



universitätsverlag
ilmenu

Gössner, Stefan:

Ein Riemen – zwei Freiheitsgrade

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033-075-4

URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033-075-4>

Erschienen in:

10. Kolloquium Getriebetechnik : Technische Universität Ilmenau, 11. - 13. September 2013. - Ilmenau : Univ.-Verl. Ilmenau, 2013. - S. 75-92.
(Berichte der Ilmenauer Mechanismentechnik ; 2)

ISSN: 2194-9476

ISBN: 978-3-86360-065-5 [Druckausgabe]

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033

URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013100033>

EIN RIEMEN – ZWEI FREIHEITSGRADE

Stefan Gössner, Fachhochschule Dortmund, FB Maschinenbau

Abstract

Dieser Beitrag beleuchtet ein gesamtheitliches Vorgehen zur Struktursynthese und Analyse einfacher Riemengetriebe mit dem Freiheitsgrad zwei. Hierbei stehen Führungsgetriebe im Vordergrund. Es werden sowohl ebene als auch räumliche Riemendifferenziale untersucht und die Ergebnisse der Arbeiten an einem neuartigen, räumlichen Riemenumlaufgetriebe präsentiert.

This paper illuminates a holistic approach to structural synthesis and analysis of belt drives using two degrees of freedom. It focuses on guiding mechanisms and examines both two dimensional and spatial belt differentials. The results of work on a new type of spatial epicyclic gears based on a timing belt is presented.

1 Einführung

Riemengetriebe spielten in der früheren Antriebstechnik bekanntlich eine erhebliche Rolle. Auch heute gilt der Riemen wieder – insbesondere der schlupffrei übertragende Zahnriemen – als modernes Konstruktionselement mit guten Eigenschaften hinsichtlich Leichtbau, Geräuscharmut, Schmiermittelfreiheit und Kosten. Aber auch Seilelemente werden zunehmend in Verbindung mit ebenen oder räumlichen Mechanismen und in modernen, parallelkinematischen Strukturen verwendet [1].

In jüngerer Vergangenheit wurden verschiedentlich Riemengetriebe zur Realisierung von Führungsaufgaben in der Geräte-, Förder- und Handhabungstechnik vorgestellt [2]. Solche Mechanismen sind meist gleichmäßig, gelegentlich jedoch auch zielgerichtet ungleichmäßig übersetzend ausgelegt [3]. Zur kinematischen und dynamischen Analyse ebener Getriebe mit Seilelementen steht ein leistungsstarkes, spezifisches Simulationswerkzeug zur Verfügung [4][5].

Bei einer Beschränkung auf Seilmechanismen und Riemengetriebe mit dem Freiheitsgrad $F=2$ kann in der Ebene eine Punktführung und im Raum eine kombinierte Drehung bezüglich zweier orthogonaler Achsen realisiert werden. Solche Bewegungsfälle stehen im Vordergrund der folgenden Betrachtung.

2 Grundlagen

Zu Beginn dieses Beitrags soll die Betrachtung von Riemengetrieben unter Berücksichtigung einer Reihe pragmatischer Idealisierungen erfolgen. Zunächst sei die Art des Riemens unerheblich. Flach-, Rund-, Keil- oder Zahnriemen sind vielmehr als *Seil* im Sinne der technischen Mechanik aufzufassen. Ein solches Seil ist biegeschlaff und dehnstarr. Es kann lediglich Kräfte entlang seiner Mittelachse aufnehmen. Seine Querschnittsabmessungen sind im Vergleich zur Länge der Seilabschnitte vernachlässigbar gering. Weiterhin finden hier ausschließlich zylindrische Seilscheiben, -rollen und -räder Verwendung. Darüber hinaus ist die kinematische Bindung der Seil/Rolle Paarung hinsichtlich ihrer Relativbewegung jederzeit schlupffrei.

Betrachten wir nun einen Mechanismus mit Seilen und Rollen, dann lassen sich die freien Seilabschnitte jeweils als Gelenk auffassen (Bild 1). Hierbei wollen wir zudem annehmen, dass diese freien Seilabschnitte jederzeit in geradlinig gestrecktem – also gespanntem – Zustand bleiben, ungeachtet der Tatsache, dass ein Seil nur Zugkräfte aufnehmen kann.

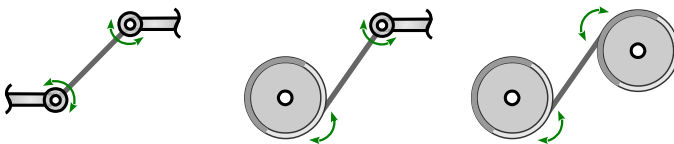


Bild 1: Ebene Seilgelenke und ihre relativen Freiheitsgrade

Der relative Gelenkfreiheitsgrad eines solchen ebenen Seilgelenks beträgt *zwei*. Es wurde also von den drei Möglichen genau ein Freiheitsgrad geraubt – derjenige in Seilrichtung, in die ja auch die (Gelenk)Reaktionskraft wirkt. Dies gilt entsprechend auch für räumliche Seilgelenke, bei denen von 6 möglichen relativen Freiheitsgraden ebenfalls genau einer weggenommen wird. Damit gelingt es, den Gesamtfreiheitsgrad solcher Mechanismen nach *Grübler* zu bestimmen [6].

Für ebene und sphärische Mechanismen gilt

$$F = 3(n-1) - g_1 - 2g_2 \quad (1)$$

Dabei sind n Glieder einschließlich des Gestells, g_1 einwertige Gelenke, zu denen auch das Seilgelenk zählt und g_2 zweiwertige Gelenke zu berücksichtigen.

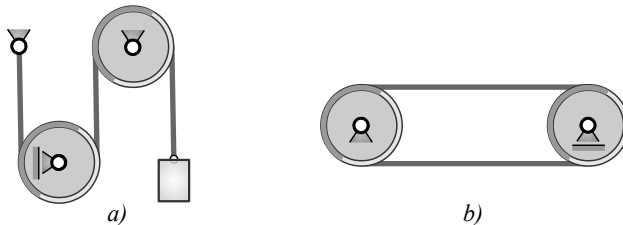


Bild 2 : Beispiele ebener Seilmechanismen

Eine Anwendung dieser Gleichung auf die Mechanismen in *Bild 2* liefert die Freiheitsgrade $F=3$ (a) und $F=1$ (b).

Für räumliche Mechanismen verwenden wir zur Bestimmung des Freiheitsgrades die äquivalente Beziehung

$$F = 6(n-1) - g_1 - 2g_2 - 3g_3 - 4g_4 - 5g_5 \quad (2)$$

Hinsichtlich der gesamten Seillänge gilt ein *Erhaltungssatz*, wenn dem System während der Bewegung über Seilspeicher keine Seillänge zu- oder abgeführt wird¹ [7]. Dabei müssen unter den gegebenen Voraussetzungen lediglich Kreisbogen- und Geradenabschnitte berücksichtigt werden.

Mit den jeweiligen Umschlingungswinkeln θ_i können wir formulieren:

$$l_{ges} = \sum r_i \theta_i + \sum l_i = const \quad (3)$$

Die Ableitung dieser Gleichung liefert die Änderung der Seilabschnittslängen über der Zeit.

$$\sum r_i \dot{\theta}_i + \sum \dot{l}_i = 0 \quad (4)$$

¹ Ähnlich dem Energieerhaltungssatz der Mechanik.

Aus dieser Beziehung kann häufig recht einfach die Übertragungsgleichung 1. Ordnung des zugehörigen Mechanismus gewonnen werden, insbesondere dann, wenn die einzelnen Umschlingungswinkel θ_i konstant sind.

3 Ebene Riemendifferentialgetriebe

Ab hier wollen wir ausschließlich Riemengetriebe mit dem Freiheitsgrad $F=2$ betrachten. Wir tun dies beispielhaft und fügen ausgehend von dem einfachen Zweiwellengetriebe gemäß *Bild 2b* ein weiteres Rad gleichen Durchmessers hinzu (*Bild 3*). Wenn dieses zusätzliche Riemenrad verschiebbar im Gestell gelagert ist, liefert die Freiheitsgradbetrachtung bereits $F=2$.

Neben dem Drehantrieb an Rad 1 (Winkel φ) kann somit als weitere unabhängige Antriebsgröße etwa die horizontale Verschiebung x des Rades 2 vorgegeben werden. Als Ausgangsgrößen erhalten wir den Drehwinkel ψ sowie die vertikale Verschiebung y des Rades 3.

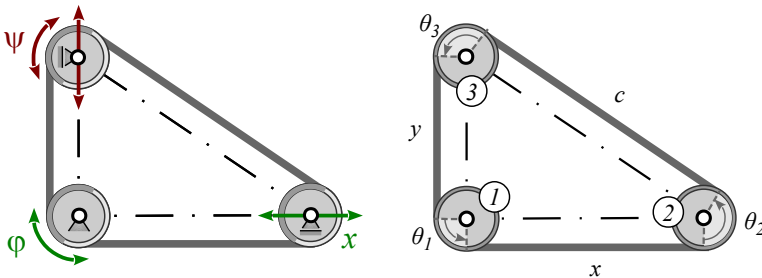


Bild 3 : Viergliedriges Räderkoppelgetriebe mit $F = 2$. Zerlegung der Seilabschnitte in Geraden und Kreisbögen.

Die Zerlegung in einzelne Seilabschnitte und die Anwendung von Gleichung (3) liefert mit dem gemeinsamen Radius r aller Räder

$$l_{ges} = x + y + c + r(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (5)$$

Die Summe aller Umschlingungswinkel in diesem Beispiel ist offensichtlich konstant $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$. Mit der Abkürzung $l = l_{ges} - 2\pi r$ für die Gesamtheit aller geraden Seilabschnitte vereinfacht sich Gleichung (5) auf

$$x + y + c = l \quad (6)$$

Mit Hilfe einer Ausnutzung der rechtwinkligen Anordnung der Räder durch $x^2 + y^2 = c^2$ kann die Länge c aus der Beziehung (6) hinausgeworfen werden und man gelangt zur Übertragungsfunktion 0. Ordnung

$$y = \frac{l}{2} \cdot \frac{l-2x}{l-x} \quad (7)$$

als nichtlinearen Zusammenhang zwischen der vertikalen Position y und der horizontalen Lage x . Eine Anwendung von Gleichung (4) bzw. die unmittelbare Ableitung von (7) liefert die Geschwindigkeitsverhältnisse in dem Räderkoppelgetriebe.

$$\dot{y} = -\frac{l-y}{l-x} \dot{x} \quad (8)$$

Nun lässt sich bei Bedarf durch eine einfache Maßnahme die vorliegende Nichtlinearität beheben.

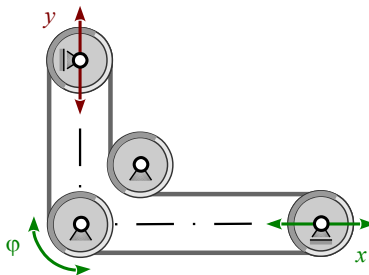


Bild 4 : Gleichmäßig übersetzendes Räderkoppelgetriebe mittels Umlenken des Seilverlaufs

Es wird der Verlauf der einzelnen Seilabschnitte durch ein zusätzliches Umlenkrad derart beeinflusst, dass jeder Umschlingungswinkel θ_i während der Bewegung konstant bleibt.

Damit ist ausschließlich eine Änderung der geradlinigen Seilabschnittslängen für eine Beweglichkeit des Mechanismus zuständig und es resultiert ein linearer Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgröße. Die Anwendung der Beziehung (3) liefert in diesem Fall

$$y = l_{\text{ges}} + \left(2 - \frac{3}{2}\pi\right)r - x \quad (9)$$

und es ergibt sich das einfache Geschwindigkeitsverhalten $\dot{y} = -\dot{x}$.

Ausgehend vom viergliedrigen Räderkoppelgetriebe nach *Bild 3* wollen wir nun ein weiteres Rad hinzufügen.

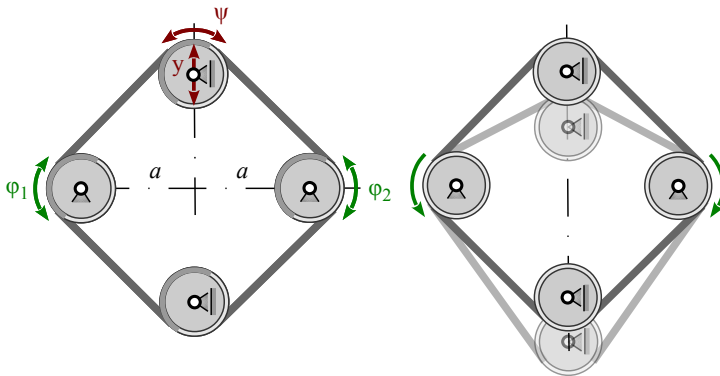


Bild 5 : Fünfgliedriges Räderkoppelgetriebe mit zwei stationären Antriebsrädern

Um den Freiheitsgrad des Seilmechanismus $F=2$ beizubehalten, müssen wir zwei Rollen festsetzen und die anderen beiden verschiebbar machen. Wenn die festen Rollen angetrieben werden, hat das zunächst den praktischen Vorteil, dass der Mechanismus *zwei stationäre Drehantriebe* besitzt. *Bild 5* zeigt die beispielhafte Anordnung der Räder und den Riemenverlauf.

Werden nun die beiden Antriebsräder gleichsinnig mit derselben Drehzahl angetrieben, läuft lediglich der Riemen um und die beweglichen Räder bleiben an Ort und Stelle. Werden sie jedoch gegensinnig angetrieben, resultiert das in einer reinen Vertikalschiebung der beweglichen Räder. Bei jeder anderen Drehzahlkombination ergibt sich eine Bewegung als Überlagerung dieser Sonderfälle. Wenden wir den Satz der konstanten Gesamtseillänge (3) bzw. dessen Ableitung (4) auf dieses Getriebe an, ergeben sich die Beziehungen für die Geschwindigkeiten der Abtriebsgrößen

$$\dot{y} = r(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \sqrt{\frac{a^2}{y^2} + 1} \quad \text{und} \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} \quad . \quad (10)$$

Der nichtlineare Charakter der vertikalen Verschiebung y kann durch ein ähnliches Vorgehen wie beim vorangegangenen Beispiel des viergliedrigen Räderkoppelgetriebe beseitigt werden. Dazu wird der Riemenverlauf durch entsprechend angeordnete Umlenkrollen so modifiziert, dass ausschließlich horizontale und vertikale freie Seilabschnitte entstehen und in Folge die einzelnen Umschlingungswinkel wiederum konstant bleiben (*Bild 6*).

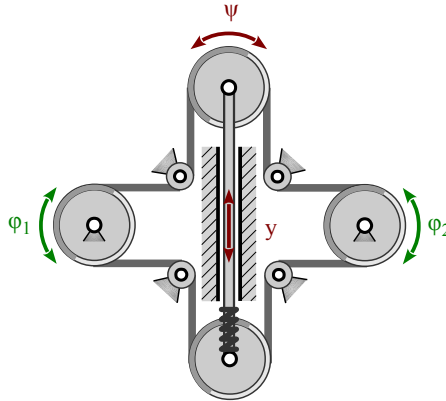


Bild 6 : Fünfgliedriges Rädergetriebe mit gleichmäßiger Übersetzung

Hieraus resultiert nun das folgende lineare Übertragungsverhalten hinsichtlich der Geschwindigkeiten

$$\dot{y} = r \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1}{2} \quad \text{und} \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} \quad . \quad (11)$$

Mit dem gerade betrachteten fünfgliedrigen Rädergetriebe werden zwei Eingangsdrehungen in eine Ausgangsdrehung und eine -verschiebung gewandelt.

Wir wollen nun untersuchen, ob und ggf. wie es möglich ist, zwei Drehungen in zwei Schiebungen umzuformen.

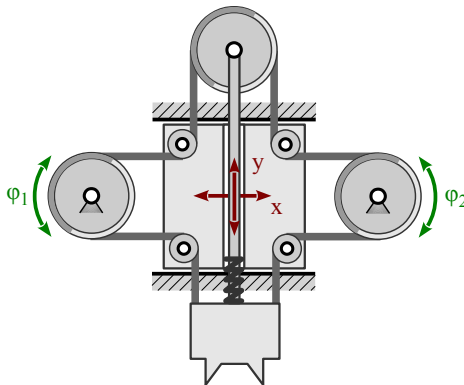


Bild 7 : Sechsgliedriges Räderkoppelgetriebe als x/y-Schieber

Hierzu trennen wir den Riemen an der unteren Rolle auf, ersetzen diese durch einen Klotz, verbinden diesen vertikal verschiebbar mit dem Steg. Die Riemenenden werden nun an dem Klotz befestigt. Der Steg wird schließlich statt im Gestell in einem horizontal beweglichen Schieber gelagert (*Bild 7*).

Wenn sich die stationären Räder dort nun gleichsinnig im mathematisch positiven Sinn drehen, wandert der zentrale Schieber nach rechts². Werden die Antriebsräder jedoch gegensinnig gleich bewegt, vollführt der Steg eine rein vertikale Bewegung³.

Dieses bekannte Prinzip wird in der Geräte-, Handhabungs- und Förder-technik erfolgreich angewendet (*Bild 8*).

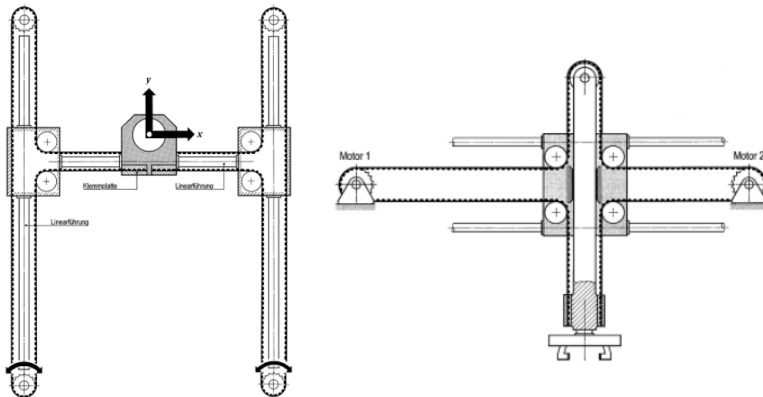


Bild 8 : XY-Portal und XY-Handhabungsgerät (Quelle: Perneder [2])

Der Vollständigkeit halber sei auch auf ein ebenes Umlaufriemengetriebe hingewiesen, mit dessen Hilfe sich zwei koaxiale stationäre Drehantriebe in eine überlagerte Umlaufbewegung umformen lässt. [3][8].

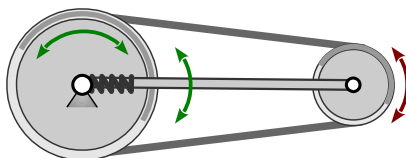


Bild 9 : Ebenes Umlaufriemengetriebe

- 2) Seil wird von der rechten Seite nach links transportiert.
- 3) Seil wird von oben nach unten oder umgekehrt befördert.

4 Räumliche Riemendifferentialgetriebe

Von den räumlichen Riemendifferentialgetrieben soll hier genau eines besprochen werden⁴.

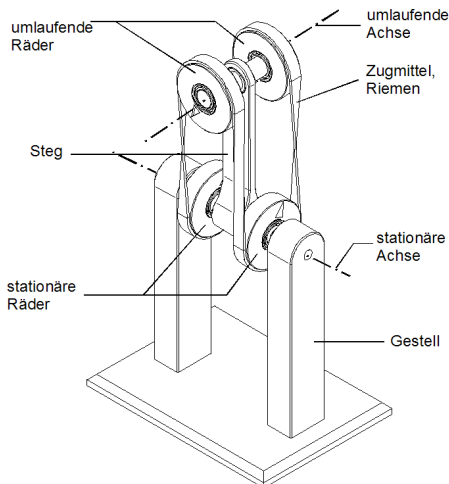


Bild 10 : Räumliches Umlaufriemengetriebe mit $F=2$

Auf einer im *Gestell* angeordneten *stationären Achse* sind ein *Steg*, sowie zwei *stationäre Räder* voneinander unabhängig drehbar gelagert. An seinem anderen Ende besitzt der *Steg* eine weitere mit ihm *umlaufende Achse*, die zur *stationären Achse* orthogonal ausgerichtet ist. Auf dieser *umlaufenden Achse* sind wiederum zwei, mit dieser *Achse umlaufende Räder* voneinander unabhängig drehbar gelagert. Über die *stationären* und die *umlaufenden Räder* läuft ein endloser *Riemen*.

Werden nun die *stationären Räder* eines solchen Getriebes mit gleich großen Winkelgeschwindigkeiten angetrieben, so resultiert hieraus eine reine Drehung des *Stegs* ohne Eigendrehung der *umlaufenden Räder* um ihre *Achse*. Dagegen bewirkt ein *gegenläufiges* Antreiben der *stationären Räder* mit entgegengesetzt gleich großen Winkelgeschwindigkeiten eine gegensinnige Drehbewegung der *umlaufenden Räder* auf ihrer nun – zusammen mit dem *Steg* – ruhenden *Achse*. Weichen die Antriebswinkelge-

4) Ein weiteres räumliches Riemendifferentialgetriebe ist dem Verfasser gegenwärtig nicht bekannt.

schwindigkeiten betragsmäßig voneinander ab, ergibt sich daraus eine überlagerte Drehung von Steg und umlaufenden Rädern [9].

Hinsichtlich der Getriebetopologie liegt eine *sechsgliedrige räumliche, geschlossene kinematische Kette* vor. Zur Untersuchung des Laufgrads betrachten wir den Steg und alle vier Räder als *drehgelenkig* gebunden. Eines davon ist darüber hinaus verschiebbar⁵ gedacht, um analog zu *Bild 2b* den Riemen spannen zu können. Unter Berücksichtigung der 4 freien Riemenabschnitte als Seilgelenke können wir schließlich mittels Gleichung (2) und den Werten $n=6, g_1=4, g_4=1, g_5=4$ den Freiheitsgrad $F=2$ nachweisen.

4.1 Kinematik

Zur Untersuchung der Kinematik des betrachteten Riemengetriebes wird ein Koordinatensystem mit dem Ursprung zwischen den stationären Rädern gemäß *Bild 11* etabliert. Die Radien der stationären und umlaufenden Räder sind paarweise gleich.

Als Eingangsgrößen werden die Winkel der stationären Räder φ_1 und φ_2 definiert. Ausgangsgrößen sind die immer entgegengesetzt gleiche Winkelstellung θ der umlaufenden Räder und der Stegwinkel ψ . Die Drehwinkel θ und ψ gehorchen durch die Riemenkopplung an die Eingangswinkel φ_1 und φ_2 den Beziehungen (12), die sich aus der Anwendung des Satzes (3) der Konstanz der Seillänge ergeben.

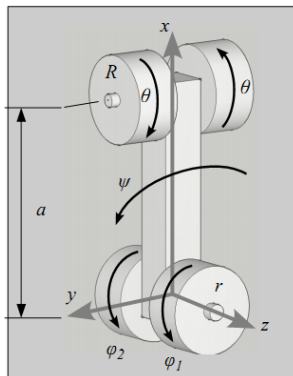


Bild 11 : Koordinatensystem, geometrische Parameter und Winkel

5) Senkrecht zu seiner Drehachse verschiebbar.

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} & \dot{\psi} &= \frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} & \ddot{\psi} &= \frac{\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2}{2} \\ \theta &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cdot \frac{r}{R} & \dot{\theta} &= \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2}{2} \cdot \frac{r}{R} & \ddot{\theta} &= \frac{\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2}{2} \cdot \frac{r}{R} \end{aligned} \quad (12)$$

Diese linearen Zusammenhänge weisen das Getriebe als *gleichmäßig übersetzend* aus. Insbesondere ist anzumerken, dass das Übertragungsverhalten vom Achsabstand a unabhängig ist. Bei gleichen Antriebswinkeln ($\varphi_1 = \varphi_2$) stehen die umlaufenden Räder relativ zum Steg still ($\theta = 0$). Sind die Antriebswinkel andererseits entgegengesetzt gleich ($\varphi_1 = -\varphi_2$), ist der Steg bewegungslos. Auffällig ist übrigens die Ähnlichkeit der Übertragungsgleichungen zu denen des ebenen fünfgliedrigen Riemengetriebes nach Gleichung (11).

Für den Einsatz als *Führungsgetriebe* interessiert die räumliche Bahn eines beliebigen Punkts C der umlaufenden Räder. *Bild 11* zeigt die notwendigen geometrischen Verhältnisse. Ausgehend vom Koordinatenursprung gelangt man zu Punkt C über die Vektorfolge

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BC} = a \mathbf{e}_a + h \mathbf{e}_h + c \mathbf{e}_c \quad (13)$$

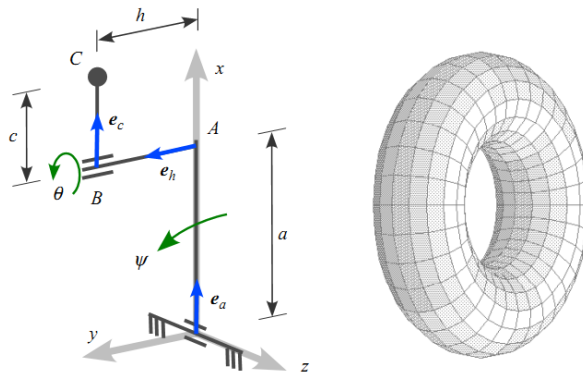


Bild 12 : Bestimmung der Koppelfläche

Unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_h, \mathbf{e}_c$ in Gleichung (13) von der aktuellen Winkelstellung θ und ψ lautet der Lagevektor für den Punkt C nun

$$\mathbf{r}_C(\psi, \theta) = a \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \cos \psi \cdot \cos \theta \\ \sin \psi \cdot \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (14)$$

Diese vektorielle Beziehung stellt die *Koppelfläche* des Getriebes dar, die sich bei näherem Hinsehen als Oberflächengleichung eines *Torus* erweist. Für den Sonderfall $h = 0$ hat der Torus einen kreisförmigen, sonst einen elliptischen Querschnitt. Diesem Umstand verdankt das Umlaufriemengetriebe seine Bezeichnung *Toroidlenker*⁶.

Die formale Ableitung der Gleichung (14) nach der Zeit liefert die Geschwindigkeit des Punkts **C**

$$\mathbf{r}'_C = (a + c \cos \theta) \dot{\psi} \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} - h \dot{\psi} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} - c \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi \cdot \sin \theta \\ \sin \psi \cdot \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (15)$$

und die nochmalige Differentiation dessen Beschleunigung.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''_C = & (a \ddot{\psi} - c(2 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\psi} \cos \theta) - h \dot{\psi}^2) \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} - \\ & ((a + c \cos \theta) \dot{\psi}^2 + h \ddot{\psi}) \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} - c \ddot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi \cdot \sin \theta \\ \sin \psi \cdot \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} - c \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} \cos \psi \cdot \cos \theta \\ \sin \psi \cdot \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Die Kenntnis der Beschleunigung wird zur Bestimmung der dynamischen Kräfte benötigt, die auf einen Körper während der Bewegung wirken, wenn sich sein Massenmittelpunkt in **C** befindet [10].

4.2 Kräfte und Momente

Es werden die Kräfte in den freien Riemenabschnitten und die Antriebsmomente der stationären Räder in einem quasistatischen Zustand bestimmt.

Gemäß *Bild 13* wirken als vorgegebene äußere Belastungen das Stegmoment M_ψ sowie die Momente $M_{\theta 1}$, $M_{\theta 2}$ auf die umlaufenden Räder. In jedem der freien Seilabschnitte *I*, *II*, *III* und *IV* herrscht zunächst bei unbelastetem Mechanismus eine Vorspannkraft S_0 .

Das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen für die vier Räder und den Steg liefert dann die Antriebsmomente

$$M_{\varphi 1,2} = -\frac{M_\psi}{2} \pm \frac{M_{\theta 2} - M_{\theta 1}}{2} \cdot \frac{r}{R} \quad (17)$$

6) In Anlehnung an die Bezeichnungen *Konchoidenlenker*, *Lemniskatenlenker* und *Ellipsenlenker* infolge der Form ihrer Koppelkurven.

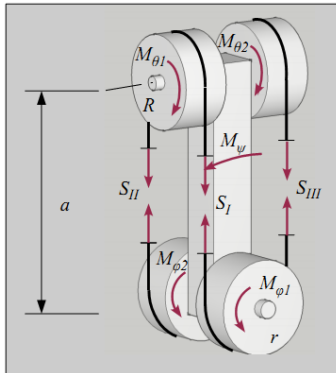


Bild 13 : Steg-, Radmomente und Seilkräfte

sowie die Seilkräfte

$$\begin{aligned} S_{I,II} &= S_0 - \frac{1}{4} \frac{M_\psi}{r} \mp \frac{1}{2} \frac{M_{\theta 1}}{R} \\ S_{III,IV} &= S_0 + \frac{1}{4} \frac{M_\psi}{r} \mp \frac{1}{2} \frac{M_{\theta 2}}{R} \end{aligned}, \quad (18)$$

wobei sicherzustellen ist, dass diese nicht negativ werden. Jene Forderung ist gleichbedeutend mit der Vorschrift

$$S_0 > \frac{1}{4} \frac{|M_\psi|}{r} + \frac{1}{2} \frac{\max(|M_{\theta 1}|, |M_{\theta 2}|)}{R} \quad (19)$$

für den einzuhaltenden Mindestwert der Vorspannkraft S_0 . In [10] ist eine weiterführende Betrachtung der Kräfteverhältnisse bis hin zur Getriebedynamik zu finden.

4.3 Maßbestimmung

In der konstruktiven Auslegung eines solchen Riemenumlaufgetriebes hat man weitgehende Freiheiten bei der Wahl der Raddurchmesser und des Achsabstands a .

Wenn die stationären Antriebsräder auch auf einer gemeinsamen Drehachse liegen müssen⁷, gilt dies für die umlaufenden Räder nicht notwendigerweise. Allerdings muss die Wirklinie des Seils stets tangential zu den Wälzkreisen der beteiligten Räder verlaufen (*Bild 14*).

7) Dies ist gleichzeitig die Drehachse des Stags.

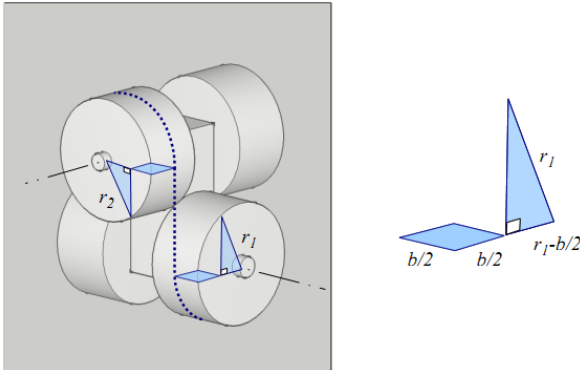


Bild 14 : Minimaler Achsabstand bei paarweise gleichen Rollenrädern.

Die gleichzeitige Forderung nach Kollisionsfreiheit führt auf einen möglichen minimalen Achsabstand zweier zylindrischer Räder mit identischer Breite b

$$a_{\min} = \frac{1}{2}(\sqrt{4r_1 b - b^2} + \sqrt{4r_2 b - b^2}) \quad (20)$$

gemäß *Bild 14*. Eine weitere Verringerung des Achsabstands a ist nur noch bei gleichzeitigem Übergang zu kegelförmigen Rädern möglich.

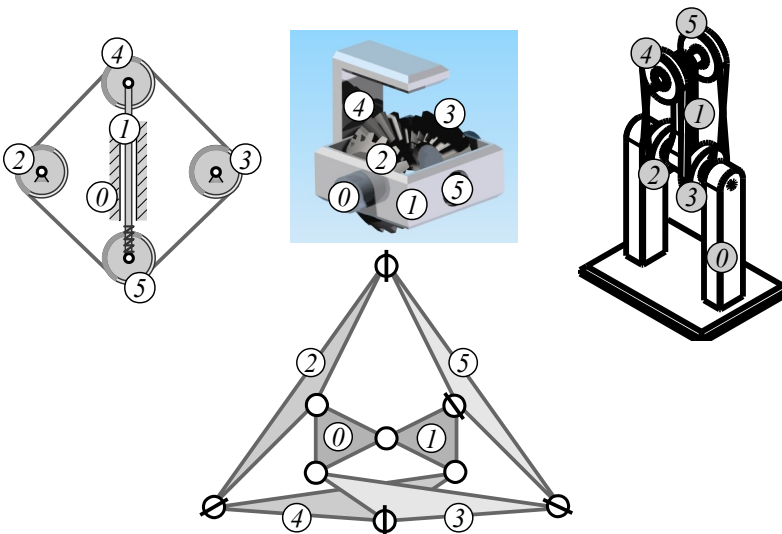


Bild 15: Kinematische Kette des ebenen 6-gliedrigen Riemengetriebes, des Toroidlenkers und des Kegelraddifferentials.

Dies ist ein Hinweis zur topologische Verwandtschaft des Toroidlenkers zum Kegelraddifferenzialgetriebe. Zum Nachweis hierfür leiten wir vom Toroidlenker, dem Kegelraddifferenzial und dem 6-gliedrigen Riemengetriebe gemäß *Bild 7* die zugehörige *kinematische Kette* ab, um schließlich festzustellen, dass diese für alle drei Getriebe identisch ist⁸ (*Bild 15*).

Nun sind das Riemenumlaufgetriebe und das Kegelraddifferenzial zwar topologisch und kinematisch gleichwertig, die Eigenschaft gekreuzter Achsen des Letzteren lässt sich mit dem Riemengetriebe jedoch offensichtlich nicht realisieren⁹. Als weiteres Kriterium für den Mindestachsabstand neben (20) ist nämlich die Tatsache zu berücksichtigen, dass Flach- und Zahnriemen eine hinreichend freie Länge für die notwendige Schränkung von 90° erhalten müssen (*Bild 16*). Dieser Mindestabstand wird anhand von Erfahrungswerten mit dem 20-fachen der Riemenbreite bemessen [2][11].

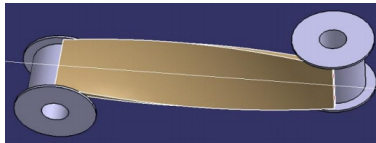


Bild 16 : minimaler Achsabstand aufgrund der 90° Riemenschränkung.

Dennoch gibt es auch hier eine konstruktive Maßnahme, um ein Riemenumlaufgetriebe mit gekreuzten Achsen zu ermöglichen (*Bild 17*).



Bild 17 : Realisierung gekreuzter Achsen durch Halbierung der Schränkung.

8) Die vorliegenden räumlichen Getriebe lassen sich nur deshalb auf eine *ebene kinematische Kette* abbilden, weil alle beteiligten Gelenke ein ebenes Äquivalent haben. Mit dem Vorhandensein eines Kreuz- oder Kugelgelenks ginge dies nicht.

9) Zumindest nicht, wenn man sich nach wie vor auf einen einzigen Endlosriemen beschränken will.

Hierzu wird das freie Riemenstück gemäß *Bild 16* bis zur halben Strecke um 45° geschränkt, danach durch eine Hilfsrolle umgelenkt und schließlich auf dem Rückweg um die fehlenden weiteren 45° tordiert. So wird erreicht, dass sich die Achsen von stationären und umlaufenden Rädern kreuzen und damit eine kinematische Äquivalenz zum Kegelraddifferenzialgetriebe herbeigeführt.

4.4 Anwendungen

Wenn eine Bewegungsaufgabe zwei orthogonale, voneinander unabhängige Drehbewegungen fordert, bietet sich ein Einsatz des Toroidlenkers an. Er vereint die Vorteile zweier stationärer Antriebe mit den bekannten Vorzügen von Riemenantrieben.

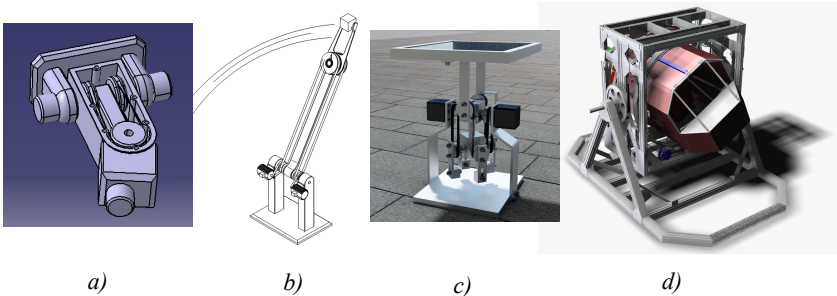


Bild 18 : Anwendungsbeispiele des Toroidlenkers.

Zur räumlichen Ausrichtung einer Kamera (*Bild 18a*) sind die Drehzahlen von Rädern und Steg eher gering und es werden keine vollständige Umläufe benötigt. Zur Durchführung einfacher Handhabungsvorgänge (*Bild 18b*) kommt vorteilhaft zum Tragen, dass das Getriebe eine große Steglänge ausbilden kann und die umlaufenden Räder jederzeit entgegengesetzt gleiche Winkel durchlaufen, so also fest mit Greiferhälften verbunden werden können.

Bei einem Prototyp zur Sonnennachführung eines Solarpanels (*Bild 18c*) sind die Achsen von stationären und umlaufenden Rädern des verwendeten Toroidlenkers eng benachbart. Die hierzu nötigen Umlenkräder sind zusätzlich mit Gegengewichten versehen, um einen gewünschten Massenausgleich zu erzielen¹⁰. Hierfür wird zur Vermeidung von Schlupf ein doppelt verzahnter Endlosriemen verwendet.

10) Hierbei gelingt interessanterweise der *vollständige Massenausgleich*.

Für den Bau der Bewegungsplattform eines Flugsimulators (*Bild 18d*) wird das Riemenumlaufgetriebe mit gekreuzten Achsen eingesetzt. Dieses Beispiel macht sehr anschaulich deutlich, dass der Bauraum zwischen den vier Rädern bei gleichzeitiger Leichtbauweise großzügig bemessen werden kann. Diese Freiheit besteht beim Kegelraddifferenzial naturgemäß nicht.

Weitere Einsatzmöglichkeiten ergeben sich mit einer schnelllaufenden Bewegung um die eine, sowie eine langsame Umlauf- oder Schwenkbewegung um die andere Achse. Hier kommen Anwendungen etwa im Ventilatorenbau oder in der Lichttechnik in Frage.

5 Zusammenfassung

In diesem Beitrag werden Riemengetriebe mit dem Freiheitsgrad *zwei* für Führungsaufgaben näher beleuchtet. Mit zwei Antrieben lassen sich naturgemäß auch nur genauso viele Freiheitsgrade bedienen. In ebenen Problemstellungen ist dies etwa eine Punktführung, bei räumlichen Aufgaben wird die unabhängige Orientierung bezüglich zweier orthogonaler Achsen betrachtet.

Das Übertragungsverhalten von Riemengetrieben lässt sich formal einheitlich über die Gesetzmäßigkeit der *Konstanz der Gesamtlänge* des Riemens ermitteln. Mittels einfacher konstruktiver Maßnahmen kann oft ein *gleichmäßig übersetzendes* Riemengetriebe gewonnen werden. Wegen dieser Linearität sind analytische Betrachtungen hinsichtlich Kinematik, Statik und Dynamik dann vergleichsweise einfach ohne Hilfe numerischer Verfahren durchführbar.

Dies gilt auch für das hier diskutierte räumliche Riemenumlaufgetriebe. Der Toroidlenker basiert auf einer 6-gliedrigen kinematischen Kette, ist gleichmäßig übersetzend, hat parallelkinematische Eigenschaften und besitzt eine enge Verwandtschaft zum Kegelraddifferenzialgetriebe. Er wird zwar nicht dessen hohe Leistungsdichte und Steifigkeit erreichen, kann jedoch eine nennenswerte Steglänge ausbilden und ist hinsichtlich des nutzbaren Bauraums sehr viel weniger eingeschränkt.

Es lohnt sich, die Verwendung von Seilelementen in Mechanismen bei Bedarf zu erwägen und insbesondere den Zahnriemen im Kontext der Führungsgetriebe als modernes Konstruktionselement mit seinen bekannten Vorteilen hinsichtlich Schlupffreiheit, Betriebsgeräusch, Leichtbau, Schmiermittelfreiheit und Kosten im Auge zu behalten.

Literatur

- [1] Bruckmann, T. et.al.: *Cable-Driven Parallel Robots*. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer Verlag 2013.
- [2] Perneder, R.: *Raum-Riemen-Anforderungen Zahnriemeneinsätze in der Praxis*. 14. Tagung "Zahnriemengetriebe", Dresden 2010.
- [3] Hanke, U.: *Der Einsatz eines Zahnriemengetriebes mit Unrundrädern zur Lösung einer Führungsaufgabe*. 16. Tagung "Zahnriemengetriebe", Dresden 2012.
- [4] Ebert, F.: *Simulation ebener Riemengetriebe mit linearer und nichtlinearer Übersetzung*. 16. Tagung "Zahnriemengetriebe", Dresden 2012.
- [5] Ebert, F.: *Ganzheitliche Systemsimulation komplexer Antriebssysteme mit nichtlinearer Charakteristik*. 9. Kolloquium Getriebetechnik, Chemnitz 2011.
- [6] Grübler, M.F.: *Getriebelehre*. Berlin: Springer Verlag 1917.
- [7] Hibbeler, R.C.: *Technische Mechanik 3 - Dynamik*. 12. Auflage, Pearson Verlag 2012.
- [8] Müller, H.W.: *Umlaufgetriebe*. 2. Auflage, Springer Verlag 1998.
- [9] Gössner, S.: *Bewegungsmechanismus*. Patentanmeldung DE 102010018122.6 vom 21.04.2010.
- [10] Gössner, S.: *Vom Flugsimulator zum Toroidlenker*. 15. Zahnriemengetriebe Tagung – IFTE / TU-Dresden 2011.
- [11] Gössner, S.: *Getriebelehre*. Berlin: Logos Verlag 2012.
- [12] Nagel, T.: *Zahnriemengetriebe: Eigenschaften, Normung, Berechnung, Gestaltung*. München, Wien: Carl Hanser Verlag 2008.
- [13] Luck K., Modler, K.-H.: *Getriebetechnik*. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer Verlag 1995
- [14] Kerle H., Corves B., Hüsing, M.: *Getriebetechnik: Grundlagen, Entwicklung und Anwendung ungleichmäßig übersetzender Getriebe*. Vieweg+Teubner Verlag; 4. Auflage, 2011