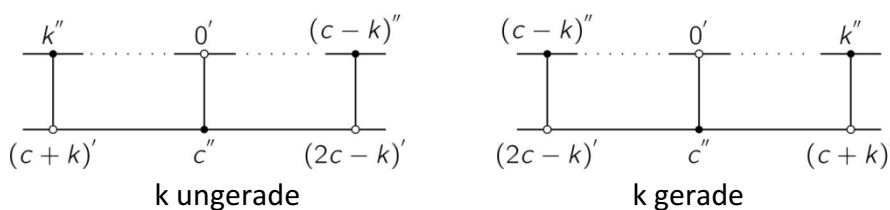


Abb. 5: Anordnung ausgewählter Knotenpunkte in  $D(c, k)$



Da in beiden Fällen  $c_D = 2c$ , also gerade ist, muß  $k_D$  ungerade sein, damit ein bipartiter Graph vorliegt (Beobachtung 1). Also ergeben sich mit  $c$  ungerade:

für  $k$  ungerade:  $D = G(c_D = 2c, k_D = k)$  ist Duplex von  $G(c, k)$ , und

für  $k$  gerade:  $D = G(c_D = 2c, k_D = c - k)$  ist Duplex von  $G(c, k)$ . ☺

Beispiel:

Von  $G(c, 0)$  mit  $c$  ungerade errechnet sich der Duplex zu  $D(c, 0) = G(2c, c)$ . Für  $c = 1$  ergibt sich somit  $D(1, 0) = G(2, 1)$ ; siehe Abb. 2. Graph  $G(1, 0)$  hat das charakteristische Polynom

$$p_{G(1,0)}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

und Graph  $G(2, 1)$  das Polynom

$$p_{G(2,1)}(\lambda) = p_{D(1,0)}(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9) = p_{G(1,0)}(\lambda)p_{G(1,0)}(-\lambda). \quad (6)$$

In Abb. 6 ist der Graph  $D(3, 0) = G(6, 3)$  gegeben. Sein charakteristisches Polynom ist

$$p_{G(6,3)}(\lambda) = p_{D(3,0)}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 \pm \lambda - 3)^2.$$

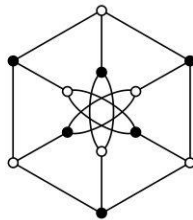


Abb. 6 Der Graph  $G(6, 3)$

Satz 4:

Der Duplex  $D = D(G)$  von  $G = G(c, k)$ ,  $0 \leq k < c$ , wobei  $c$  und  $k$  gerade sind, ist nicht isomorph zu einem verallgemeinerten Petersen-Graphen  $G(c_D, k_D)$ .

Beweis von Satz 4:

Falls in  $G(c, k)$  sowohl  $c$  als auch  $k$  gerade sind, müssen im Duplex  $D(G) = G(c_D, k_D)$  wegen Beobachtung 1  $c_D$  gerade und  $k_D$  ungerade sein. Dann hat nach Satz 1 das charakteristische Polynom  $p_G(\lambda)$  von  $G$  den Faktor  $(\lambda^2 - 5)$ , während das charakteristische Polynom  $p_D(\lambda)$  von  $D = D(G)$  den Faktor  $(\lambda^2 - 5)$  nicht enthält. ☺

Beispiel:

Der Graph  $G(c, 0)$  mit  $c$  gerade hat als Duplex  $D(c, 0)$  zwei Kreise der Länge  $c$ , nämlich  $0'-1''-\dots-(c-2)''-(c-1)''-0'$  und  $0''-1'-\dots-(c-2)''-(c-1)''-0''$ , und  $c$  Kreise  $C_2$ . Die Graphen  $D(2, 0)$  und  $D(4, 0)$  sind in Abb. 7 dargestellt. Ihre charakteristischen Polynome errechnen sich zu

$$p_{D(2,0)}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 - 5)^2 \text{ und}$$

$$p_{D(4,0)}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 - 5)^2(\lambda^2 - 6\lambda - 1)^2.$$

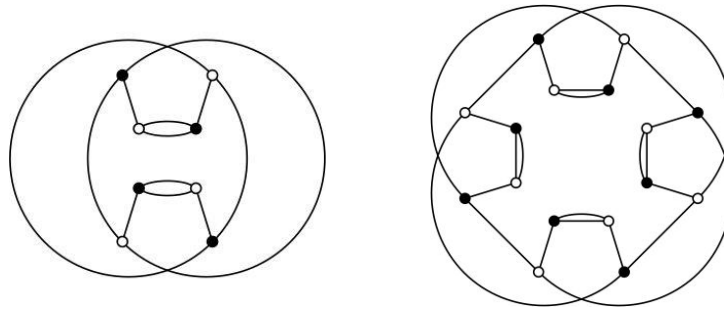


Abb. 7 Die Duplexe  $D(2, 0)$  und  $D(4, 0)$

Satz 5:

Das Polynom von  $D = D(c, k)$  ist für  $c$  ungerade

$p_D(\lambda) = p_{D(1,0)}(\lambda) q_D(\lambda)$ , und  $q_D(\lambda)$  ist ein Polynom vom Grad  $(2c - 4)$ .

Beweis von Satz 5:

Das Polynom  $p_{D(1,0)}(\lambda)$  ist in Gleichung (6) gegeben.

Für Graph  $D = D(c, k) = G(2c, k_D)$  sind mit Satz 3 sowohl  $c$  als auch  $k_D$  ungerade.

Analog den Gleichungen (2) findet man für  $D$  mit  $l = 0, 1, \dots, 2c - 1$  die  $2c$  Gleichungen

$$p_{\mathfrak{D}(l, k_D)}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(l\pi/c) + \cos(k_D l\pi/c))\lambda + 4 \cos(l\pi/c)\cos(k_D l\pi/c) - 1. \quad (2_D)$$

Ist  $l = 0$ , so haben wir  $p_{\mathfrak{D}(0, k_D)}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$ .

Setzt man  $l = c$  und  $k_D$  ungerade, so ergibt sich

$$p_{\mathfrak{D}(c, k_D)}(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3).$$

Also hat das Polynom  $p_D(\lambda)$  das Produkt  $p_{\mathfrak{D}(0, k_D)}(\lambda) p_{\mathfrak{D}(c, k_D)}(\lambda) = p_{D(1,0)}(\lambda)$  für  $c$  und  $k_D$  ungerade als Faktor. ☺

An dieser Stelle sollen zwei allgemeinere Beispiele gegeben werden.

Für einen Speichengraphen<sup>(17)</sup>  $G \in \mathbf{G}^3$  mit Speiche  $Sp \in \mathbf{G}$  können ganz analoge Aussagen zum Duplex  $D = D(G)$  gemacht werden.

Der verallgemeinerte Petersen Graph  $G(c, k)$  wird als Speichengraph folgendermaßen dargestellt:  $G(Sp = K_2; c, [1, k])$ . So ist z. B. der Petersen Graph  $Pe = G(5, 2) = G(K_2; 5, [1, 2])$ .

Wählt man als Speiche den Stern  $Sp = S_4$  (Abb. 8) mit 4 Knotenpunkten, dann ist

$G(S_4; c, [k_1 = 1, k_2, k_3])$  die allgemeine Darstellung eines Speichengraphen mit Speiche  $Sp = S_4$ .

So ist z. B. für den in Abb. 9 gegebenen Speichengraph  $Pf = G(S_4; c = 7, [k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 2])$  der Duplex  $D(Pf) = D(S_4; 7, [1, 3, 2]) = G(S_4; 14, [1, 3, 5])$ .

Die Polynome für den Speichengraph  $Pf$  und seinen Duplex  $D(Pf)$  sind:

$$p_{Pf}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^6(\lambda + 1)^7(\lambda - 2)^8 \quad \text{und}$$

$$p_{D(Pf)}(\lambda) = (\lambda^2 - 9)(\lambda^2 \pm 2\lambda - 1)^6(\lambda^2 - 1)^7(\lambda^2 - 4)^8.$$

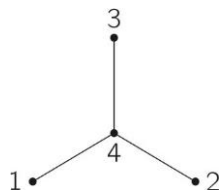


Abb. 8: Speiche  $Sp = S_4$

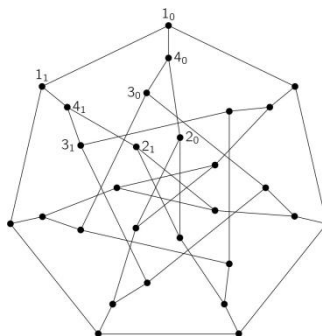


Abb. 9: Der Speichengraph  $Pf$

Noch ein Beispiel für einen 4-regulären Speichengraphen  $Pg = G(C_4; 5, [1, 2, 1, 2])$ , dessen Duplex  $D(Pg) = D(C_4; 5, [1, 2, 1, 2]) = G(C_4; 10, [1, 3, 1, 3])$  ist. Deren Polynome sind  $p_{Pg}(\lambda) = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 2)^2(\lambda^2 + \lambda - 1)^4(\lambda^2 + \lambda - 5)^4$  und  $p_{D(Pg)}(\lambda) = \lambda^2(\lambda \mp 4)(\lambda \mp 2)^2(\lambda^2 \pm \lambda - 1)^4(\lambda^2 \pm \lambda - 5)^4$ .

### 5. Der Desargue-Levi Graph $G(10, 3)$ – Ein Beispiel

Im Jahre 1929 erschien von F. Levi<sup>(11)</sup> ein Buch über Geometrische Konfigurationen, in dem erstmals die Desargue-Konfiguration erwähnt wird. Interessanterweise taucht der Desargue-Levi Graph auch im Zusammenhang mit chemischen Reaktionsgraphen<sup>(12,18,19)</sup> auf. In einer Arbeit von B. und M. Stoppel<sup>(20)</sup> wird die Symmetriegruppe des Desargue-Levi Graphen untersucht.

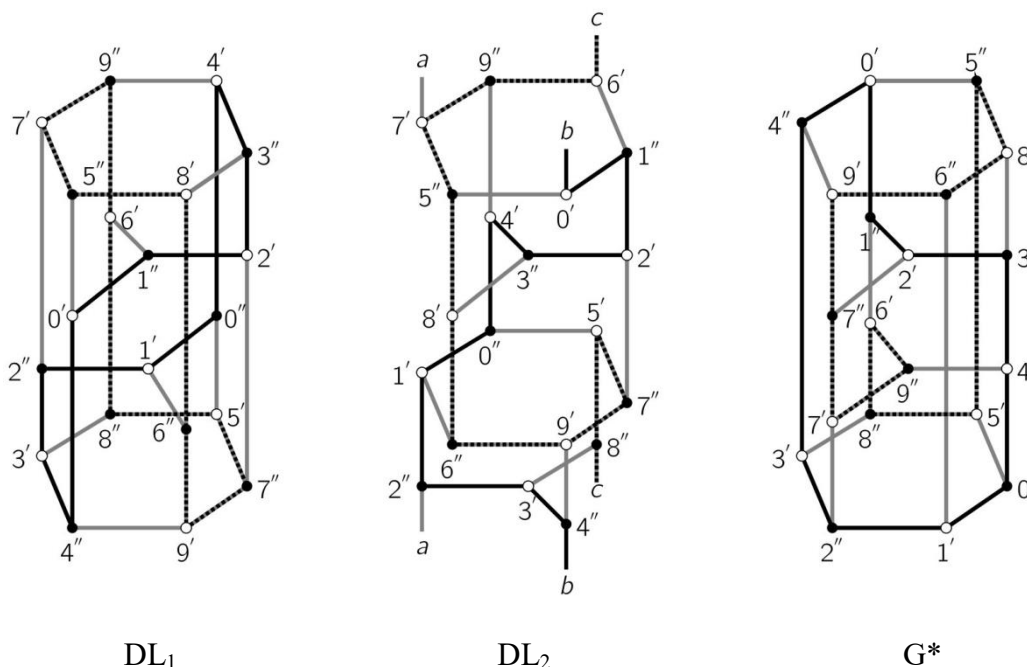


Abb. 10: Zwei Darstellungen des Graphen DL und ein dazu nichtisomorpher Graph  $G^*$

Der *Desargue-Levi Graph* (kurz: DL) ist der Duplex des Petersen Graphen  $Pe = G(5, 2)$ ; nach Satz 3 ergibt sich  $DL = D(5, 2) = G(10, 3) \in \mathbf{PG}$ . Für diesen Graphen (Abb. 4) findet der interessierte Leser auch im Internet weitere geeignete Darstellungen. In Abb. 10 sind eine

bekannte zylindrische  $DL_1$ - und eine offensichtlich noch nicht bekannte toroidale  $DL_2$ -Darstellung zu finden. Dass  $DL_2$  isomorph zu  $DL_1$  ist, erkennt man an der in Abb. 10 angegebenen Nummerierung der Knotenpunkte, die mit der Nummerierung der Knotenpunkte aus Abb. 4 übereinstimmt.

Mit Satz 2 und  $p_{pe}(\lambda)$  ergibt sich für  $DL = D(5, 2)$  das charakteristische Polynom  $p_{DL}(\lambda) = (\lambda \pm 3)(\lambda \pm 1)^5(\lambda \pm 2)^4 = p_{D(1,0)}(\lambda)[p_{K2}(\lambda)p_{C2}(\lambda)]^4$ .

Wird in  $DL_1$  von Abb. 10 ein „inneres Dreiein“ um  $60^\circ$  gedreht, so entsteht der Graph  $G^*$ . Graph  $G^*$  kann auch aus der Darstellung von  $G(10, 3)$  in Abb.4 gefunden werden, indem die beiden Kanten  $5'-7''$  und  $7'-5''$  gelöscht und durch die beiden Kanten  $5'-5''$  und  $7'-7''$  ersetzt werden (s. Abb. 11). Graph  $G^*$  ist nach MAPLE-Rechnung isospektral zu Graph  $DL$ .

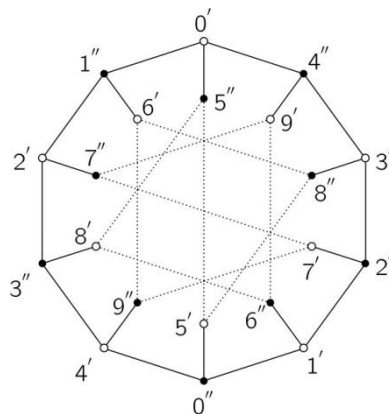


Abb. 11: Eine weitere Darstellung von  $G^*$

Zwei Graphen nennt man auch ein  $PING^{(13.S.156)}$  (Pair of Isospectral Non-isomorphic Graphs), falls sie nicht isomorph jedoch isospektral sind.

Dazu hat Herr Tibor Toth<sup>(21)</sup> mit Hilfe des Programmes „SAGE“ in dankenswerter Weise für  $DL = G(10, 3)$  und  $G^*$  die chromatischen Polynome  $ch_{DL}(x)$  und  $ch_{G^*}(x)$  berechnet:

$$ch_{DL}(x) = (x - 1)x(x^{18} - 29x^{17} + 406x^{16} - 3654x^{15} + 23751x^{14} - 118735x^{13} + 474540x^{12} - 1555230x^{11} + 4251065x^{10} - 9796793x^9 + 19146110x^8 - 31766090x^7 + 44562315x^6 - 52301735x^5 + 50358537x^4 - 38449500x^3 + 21935165x^2 - 8337330x + 1585121)$$

und

$$ch_{G^*}(x) = (x - 1)x(x^{18} - 29x^{17} + 406x^{16} - 3654x^{15} + 23751x^{14} - 118735x^{13} + 474540x^{12} - 1555234x^{11} + 4251133x^{10} - 9797317x^9 + 19148530x^8 - 31773542x^7 + 44578387x^6 - 52326459x^5 + 50385469x^4 - 38469536x^3 + 21944609x^2 - 8339790x + 1585385).$$

Es sei angemerkt, dass die Koeffizienten in den großen Klammern jeweils bis zu  $x^{12}$  gleich sind, und danach stimmen sie zumindest in den ersten drei Ziffern überein.

Damit sind die beiden Graphen  $DL$  und  $G^*$  ein  $PING$ . Sie haben nach MAPLE-Rechnungen jeweils 60 Linearfaktoren und 24 Hamiltonkreise. Die Determinante ihrer Adjazenzmatrizen errechnet sich zu  $p_{DL}(0) = (2^4 3)^2 = 48^2$ .

In allen drei Graphen von Abb. 10 sind die Kreise  $C^u$  und  $C^v$  entsprechend hervorgehoben.

## 6. Einfache Polynombeziehungen

Gegeben sind die Graphen  $G_1, G_2 \in \mathbf{G}$  mit  $n_1 = n(G_1)$  bzw.  $n_2 = n(G_2)$  Knotenpunkten und deren Polynome  $p_{G_1}(\lambda), p_{G_2}(\lambda)$ .

Das Polynom  $p_{G_1}(\lambda)$  teilt das Polynom  $p_{G_2}(\lambda)$  genau dann, wenn es ein Polynom  $q_{12}(\lambda)$  vom Grad  $(n_2 - n_1)$  gibt, sodass  $p_{G_2}(\lambda) = p_{G_1}(\lambda)q_{12}(\lambda)$  ist. Mit anderen Worten: das Spektrum von Graph  $G_1$  ist im Spektrum des Graphen  $G_2$  enthalten.

Über die Teilbarkeit von verallgemeinerten Petersen Graphen gibt der folgende Satz Auskunft.

### Satz 6:

Es sind  $G = G(c, k), G' = G(c', k') \in \mathbf{PG}$ . Sind  $c' = 2c$  und  $k' \in \{k, c - k\}$ , so gibt es ein Polynom  $q(\lambda)$  vom Grad  $2c$  derart, dass  $p_{G'}(\lambda) = p_G(\lambda)q(\lambda)$  ist.

### Beweis von Satz 6:

Dazu beachte man die in Gleichung (2) gegebenen Faktorpolynome für  $G(c, k)$

$$p_{\mathbb{S}(l, k)}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(2l\pi/c) + \cos(2kl\pi/c))\lambda + 4\cos(2l\pi/c)\cos(2kl\pi/c) - 1 \quad (2)$$

und  $l = 0, 1, \dots, c - 1$ .

Für  $G(c', k')$  und  $c' = 2c$  ergeben sich die  $2c$  Faktorpolynome

$$p_{\mathbb{S}(l', k')}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(l'\pi/c) + \cos(k'l'\pi/c))\lambda + 4\cos(l'\pi/c)\cos(k'l'\pi/c) - 1 \quad (2')$$

und  $l' = 0, 1, \dots, 2c - 1$ .

Setzt man in Gleichung (2') zunächst  $l' = 2l$ , so ergibt sich

$$p_{\mathbb{S}(2l, k')}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(2l\pi/c) + \cos(2k'l\pi/c))\lambda + 4\cos(2l\pi/c)\cos(2k'l\pi/c) - 1. \quad (2'')$$

Ist  $k' = k$ , so sind die Gleichungen (2) und (2'') identisch.

Ist  $k' = c - k$ , so ergibt eine einfache Umformung

$$\cos(2k'l\pi/c) = \cos(2[c - k]l\pi/c) = \cos(2l\pi - [2kl\pi/c]) = \cos(2kl\pi/c).$$

Damit ist Satz 6 bewiesen. ☺

Als Beispiel sei wieder der Petersen Graph  $P_5 = G(5, 2)$  gewählt. Dann teilt das Polynom  $p_{G(5, 2)}(\lambda)$  die beiden Polynome  $p_{G(10, 2)}(\lambda)$  und  $p_{G(10, 3)}(\lambda)$  und diese wiederum die Polynome  $p_{G(20, 2)}(\lambda)$ ,

$p_{G(20, 8)}(\lambda)$  bzw.  $p_{G(20, 3)}(\lambda), p_{G(20, 7)}(\lambda)$ :

$$p_{G(5, 2)}(\lambda) = p_{P_5}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^5(\lambda + 2)^4,$$

$$p_{G(10, 2)}(\lambda) = p_{G(5, 2)}(\lambda)\lambda^4(\lambda^2 - 5)^3,$$

$$p_{G(10, 3)}(\lambda) = p_{G(5, 2)}(\lambda)(\lambda + 3)(\lambda - 2)^4(\lambda + 1)^5,$$

$$p_{G(20, 2)}(\lambda) =$$

$$= p_{G(10, 2)}(\lambda)(\lambda^8 - 2\lambda^7 - 10\lambda^6 + 18\lambda^5 + 29\lambda^4 - 48\lambda^3 - 20\lambda^2 + 32\lambda - 4)^2$$

$$(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2 = p_{G(20, 8)}(\lambda) \quad \text{und}$$

$$p_{G(20, 3)}(\lambda) = p_{G(10, 3)}(\lambda)(\lambda^8 - 14\lambda^6 + 61\lambda^4 - 84\lambda^2 + 16)^2(\lambda^2 - 1)^2 = p_{G(20, 7)}(\lambda).$$

Das Ergebnis von Satz 6 kann auch auf Speichengraphen übertragen werden. So haben z. B. für den in Abb. 9 gegebenen Speichengraph  $Pf = G(S_4; 7, [1, 3, 2])$  die daraus resultierenden Graphen  $G1 = G(S_4; 14, [1, 3, 2]), G2 = G(S_4; 14, [1, 3, 5]), G3 = G(S_4; 14, [1, 4, 2])$  und  $G4 = G(S_4; 14, [1, 4, 5])$  die Polynome

$$\begin{aligned}
p_{Pf}(\lambda) &= (\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^6(\lambda + 1)^7(\lambda - 2)^8, \\
p_{GI}(\lambda) &= p_{Pf}(\lambda)(\lambda + 2)(\lambda^3 - 7\lambda + 2)(\lambda^{12} - \lambda^{11} - 16\lambda^{10} + 14\lambda^9 + 92\lambda^8 - 68\lambda^7 - 234\lambda^6 + 142\lambda^5 + 263\lambda^4 - 127\lambda^3 - 106\lambda^2 + 40\lambda + 8)^2, \\
p_{G2}(\lambda) &= p_{D(Pf)}(\lambda) = (\lambda^2 - 9)(\lambda^2 \pm 2\lambda - 1)^6(\lambda^2 - 1)^7(\lambda^2 - 4)^8, \\
p_{G3}(\lambda) &= p_{Pf}(\lambda)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 7\lambda - 2)(\lambda^{12} + \lambda^{11} - 16\lambda^{10} - 14\lambda^9 + 92\lambda^8 + 68\lambda^7 - 234\lambda^6 - 142\lambda^5 + 263\lambda^4 + 127\lambda^3 - 106\lambda^2 - 40\lambda + 8)^2 \text{ und} \\
p_{G4}(\lambda) &= p_{GI}(\lambda).
\end{aligned}$$

Ähnlich verhält es sich mit den oben beschriebenen I-Graphen. Der Graph  $I(6, 2, 3)$  ist, da in dieser Arbeit Zweiecke zugelassen sind, der kleinste I-Graph (Abb. 12), der zu keinem

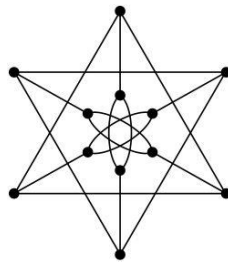


Abb. 12 Der Graph  $I(6, 2, 3)$  mit Doppelkanten (Zweiecken)

verallgemeinerten Petersen Graphen isomorph ist. Sein Polynom ist

$$p_{I(6, 2, 3)}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5)(\lambda^2 + 3\lambda + 1)^2(\lambda^2 - \lambda - 3)^2.$$

Mit den Transformationen  $(c, k_1, k_2) \rightarrow (2c, k_1, k_2)$ ,  $(2c, c - k_1, k_2)$ ,  $(2c, k_1, c - k_2)$  oder  $(2c, c - k_1, c - k_2)$  lassen sich aus  $I(6, 2, 3)$  genau zwei weitere Graphen  $I(12, 4, 3)$  und  $I(12, 2, 3)$  herleiten. Ihre Polynome sind

$$p_{I(12, 4, 3)}(\lambda) = p_{I(6, 2, 3)}(\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 1)^4(\lambda^2 - 2\lambda - 1)^2 \text{ und}$$

$$p_{I(12, 2, 3)}(\lambda) = p_{I(6, 2, 3)}(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1)^4(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2.$$

Lässt man bei den I-Graphen neben Mehrfachkanten auch Schlingen zu, so teilt das Polynom  $p_{I(3, 1, 0)}(\lambda)$  von  $I(3, 1, 0) = G(3, 0)$  die Polynome  $p_{I(6, 1, 0)}(\lambda)$ ,  $p_{I(6, 1, 3)}(\lambda)$  und  $p_{I(6, 2, 3)}(\lambda)$ .

Werden nur schlichte Graphen betrachtet, also Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten, so sind  $I(12, 4, 3)$  und  $I(12, 2, 3)$  die kleinsten I-Graphen, welche zu keinem Graphen aus  $\mathbf{PG}$  isomorph sind<sup>(8)</sup>.

An dieser Stelle möchte ich Frau Barbara Hamann für die sorgfältige Anfertigung der Abbildungen und Herrn Dr. Wilfried Rausch (beide TU Ilmenau) für das MAPLE-Programm danken.

## 7. Literatur

- 1 Petersen, J.: Die Theorie der regulären Graphen, Acta Math. **15** (1891), 193 - 220.
- 2 Coxeter, H. S. M.: Self-dual configurations and regular graphs, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 413 – 455.
- 3 Bannai, K.: Hamiltonian cycles in generalized Petersen graphs, J. Combin. Theory, Ser. B, **24** (1978), 181 – 188.
- 4 Gera, R. and P. Stanica: The spectrum of generalized Petersen graphs, Australian J. Comb. **49**(2011), 39 – 45
- 5 Dudek, A. W.: On the Spectrum of the Generalised Petersen Graphs, arXiv:1412.3531v2 [math.CO] 10.Apr. 2015
- 6 Watkins, M. E.: A Theorem on Tait Colorings with an Application to the Generalized Petersen Graphs, J. Combin. Theory, **6** (1969), 152 – 164.
- 7 The Foster Census: R.M.Fosters Census of Connected Symmetric Trivalent Graphs, by Ronald M. Foster, I. Z. Bouwer, W. W. Chernoff, B. Monson and Z. Star, ISBN 0-919611-19-2, 1988
- 8 Boben, M, T. Pisanski, A. Zitnik: I-graphs and the corresponding configurations, J. Combin. Des., **13**(2005), 406 - 424
- 9 Horvat, B., T. Pisanski, A. Zitnik: Isomorphism Checking of I-Graphs, Graphs and Combinatorics, **28**(2012), 823 – 830
- 10 Horton, J. D. and I. Z. Bouwer: Symmetric Y-Graphs and H-Graphs, J. Combin. Theory Ser. B **53**(1991), 114 – 129
- 11 Levi, F. W.: Geometrische Konfigurationen, Leipzig, 1929, S. 139ff, siehe auch: Finite geometrical systems, Calcutta, 1942 )
- 12 Randić', M.: Symmetry properties of graphs of interest in chemistry. II. Desargues-Levi graph, Int. J. Quant. Chem. **15** (1979), 663 – 682
- 13 Cvetkovic', D. M., M. Doob, H. Sachs: Spectra of Graphs, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980/81; Academic Press, New york 1980; J.A. Barth Verlag, Heidelberg- Leipzig 1995.
- 14 Heilbronner, E.: 116. Molecular Orbitals in homologen Reihen mehrkerniger aromatischer Kohlenwasserstoffe: I. Die Eigenwerte von LCAO-MO's in homologen Reihen, Helv. Chim. Acta, **37** (1954), 921 – 935.
- 15 Davidson, R. A.: Spectral analysis of graphs by cyclic automorphism subgroups, Theoret. Chim. Acta (Berl.), **58** (1981), 193 – 231,

- 16 Sachs, H., P. E. John: Symmetric Graphs - Spectra and Eigenvectors, Technische Universität Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, Preprint No. 12-1.
- 17 John, P. E., W. Rausch: Spoke Graphs – Speichengraphen, Preprint TU Ilmenau, No. M 17/07
- 18 Mislow, K.: Role of pseudorotation in the stereochemistry of nucleophilic displacement reactions, Acc. Chem. Res. **3** (1970), 321 - 331, Fußnote 13
- 19 Waller, D.: Covering projections of chemical reaction graphs, match **4** (1978), 87 – 92
- 20 Stroppel, B., M. Stroppel: Desargues, doily, dualities and exceptional isomorphisms, Australian J. of Combinatorics **57** (2013), 251 – 270
- 21 Private Mitteilung von Herrn Dr. Tibor Toth (Köln)