



universitätsverlag
ilmenau

Bartkowiak, René; Woernle, Christoph:

Numerische Synthese überbestimmter Mechanismen

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033-249-3

URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033-249-3>

Erschienen in:

10. Kolloquium Getriebetechnik : Technische Universität Ilmenau, 11. - 13. September 2013. - Ilmenau : Univ.-Verl. Ilmenau, 2013. - S. 249-266. (Berichte der Ilmenauer Mechanismentechnik ; 2)

ISSN: 2194-9476

ISBN: 978-3-86360-065-5 [Druckausgabe]

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033

URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033>

Universitätsverlag Ilmenau, 2013

<http://www.tu-ilmenau.de/universitaetsverlag/>

NUMERISCHE SYNTHESE ÜBERBESTIMMTER MECHANISMEN

René Bartkowiak , Christoph Woernle**

* Fakultät für Maschinenbau und Schiffstechnik, Universität Rostock
email: {rene.bartkowiak, woernle}@uni-rostock.de

Abstract

Der Freiheitsgrad einer räumlichen kinematischen Schleife kann im Allgemeinen mit Hilfe des Grübler-Kutzbach-Kriteriums bestimmt werden. Dieses gilt jedoch nur, wenn die durch die Gelenke eingebrachten Bindungen voneinander unabhängig sind. Sind die auftretenden Bindungen aufgrund spezieller geometrischer Eigenschaften voneinander abhängig, so kann dies zu weiteren Bewegungsfreiheitsgraden führen. In diesem Falle wird von überbestimmten Mechanismen gesprochen.

Während für die kinematische Analyse überbestimmter Mechanismen allgemeingültige Ansätze existieren, beschränken sich die Syntheseverfahren meist auf spezielle Klassen überbestimmter Mechanismen. Im Folgenden wird ein Ansatz zur Synthese überbestimmter einschleifiger Mechanismen mit Schraubgelenken vorgestellt.

Betrachtet werden kinematische Einzelschleifen mit $n \leq 6$ Körpern und Schraubgelenken (n H-Schleife). Die Schleifenschließbedingungen können mit Hilfe der Schraubachsen der Gelenke als implizite Bindungen auf Geschwindigkeitsebene ausgedrückt werden. Für den Fall, dass die kinematische Schleife einen Bewegungsfreiheitsgrad von $f = 1$ aufweist, existiert eine einparametrische explizite Lösung der impliziten Bindungen, welche jedoch im Allgemeinen nicht analytisch gefunden werden kann. Aus diesem Grund werden die impliziten Bindungen

auf Geschwindigkeitsebene durch eine Taylorreihe approximiert und die notwendige Bedingung des Rangabfalls der Koeffizientenmatrix mit Hilfe von reziproken Schrauben formuliert. Dies liefert notwendige Bedingungen für die endliche Beweglichkeit einer nH -Schleife. Es kann gezeigt werden, dass das Erfülltsein einer endlichen Anzahl dieser notwendigen Bedingungen hinreichend ist für die endliche Beweglichkeit der nH -Schleife. Dadurch können die gewonnenen Bedingungen für die numerische Synthese von nH -Mechanismen verwendet werden.

1 Einleitung

Im Folgenden werden Mechanismen mit einer kinematischen Schleife betrachtet. Ein solcher Mechanismus besteht aus dem Gestell und weiteren n_K starren Körpern, die durch $n_G = n_{K+1}$ ideale Gelenke mit den relativen Gelenkfreiheitsgraden $f_i, i = 1, \dots, n_G$, miteinander verbunden sind. Durch das Schließen der Schleife unterliegen die relativen Gelenkkoordinaten sechs Bindungen, den Schleifenschließbedingungen. Die Schließbedingungen lassen sich als ein System von sechs impliziten algebraischen Gleichungen in den relativen Gelenkkoordinaten formulieren.

Sind die sechs Schließbedingungen voneinander unabhängig, so beträgt der Freiheitsgrad des einschleifigen Mechanismus nach der Formel von GRÜBLER und KUTZBACH

$$F = \sum_i^{n_G} f_i - 6. \quad (1)$$

Sind jedoch die Schließbedingungen in allen Lagen des Mechanismus voneinander abhängig, so erhöht sich der Freiheitsgrad des Mechanismus gegenüber (1). Solche Mechanismen werden als *überbestimmt* oder *übergeschlossen* bezeichnet.

Im vorliegenden Beitrag werden allgemeine Bedingungen für die Beweglichkeit überbestimmter Mechanismen formuliert. Mit Hilfe dieser Bedingungen können die Abmessungen der Getriebeglieder so ermittelt werden, dass ein überbestimmter Mechanismus entsteht. Für eine kompakte Darstellung der kinematischen Zusammenhänge werden dazu Schraubenkoordinaten und die dafür gültige Schraubenalgebra verwendet.

2 Grundlagen der Schraubentheorie

Die Schraubentheorie wird zur Beschreibung statischer und kinematischer Zusammenhänge in der Starrkörpermechanik verwendet und wurde erstmals von Sir ROBERT BALL veröffentlicht [1]. Im Folgenden werden einige Grundlagen zur Schraubentheorie dargestellt, welche mathematisch günstig mit Hilfe dualer Größen formuliert werden kann.

Duale Größen Eine duale Zahl ein Ausdruck der Form $\hat{a} = a + \varepsilon a_\varepsilon$. Hierbei sind a der *Realteil* und a_ε der *Dualteil*. Für die duale Einheit ε gilt $\varepsilon^2 = 0$. Vektoren lassen sich ebenfalls als duale Größen darstellen und werden dann zur Darstellung von gerichteten Geraden im Raum und in ihrer allgemeinen Form zur Darstellung von Schrauben verwendet.

Dualer Einheitsvektor Ein dualer Einheitsvektor, auch *Einsschraube*,

$$\hat{e} = e + \varepsilon e_\varepsilon = e + \varepsilon \tilde{r}e, |e| = 1 \quad (2)$$

kennzeichnet eine gerichtete Gerade (Speer) im Raum, siehe Abbildung 1. Hierbei wird das Kreuzprodukt zweier Vektoren mit Hilfe des Tildeoperators in Matrixschreibweise dargestellt, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a}$. Werden der Realteil und der Dualteil von (2) in einem beliebigen Koordinatensystem dargestellt, so werden die sechs normierten PLÜCKER-Linienkoordinaten der Geraden in diesem System erhalten, $(e_x : e_y : e_z : e_{\varepsilon x} : e_{\varepsilon y} : e_{\varepsilon z})$. Sie unterliegen der Normierungs-Nebenbedingungen $e^T e = 1$ bzw. $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = |e|^2 = 1$ sowie der PLÜCKER-Bedingung $e^T e_\varepsilon = 0$ bzw. $e_x e_{\varepsilon x} + e_y e_{\varepsilon y} + e_z e_{\varepsilon z} = 0$.

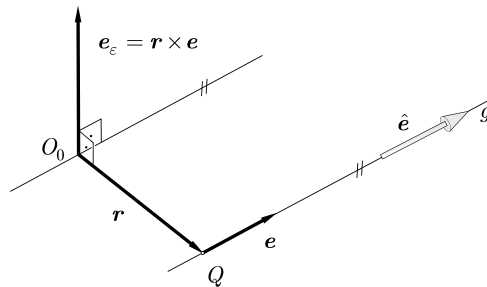


Abbildung 1: Dualer Einheitsvektor

Allgemeiner dualer Vektor Ein allgemeiner dualer Vektor

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}_{\varepsilon} &= \mathbf{a} + \varepsilon (\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{a} + h\mathbf{a}) \\ & &= \mathbf{a} + \varepsilon (\mathbf{a}_{\varepsilon\perp} + \mathbf{a}_{\varepsilon\parallel})\end{aligned}\quad (3)$$

stellt eine *Schraube* dar, siehe Abbildung 2. Diese kann als eine gerichtete Gerade g mit einer zugehörigen skalaren Größe, der *Steigung* h , aufgefasst werden. Der Realteil von \hat{a} ist der Richtungsvektor der Geraden g . Der Dualteil von \hat{a} enthält das *Moment* $\mathbf{a}_{\varepsilon\perp} = \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{a}$ von \mathbf{a} bezüglich O_0 , das die Lage von g im Raum festlegt, und einen Vektor $\mathbf{a}_{\varepsilon\parallel} = h\mathbf{a}$, der die Steigung h festlegt.

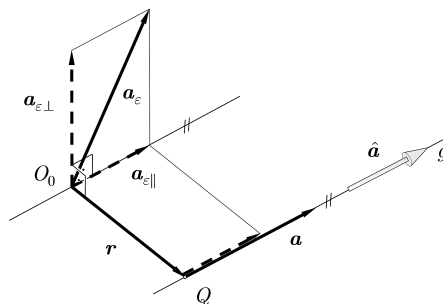


Abbildung 2: Allgemeiner dualer Vektor

Für die Implementierung in ein numerisches Verfahren wird im Folgenden die *Motor*-Notation für duale Vektoren verwendet, welche es ermöglicht, die Zusammen-

hänge dualer Vektoren mit Hilfe der linearen Algebra auszudrücken [3],

$$\hat{\underline{a}} \equiv \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{a}_\varepsilon \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Bewegungsschraube Ist der Geschwindigkeitszustand eines starren Körpers durch dessen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\omega = \omega e$ und den Geschwindigkeitsvektor v_P eines körperfesten Punktes P gegeben, so lässt sich die Starrkörperbewegung momentan als eine Schraubbewegung um eine Gerade \hat{e} darstellen, welche als die *Momentane Schraubachse* (MSA) des Körpers bezeichnet wird. Hierzu wird der Geschwindigkeitsvektor v_P in die jeweils zum Richtungsvektor e parallelen und orthogonalen Komponenten zerlegt, $v_P = v_\perp + v_\parallel$. Durch Parallelverschiebung des Richtungsvektors e in Richtung $-\ell = \tilde{\omega} v_\perp / \omega^2$ durch den Punkt Q wird die Momentane Schraubachse \hat{e} erhalten, vgl. Abbildung 3.

Der Bewegungszustand des Körpers lässt sich mit Hilfe der Einheitsschraube $\hat{a} = (1 + \varepsilon h)\hat{e}$ als Schraubung mit der Steigung h um die Momentane Schraubachse \hat{e} ausdrücken als

$$\hat{\underline{\omega}} \equiv \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{\omega}_\varepsilon \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{a}_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \tilde{\mathbf{r}}\omega + h\omega \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Mit $\hat{\underline{\omega}}$ ist die *Bewegungsschraube* bzw. *Kinemate* (im Englischen auch *twist*) des Körpers gegeben. Der Ausdruck $\omega \underline{a}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{r}}\omega + h\omega$ in (5) stellt die Geschwindigkeit eines körperfesten Punktes dar, welcher mit dem raumfesten Bezugspunkt O momentan zusammenfällt.

Kraftschraube Nach POINSON lässt sich äquivalent zum Geschwindigkeitszustand des starren Körpers ein *Kraftwinder*, bestehend aus dem Kraftvektor \underline{F} und dem Momentenvektor \underline{M} , als eine Schraube

$$\hat{\underline{F}} \equiv \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{F}_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \tilde{\mathbf{r}}\underline{F} + h\underline{F} \end{bmatrix} \quad (6)$$

darstellen, welche auch als *Kraftschraube* bzw. *Dyname* (im Englischen auch *wrench*) bezeichnet wird.

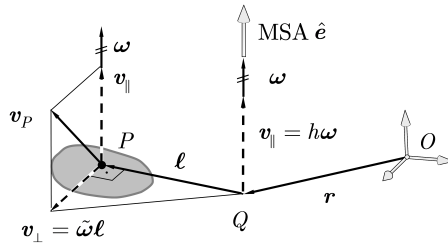


Abbildung 3: Bewegungsschraube

Reziprozität Wirkt auf einen starren Körper, dessen momentaner Geschwindigkeitszustand durch die Bewegungsschraube $\hat{\omega}$ gegeben ist, die Kraftschraube \hat{F} und verschwindet der Ausdruck $\mathbf{F}^T \omega_\varepsilon + \mathbf{F}_\varepsilon^T \omega = 0$, so werden die Schrauben \hat{F} und $\hat{\omega}$ als zueinander *reziprok* bezeichnet. Physikalisch betrachtet, erzeugt die Kraftschraube \hat{F} keine Leistung gegen die Bewegungsschraube $\hat{\omega}$.

Differentielle Schraubbewegung Die differentielle Lageänderung eines Einheitsvektors e nach einer differentiellen Rotation $d\varphi$ um die Drehachse u , siehe Abbildung 4, ist gegeben durch $de = \tilde{u} e d\varphi$.

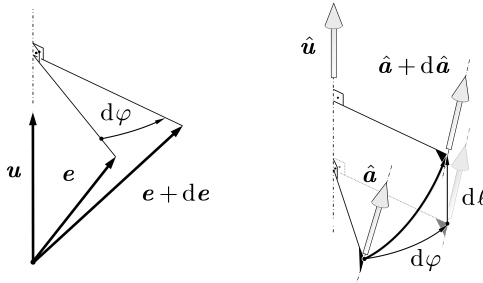


Abbildung 4: Differentielle Schraubbewegung

Durch Anwendung des Übertragungsprinzips nach KOTELNIKOV, kann die differentielle Lageänderung einer Einheitschraube \hat{a} nach einer differentiellen Schraubung um den dualen Einheitsvektor $\hat{u} = u + \varepsilon u_\varepsilon$ gemäß (2) mit dem differentiellen

dualen Winkel $d\hat{\varphi} \equiv d\varphi + \varepsilon d\ell = (1 + \varepsilon h)d\varphi$ mit der *Motordyade*

$$\tilde{\underline{\hat{u}}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\underline{u}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\underline{u}}_\varepsilon & \tilde{\underline{u}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ausgedrückt werden als

$$d\underline{\hat{a}} = \tilde{\underline{\hat{u}}} \underline{\hat{a}} d\hat{\varphi}. \quad (8)$$

Gleichung (8) stellt ein lineares Differentialgleichungssystem für die Komponenten des dualen Vektors $\underline{\hat{a}}$ dar. Die Differentialgleichung (8) lässt sich unter Berücksichtigung von $d\hat{\varphi} = (1 + \varepsilon h)d\varphi$ äquivalent durch die Einheitsschraube $\hat{\underline{b}} = (1 + \varepsilon h)\underline{\hat{u}}$ darstellen als eine differentielle Schraubung um $\hat{\underline{b}}$ mit dem Parameter $dq \equiv d\varphi$,

$$d\underline{\hat{a}} = \tilde{\underline{\hat{b}}} \underline{\hat{a}} dq. \quad (9)$$

Im Fall einer reinen Translation ist die Steigung $h \rightarrow \infty$ ($d\varphi \rightarrow 0$), und der Zusammenhang (9) wird ersetzt durch

$$d\underline{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\underline{b}} \underline{a} \end{bmatrix} dq, \quad (10)$$

mit der infinitesimalen Translation $dq \equiv d\ell = h d\varphi$ entlang \underline{u} .

3 Kinematische Ketten

Betrachtet werden im Folgenden offene kinematische Ketten mit den Körpern 1 bis n , welche mittels Schraubgelenken verbunden sind, siehe Abbildung 5. Für diese kinematischen Ketten werden die Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit des Körpers n und den relativen Gelenkkoordinaten q_i mit Hilfe der Schraubentheorie als implizite Bindungen beschrieben. Im Anschluss werden in Abschnitt 4 die Beziehungen zwischen den Gelenkkoordinaten in kinematischen Schleifen, welche durch Verbinden des Körpers n mit dem Basiskörper 0 erhalten werden, durch die sich ergebenden Schleifenschließbedingungen dargestellt.

Die Lage der Schraubgelenkachsen in der kinematischen Kette nach Abbildung 5 wird beschrieben in der Form

$$\hat{\mathbf{a}}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_{\varepsilon i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{a}_i + h_i \mathbf{a}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

mit den Einheitsvektoren \mathbf{a}_i der jeweiligen Schraubachsen, den Momenten $\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{a}_i$ der Vektoren \mathbf{a}_i bezüglich des Ursprungs O_n des Referenzsystems auf dem Körper n und den Steigungen h_i der Schraubgelenke.

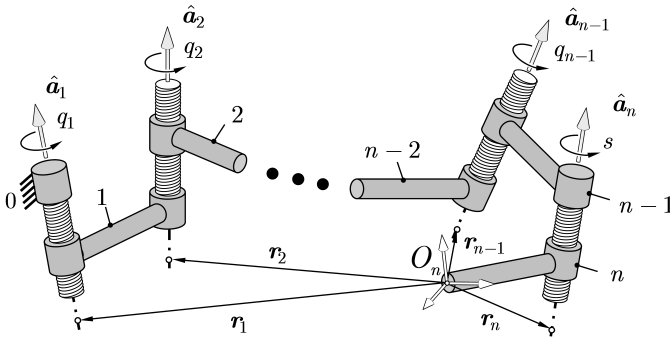


Abbildung 5: Offene kinematische Kette mit Schraubgelenken

In einer Lage $\mathbf{q} = [q_1 \ \dots \ q_n]^T$ der kinematischen Kette ergibt sich die Bewegungsschraube des Körpers n bezüglich des Basiskörpers 0 als die Summe der n relativen Bewegungsschrauben $\mathbf{a}_i \dot{q}_i$, $i = 1, \dots, n$, der Gelenke,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_n \\ \boldsymbol{\omega}_{n\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_{\varepsilon 1} & \dots & \mathbf{a}_{\varepsilon n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\rightarrow \quad \underline{\hat{\boldsymbol{\omega}}}_n = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad \dot{\mathbf{q}}.$$

Die Achse (Gerade) $\hat{\mathbf{e}}_n$ der Schraube $\hat{\boldsymbol{\omega}}_n = \hat{\omega}_n \hat{\mathbf{e}}_n$ stellt die Momentane Schraubachse der Bewegung des Körpers n dar. Die Matrix \mathbf{J} in (12) wird als die Jacobimatrix des Körpers n bezeichnet.

Differentielle Bewegung der Schraubachsen Im Folgenden wird die Lageänderung der Gelenkachse $\hat{\underline{a}}_k$ aus Abbildung 5 infolge von differentiellen relativen Verdrehungen dq_i , $i = 1, \dots, k-1$, um die Schraubachsen der Gelenke zwischen dem Basiskörper 0 und der Gelenkachse $\hat{\underline{a}}_k$ betrachtet. Diese kann als Summe der nacheinander ausgeführten differentiellen Schraubungen, entsprechend (9), dargestellt werden,

$$d\hat{\underline{a}}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\hat{\underline{a}}}_i \hat{\underline{a}}_k dq_i. \quad (13)$$

4 Kinematische Schleife mit Schraubgelenken

Durch das Schließen der Schleife werden die voneinander unabhängigen relativen Gelenkkoordinaten der offenen kinematischen Kette geometrischen Bindungen unterworfen, welche sich mathematisch als implizite *Schließbedingungen* der Schleife ausdrücken lassen [6].

Implizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Wird in einer kinematischen Kette gemäß Abbildung 5 der Körper n mit dem Basiskörper 0 verbunden, so verschwindet die Relativgeschwindigkeit der beiden Körper, also $\hat{\omega}_n = \mathbf{0}$. Aus (12) entstehen damit die impliziten Schließbedingungen für die Gelenkgeschwindigkeiten \dot{q}_i in der aktuellen Lage \mathbf{q} ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\underline{a}}_1 & \cdots & \hat{\underline{a}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}, \\ \rightarrow \quad \mathbf{0} &= \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (14)$$

welche auch als die Schließbedingungen erster Ordnung bezeichnet werden. Die $(6, n)$ -Matrix \mathbf{G} in (14) wird als Bindungsmatrix bezeichnet.

Differentielle Bewegung der Schraubachsen Für die Synthese von überbestimmten nH -Mechanismen werden die impliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene (14) mittels TAYLOR-Reihenentwicklung lokal approximiert.

Dazu werden die höheren Ableitungen der Schraubachsen $\hat{\mathbf{a}}_i$ nach den unabhängigen Gelenkkordinaten, den Minimalkordinaten, benötigt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden die Körper 0 und n und damit die Schraubachsen $\hat{\mathbf{a}}_1$ und $\hat{\mathbf{a}}_n$ der Schleife als raumfest angenommen. Die differentielle Bewegung der Schraubachsen $\hat{\mathbf{a}}_i$ ist nach (13) gegeben durch

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{a}}_1 &= \mathbf{0}, \\ d\hat{\mathbf{a}}_2 &= \tilde{\hat{\mathbf{a}}}_1 \hat{\mathbf{a}}_2 dq_1, \\ &\vdots \\ d\hat{\mathbf{a}}_{n-1} &= \tilde{\hat{\mathbf{a}}}_1 \hat{\mathbf{a}}_{n-1} dq_1 + \tilde{\hat{\mathbf{a}}}_2 \hat{\mathbf{a}}_{n-1} dq_2 + \cdots + \tilde{\hat{\mathbf{a}}}_{n-2} \hat{\mathbf{a}}_{n-1} dq_{n-2}, \\ d\hat{\mathbf{a}}_n &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{15}$$

Für den Fall, dass die n H-Schleife den Freiheitsgrad $f = 1$ aufweist, welcher beispielsweise durch die Minimalkoordinate $s \equiv q_n$ beschrieben wird, werden die Ableitungen nach s mit den Definitionen

$$\lambda_i = -\frac{dq_i}{ds} \tag{16}$$

und

$$\hat{\mathbf{a}}'_i = \frac{d\hat{\mathbf{a}}_i}{ds} \tag{17}$$

dargestellt als

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}'_1 &= \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{a}}'_2 &= -\tilde{\hat{\mathbf{a}}}_1 \hat{\mathbf{a}}_2 \lambda_1, \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{a}}'_{n-1} &= -\tilde{\hat{\mathbf{a}}}_1 \hat{\mathbf{a}}_{n-1} \lambda_1 - \tilde{\hat{\mathbf{a}}}_2 \hat{\mathbf{a}}_{n-1} \lambda_2 - \cdots - \tilde{\hat{\mathbf{a}}}_{n-2} \hat{\mathbf{a}}_{n-1} \lambda_{n-2}, \\ \hat{\mathbf{a}}'_n &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{18}$$

Höhere Ableitungen werden durch Anwendung der Produktregel erhalten.

5 Überbestimmte n H-Mechanismen

Für eine allgemeine n H-Schleife ist mit der $(6, n)$ -Bindungsmatrix \mathbf{G} in den impliziten Schließbedingungen (14) der lokale Freiheitsgrad durch

$$f_{\text{lokal}} = n - \text{Rang}(\mathbf{G}) \quad (19)$$

definiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll die Lage der Schraubachsen $\hat{\mathbf{a}}_i$ mit Hilfe des Vektors der Minimalkoordinaten \mathbf{s} parametrisiert werden. Bleibt der Rang der $(6, n)$ -Bindungsmatrix \mathbf{G} in allen möglichen Lagen der Schraubachsen $\hat{\mathbf{a}}_i(\mathbf{s})$, welche sich in der aktuellen Zusammenbaukonfiguration erreichen lassen, konstant, so ist der globale Freiheitsgrad der n H-Schleife gegeben durch

$$f_{\text{global}} = n - \text{Rang}(\mathbf{G}(\mathbf{s})). \quad (20)$$

Weist bei n H-Schleifen mit $n \leq 6$ die $(6, n)$ -Bindungsmatrix \mathbf{G} einen Rangabfall, $\text{Rang}(\mathbf{G}) < n$, in allen möglichen Lagen einer Zusammenbaukonfiguration auf, so ist die kinematische n H-Schleife *überbestimmt*. Ist der Rang der Bindungsmatrix in allen möglichen Lagen der Schraubachsen $\hat{\mathbf{a}}_i(\mathbf{s})$, welche sich in der aktuellen Zusammenbaukonfiguration erreichen lassen, konstant, $\text{Rang}(\mathbf{G}(\mathbf{s})) = n - f$, so besitzt die überbestimmte n H-Schleife den globalen Bewegungsfreiheitsgrad $f_{\text{global}} = f$, und die impliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene

$$\mathbf{G}(\mathbf{s}) \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (21)$$

besitzen eine f -parametrische Lösungsmannigfaltigkeit, parametrisiert durch die Minimalkoordinaten $\mathbf{s} = [s_1 \quad \dots \quad s_f]$.

6 Mobilitätsbedingungen

Die impliziten Schließbedingungen erster Ordnung einer n H-Schleife (14) bilden ein homogenes lineares Gleichungssystem (LGS) für die Gelenkgeschwindigkei-

ten \dot{q}_i , welches $f = n - \text{Rang}(\hat{\mathbf{a}}_1, \dots, \hat{\mathbf{a}}_n)$ nichttriviale Lösungen besitzt.

Im Folgenden werden einschleifige nH -Mechanismen, $n \leq 6$, mit dem globalen Freiheitsgrad $f_{\text{global}} = 1$ und somit $\text{Rang}(\hat{\mathbf{a}}_1, \dots, \hat{\mathbf{a}}_n) = n - 1$, vgl. (20), betrachtet. Das homogene LGS (14) kann dann in das inhomogene LGS

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_n &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 & \dots & \hat{\mathbf{a}}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = -\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_n} \quad (22) \\ \rightarrow \hat{\mathbf{a}}_n &= \mathbf{A} \quad \boldsymbol{\lambda} \end{aligned}$$

überführt werden, für welches eine Lösung im Falle von

$$\hat{\mathbf{a}}_n \in \{ \hat{\mathbf{a}}_1 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{a}}_{n-1} \} \quad (23)$$

existiert. Da die $(6, n - 1)$ Matrix \mathbf{A} in (22) nach Voraussetzung vollen Rang hat, $\text{Rang}(\mathbf{A}) = n - 1$, ist die Lösung von (22) im Falle der Existenz mit Hilfe einer Linksinversen, zum Beispiel der MOORE-PENROSE-Pseudoinversen \mathbf{A}^+ gegeben durch

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A}^+ \hat{\mathbf{a}}_n. \quad (24)$$

Für den Fall, dass die Schraubachsen $\hat{\mathbf{a}}_i$ der Gelenke einem überbestimmten nH -Mechanismus mit dem Freiheitsgrad $f_{\text{global}} = 1$ angehören, besitzt (22) eine durch die Minimalkoordinate s beschreibbare einparametrische Lösungsmannigfaltigkeit $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(s)$ und somit auch $\mathbf{A} = \mathbf{A}(s)$. Mit der Einschränkung $\dot{q}_n \neq 0$ wird als Minimalkoordinate s die Gelenkkoordinate des n -ten Gelenkes $s \equiv q_n$ definiert. Somit lautet das inhomogene LGS (22) für einen nH -Mechanismus mit dem Freiheitsgrad $f_{\text{global}} = 1$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_n &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1(s) & \dots & \hat{\mathbf{a}}_{n-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(s) \\ \vdots \\ \lambda_{n-1}(s) \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = -\frac{\dot{q}_i}{\dot{s}} \quad (25) \\ \rightarrow \hat{\mathbf{a}}_n &= \mathbf{A}(s) \quad \boldsymbol{\lambda}(s). \end{aligned}$$

Die Schließbedingungen auf Lageebene $\mathbf{q} = \mathbf{q}(s)$ und somit die Lage der Gelenkachsen $\mathbf{A}(s)$ und $\boldsymbol{\lambda}(s)$ sind im Allgemeinen nicht explizit gegeben. Da diese Zusammenhänge analytische Funktionen sind, lassen sie sich jedoch exakt in eine TAYLOR-Reihe entwickeln. Die Reihenentwicklung der Schließbedingungen (25) um die aktuelle Lage $s_0 = q_{n0}$ mit $s = q_{n0} + \delta s$ lautet

$$\hat{\mathbf{a}}_{n0} = \overbrace{\left(\mathbf{A}_0 + \frac{\mathbf{A}'_0}{1!} \delta s + \frac{\mathbf{A}''_0}{2!} \delta s^2 + \dots \right)}^{\mathbf{A}(s)} \overbrace{\left(\boldsymbol{\lambda}_0 + \frac{\boldsymbol{\lambda}'_0}{1!} \delta s + \frac{\boldsymbol{\lambda}''_0}{2!} \delta s^2 + \dots \right)}^{\boldsymbol{\lambda}(s)} \quad (26)$$

mit den Größen

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_{n0} &= \hat{\mathbf{a}}_n, \\ \mathbf{A}_0 &= \mathbf{A}(s_0), \\ \mathbf{A}'_0 &= \left. \frac{d\mathbf{A}(s)}{ds} \right|_{s_0}, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_0 &= \boldsymbol{\lambda}(s_0), \\ \boldsymbol{\lambda}'_0 &= \left. \frac{d\boldsymbol{\lambda}(s)}{ds} \right|_{s_0}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Ableitungen $\mathbf{A}'_0 = [\hat{\mathbf{a}}'_1 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{a}}'_{n-1}]$ können algebraisch mit Hilfe von (18) ausgedrückt werden. Wenn die Reihenentwicklung (26) für beliebige Werte von δs gelten soll, dann müssen alle Koeffizienten der Potenzen von δs jeweils für sich verschwinden. Dies liefert alle Schließbedingungen höherer Ordnung in der aktuellen Lage der kinematischen Schleife,

$$\begin{aligned} \delta s^0: \quad \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\lambda}_0 &= \hat{\mathbf{a}}_{n0} && \text{1. Ordnung,} \\ \delta s^1: \quad \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\lambda}'_0 &= -\mathbf{A}'_0 \boldsymbol{\lambda}_0 && \text{2. Ordnung,} \\ \delta s^2: \quad \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\lambda}''_0 &= -\mathbf{A}''_0 \boldsymbol{\lambda}_0 - 2\mathbf{A}'_0 \boldsymbol{\lambda}'_0 && \text{3. Ordnung,} \\ &\vdots && \end{aligned} \quad (27)$$

Jede der Schließbedingungen in (27) ist ein LGS mit sechs Gleichungen und den Unbekannten $\lambda_0, \lambda'_0, \lambda''_0, \dots$. Die n H-Schleife ist global beweglich, wenn eine Lösung aller Schließbedingungen in (27) existiert. Eine eindeutige Lösung von (27) existiert dann und nur dann, wenn jede rechte Seite von (27) im Spaltenraum der Matrix \mathbf{A}_0 liegt, also

$$\hat{\underline{a}}_{n0}, \quad -\mathbf{A}'_0 \lambda_0, \quad -\mathbf{A}''_0 \lambda_0 - 2\mathbf{A}'_0 \lambda'_0, \quad \dots \in \left\{ \hat{\underline{a}}_{10} \quad \dots \quad \hat{\underline{a}}_{n-1,0} \right\}. \quad (28)$$

Unter dieser Voraussetzung können die Lösungen der linearen Gleichungssysteme in (27) jeweils mit Hilfe einer Linksinversen der Matrix \mathbf{A}_0 , zum Beispiel der MOORE-PENROSE-Pseudoinversen \mathbf{A}_0^+ , dargestellt werden als

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \mathbf{A}_0^+ \hat{\underline{a}}_{n0}, \\ \lambda'_0 &= -\mathbf{A}_0^+ \mathbf{A}'_0 \lambda_0, \\ \lambda''_0 &= -\mathbf{A}_0^+ (\mathbf{A}''_0 \lambda_0 + 2\mathbf{A}'_0 \lambda'_0), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (29)$$

beziehungsweise nach sukzessivem ineinander Einsetzen

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \mathbf{A}_0^+ \hat{\underline{a}}_{n0}, \\ \lambda'_0 &= -\mathbf{A}_0^+ \mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0^+ \hat{\underline{a}}_{n0}, \\ \lambda''_0 &= -\mathbf{A}_0^+ (-2\mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0^+ \mathbf{A}'_0 + \mathbf{A}''_0) \mathbf{A}_0^+ \hat{\underline{a}}_{n0}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (30)$$

Die Bedingung (28) kann mit Hilfe der Schraubentheorie geometrisch gedeutet werden. Alle Schrauben auf der rechten Seite von (27) und die Schrauben in den Spalten von \mathbf{A}_0 weisen die gleichen $p = 6 - \text{Rang}(\mathbf{A}_0) = 7 - n$ reziproken Schrauben $\hat{\underline{k}}_{j0}, j = 1, \dots, (7 - n)$ auf, also

$$\hat{\underline{k}}_{j0}^T \Delta \hat{\underline{x}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, (7 - n), \quad (31)$$

wobei $\hat{\underline{x}}$ für eine beliebige rechte Seite der LGS (27) steht. Die reziproken Schrau-

ben $\hat{\underline{k}}_{j0}$ werden aus den Reziprozitätsbedingungen

$$\hat{\underline{k}}_{j0}^T \Delta \mathbf{A}_0 = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}_0^T \Delta \hat{\underline{k}}_{j0} = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, (7 - n) \quad (32)$$

durch Bilden einer Basis des Nullraumes,

$$\hat{\underline{k}}_{j0}(\mathbf{A}_0) \subset \text{Kern} \left(\mathbf{A}_0^T \Delta \right), \quad j = 1, \dots, (7 - n) \quad (33)$$

erhalten. Einsetzen von (27) und (30) in die Reziprozitätsbedingung (31) liefert ein System von $m(7 - n)$ nichtlinearen Gleichungen $\mathbf{0} = \mathbf{g}_m(\underline{\hat{\mathbf{a}}}_{i0})$ für die $6n$ gesuchten Schraubenkoordinaten $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_{i0}, i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{\underline{k}}_{j0}^T(\mathbf{A}_0) \Delta \hat{\underline{\mathbf{a}}}_{n0} && \equiv g_1(\hat{\underline{\mathbf{a}}}_{10}, \dots, \hat{\underline{\mathbf{a}}}_{n0}), \\ 0 &= \hat{\underline{k}}_{j0}^T(\mathbf{A}_0) \Delta \mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0^+ \hat{\underline{\mathbf{a}}}_{n0} && \equiv g_2(\hat{\underline{\mathbf{a}}}_{10}, \dots, \hat{\underline{\mathbf{a}}}_{n0}), \\ 0 &= \hat{\underline{k}}_{j0}^T(\mathbf{A}_0) \Delta (-2\mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0^+ \mathbf{A}'_0 + \mathbf{A}''_0) \mathbf{A}_0^+ \hat{\underline{\mathbf{a}}}_{n0} && \equiv g_3(\hat{\underline{\mathbf{a}}}_{10}, \dots, \hat{\underline{\mathbf{a}}}_{n0}), \\ &\vdots && \\ 0 &= \dots && \equiv g_m(\hat{\underline{\mathbf{a}}}_{10}, \dots, \hat{\underline{\mathbf{a}}}_{n0}), \end{aligned} \quad (34)$$

für $j = 1, \dots, (7 - n)$, welche im Folgenden als *Mobilitätsbedingungen* bezeichnet werden [2]. Der Index m ist hierbei die höchste Ordnung der eingearbeiteten Schließbedingung, vgl. (27). Die Mobilitätsbedingungen (34) sind notwendige Bedingungen für globale Beweglichkeit eines nH -Mechanismus und sind unabhängig von der Wahl des Bezugssystems. Für eine nH -Schleife liefert die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (34) diejenigen Schraubachsen $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_{i0}, i = 1, \dots, n$, in der aktuellen Lage, welche die Schließbedingungen bis zur Ordnung m erfüllen.

Es kann gezeigt werden [4], dass eine für globale Beweglichkeit hinreichende, aber bisher unbekannte, Ordnung der Schließbedingungen m_{\max} existiert. Das bedeutet, wenn alle Schraubachsen $\underline{\hat{\mathbf{a}}}_{i0}, i = 1, \dots, n$, in der aktuellen Lage die notwendigen Bedingungen (34) bis zur Ordnung m_{\max} erfüllen, dann sind auch automatisch alle notwendigen Bedingungen höherer Ordnung erfüllt, und die nH -Schleife hat den Bewegungsfreiheitsgrad $f_{\text{global}} = 1$.

7 Numerischer Synthesalgorithmus

Der numerische Synthesalgorithmus wird im Folgenden exemplarisch für den 6H-Mechanismus, $n = 6$, und den Freiheitsgrad $f_{\text{global}} = 1$ dargestellt. Es werden diejenigen Schraubenkoordinaten der Gelenkachsen $\hat{\mathbf{a}}_i, i = 1 \dots, 6$, ermittelt, welche die Residuen der Mobilitätsbedingungen (34) bis zu einer definierten Ordnung m_{num} numerisch zu Null erfüllen. Wenn die Ordnung m_{num} hinreichend für die globale Beweglichkeit der n H-Schleife ist, dann gehören die so bestimmten Gelenkachsen einem überbestimmten Mechanismus an.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die Schraubachse $\hat{\mathbf{a}}_1$ in die x -Achse des Referenzsystems gelegt, also

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (35)$$

Außerdem wird die zweite Gelenkachse, siehe Abbildung 6, durch die Größen ℓ, a_{21}, a_{23} definiert als

$$\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & 0 & a_{23} & a_{23}\ell + h_2 a_{21} & 0 & -a_{21}\ell + h_2 a_{23} \end{bmatrix}^T. \quad (36)$$

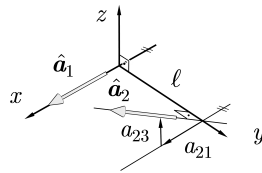


Abbildung 6: Definition der Achsen $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2$

Unbekannte Größen sind somit

- die Steigung der ersten Schraubachse h_1 (1 Unbekannte)
- die Lage der zweiten Schraubachse mit den Größen a_{21}, a_{23} sowie dem Abstand ℓ (3 Unbekannte)
- die jeweils sechs Schraubenkoordinaten der vier weiteren Schraubachsen $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}, a_{i6}, i = 3, 6$ (24 Unbekannte).

Für die numerische Synthese eines 6H-Mechanismus werden die insgesamt 28 Unbekannten zu einem Vektor \boldsymbol{x} zusammengefasst. Für die Unbekannten \boldsymbol{x} werden zufällige Startwerte für die numerische Lösung generiert. Diese Startwerte werden mittels geeigneter numerischer Verfahren so iteriert, dass die Residuen der Mobilitätsbedingungen $g_1(\boldsymbol{x}), \dots, g_{m_{\text{num}}}(\boldsymbol{x})$ verschwinden. Nebenbedingungen sind die Normierungsbedingungen der Schrauben.

Ziel des Synthesealgorithmus ist es also, numerische Werte für \boldsymbol{x} und somit Koordinaten für die Schraubachsen $\hat{\boldsymbol{a}}_i, i = 1, \dots, 6$ zu finden, so dass die Residuen der Mobilitätsbedingungen $g_1(\boldsymbol{x}), \dots, g_{m_{\text{num}}}(\boldsymbol{x})$ aus (34) und die Normierungsbedingungen $f_i = |\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x})| - 1, i = 2, \dots, 6$ zu Null werden. In der vorliegenden Arbeit wurden dazu verschiedene numerische Verfahren in MATLAB, ausgehend von zufällig generierten Startwerten, getestet.

Für den Fall, dass die Ordnung der höchsten mit berücksichtigten Schließbedingung m_{num} hinreichend ist für globale Beweglichkeit, so liefert dies einen numerischen Repräsentanten einer Familie von überbestimmten Mechanismen.

Mit dem beschriebenen numerischen Algorithmus wurden viele Beispiele von global beweglichen Mechanismen mit $n = 4, \dots, 6$ Gelenken vom Typ Dreh-, Schub- und Schraubgelenk gefunden [5, 7]. Dabei konnte ebenfalls die zur Synthese hinreichende Ordnung der zu erfüllenden Schließbedingungen m_{num} bestimmt werden. Die Zwischenergebnisse des beschriebenen Verfahrens können genutzt werden für die numerische Bestimmung der Übertragungsfunktionen von überbestimmten Mechanismen.

Literatur

- [1] R. S. Ball: *Theory of Screws*. Cambridge Univ. Press, 1900.
- [2] R. Bartkowiak: *Analyse und Synthese überbestimmter Mechanismen mit Hilfe der Schraubentheorie*. Dr. Hut Verlag München, 2013.
- [3] MISES, R. VON: *Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik*. ZAMM, 4:155–181, 1924.

- [4] V. Alexandrov. Sufficient Condition for the Extendibility of an n th Order Flex of Polyhedra. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 39:367-378, 1998.
- [5] R. Bartkowiak and C. Woernle. Numerical Synthesis of Overconstrained Mechanisms Based on Screw Theory. J. Lenarčič and M. M. Stanišić, editors, *Advances in Robot Kinematics*, pages 539-546. Springer, Berlin, 2010.
- [6] WOERNLE, C.: *Mehrkörpersysteme: Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper*. Springer Berlin, 2011.
- [7] R. Bartkowiak and C. Woernle. Sufficient conditions for the mobility of overconstrained mechanisms. In M. Husty, editor, *Recent Advances in Robot Kinematics*, pages 305-319. Springer, Berlin, 2012.