Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik

**Preprint No.** M **18/02**

# Zirkulante Matrizen und Einheitswurzeln

Peter E. John

Februar 2018

**URN:** urn:nbn:de:gbv:ilm1-2017200592

**Impressum:**
Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik
Weimarer Straße 25
98693 Ilmenau
Tel.: +49 3677 69-3621
Fax: +49 3677 69-3270
http://www.tu-ilmenau.de/math/

# Zirkulante Matrizen und Einheitswurzeln

Peter E. John
Institut für Mathematik der Technischen Universität Ilmenau

In Memoriam Klaus Möckel, Mühlhausen, 1929 – 2017

Schlagworte:
zirkulante Matrix, komplexe Zahlen, Hauptminor, charakteristisches Polynom, Eigenwerte, trigonometrische Produkte und Summen, Koeffizientendreieck und eine interessante Determinante

Über zirkulante Matrizen, welche eine spezielle Form der Toeplitz Matrizen[5] sind, gibt die ausgezeichnete Monographie „Circulant Matrices" von P. J. Davis[1] einen umfassenden Überblick. Viele Arbeiten zu dieser Thematik sind erschienen. Um nur einige zu nennen, werden zirkulante und schiefzirkulante Matrizen untersucht, deren Elemente zum Beispiel Fibonacci-Zahlen[10,12,14,15], Lucas-Zahlen[11,12,14,15], Tribonacci-Zahlen[2] sind, und werden auch in einer Arbeit über quadratische Formen[4] angewandt. Auch über links-zirkulante und links-schiefzirkulante Matrizen findet der interessierte Leser genügend Zitate im Internet. Ebenso können lineare Gleichungen mit Hilfe von zirkulanten Matrizen gelöst werden[7].
In dieser Arbeit werden zirkulante und schiefzirkulante (n,n)-Matrizen betrachtet, deren Elemente Potenzen von n-ten Einheitswurzeln sind.

## 1. Grundlagen

Es seien $n > 1$ eine natürliche Zahl und $\mathbf{M} = \mathbf{M}_n = (m_{jk})$ eine quadratische Matrix vom Typ $n \times n$ (kurz: n-Matrix; $j, k = 1, 2, \ldots, n$), deren Elemente komplexe Zahlen sind. Matrix $\mathbf{M}_l$ sei ein *l-Hauptminor* von $\mathbf{M}$ ($l = 0,1, 2, \ldots, n$); davon gibt es genau $\binom{n}{l}$ Matrizen.

Mit der n-Einheitsmatrix $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n$ sei $\mathbf{M}(x) = (x\mathbf{I} - \mathbf{M})$ und nach einem bekannten Satz[3] aus der Theorie der Matrizen erhält man das *charakteristische Polynom* $p_{\mathbf{M}}(x)$ von $\mathbf{M}$ zu

$$p_{\mathbf{M}}(x) = \det \mathbf{M}(x) = x^n + \sum_{l=1}^{l=n} (-1)^l m_l x^{n-l}, \text{ wobei } m_l = \sum_{\binom{n}{l}} \det(\mathbf{M}_l) \text{ ist,} \tag{1.1}$$

wobei die Summe über die Determinanten $\det(\mathbf{M}_l) = D\mathbf{M}_l$ aller l-Hauptminoren genommen wird.
Die Zahl $x_0$ heiße *Eigenwert* der Matrix $\mathbf{M}$, falls $p_M(x_0) = 0$ ist und $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{M}, x_0)$ sei ein zu $x_0$ gehörender *Eigenvektor* von Matrix $\mathbf{M}$, falls $\mathbf{M}\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 x_0$ gilt.

Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{C}_n = (c_{jk})$ heiße *zirkulante n-Matrix*, falls die $k = 1, 2, \ldots, n$ Werte $c_{1k}$ gegeben sind und $c_{j+1,k+1} = c_{jk}$ ($1 \le j,k < n$) sowie $c_{j+1,k=1} = c_{jn}$ ($1 \le j < n$) sind. In Matrix $\mathbf{C}$ können also die Elemente zeilenweise um 1 versetzt betrachtet werden.
Matrix $\mathbf{S} = \mathbf{S}_n = (s_{jk})$ heiße *schiefzirkulante n-Matrix*, falls die $s_{1k}$ bekannt und

$s_{j+1,k+1} = s_{jk}$ $(1 \le j,k < n)$, $s_{j+1,k=1} = -s_{jn.}$ $(1 \le j < n)$ sind. Matrix **S** ergibt sich aus **C**, indem für $j \le k$ alle Elemente $c_{jk}$ durch $s_{jk}$ ersetzt und unterhalb der Hauptdiagonalen ($j > k$) alle $c_{jk}$ durch $-s_{jk}$ ersetzt werden.

Je ein Beispiel für eine zirkulante und eine schiefzirkulante 3-Matrix mit den paarweise nicht notwendig verschiedenen komplexen Elementen a, b, c:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_3 = \mathrm{circ}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{S} = \mathbf{S}_3 = \mathrm{scirc}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & -c & a \end{pmatrix}.$$

Den Matrizen **C** und **S** kann jeweils die „begleitende Funktion“

$f_C(x) = \sum_{k=1}^{k=n} c_{1k}x^{k-1}$ bzw. $f_S(x) = \sum_{k=1}^{k=n} s_{1k}x^{k-1}$ zugeordnet werden. (1.2)

Diese sind nach Davis[1] zur Berechnung der Eigenwerte von **C** und **S** geeignet.

## 2. Polynome, Eigenwerte, Eigenvektoren und einige trigonometrische Formeln

Gegeben seien die komplexe Zahl z und die n-Matrizen $\mathbf{C} = (c_{jk}) = \mathrm{circ}(z^0, z, \ldots, z^{n-1})$,
$\mathbf{S} = (s_{jk}) = \mathrm{scirc}(z^0, z^1, \ldots, z^{n-1})$, wobei $0^0 = 1$ gesetzt wird.
Die Elemente von **C** und **S** sind also

$c_{jk} = s_{jk} = z^{k-j}$ $(j \le k)$ und $c_{jk} = -s_{jk} = z^{n+k-j}$ $(j > k)$. (*)

Offensichtlich erfüllen diese

für $j \neq k$ die Bedingungen $c_{jk}c_{kj} = z^n$ und $s_{jk}s_{kj} = -z^n$ und (**)
für $j = k$ haben wir $c_{jj} = s_{jj} = z^0 = 1$.

<u>Satz 1</u>: Die charakteristischen Polynome der Matrizen **C** und **S** sind:

$$p_C(x, z) = x^n + \sum_{l=1}^{l=n} (-1)^l \binom{n}{l} (1 - z^n)^{l-1} x^{n-l} \quad (2.1)$$

und

$$p_S(x, z) = x^n + \sum_{l=1}^{l=n} (-1)^l \binom{n}{l} (1 + z^n)^{l-1} x^{n-l}. \quad (2.2)$$

<u>Beweis</u>:
Die Elemente der Hauptminoren $\mathbf{C}_l$ und $\mathbf{S}_l$ genügen den Gleichungen (*), (**).

Zunächst sind die Determinanten

$D\mathbf{C}_{l=0} = D\mathbf{S}_{l=0} = 1$ (Gantmacher[3], Marcus & Minc[8]) und
$D\mathbf{C}_{l=1} = D\mathbf{S}_{l=1} = 1$.

Zirkulante Matrix **C** =( $c_{jk}$):

Es sei $\mathbf{C}_l$ =($c_{jk}$) ein l-Hauptminor von **C**, l = 2, 3, …, n. Wir berechnen die Determinante D$\mathbf{C}_l$ = det($\mathbf{C}_l$) = det($c_{j'k'}$) und j', k' = 1', 2', …, l' = l.

Determinante D$\mathbf{C}_l$ wird in eine Determinante D$\mathbf{C}'_l$ mit den Elementen $c'_{j'k'}$ überführt, wobei D$\mathbf{C}'_l$ = D$\mathbf{C}_l$ ist. Es sind für

$j' > k' \geq 1$: $c'_{j'k'} = c_{j'k'} - c_{j'1'}c_{1'k'} = z^{n+k'-j'} - z^{n+1'-j'}z^{k'-1'} = z^{n+k'-j'} - z^{n+k'-j'} = 0$ und für
$j' \leq k'$: $c'_{j'k'} = c_{j'k'} - c_{j'1'}c_{1'k'} = z^{k'-j'} - z^{n+1'-j'}z^{k'-1'} = z^{k'-j'} - z^{n+k'-j'} = z^{k'-j'}(1 - z^n)$.

Somit hat die Determinante DC'$_l$ folgende Elemente: in der Hauptdiagonalen stehen neben dem Wert $c_{1'1'}$ = 1 die (l – 1) weiteren Werte (1 – $z^n$), während unterhalb von ihr nur die Zahl 0 (Null) vorhanden ist. Wir haben D$\mathbf{C}'_l$ = D$\mathbf{C}_l$ = $(1 - z^n)^{l-1}$, wobei $2 \leq l \leq n$ ist.

Schiefzirkulante Matrix **S** = ($s_{jk}$):

Es sei $\mathbf{S}_l$ =($s_{jk}$) ein l-Hauptminor von **S**, l = 2, 3, …, n. Wir berechnen die Determinante D$\mathbf{S}_l$ = det($\mathbf{S}_l$) = det($s_{j'k'}$) und j', k' = 1', 2', …, l' = l.

Determinante D$\mathbf{S}_l$ wird, wie oben, in eine Determinante D$\mathbf{S}'_l$ mit den Elementen $s'_{j'k'}$ überführt, wobei D$\mathbf{S}'_l$ = D$\mathbf{S}_l$ ist. Hier ergeben sich
$j' > k' \geq 1$: $s'_{j'k'} = s_{j'k'} - s_{j'1'}s_{1'k'} = -z^{n+k'-j'} - (-z^{n+1'-j'})z^{k'-1'} = -z^{n+k'-j'} + z^{n+k'-j'} = 0$ und für
$j' \leq k'$: $s'_{j'k'} = s_{j'k'} - s_{j'1'}s_{1'k'} = z^{k'-j'} - (-z^{n+1'-j'})z^{k'-1'} = z^{k'-j'} + z^{n+k'-j'} = z^{k'-j'}(1 + z^n)$.

Dabei erhalten wir in der Hauptdiagonalen von DS'$_l$ ebenfalls genau (l – 1) mal den Wert (1 + $z^n$) und unterhalb von ihr wieder ausschließlich Nullen.

Damit ist D$\mathbf{S}_l$ = $(1 + z^n)^{l-1}$, wobei $2 \leq l \leq n$ ist.

Für die Hauptminoren $\mathbf{C}_l$ und $\mathbf{S}_l$ von **C** bzw. **S** gibt es insgesamt $\binom{n}{l}$ Möglichkeiten.

Damit ist Satz 1 ist bewiesen. ☺

<u>Folgerungen</u>:

F.1: Falls z = 0 ist, so ergibt sich $p_C(x, 0) = p_S(x, 0) = \sum_{l=0}^{l=n} (-1)^l \binom{n}{l} x^{n-l} = (x - 1)^n$ das charakteristische Polynom der Einheitsmatrix **I** = $\mathbf{I}_n$.

F.2: Wird $z = z_n = \sqrt[n]{1} = \exp(2\pi i/n) = \cos(2\pi/n) + i\cdot\sin(2\pi/n)$, n-te Einheitswurzel ($i = \sqrt{-1}$), gewählt so sind die charakteristischen Polynome von **C** und **S** gegeben zu

$$p_C(x, z_n) = x^n - nx^{n-1} = x^{n-1}(x - n) \quad \text{und} \tag{2.3}$$

$$p_S(x, z_n) = x^n + \sum_{l=1}^{l=n} (-1)^l 2^{l-1} \binom{n}{l} x^{n-l}. \tag{2.4}$$

F.3: Setzt man $z = z_n^k$, k = 0, 1, …, n – 1, so bleiben die Gleichungen (2.3) und (2.4) erhalten.

F.4: Wird $z = -z_n$ gesetzt, so sind für n gerade: $p_C(x, -z_n) = p_C(x, z_n)$ und $p_S(x, .z_n) = p_S(x, z_n)$ (2.5)

n ungerade: $p_C(x, -z_n) = p_S(x, z_n)$ und $p_S(x, .z_n) = p_C(x, z_n)$. (2.6)

F.5: Ist $z = z_{2n} = \exp(\pi i/n) = \cos(\pi/n) + i\cdot\sin(\pi/n)$ so ergeben sich die Polynome

$p_C(x, z_{2n}) = p_S(x, z_n)$ und $p_S(x, z_{2n}) = p_C(x, z_n)$. (2.7)

<u>Bemerkungen</u>:

B.1: Der vollständige Graph $K_n$ mit n Knotenpunkten hat das charakteristische Polynom $p_{Kn}(x) = (x - n + 1)(x + 1)^{n-1}$. Somit ist $p_C(x, z_n) = p_{Kn}(x - 1) = (x - n)x^{n-1}$.

B.2: Mit der Formel (2.4) läßt sich eine weitere (allerdings weniger geeignete) Formel für $p_S(x, z_n)$ herleiten: $p_S(x, z_n) = x^n + ½ [(x - 2)^n - x^n] = ½[x^n + (x - 2)^n]$.

Es sind $z = z_n$, $z^* = z_{2n}$, $x_l$ die Eigenwerte und $\mathbf{u}_l(\mathbf{C}) = \mathbf{u}(\mathbf{C}, x_l)$ die dazugehörenden Eigenvektoren der Matrix **C** (ganz analog bei **S**).

<u>Satz 2</u>:

Die Eigenwerte von **C** können aus der Gleichung (2.3) sofort abgelesen werden. Eigenwert $x_1 = n$ hat die Vielfachheit 1 und die übrigen Eigenwerte sind $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$. Die dazugehörenden Eigenvektoren[1] $\mathbf{u}_l(\mathbf{C})$ von **C** ergeben sich zu $\mathbf{u}_l(\mathbf{C}) = (1, z^{l-1}, \ldots, z^{(l-1)(n-1)})^T$.

Die Eigenwerte von **S** werden auf andere Weise bestimmt. Hierzu nutzt man nach Davis[1] neben $z = z_n = \exp(2\pi i/n)$ und $z^* = z_{2n} = \exp(\pi i/n)$ die in Gleichung (1.2) gegebene begleitende Funktion $f_S(x)$. Man setze hierin für $x = z^*z^{l-1}$ und erhält den Eigenwert $x_l = f_S(z^*z^{l-1})$.

Somit ist $x_l = f_S(z^*z^{l-1}) = \sum_{k=0}^{k=n-1} z^k(z^*z^{l-1})^k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (z^*z^l)^k$.

Es sind $z^*z^l = \exp((2l + 1)\pi i/n) = \cos((2l + 1)\pi/n)) + i\sin((2l + 1)\pi/n))$.

Wir betrachten von $x_l$ den Real- und den Imaginärteil getrennt, wobei zwei Formeln von Ryshik und Gradstein[11] genutzt werden können:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \cos(u + kv) = \cos(u + (n - 1)v/2)\sin(nv/2)\mathrm{cosec}(v/2) \text{ und} \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sin(u + kv) = \sin(u + (n - 1)v/2)\sin(nv/2)\mathrm{cosec}(v/2). \quad (2.9)$$

Es sei bemerkt, dass für Winkel w gilt: $\mathrm{cosec}(w) = (\sin(w))^{-1}$.

Zur Berechnung von $x_l = \mathrm{Re}(x_l) + i\,\mathrm{Im}(x_l)$ setze man in den Formeln (2.8, 2.9) $u = 0$ und $v = (2l + 1)\pi/n$.

Für den Realteil $\mathrm{Re}(x_l)$ von $x_l$ erhält man zunächst

$\mathrm{Re}(x_l) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos(kv) = \cos((n - 1)(v/2)\sin(nv/2)\{\sin(v/2)\}^{-1}$.

Mit $\cos((n - 1)v/2) = \cos(nv/2 - v/2) = \cos(nv/2)\cos(v/2) + \sin(nv/2)\sin(v/2)$

ist $\mathrm{Re}(x_l) = [\cos(nv/2)\cos(v/2) + \sin(nv/2)\sin(v/2)]\sin(nv/2)\{\sin(v/2)\}^{-1}$.

In diesem Produkt sind wegen $v = (2l + 1)\pi/n$:

$\cos(nv/2) = \cos((2l + 1)\pi/2) = 0$, $\sin(nv/2) = \sin((2l + 1)\pi/2) = \pm 1$ und
$\sin(v/2) = \sin((2l + 1)\pi/2n) \neq 0$, $\cos(v/2) = \cos((2l + 1)\pi/2n) \neq 0$. (#)

Also ist $\mathrm{Re}(x_l) = \sin^2((2l + 1)\pi/2) = 1$ für jedes $l = 0, 1, \ldots, n - 1$ und $n > 1$.

Für den Imaginärteil $\mathrm{Im}(x_l)$ von $x_l$ ergibt sich

$$\mathrm{Im}(x_l) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin(kv) = \sin((n-1)v/2)\sin(nv/2)\{\sin(v/2)\}^{-1}.$$

Mit $\sin((n - 1)v/2) = \sin(nv/2 - v/2) = \sin(nv/2)\cos(v/2) - \cos(nv/2)\sin(v/2)$ ist
$\mathrm{Im}(x_l) = [\sin(nv/2)\cos(v/2) - \cos(nv/2)\sin(v/2)]\,(\sin(nv/2)\{\sin(v/2)\}^{-1}$.

Wegen der Formeln (#) ist
$\mathrm{Im}(x_l) = \sin^2(nv/2)\cos(v/2)/\sin(v/2) = \cot(v/2) = \cot((2l + 1)\pi/2n)$ für jedes $l = 0, 1, \ldots, n - 1$ und $n > 1$.

Damit gilt der

Satz 3:

Die Eigenwerte von Matrix **S** sind für $l = 1, 2, \ldots, n$ gegeben zu
$x_l = 1 + i\cdot\cot((2l + 1)\pi/2n)$, $i = \sqrt{-1}$, $l = 0, 1, \ldots, n - 1$, $n > 1$ bzw.
$x_l = 1 + i\cdot\cot((2l - 1)\pi/2n)$, $i = \sqrt{-1}$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $n > 1$. (2.10)

Die Eigenvektoren[1] $\mathbf{u}_l(\mathbf{S})$ von **S** sind $\mathbf{u}_l(\mathbf{S}) = (1, (z^*z^{l-1}), \ldots, (z^*z^{(l-1)})^{(n-1)})^T$. ☺

Mit den Eigenwerten von Matrix **S** und Gleichung (2.4) ist

$$\prod_{l=1}^{l=n} (1 + i\cdot\cot((2l - 1)\pi/2n)) = (-1)^n p_S(x = 0, z_n) = 2^{n-1} \quad \text{bzw.} \tag{2.11}$$

$$\prod_{l=1}^{l=\lfloor n/2\rfloor} (1 + \cot^2((2l - 1)\pi/2n)) = \prod_{l=1}^{l=\lfloor n/2\rfloor} [\sin((2l - 1)\pi/2n)]^{-2} =$$

$$= \prod_{l=1}^{l=\lfloor n/2\rfloor} (1 + \tan^2((n + 1 - 2l)\pi/2n)) = 2^{n-1}. \tag{2.12}$$

Die Gleichungen (2.11) und (2.12) geben Anlaß zu weiteren Untersuchungen.

Bekannt ist die Summenformel[6]

$$\sum_{l=1}^{l=n} \cot^2((2l - 1)\pi/4n) = n(2n - 1). \tag{2.13}$$

Die hierzu allgemeinere Formel ist

$$\sum_{l=1}^{l=n} (1 + \cot^2[(2l - 1)\pi/(2n)]) = \sum_{l=1}^{l=n} [\sin((2l - 1)\pi/2n)]^{-2} =$$

$$= \sum_{l=1}^{l=n} (1 + \tan^2[(n + 1 - 2l)\pi/(2n)]) = n^2. \tag{2.14}$$

Zum Beweis von (2.14) betrachten wir zunächst die Polynome

$$\{p_n(x)\}^2 = \prod_{l=1}^{l=n} (1 + x^2\cot^2[(2l-1)\pi/(2n)]) = \{\prod_{l=1}^{l=\lfloor n/2 \rfloor} \{1 + x^2\cot^2[(2l-1)\pi/(2n)]\}\}^2$$

und

$$b_n(x) = 1/2[(x+1)^n + (-x+1)^n = \sum_{j=0}^{j=\lfloor n/2 \rfloor} a(n, 2j)x^{2j} \text{ mit } a(n, 2j) = \binom{n}{2j}.$$

Es ist

$$p_n(x) = b_n(x), \tag{2.15}$$

denn für $x = 0$ ist $p_n(0) = b_n(0) = 1$, beide Polynome $p_n(x)$ und $b_n(x)$ haben den Grad $2\lfloor n/2 \rfloor$ und deren Nullstellen sind $\pm i \cdot \tan[(2l-1)\pi/(2n)]$ für $l = 1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$. Damit sind die Nullstellen von $b_n(x)$ auch gegeben zu $i \cdot \tan[(2l-1)\pi/(2n)]$, wobei $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und für n ungerade ist $l \neq (n+1)/2$ zu wählen.

Da $a(n,2) = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$ ist, erhält man $\sum_{l=1}^{l=n} \cot^2[(2l-1)\pi/(2n)] = 2 \cdot a(n,2) = n(n-1)$ und somit $\sum_{l=1}^{l=n} \{1 + \cot^2[(2l-1)\pi/(2n)]\} = n^2$. ☺

Mit Formel (2.15) können weitere trigonometrische Produkte und Summen gefunden werden.

Es sei noch eine, der Formel (2.15) ähnliche Beziehung gegeben:

$$q_n(x) = \prod_{l=1}^{l=n} (1 + x\cot[(2l-1)\pi/(2n)]) = \sum_{j=0}^{j=\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} x^{2j} = b_n(i \cdot x). \tag{2.16}$$

## 3. Die Koeffizienten von $p_S(x, z_n)$

Für $n > 0$ und $0 \leq l \leq n$ können die Koeffizienten $s(n, 0) = 1$ und $s(n, l > 0) = (-1)^l 2^{l-1}\binom{n}{l}$ der charakteristischen Polynome $p_S(x, z_n) = \sum_{l=0}^{l=n} s(n, l)x^{n-l}$ in Form eines Dreiecks, analog dem Pascal-Dreieck, angeordnet werden (s. u.). Dabei setze man zur Vervollständigung $s(0, 0) := 1$.

| $n$ | | | | | | | $x=1$ | $x=-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | 1 | 1 |
| 1 | 1 | $-1$ | | | | | 0 | $-2$ |
| 2 | 1 | $-2$ | 2 | | | | 1 | 5 |
| 3 | 1 | $-3$ | 6 | $-4$ | | | 0 | $-14$ |
| 4 | 1 | $-4$ | 12 | $-16$ | 8 | | 1 | 41 |
| 5 | 1 | $-5$ | 20 | $-40$ | 40 | $-16$ | 0 | $-122$ |

Diese Anordnung werde als *S-Dreieck* (kurz: *SD*) bezeichnet. Daneben findet man zwei Spalten mit den Werten für $p_S(x = 1, z_n)$ und $p_S(x = -1, z_n)$.

In *SD* gelten:

i) Mit den Werten $s(n \geq 0, 0) = 1$, $s(n, 1) = -n$ und $s(n, n) = (-1)^n 2^{n-1}$ gilt für $l = 2, 3, \ldots, n - 1$ die Rekursionsformel

$$s(n, l) = (-2)s(n-1, l-1) + s(n-1, l). \tag{3.1}$$

Denn es ist mit $s(n, l) = (-1)^l (2)^{l-1}\binom{n}{l}$, $1 < l < n$,

$s(n, l) = -2 \cdot s(n - 1, l - 1) + s(n - 1, l) =$

$(-2)[(-1)^{l-1} \cdot 2^{l-2}\binom{n-1}{l-1}] + [(-1)^l \cdot 2l^{-1}\binom{n-1}{l}] = (-1)^l \cdot (2)^{l-1}\binom{n}{l}$. ☺

ii) $$p_S(x = 1, z_n) = \sum_{l=0}^{l=n} s(n, l) = ½(1 + (-1)^n). \tag{3.2}$$

Beweis:

$(-1)^n = (1 + (-2))^n = \sum_{l=0}^{l=n} (-2)^l \binom{n}{l} = 1 + 2\sum_{l=1}^{l=n} (-1)^l 2^{l-1}\binom{n}{l} = 2p_S(1, z_n) - 1$. ☺

iii) $$p_S(x = -1, z_n) = \sum_{l=0}^{l=n} (-1)^l s(n, l) = ½(-1)^n(3^n + 1) \tag{3.3}$$

Beweis:

Es ist $(-1)^n p_S(x = -1, z_n) = 1 + \sum_{l=1}^{l=n} 2^{l-1}\binom{n}{l}$ und mit

$3^n = (1 + 2)^n = \sum_{l=0}^{l=n} 2^l \binom{n}{l} = 1 + 2\sum_{l=1}^{l=n} 2^{l-1}\binom{n}{l} = 2(-1)^n p_S(x = -1, z_n) - 1$ folgt Formel (3.3). ☺

iv) Für $n \geq 1$gelten außerdem:

$$p_S(x = -1, z_n) = -3p_S(x = -1, z_{n-1}) + (-1)^{n-1} \quad \text{und} \tag{3.4}$$

mit $l \to \infty$ ist $\lim\, [s(2l, l)/s(2l - 2, l - 1)] = -8$ . (3.5)

v) Die Zahlenfolge $\{(-1)^l s(2l,l)\}$ ist in Sloane(12) unter der Nummer A069723 (A082142, Duplikat) zu finden. Die Zahlenfolge $\{|\ p_S(x = -1, z_n)\ |\}$ ist unter A007051 bzw. A124302 und die Zahlenfolge $\{-|\ p_S(x = -1, z_n|\ \}$ unter A123183 gegeben.

## 4. Eine Determinante

Von Interesse könnte die n-reihige Determinante d = $\det(d_{j,k})$ mit $d_{j,k} = s(j + k - 2, k - 1)$ sein (j, k = 1, 2, …, n), wobei $d_{j,1} = 1$ und $d_{j,k>1} = (-1)^{k-1}2^{k-2}\binom{j+k-2}{k-1}$ sind. Der Faktor (-1) in jeder zweiten Spalte von d und die Potenzen von 2 können als Produkt $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}2^b$ mit b = $\binom{n-1}{2}$ vor die Determinante gezogen werden, sodass sich d = $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}2^b c$ und c = $\det\left(\binom{j+k-2}{k-1}\right)$ ergeben.

Re'nyi[10] hat gezeigt, dass c = 1 ist. Das beweist den

<u>Satz 5</u>:

Die Determinante $d(n) = \det(d_{jk})$ mit $d_{jk} = s(j + k - 2, k - 1)$ und j, k = 1, 2, …, n, wobei $d_{j1} = 1$ und $d_{jk>1} = -(-2)^{k-2}\binom{j+k-2}{k-1}$ sind, hat den Wert $d(n) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}2^a$ mit $a = \binom{n-1}{2}$. (4.1)

Dabei bedeutet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist ($\lfloor 3 \rfloor = \lfloor \pi \rfloor = 3$). ☺

## 5. Literatur


(1) Davis, P. J.: Circulant Matrices, John Wiley et Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto, **1979**.

(2) Bozkurt, D., Da Fonseca, C. M. and F. Yilmaz: The determinants of circulant and skew-circulant matrices with Tribonacci numbers, Math. Sci. and Appl. E-Notes, **2**(2), **2014**, 67 – 75.

(3) Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung, Teil I, Allgemeine Theorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin **1958**, Seite 66 ff.

(4) Garbanati, D. and R. C. Thompson: Skew Circulant Quadratic Forms, Journal of Number Theory, **4**(**1972**), 557 – 572.

(5) Gray, R. M.: Toeplitz and Circulant Matrices: A review, rmgray@stanford.edu.

(6) Hansen, E.: Table of Series and Products, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs 1975

(7) Kalman, D. and J. E. White: Polynomial Equations and Circulant Matrices, The Mathematical Association of America, Nov **2001**, Monthly 108, 821 – 840.

(8) Lind, D. A.: A Fibonacci Circulant, Fibonacci Quart. **8**(**1970**), 449 – 455.

(9) Marcus, M. and H. Minc: A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities, Dover Publications, Inc., New York, 1992, p. 17, 21

(10) Re'nyi,A.: New methods and results in combinatorial analysis II, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt.Kozl., **16** (**1966**), 159 – 177 (in Hungarian, English summary).

(11) Ryshik, I. M. und I. S. Gradstein, Summen-, Produkt- und Integraltafeln, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, **1957**, S. 30

(12) Sloane, N. J. A.: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

(13) Yun Gao, Zhaolin Jiang, Yanpeng Gong: On the Determinants and Inverses of Skew Circulant and Skew Left Circulant Matrices with Fibonacci and Lucas Numbers, WSEAS Transactions on Mathematics, **4**(12) **2013**, 472 – 481.

(14) Zhaolin Jiang, Jinjiang Yao and Fuliang Lu: On Skew Circulant Type Matrices Involving Any Continuous Fibonacci Numbers, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, **2014**, Article ID 483021, 10 pages, http//dx.doi.org/10.1155/2014/483021.

(15) Zhaolin Jiang, Yunlan Wei: Skew Circulant Type Matrices Involving the Sum of Fibonacci and Lucas Numbers, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, **2015**, Article ID 951340, 9 pages, http//dx.doi.org/10.1155/2015/951340.