



universitätsverlag
ilmenu

Bäsel, Uwe:

**Globale Eigenschaften der geschlossenen Relativbewegung
von zwei Ebenen**

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033-093-6

URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033-093-6>

Erschienen in:

10. Kolloquium Getriebetechnik : Technische Universität Ilmenau, 11. - 13.
September 2013. - Ilmenau : Univ.-Verl. Ilmenau, 2013. - S. 93-108.
(Berichte der Ilmenauer Mechanismentechnik ; 2)

ISSN: 2194-9476

ISBN: 978-3-86360-065-5 [Druckausgabe]

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033

URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033>

GLOBALE EIGENSCHAFTEN DER GESCHLOSSENEN RELATIVBEWEGUNG VON ZWEI EBENEN

Uwe Bäsel

HTWK Leipzig, Fachgebiet Maschinenelemente und Getriebetechnik,
baesel@me.htwk-leipzig.de

Abstract

In diesem Aufsatz betrachten wir die geschlossene Relativbewegung von zwei parallelen Ebenen Σ_0 und Σ_1 . Zwei in Σ_1 bzw. Σ_0 beliebige feste Punkte P und Q beschreiben in der jeweils anderen Ebene geschlossene Bahnkurven $\mathcal{C}_0(P)$ bzw. $\mathcal{C}_1(Q)$. Es wird gezeigt, dass die Extrema der Abstände zwischen P und $\mathcal{C}_1(Q)$ sowie Q und $\mathcal{C}_0(P)$ gleich sind.

Durch $\mathcal{C}_0(P)$ wird Σ_0 in eine unbeschränkte Menge $\mathcal{M}_0^0(P)$ und eine beschränkte Menge $\mathcal{M}_0^1(P)$ unterteilt; analog Σ_1 durch $\mathcal{C}_1(Q)$ in eine unbeschränkte Menge $\mathcal{M}_1^0(Q)$ und eine beschränkte Menge $\mathcal{M}_1^1(Q)$. Für fest vorgegebene Punkte $Q^1 \in \Sigma_0$ und $P^1 \in \Sigma_1$ wird gezeigt: Gilt $P^1 \in \mathcal{M}_1^i(Q^1)$ und $Q^1 \in \mathcal{M}_0^k(P^1)$, dann folgt $Q^1 \in \mathcal{M}_0^k(P)$ für alle Punkte $P \in \mathcal{M}_1^i(Q^1)$ sowie $P^1 \in \mathcal{M}_1^i(Q)$ für alle Punkte $Q \in \mathcal{M}_0^k(P^1)$. U. a. können damit leicht alle Punkte $P \in \Sigma_1$ bestimmt werden, die einen festen Punkt $Q \in \Sigma_0$ umschließende Bahnkurven $\mathcal{C}_0(P)$ erzeugen.

In this paper, we consider the closed relative motion of two parallel planes Σ_0 and Σ_1 . Let Q be a fixed point in Σ_0 , and P be a fixed point in Σ_1 . Let $\mathcal{C}_0(P)$ and $\mathcal{C}_1(Q)$ denote the closed paths of P in Σ_0 and Q in Σ_1 , respectively. We show that the extreme values of the distances between P and $\mathcal{C}_1(Q)$ are equal to those between Q and $\mathcal{C}_0(P)$.

$\mathcal{C}_0(P)$ dissects Σ_0 in an unbounded set $\mathcal{M}_0^0(P)$ and a bounded set $\mathcal{M}_0^1(P)$; analogously, $\mathcal{C}_1(Q)$ dissects Σ_1 in an unbounded set $\mathcal{M}_1^0(Q)$ and a bounded set $\mathcal{M}_1^1(Q)$. For fixed points $Q^1 \in \Sigma_0$ and $P^1 \in \Sigma_1$ we show: If $P^1 \in \mathcal{M}_1^i(Q^1)$ and $Q^1 \in \mathcal{M}_0^k(P^1)$, then $Q^1 \in \mathcal{M}_0^k(P)$ for all points $P \in \mathcal{M}_1^i(Q^1)$, and $P^1 \in \mathcal{M}_1^i(Q)$ for all points $Q \in \mathcal{M}_0^k(P^1)$. Using this

result, it is easy to find all points $P \in \Sigma_1$ with paths $\mathcal{C}_0(P)$ that enclose a fixed point $Q \in \Sigma_0$.

Keywords: closed plane motion, inverse motion, closed curve, four-bar linkage, coupler curve, elliptic motion, cardioid motion, limaçon of Pascal

1 Einleitung

Die Bewegung einer starren Ebene bezüglich einer dazu parallelen und ebenfalls starren Ebene (Bezugssystem) spielt eine grundlegende Rolle in der Kinematik und Getriebetechnik [9, §1-36], [1], [16], [15, Kap. 4.4], [10, Kap. 3]. Ausgehend von den kinematischen Ketten spielt es für die Relativbewegung der Ebenen keine Rolle, welche Ebene als Bezugssystem betrachtet wird. Freilich ist die Wahl des festen Getriebegliedes für die getriebetechnische Funktion von ausschlaggebender Bedeutung. Von einer geschlossenen Bewegung spricht man, wenn die Bahnkurven aller Ebenenpunkte im Bezugssystem geschlossene Kurven sind.

Üblicherweise werden in der ebenen Kinematik momentane Zustände – wie z. B. Lagen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Krümmungen von Bahnkurven – betrachtet, wobei zwischen den Zuständen der einzelnen Ebenenpunkte interessante Zusammenhänge auftreten. Seltener werden globale Eigenschaften – wie z. B. Flächeninhalte oder Krümmungsschwerpunkte der Bahnkurven – von ebenen geschlossenen Bewegungen untersucht [1] Abschnitt II, [11], [4].

In Abschnitt 2 werden zunächst einige Grundlagen bereitgestellt, in den Abschnitten 3 und 4 die in der Zusammenfassung genannten globalen Eigenschaften bewiesen und in den Abschnitten 5 und 6 die Ergebnisse an Hand der Koppelkurven eines Gelenkvierecks bzw. der Ellipsenbewegung veranschaulicht. Die Betrachtungen der Abschnitte 2, 3 und 4 gelten für beliebige geschlossene Relativbewegungen zweier Ebenen – unabhängig von einer möglichen getriebetechnischen Realisierung, u. a. auch für nicht-algebraische Bahnkurven. Mögliche Anwendungen der Ergebnisse bestehen

- im Auffinden von Ebenen-Punkten, die Kurven mit geforderten Eigenschaften erzeugen,
- in der Einschränkung von Suchbereichen bei getriebetechnischen Synthese- und Optimierungsaufgaben sowie
- der Planung kollisionsfreier Bewegungen.

2 Definitionen und Grundlagen

Wir stellen zunächst einige differentialgeometrische Grundlagen zu ebenen Kurven (siehe [2], [3]) zusammen. Eine *parametrisierte ebene Kurve der Klasse C^k* im \mathbb{R}^2 ist eine Abbildung

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi \mapsto c(\phi) = (x(\phi), y(\phi))$$

mit k -mal stetig differenzierbaren *Koordinatenfunktionen* x und y , wobei I ein Intervall in \mathbb{R} ist. Falls c nur stetig (aber nicht stetig differenzierbar) ist, ist c per Definition von der Klasse C^0 . Ist $I = [a, b]$ kompakt, so heißen $c(a)$ und $c(b)$ der *Anfangs-* bzw. *Endpunkt* von c . c heißt *geschlossen*, falls $c(b) = c(a)$. Eine geschlossene Kurve c , die zusätzlich $c^{(\nu)}(b) = c^{(\nu)}(a)$ für $1 \leq \nu \leq k$ erfüllt, wird *geschlossene C^k -Kurve* genannt, d. h. die periodische Fortsetzung von c ist eine C^k -Kurve. Zu jedem $\phi \in I$ mit $c'(\phi) = (x'(\phi), y'(\phi)) \neq (0, 0)$ gibt es eine Tangente an c im Punkt $c(\phi)$. Ein Punkt $\phi \in I$ mit $c'(\phi) = (0, 0)$ heißt *singulärer Punkt*. Eine derartige Singularität kann entweder durch eine unzureichende Parametrisierung verursacht werden oder es liegt eine *geometrische Singularität* (Spitze der Kurve) vor [7, S. 197]. Eine differenzierbare Kurve c heißt *regulär*, falls $c'(\phi) \neq (0, 0)$ für alle $\phi \in I$.

Wir betrachten nun die Relativbewegung von zwei Ebenen Σ_0 und Σ_1 , wobei Σ_0 als ruhende Ebene angenommen wird [9, S. 1/2], [10, S. 52/53]. Es sei P ein in der Ebene Σ_1 befestigter Punkt (siehe Abb. 1). $\Xi_P = (\xi_P, \eta_P)$ seien die Koordinaten von P in Σ_1 . Bei der Bewegung von Σ_1 bezüglich Σ_0 (nachfolgend mit Σ_1/Σ_0 bezeichnet) beschreibt P in Σ_0 eine Bahnkurve. Durch $X_P(\phi) = (x_P(\phi), y_P(\phi))$ ist eine Parametrisierung dieser Bahnkurve gegeben. Wir nennen Σ_1/Σ_0 eine *geschlossene Bewegung* im Intervall $I := [\phi_0, \phi_1]$, wenn $X_P(\phi_1) = X_P(\phi_0)$ für alle $P \in \Sigma_1$ und I ein kleinstes Intervall mit dieser Eigenschaft ist. Das halboffene Intervall $[\phi_0, \phi_1)$ wird *Periodenintervall* genannt. Ab jetzt setzen wir Σ_1/Σ_0 immer als geschlossen voraus.

Unter Verwendung der Gaußschen komplexen Zahlenebene (siehe [10, S. 52]) können wir auch $X_P(\phi) = x_P(\phi) + iy_P(\phi)$ schreiben. Dann gilt

$$X_P(\phi) = X_0(\phi) + \Xi_P e^{i\psi(\phi)}, \quad (2.1)$$

bzw. in Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} x_P(\phi) &= x_0(\phi) + \xi_P \cos \psi(\phi) - \eta_P \sin \psi(\phi), \\ y_P(\phi) &= y_0(\phi) + \eta_P \cos \psi(\phi) + \xi_P \sin \psi(\phi). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

X_P ist geschlossen, wenn x_P , y_P und ψ periodische Funktionen mit gemeinsamer Periode sind. X_P besitzt bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 eine geometrische Singularität genau dann, wenn es eine Lage von Σ_1 gibt, so dass P zum *Momentanpol* (siehe [9, S. 5/6], [10, S. 53]) wird.

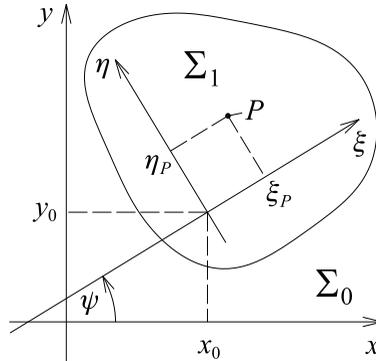


Abb. 1: Die Ebenen Σ_0 und Σ_1

Sei nun Q ein fester Punkt in Σ_0 mit Koordinaten $X_Q = (x_Q, y_Q)$. Dieser beschreibt bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 eine geschlossene Bahnkurve $\Xi_Q(\phi) = (\xi_Q(\phi), \eta_Q(\phi))$ in Σ_1 . Für diese gilt

$$X_Q = X_0(\phi) + \Xi_Q(\phi) e^{i\psi(\phi)},$$

woraus

$$\Xi_Q(\phi) = (X_Q - X_0(\phi)) e^{-i\psi(\phi)} = \Xi_0(\phi) + X_Q e^{-i\psi(\phi)} \quad (2.3)$$

mit $\Xi_0(\phi) := -X_0(\phi) e^{-i\psi(\phi)}$ als Parameterdarstellung der Bahnkurven der *Umkehrbewegung* (*inversen Bewegung*) Σ_0/Σ_1 folgt. Σ_1 ist jetzt als feste Bezugsebene und Σ_0 als bewegliche Ebene zu betrachten. Für die Koordinatenfunktionen erhalten wir hieraus

$$\left. \begin{aligned} \xi_Q(\phi) &= \xi_0(\phi) + x_Q \cos \psi(\phi) + y_Q \sin \psi(\phi), \\ \eta_Q(\phi) &= \eta_0(\phi) + y_Q \cos \psi(\phi) - x_Q \sin \psi(\phi). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \xi_0(\phi) &= -x_0(\phi) \cos \psi(\phi) - y_0(\phi) \sin \psi(\phi), \\ \eta_0(\phi) &= -y_0(\phi) \cos \psi(\phi) + x_0(\phi) \sin \psi(\phi). \end{aligned}$$

Setzt man noch $\tilde{\psi}(\phi) := -\psi(\phi)$, so erhält man

$$\tilde{\Xi}_Q(\phi) = \tilde{\Xi}_0(\phi) + X_Q e^{i\tilde{\psi}(\phi)} \quad \text{mit} \quad \tilde{\Xi}_0(\phi) = -X_0(\phi) e^{i\tilde{\psi}(\phi)}$$

als Parameterdarstellung der Bahnkurven für Σ_0/Σ_1 , so dass jetzt auch die formale Gleichheit mit Gleichung (2.1) für Σ_1/Σ_0 hergestellt ist [9, S. 2].

Für die nachfolgenden Betrachtungen ist von grundlegender Bedeutung: *Eine ebene Bewegung ist bestimmt, wenn erstens die Kurve bestimmt ist, die ein Punkt P der Σ_1 -Ebene in Σ_0 beschreibt, und zweitens eine Kurve der Σ_1 -Ebene durch einen gegebenen festen Punkt Q in Σ_0 hindurchgeht.* [9, S. 4]

Wir bestimmen aber nicht die aus diesen beiden Kurven resultierende Bewegung Σ_1/Σ_0 , sondern untersuchen – ausgehend von der vorgegebenen geschlossenen Bewegung Σ_1/Σ_0 – Beziehungen zwischen den Kurven und den beschreibenden Punkten.

3 Extremale Abstände

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass X_P und Ξ_Q parametrisierte Kurven der Klasse C^k mit hinreichend großem k sind. Abgesehen von eventuellen geometrischen Singularitäten seien X_P und Ξ_Q regulär.

Satz 1. *Sei Q ein fester Punkt in Σ_0 mit Koordinaten $X_Q = (x_Q, y_Q)$ und P ein fester Punkt in Σ_1 mit Koordinaten $\Xi_P = (\xi_P, \eta_P)$. Während einer geschlossenen ebenen Bewegung Σ_1/Σ_0 beschreibt P eine geschlossene Bahnkurve $\mathcal{C}_0(P)$ in Σ_0 und Q eine geschlossene Bahnkurve $\mathcal{C}_1(Q)$ in Σ_1 . Für die Extrema der Abstände $\text{dist}(\mathcal{C}_0(P), X_Q)$ und $\text{dist}(\mathcal{C}_1(Q), \Xi_P)$ zwischen $\mathcal{C}_0(P)$ und X_Q bzw. $\mathcal{C}_1(Q)$ und Ξ_P gilt dann*

$$\min \text{dist}(\mathcal{C}_0(P), X_Q) = \min \text{dist}(\mathcal{C}_1(Q), \Xi_P) \quad (3.1)$$

und

$$\max \text{dist}(\mathcal{C}_0(P), X_Q) = \max \text{dist}(\mathcal{C}_1(Q), \Xi_P). \quad (3.2)$$

Beweis. Wir betrachten eine Parametrisierung

$$X_P : [\phi_0, \phi_1) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

von $\mathcal{C}_0(P)$ mit Periodenintervall $[\phi_0, \phi_1)$ und definieren die Funktion f durch

$$f(\phi) := \text{dist}^2(X_P(\phi), X_Q) = (x_P(\phi) - x_Q)^2 + (y_P(\phi) - y_Q)^2$$

mit $x_P(\phi)$ und $y_P(\phi)$ nach (2.2). f hat ein Extremum genau dann, wenn $\text{dist}(X_P(\cdot), X_Q)$ ein Extremum hat.

Wir benutzen f anstatt $\text{dist}(X_P(\cdot), X_Q)$, da f auch in Punkten ϕ mit $f(\phi) = 0$ stetig differenzierbar ist, \sqrt{f} hingegen nicht. Da X_P voraussetzungsgemäß von der Klasse C^k mit hinreichend großem k ist, ist f also ebenfalls k -mal stetig differenzierbar. Die Existenz des Maximums und des Minimums ist nach dem Satz von Weierstraß (siehe z. B. [5, S. 158]) gesichert: Da die Funktion $f(\phi)$ in dem abgeschlossenen Intervall $[\phi_0, \phi_1]$ stetig ist, nimmt sie dort die oberere und untere Grenze ihrer Funktionswerte als Funktionswert an.

Es ist

$$\text{dist}(X_P(\phi), X_Q) \equiv \text{dist}(\Xi_Q(\phi), \Xi_P), \quad (3.3)$$

was unmittelbar klar ist, sich aber auch durch Nachrechnung unter Beachtung von (2.4) leicht verifizieren lässt. Somit gilt

$$\begin{aligned} \min_{\phi \in [\phi_0, \phi_1]} \text{dist}(X_P(\phi), X_Q) &= \min_{\phi \in [\phi_0, \phi_1]} \text{dist}(\Xi_Q(\phi), \Xi_P), \\ \max_{\phi \in [\phi_0, \phi_1]} \text{dist}(X_P(\phi), X_Q) &= \max_{\phi \in [\phi_0, \phi_1]} \text{dist}(\Xi_Q(\phi), \Xi_P). \end{aligned}$$

Es verbleibt zu zeigen, dass die Extrema unabhängig von der Parametrisierung mit ϕ sind. Sei t ein neuer Parameter (etwa die Zeit) mit einem kleinsten Periodenintervall $[t_0, t_1]$ und

$$\phi : [t_0, t_1] \rightarrow [\phi_0, \phi_1]$$

eine zulässige Parametertransformation, d. h. eine bijektive Abbildung mit $\phi'(t) \neq 0$ für $t \in [t_0, t_1]$. Dann ist durch $Y_P := X_P \circ \phi$ eine mit t parametrisierte äquivalente Kurve (mit gleicher Spur) gegeben, für die

$$g(t) := \text{dist}^2(Y_P(t), X_Q) = \text{dist}^2((X_P \circ \phi)(t), X_Q) = (f \circ \phi)(t)$$

gilt. Die Formel von Faà di Bruno (siehe [13, S. 807]) für die Ableitung komponierter Funktionen (verallgemeinerte Kettenregel) liefert

$$\begin{aligned} g^{(n)}(t) &= (f \circ \phi)^{(n)}(t) = (f^{(n)} \circ \phi(t)) \phi'^n(t) + \text{Terme mit} \\ & f^{(k)} \circ \phi(t), \quad k \in \{1, \dots, n-1\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ist $g(t)$ in einer Umgebung von τ n -mal stetig differenzierbar mit gerader Zahl n , so besitzt $g(t)$ dort ein Extremum, wenn $g'(\tau) = g''(\tau) = \dots = g^{(n-1)}(\tau) = 0$ und $g^{(n)}(\tau) \neq 0$; für $g^{(n)}(\tau) < 0$ liegt ein Maximum, für

$g^{(n)}(\tau) > 0$ ein Minimum vor [6, S. 433]. Wegen (3.4) und $\phi'(\tau) \neq 0$ ist $g^{(k)}(\tau) = 0$ genau dann, wenn $f^{(k)} \circ \phi(\tau) = 0$. Weiterhin ist $g^{(n)}(\tau) \leq 0$ genau dann, wenn $f^{(n)} \circ \phi(\tau) \leq 0$. Folglich sind die Extrema unabhängig von der Parametrisierung.

Da alle äquivalenten parametrisierten Kurven $Y_P = X_P \circ \phi$ dieselbe Spur (= Kurve) $\mathcal{C}_0(P)$ besitzen, können wir also

$$\min \text{dist}(\mathcal{C}_0(P), X_Q) = \min_{\phi \in [\phi_0, \phi_1]} \text{dist}(X_P(\phi), X_Q)$$

schreiben und wegen (3.3) auch

$$\min \text{dist}(\mathcal{C}_1(Q), \Xi_P) = \min_{\phi \in [\phi_0, \phi_1]} \text{dist}(\Xi_Q(\phi), \Xi_P).$$

Ebenfalls mit (3.3) folgt nun Gleichung (3.1). Analoges gilt für die Maxima, womit der Satz bewiesen ist. \square

Bemerkung 1. Betrachtet man die Minima der Abstände zwischen $\mathcal{C}_0(P)$ und Q in Σ_0 sowie zwischen $\mathcal{C}_1(Q)$ und P in Σ_1 , so folgt $P \in \mathcal{C}_1(Q) \iff Q \in \mathcal{C}_0(P)$. Das ist auch unmittelbar klar: Zu festem $Q \in \Sigma_0$ wählen wir $P \in \Sigma_1$ auf $\mathcal{C}_1(Q)$. $\mathcal{C}_1(Q)$ gleitet durch Q . Also gibt es eine Lage von Σ_1 , bei der $P = Q$ ist; demzufolge $Q \in \mathcal{C}_0(P)$ (siehe Abb. 5).

Bemerkung 2. Es gilt

$$f'(\phi) = 2 [(x_P(\phi) - x_Q)x'_P(\phi) + (y_P(\phi) - y_Q)y'_P(\phi)].$$

Abgesehen von dem Faktor 2 kann $f'(\phi)$ als Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{x}'$ der Vektoren

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_P(\phi) - x_Q \\ y_P(\phi) - y_Q \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}' := \begin{pmatrix} x'_P(\phi) \\ y'_P(\phi) \end{pmatrix}$$

interpretiert werden und \vec{x}' als Geschwindigkeitsvektor. $f'(\phi) = 0 = \vec{x} \cdot \vec{x}'$ ist das notwendige Kriterium für die Existenz eines Extremums an der Stelle ϕ . Es liegt bereits ein Minimum vor, wenn $\vec{x} = 0$. P ist singulärer Punkt von X_P , wenn $\vec{x}' = 0$. Für $\vec{x}, \vec{x}' \neq 0$ besagt $\vec{x} \cdot \vec{x}' = 0$, dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, was unmittelbar klar ist: Der Abstandsvektor \vec{x} steht senkrecht auf der Kurve, falls ein Extremum vorliegt (siehe hierzu auch [12, S. 137/138]).

Bemerkung 3. Auch in den Fällen, dass ein Extremum gerade dann auftritt, wenn P oder Q einen geometrisch singulären Punkt (Momentanpol) von X_P bzw. Ξ_Q durchläuft, lassen sich alle erforderlichen Ableitungen

von f bilden. Falls P und Q gleichzeitig einen Momentanpol durchlaufen, fallen beide Punkte zusammen, da sich Rastpolbahn und Gangpolbahn im (gemeinsamen) Momentanpol berühren.

4 Unterteilung der Ebenen

Wir beginnen mit zwei bekannten Sätzen, die wir nachfolgend benötigen.

Satz 2. *Jede geschlossene Kurve unterteilt die Ebene in nicht zusammenhängende Gebiete, von denen exakt ein Gebiet unbeschränkt ist.*

Beweis. Siehe [8, S. 48]. □

Satz 3. *Die Gebiete von Satz 2 lassen sich mit zwei Farben so einfärben, dass sich zwei Gebiete gleicher Farbe nur in den Doppelpunkten berühren.*

Beweis. Siehe [14, S. 272]. □

Wir betrachten die Zerlegung der Ebene Σ_0 durch eine Kurve $\mathcal{C}_0(P)$ entsprechend Satz 2 mit anschließender Einfärbung entsprechend Satz 3. Die Menge, die durch Vereinigung aller nicht zusammenhängenden Gebiete, die die gleiche Farbe wie das unbeschränkte Gebiet aufweisen, entsteht, bezeichnen wir nachfolgend mit $\mathcal{M}_0^0(P)$, die Menge, die durch Vereinigung aller anders gefärbten Mengen entsteht, mit $\mathcal{M}_0^1(P)$. Die Mengen $\mathcal{C}_0(P)$, $\mathcal{M}_0^0(P)$ und $\mathcal{M}_0^1(P)$ sind also paarweise disjunkt und es gilt $\Sigma_1 = \mathcal{M}_0^0(P) \cup \mathcal{M}_0^1(P) \cup \mathcal{C}_0(P)$. Analog erhalten wir durch eine Kurve $\mathcal{C}_1(Q)$ in der Ebene Σ_1 zwei Mengen $\mathcal{M}_1^0(Q)$ und $\mathcal{M}_1^1(Q)$, wobei $\mathcal{M}_1^0(Q)$ das unbeschränkte Gebiet enthalten soll. $\mathcal{M}_0^0(P)$, $\mathcal{M}_0^1(P)$, $\mathcal{M}_1^0(Q)$ und $\mathcal{M}_1^1(Q)$ sind offene Mengen.

Bewegt man einen Punkt $P \in \Sigma_1$ entlang einer stetigen Kurve $\mathcal{K}_1 \subset \Sigma_1$ von der Lage P^1 in die Lage P^2 , so erhält man die Kurve $\mathcal{C}_0(P^2)$ durch stetige Verformung aus der Kurve $\mathcal{C}_0(P^1)$ und die Menge $\mathcal{M}_0^k(P^2)$, $k \in \{0, 1\}$, durch stetige Verformung aus der Menge $\mathcal{M}_0^k(P^1)$.

Satz 4. *Es sei Q^1 ein fester Punkt in Σ_0 und P^1 ein fester Punkt in Σ_1 mit $P^1 \in \mathcal{M}_1^i(Q^1)$ und $Q^1 \in \mathcal{M}_0^k(P^1)$ für $i, k \in \{0, 1\}$. Dann folgt*

- a) $Q^1 \in \mathcal{M}_0^k(P)$ für alle $P \in \mathcal{M}_1^i(Q^1)$ und
- b) $P^1 \in \mathcal{M}_1^i(Q)$ für alle $Q \in \mathcal{M}_0^k(P^1)$.

(Abb. 2 veranschaulicht die Aussage a.)

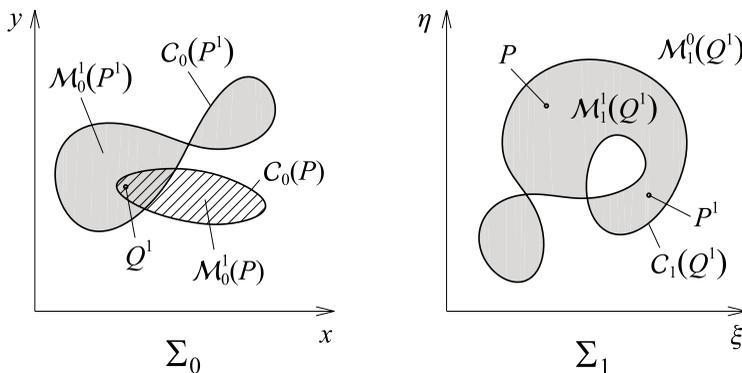


Abb. 2: Die Ebenen Σ_0 und Σ_1

Beweis. Die Aussage a des Satzes ist falsch, wenn es (mindestens) einen Punkt $P^2 \in \mathcal{M}_1^i(Q^1)$ mit $Q^1 \in \Sigma_0 \setminus \mathcal{M}_0^k(P^2)$ gibt. Wir nehmen an, dass es einen solchen Punkt P^2 gibt.

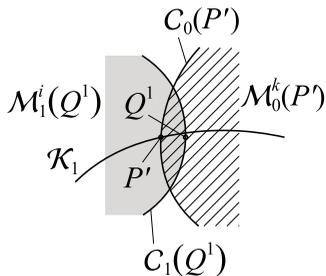


Abb. 3: $P' \in \mathcal{M}_1^i(Q^1)$

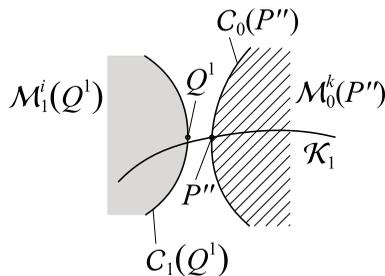


Abb. 4: $P'' \notin \mathcal{M}_1^i(Q^1)$

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst den Fall, dass P^2 in der gleichen zusammenhängenden Teilmenge von $\mathcal{M}_1^i(Q^1)$ wie P^1 liegt. Dann können wir P^1 und P^2 durch eine doppeltpunktfreie stetige Kurve \mathcal{K}_1 , die ganz in $\mathcal{M}_1^i(Q^1)$ liegt, miteinander verbinden. Durch die Bewegung eines Punktes $P \in \Sigma_1$ von P^1 nach P^2 entlang \mathcal{K}_1 wird die Kurve $C_0(P^1)$ stetig in die Kurve $C_0(P^2)$ verformt (und dabei $\mathcal{M}_0^k(P^1)$ stetig in $\mathcal{M}_0^k(P^2)$).

Auf \mathcal{K}_1 existiert deswegen ein Punkt P^* mit $Q^1 \in C_0(P^*)$ und der Eigenschaft, dass es in einer hinreichend kleinen Umgebung \mathcal{U}^* von P^* einen auf \mathcal{K}_1 zwischen P^1 und P^* liegenden Punkt P' mit $Q^1 \in \mathcal{M}_0^k(P')$ gibt. Wir bringen die Ebene Σ_1 durch die Bewegung Σ_1/Σ_0 in die Lage mit $\text{dist}(P', Q^1) = \min \text{dist}(C_0(P'), Q^1)$ und erhalten die Situation von

Abb. 3. Außerdem gibt es auf \mathcal{K}_1 einen Punkt P^{**} , der im allg. als mit P^* koinzidierend angenommen werden kann, mit $Q^1 \in \mathcal{C}_0(P^{**})$ und der Eigenschaft, dass es in einer hinreichend kleinen Umgebung \mathcal{U}^{**} von P^{**} einen Punkt P'' auf \mathcal{K}_1 zwischen P^{**} und P^2 mit $Q^1 \in \Sigma_0 \setminus (\mathcal{M}_0^k(P'') \cup \mathcal{C}_0(P''))$ gibt. Bringt man die Ebene Σ_1 durch die Bewegung Σ_1/Σ_0 in die Lage mit $\text{dist}(P'', Q^1) = \min \text{dist}(\mathcal{C}_0(P''), Q^1)$, so ergibt sich die Situation von Abb. 4. Hier ist aber $P'' \notin \mathcal{M}_1^i(Q^1)$. Damit liegt aber \mathcal{K}_1 nicht vollständig in $\mathcal{M}_1^i(Q^1)$, ein Widerspruch. Also ist die Aussage a des Satzes 4 für eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathcal{M}_1^i(Q^1)$ bewiesen.

Wir betrachten nun den Fall, dass P^1 und P^2 in $\mathcal{M}_1^i(Q^1)$ liegen, aber nicht in einer zusammenhängenden Teilmenge von $\mathcal{M}_1^i(Q^1)$. Wir denken uns wiederum P^1 und P^2 durch eine doppeltpunktfreie stetige Kurve \mathcal{K}_1 miteinander verbunden. Nach Satz 3 müssen sich \mathcal{K}_1 und $\mathcal{C}_1(Q^1)$ dann in einer geraden Anzahl von Punkten schneiden. Die Schnittpunkte seien der Reihe nach durchnummeriert, beginnend mit 1. Falls sich \mathcal{K}_1 und $\mathcal{C}_1(Q^1)$ in einem Doppelpunkt schneiden, ist dieser als zwei aufeinander folgende Schnittpunkte zu zählen. Für einen Punkt $P \in \mathcal{K}_1$, der zwischen einem ungeradzahligen und einem geradzahligen Schnittpunkt liegt, gilt $P \notin \mathcal{M}_1^i(Q^1)$ und demzufolge $Q^1 \notin \mathcal{M}_0^k(P)$ (siehe Abb. 4 mit $P'' = P$). Für einen Punkt $P \in \mathcal{K}_1$ nach dem letzten Schnittpunkt ist dann $P \in \mathcal{M}_1^i(Q^1)$ und $Q^1 \in \mathcal{M}_0^k(P)$, was also auch für $P = P^2$ zutrifft.

Durch Vertauschung der Ebenen erhält man die Aussage b, womit alles gezeigt ist. \square

5 Gelenkviereck

Als interessantes Beispiel für Satz 4 betrachten wir die Bewegung der Koppelenebene des ebenen Gelenkvierecks A_0ABB_0 in Abb. 5. A_0 und B_0 sind die Drehgelenke in der festen Ebene Σ_0 . Die bewegte Ebene Σ_1 wird durch die orientierte Strecke \overrightarrow{AB} , die die beiden Drehgelenke A und B miteinander verbindet, repräsentiert. Die Bewegung Σ_1/Σ_0 ist geschlossen für eine volle Umdrehung der Kurbel $\overline{A_0A}$ um A_0 .

Q ist ein fester Punkt in Σ_0 und die gestrichelte Linie die Koppelkurve $\mathcal{C}_1(Q)$ von Q in Σ_1 . $\mathcal{C}_1(Q)$ ist fest mit \overrightarrow{AB} verbunden und nimmt an der Bewegung der Koppelenebene teil. In Abb. 5 wurde der in Σ_1 feste Punkt P auf der Kurve $\mathcal{C}_1(Q)$ gewählt. Deswegen geht die Koppelkurve $\mathcal{C}_0(P)$ des in Σ_1 festen Punktes P in Σ_0 durch Q (siehe Bemerkung 1).

Abb. 6 zeigt das gleiche Gelenkviereck, aber der Punkt P wurde nun innerhalb der Koppelkurve $\mathcal{C}_1(Q)$, also in $\mathcal{M}_1^1(Q)$ gewählt. Ersichtlich er-

zeugt P nun eine andere Kurve als in Abb. 5. Dargestellt ist die Lage, in der der Abstand zwischen P und Q minimal ist. Q befindet sich jetzt innerhalb der Koppelkurve $\mathcal{C}_0(P)$, also $Q \in \mathcal{M}_0^1(P)$. Nach Satz 4 gilt nun $Q \in \mathcal{M}_0^1(P)$ für alle $P \in \mathcal{M}_1^1(Q)$.

6 Ellipsenbewegung

Rollt ein Kreis (Ebene Σ_1) auf der Innenseite eines doppelt so großen, festen Kreises (Ebene Σ_0) ab, so beschreiben alle Punkte von Σ_1 Ellipsen, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt des festen Kreises liegt. Σ_1/Σ_0 wird als *Ellipsenbewegung* bezeichnet [9, S. 2, 3, 9], [1, S. 14-15], [16, S. 45-51], [15, S. 136]. Dabei können die Ellipsen zu einem Kreis oder zu Geraden entarten: Der Mittelpunkt des Rollkreises beschreibt einen Kreis; jeder Punkt auf dem Rollkreis beschreibt eine Gerade. Eine Ellipsenbewegung lässt sich auch dadurch erzeugen, dass man zwei Punkte eines starren ebenen Systems auf zwei nicht parallelen Geraden führt. Dieses Getriebe wird als *Kreuzschieber* bezeichnet. Beschreibt man die Lage eines in Σ_1 festen Punktes P im ξ, η -System in Polarkoordinaten mit Radius ρ und Winkel α , so ist eine Parameter-Gleichung der Ellipsen $\mathcal{C}_0(P)$ in Σ_0 durch

$$X_P(\phi) = X_0(\phi) + \Xi_P e^{-i\phi} \quad \text{mit} \quad X_0(\phi) = r e^{i\phi} \quad \text{und} \quad \Xi_P = \rho e^{i\alpha}$$

gegeben, wobei r der Radius des Rollkreises und ϕ der (Antriebs-) Winkel zwischen der x -Achse und der Verbindungsstrecke zwischen den Koordinatenurprüngen ist.

Die Umkehrbewegung Σ_0/Σ_1 der Ellipsenbewegung ist die *Konchoidenbewegung*. Hier rollt also ein Kreis (Ebene Σ_0) mit seiner Innenseite auf einem Kreis (Ebene Σ_1) mit halbem Durchmesser ab [9, S. 3, 4, 9], [1, S. 15-17], [16, S. 51-62]. Die Bahnkurven, die die Punkte von Σ_0 in Σ_1 beschreiben, werden *Pascalsche Schnecken* oder *Kreiskonchoiden* genannt. Ein in Σ_0 fester Punkt Q^1 beschreibt dabei in Σ_1 die Pascal-Schnecke $\mathcal{C}_1(Q^1)$. Aus

$$X_Q = X_0(\phi) + \Xi_Q(\phi) e^{-i\phi}$$

erhält man

$$\Xi_Q(\phi) = (X_Q - X_0(\phi)) e^{i\phi} = -r e^{2i\phi} + X_Q e^{i\phi}$$

als Parameter-Darstellung von $\mathcal{C}_1(Q^1)$.

Die feste Ebene Σ_0 mit dem festen Kreis (Radius = $2r = 2$), dem in Ausgangsstellung ($\phi = 0$) befindlichen Rollkreis ($r = 1$) und einem in Σ_0 fest vorgegebenen Punkt $Q^1 = (0, 8; 0)$ sind in Abb. 7 dargestellt.

Der Punkt Q^1 beschreibt bei der Umkehrbewegung Σ_0/Σ_1 in Σ_1 die Pascalsche Schnecke $\mathcal{C}_1(Q^1)$ (siehe Abb. 8) mit Menge $\mathcal{M}_1^1(Q^1)$ (schattiert). Genau die Punkte P , die in $\mathcal{M}_1^0(Q^1) = \Sigma_1 \setminus (\mathcal{M}_1^1(Q^1) \cup \mathcal{C}_1(Q^1))$ liegen, erzeugen Q^1 enthaltende Ellipsen. Als Beispiele hierfür sind die von P^1 (mit Polarkordinaten $\rho_1 = 0,4$, $\alpha_1 = -\pi/4$) und P^2 (mit $\rho_2 = 1,3$, $\alpha_2 = \pi/10$) erzeugten Ellipsen $\mathcal{C}_0(P^1)$ bzw. $\mathcal{C}_0(P^2)$ mit den schattierten Mengen $\mathcal{M}_0^1(P^1)$ und $\mathcal{M}_0^1(P^2)$ in Abb. 7 dargestellt. Wird P auf $\mathcal{C}_1(Q^1)$ gewählt, so liegt Q^1 auf $\mathcal{C}_0(P)$.

Außerdem sind in den Abbildungen 7 und 8 die minimalen und maximalen Abstände entsprechend Satz 1 markiert.

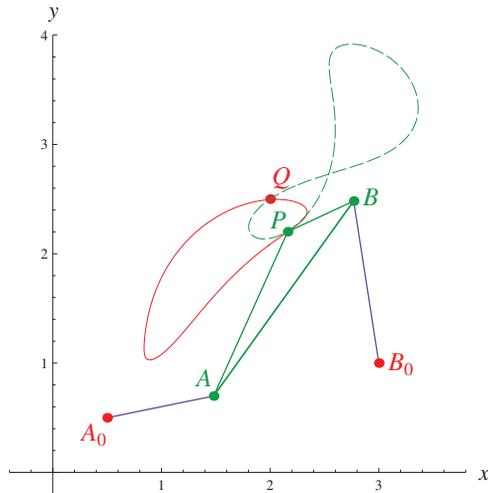


Abb. 5: $P \in C_1(Q)$ (gestrichelte Linie) und $Q \in C_0(P)$ (durchgehende Linie)

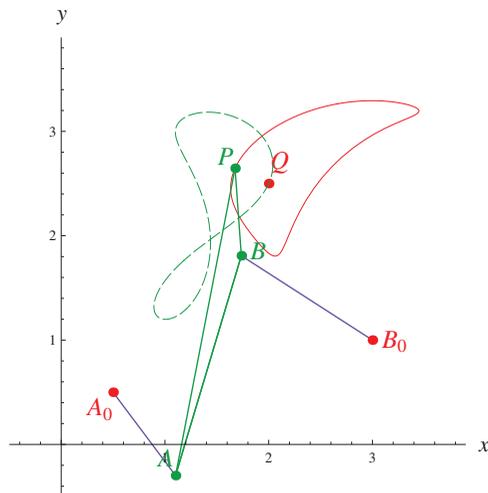


Abb. 6: $P \in M_1^1(Q)$ und $Q \in M_0^1(P)$

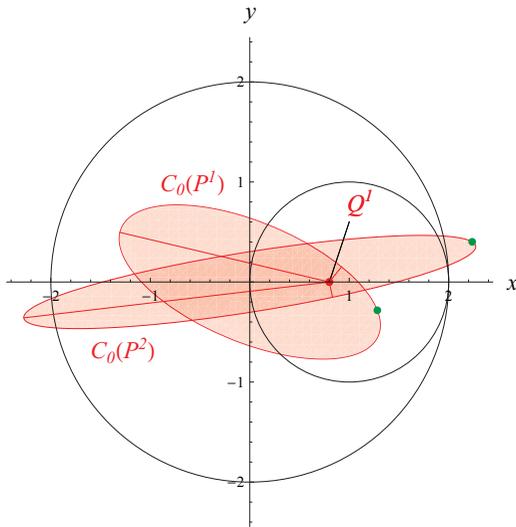


Abb. 7: Ellipsen-Bewegung

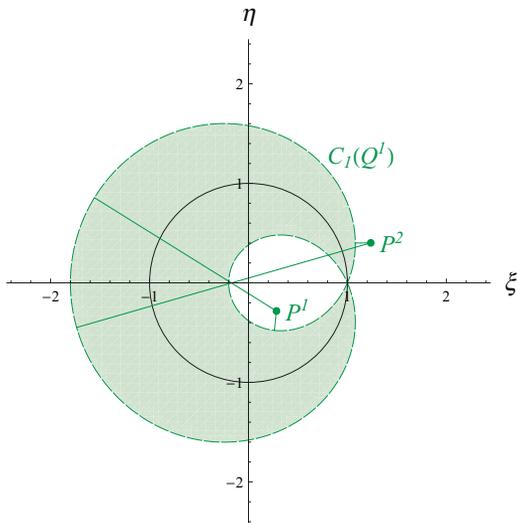


Abb. 8: Konchoiden-Bewegung (Pascalsche Schnecke)

Literatur

- [1] W. Blaschke, H. R. Müller: *Ebene Kinematik*, R. Oldenbourg Verlag, München, 1956.
- [2] J. Brüning, K. W. Wiegmann, A. Duma, N. Langenberg: *Differentialgeometrie*, FernUniversität Hagen, Hagen, 1990-93, 1995.
- [3] M. P. do Carmo: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, 2. Aufl., Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.
- [4] H. Dathe, R. Gezzi: Characteristic directions of closed motions, *Z. Angew. Math. Mech.* **92**, No. 9 (2012), 731-748.
- [5] G. M. Fichtenholz: *Differential- und Integralrechnung I*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.
- [6] W. Gellert, H. Küstner, M. Hellwich, H. Kästner (Hrsg.): *Kleine Enzyklopädie Mathematik*, 13. Aufl., VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, 1986.
- [7] M. Husty, A. Karger, H. Sachs, W. Steinhilper: *Kinematik und Robotik*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1997.
- [8] R. Klein: *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1989.
- [9] M. Krause, A. Carl: *Analysis der ebenen Bewegung*, Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig, 1920.
- [10] K. Luck, K.-H. Modler: *Getriebetechnik, Analyse – Synthese – Optimierung*, Akademie-Verlag, Berlin, 1990.
- [11] H. R. Müller: Der Flächeninhalt einer Koppelkurve, *Forsch. Ing.-Wes.* **46**, Nr. 5 (1980), 161-163.
- [12] I. Niven: *Maxima and Minima Without Calculus*, The Mathematical Association of America, Washington D. C., 1981.
- [13] S. Roman: The Formula of Faà di Bruno, *American Mathematical Monthly* **87**, No. 10 (1980), 805-809.
- [14] P. G. Tait: Some elementary properties of closed plane curves, *Messenger of Mathematics*, New Series, No. 69 (1877), 270-272.

- [15] J. Volmer (Hrsg.): *Getriebetechnik – Lehrbuch*, 5. Aufl., VEB Verlag Technik, Berlin, 1987.
- [16] W. Wunderlich: *Ebene Kinematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 1970.