



universitätsverlag  
ilmeneau

---

*Huba, Antal; Bojtos, Attila:*

**Neue Methode zur Bestimmung des dynamischen  
Materialmodells von Silikongummi**

**URN:** urn:nbn:de:gbv:ilm1-2012100142-115-4

**URL:** <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2012100142-115-4>

---

***Erschienen in:***

Mechanismentechnik in Ilmenau, Budapest und Niš : Technische Universität Ilmenau, 29. - 31. August 2012. - Ilmenau : Univ.-Verl. Ilmenau, 2012. - S. 115-124. (Berichte der Ilmenauer Mechanismentechnik ; 1)

ISSN: 2194-9476

ISBN: 978-3-86360-034-1 [Druckausgabe]

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2012100142

URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2012100142>

# NEUE METHODE ZUR BESTIMMUNG DES DYNAMISCHEN MATERIALMODELLS VON SILIKONGUMMI

*Prof. Dr.-Ing. Antal Huba\*, Attila Bojtos\**

\* Technische und Wirtschaftswissenschaftliche Universität Budapest,  
Lehrstuhl für Mechatronik, Optik und Informatik im Maschinenbau

## **Kurzfassung**

Viele Konstruktionsprobleme, Bewegungsformen oder Formänderungen können in der Feinwerktechnik mit Konstruktionen aus herkömmlichen starren Materialien nicht gelöst werden. An dieser Stelle weisen wir nur auf Greifer für hochempfindliche Strukturen oder auf diagnostische Geräte und auf Implantate hin. Wir berichten über Forschungen zur Ermittlung von Materialeigenschaften die zum CAD und FEM unterstützten Entwurf der Konstruktionen unentbehrlich waren.

## **Abstract**

There are some constructions and locomotion forms or shape changes in the precision engineering that can't be manufactured from conventional rigid materials. We refer for example to gripper for handling with high sensitivity structures and to diagnostic equipment or to implants for the medicine. The determination of material properties is indispensable for the CAD and FEM supported design.

## **1. Einleitung**

Seit einigen Jahren läuft eine intensive Forschung und eine parallele Entwicklungstätigkeit an der TU Budapest in Zusammenarbeit mit der TU

Ilmenau zur Untersuchung der Anwendungsmöglichkeiten der Silikon-Elastomere in der Feinwerktechnik, Mikrotechnik und Medizintechnik. Die Anwendungsbereiche sind vielfältig, u.a. sie erlauben spezielle, hochelastische Konstruktionen. Der Silikongummi ermöglicht die Herstellung von neuartigen und speziellen Bauteilen und Konstruktionen, da diese Materialien besondere mechanische, biochemische optische und elektrische Eigenschaften besitzen. Dieser Beitrag stellt das für den Entwurf dynamisch beanspruchter Konstruktionen wichtige dynamische Materialmodell in Mittelpunkt. [1].

## 2. Die Silikon-Elastomere

Die Anwendung der Silikone ist in vielen Bereichen, unter anderem in der Feinwerktechnik und in der Gerätetechnik nicht neu [2]. Seit der ersten industriellen Herstellung der Silikone in den 40-er Jahren unseres Jahrhunderts, erkennen diverse Branchen die vorteilhaften Eigenschaften des synthetisierten neuen Materials. Die rasche Entwicklung begann in den 50-er Jahren, und auch heutzutage werden Silikone für die speziellen Ansprüche weiterentwickelt. Dieser Werkstoff spielte bisher jedoch fast immer nur eine ergänzende Rolle, als Kleber oder Füllstoff, Trägermaterial für Farben, als elektrische Isolierung, oder Isolierlack, und als Schmierstoff. Wir auf eine neuartige Verwendungsart, nämlich als Konstruktionswerkstoff die Aufmerksamkeit lenken. Aus Polymer-chemischer Sicht bestehen die Silikone aus langen Molekulketten. Die Grundstruktur der anorganischen Polymere – wie auch diejenige der Silikone - besteht aus anorganischen Bauelementen, zu denen anorganische oder organische Gruppe angekoppelt ist.

Die grundlegenden Eigenschaften der Silikone werden durch die folgenden Faktoren bestimmt:

- Die Struktur
- Die Qualität der organischen Gruppen
- Der Polymerisationsgrad
- Die Qualität der Fremdstoffe
- Die Menge der Fremdstoffe

Der anorganische Anteil ist in den Silikonen größer als der organische, in den Silikongummi-Sorten erreicht dieser etwa 60%. Die Struktur der Silikone wird durch die geknäuelten, monomeren Einheiten bestimmt, deren zentraler Bestandteil die –Si-O-Si- Kette ist.

## 4. Die mechanischen Eigenschaften

Unter den speziellen Eigenschaften der Silikon-Elastomere, wie die Wärme- und Strahlbeständigkeit, die biologische Indifferenz, die Stoffdurchlässigkeit und die optischen und elektrischen Eigenschaften wollen wir hier auf die mechanischen Besonderheiten, darunter auf das dynamische Materialmodell konzentrieren. Wir haben weitere mechanische Eigenschaften auch untersucht, wie der dynamische Elastizitätsmodul. Wir haben festgestellt, dass die Williams-Landel-Ferry Beziehung für Silikongummi nicht angewendet werden kann. Wir haben Schär- und Haftprüfungen auch durchgeführt. Zu dieser Reihe von Untersuchungen gehört die Ermittlung des nichtlinearen Materialmodells für Silikongummi.

Anfangs waren die Materialparameter, die für die FEM-Simulationen unentbehrlich sind, gar nicht, oder nur in sehr groben Näherungen vorhanden. Für die Bestimmung des dynamischen Modells der Silicone-Elastomere haben wir die Synthese-Methode der klassischen Netzwerk-Theorie eingesetzt. Da diese Methode auf den Zusammenhang konkreter Messwerte beruht, können die Ergebnisse als präzise Beschreibung der dynamischen Materialeigenschaften aufgefasst werden.

Die aus maschinentechnischer Hinsicht wichtigen Materialkenngrößen werden in der nachstehenden Tabelle gezeigt.

**Tab. 1:** Mechanische Eigenschaften

Zug, Druck- und Scherfestigkeit, Statisches Elastizitätsmodul	Haftfähigkeit. Verschiedene Materialien und verschiedene Oberflächen-Strukturen	Temperaturabhängiges dynamisches Elastizitätsmodul	Bruchfestigkeit bei Wechselbeanspruchungen	Reißfortpflanzung
---	---	--	--	-------------------

### 4.1. Zugfestigkeit und dynamische Materialmodelle

Für die Beschreibung der dynamischen Eigenschaften verschiedener Materialien verwendet man üblicherweise seit längerer Zeit die Systemtechnik, d.h. die wichtigsten Bauelemente und deren signifikante Relationen werden durch die Objekt-Orientierten Modelle repräsentiert. Die zielgerechte Konstruktionstätigkeit ist ohne diese Modelle und ohne Materialgesetze nicht vorstellbar. Die annähernde Beschreibung der

dynamischen Materialeigenschaften mittels Systeme mit konzentrierten Parametern wird weit verwendet. Auch in der Polymertechnik ist üblich durch die Betrachtung des einachsigen Dehnungs-Spannung Zusammenhangs das Material als „Black-Box“ aufzufassen, d.h. wenn die Eingangssignale und Ausgangssignale bekannt sind, man kann auf die innere Struktur des Systems schließen. Diese Modelle geben eine mehr oder weniger gute Annäherung, wobei für die Polymere charakteristische Dehnung, Relaxation und Kriechvorgang selbst beim gleichen Material unterschiedliche Modelle angegeben werden. Man verwendet das Kelvin-Voigt Modell für die Dehnung, das Maxwell, das Standard-Solid und das Burgers Modell beschreiben die Relaxation. Unsere Forschungsergebnisse, genauer die Messergebnisse zeigen deutlich, dass keiner dieser Modelle das dynamische Verhalten der Silikone-Elastomere mit der gewünschten Genauigkeit beschreiben kann. Wir haben eine objektive Methode für die Modellherstellung gesucht und gefunden, und zwar die Netzwerksynthese. Als Zielfunktion liegt die komplexe Übertragungsfunktion ermittelt aus dem Ausgangssignal bei bekanntem Eingangssignal, oder als gewünschter Frequenzgang vor. Wir haben die messtechnisch ermittelten Werte der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien für die Ermittlung der Übertragungsfunktion verwendet. Es zeigte sich, dass sowohl die Dehnung, als auch die Relaxation mit einem einheitlichen linearen oder nichtlinearen Modell mit konzentrierten Parametern bei minimalen Fehlern beschrieben werden kann. Es ist bekannt, dass die Materialparameter der polymeren Werkstoffe stark von der Zeit, Temperatur und Frequenz abhängig sind, und diese Eigenschaften für die Nichtlinearität verantwortlich sind.

Die an hinreichend großer Menge von Probekörpern - Wacker-Produkte der Härte von Sh 20, Sh 40, Sh 60 und Sh 80, mehr als 400 Stück - gemessenen Spannungs-Dehnung Kennlinien wurden systematisiert. Wir fanden im Grunde genommen zwei große Gruppen, siehe **Bild. 3** und **[1]**. Man sieht eine Gruppe mit konvexer und eine andere Gruppe mit konkaver Kennlinie, wobei für die Zuordnung eindeutig die Härte des Materials maßgebend war.

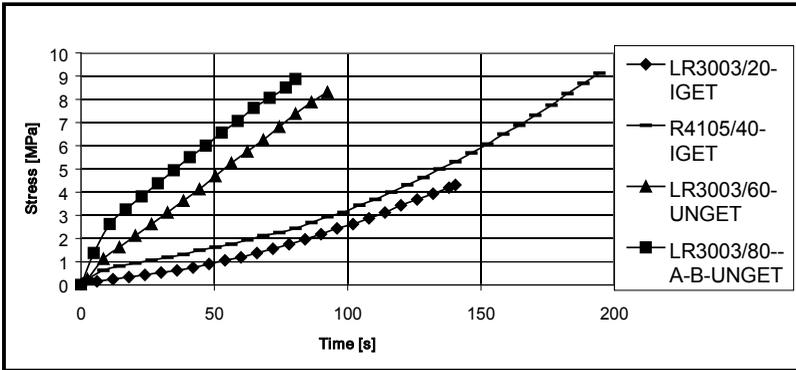


Abb.1. Charakteristische Kennlinien der Silikon-Elastomere

#### 4.2. Modell-Identifikation mit Hilfe der System-Synthese

Für die linearen Modelle mit konzentrierten Parametern gelten die folgenden Beziehungen im Zeitbereich und im Bildbereich:

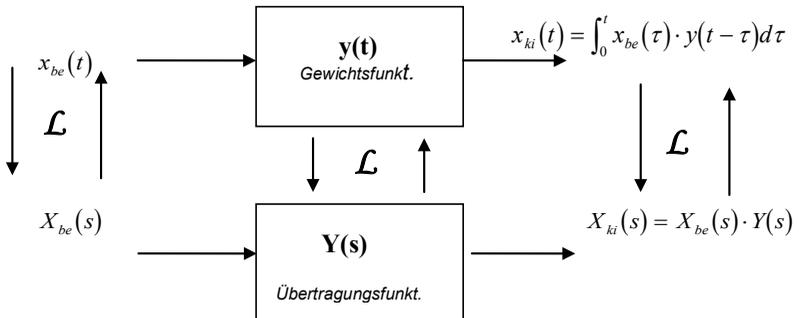


Abb.2. Operationen in und zwischen den Zeit- und Bildbereichen

Im Bild 2. stellen  $y(t)$  die Gewichtsfunktion und  $Y(s)$  die Übertragungsfunktion dar. Wenn die Konvergenzkriterien erfüllt sind, existieren für die Eingangssignale und Ausgangssignale im Zeitbereich auch deren Laplace-Transformierte Funktion. In linearen Systemen kann man an Hand von zwei bekannten Funktionen die dritte unbekannte Funktion bestimmen.

**Tab. 2:** Systemtechnische Betrachtung dynamischer Systeme

Bekannte Funktionen (Zeit-oder Operatorbereich)		Bestimmbare Funktionen (Zeit-oder Operatorbereich)
$x_{\text{ein}}(t), X_{\text{ein}}(s)$	$x_{\text{aus}}(s), X_{\text{aus}}(s)$	$y(t), Y(s)$
$x_{\text{ein}}(t), X_{\text{ein}}(s)$	$y(t), Y(s)$	$x_{\text{aus}}(t), X_{\text{aus}}(s)$
$y(t), Y(s)$	$x_{\text{aus}}(t), X_{\text{aus}}(s)$	$x_{\text{ein}}(t), X_{\text{ein}}(s)$

Durch die konkreten Messwerte (Dehnung und Kraft) sind in unserem Fall sowohl die Eingangsfunktion, als auch die Ausgangsfunktion mit numerischen Methoden bestimmbar. Unsere Methode unterscheidet sich dadurch von der bekannten Vorgehensweise dadurch, dass wir eine Schaltung deren Antwortfunktion an die Messpunkte bestmöglich passt, nicht durch Anpassung, sondern durch exakte mathematische Operationen ermitteln. Probleme treten jedoch auf – wie auch in unserem Fall – wenn sich aus der ermittelten Übertragungsfunktion direkt keine technische Schaltung ableiten lässt. Für solche Fälle existieren aber gut anwendbare und theoretisch fundierte Umwege u. A. die Anwendung der Wurzelannäherung.

Reelle lineare technische Systeme besitzen eine rationale Bruchfunktion des Operators „s“ als Übertragungsfunktion. Schließt man auch die resultierende Impedanz oder Admittanz eines Netzwerkes in den Kreis der Übertragungsfunktionen ein, erhält man diese Funktionen als mathematische Modelle reeller Werkstoffe. In diesem Fall werden die verallgemeinerten Kreuzvariablen und Flussvariablen als Eingangssignale und Ausgangssignale aufgefasst.

Für die Übertragungsfunktionen gilt generell:

$$Y(s) = \frac{X_A(s)}{X_E(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4.1)$$

Wobei  $a_i$  und  $b_j$  bei reellen passiven Netzwerken  $\geq 0$  sind. Eine rationale Bruchfunktion von „s“ kann ein reales System repräsentieren, wenn die folgenden Anforderungen erfüllt sind [3]:

- Alle Wurzeln des Nenner-Polynoms und Zählerpolynoms liegen auf der linken Seite der komplexen  $s$ -Ebene, oder sie sind einfach, wenn sie auf der imaginären Achse liegen.
- $a_i, b_j \geq 0$
- $\Re\{Y(\omega)\} \geq 0$  für alle  $\omega$ . Dementsprechend darf der Exponent des Laplace-Operators im Zähler und im Nenner höchstens um Eins unterscheiden. Ferner soll  $-\pi/2 \leq \arg\{Y(\omega)\} \leq \pi/2$  sein.

### 4.3. Lineares Modell ermittelt aus den Messwerten

Die automatischen Zugmaschinen liefern die Messergebnisse in Form von Data-Files. Eine Impedanz, oder Admittanz- Schaltung kann demgegenüber direkt nur aus einer Übertragungsfunktion abgeleitet werden:

$$\frac{L\{\text{Potenzialgröße}\}}{L\{\text{Flußgröße}\}} = \frac{L\{\text{Geschw.}\}}{L\{\text{Kraft}\}} = Z(s) = \frac{V(s)}{F(s)} \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{Z(s)} = G(s) = \frac{F(s)}{V(s)} \quad (4.3)$$

Wobei  $Z(s)$  die Impedanz und  $G(s)$  die Admittanz darstellen. Hier sei noch gleich bemerkt, dass sowohl die Impedanz als auch die Admittanz als Übertragungsfunktionen aufgefasst werden können.

Der Definition entsprechend gilt in linearen, translatorischen mechanischen Systemen:

$$Z_m(s) = \frac{1}{sm} \quad Z_k(s) = \frac{s}{k} \quad Z_b(s) = \frac{1}{b} \quad (4.4)$$

Wobei  $m$  die Masse,  $k$  die Federsteifigkeit, und  $b$  die Dämpfungskoeffizient repräsentieren. Wir haben zuerst die Funktion der Deformationsgeschwindigkeit aus der Dehnung ermittelt, und haben die Kraft statt mechanische Spannung benutzt. Die Dehnung kann man mit  $t(0^+)$  Startzeit bei Zugmaschinen als Einheits-Geschwindigkeitsfunktion  $v(t) = \frac{v_0}{T} t$  mit  $T=1s$  und  $v_0 = 50 \text{ mm}/\text{min}$ , oder als Einheitssprung  $v(t) = v_0 1(t)$  auffassen.

Die Durchschnittswerte der Messungen an 20-30 Probekörpern gleichen Materialtyps wurden berechnet und die „Antwortfunktionen“  $\sigma(t)$  und  $f(t)$  bei konstantem Materialquerschnitt mit Hilfe des Programms Mathematica 3.0 ermittelt. Insgesamt mehr als 400 Reißversuche wurden ausgewertet. Wir zeigen als konkretes Zahlenbeispiel für den Peroxid- Silikongummi der Härte Sh 40 die Ermittlung der Antwortfunktion  $\sigma(t)$  aus den Messwerten. Man erhält als Näherung die folgende analytische Funktion:

$$\sigma(t) = 0.9321(1 - e^{-0.1144t}) + 0.0002447t^2 \quad [\text{MPa}] \quad (4.5)$$

Nach der Laplace-Transformation der Gleichung 5 erhalten wir:

$$\sigma(s) = \frac{0.00005598 + 0.0004894s + 0.10664s^2}{s^3(0.1144 + s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{s^3(\sigma_0 + s)} \quad (4.6)$$

Wir setzen für die Eingangsfunktion den Einheitssprung  $v(t) = v_0 \cdot 1(t)$ , und daraus deren Laplace-Transformierte:

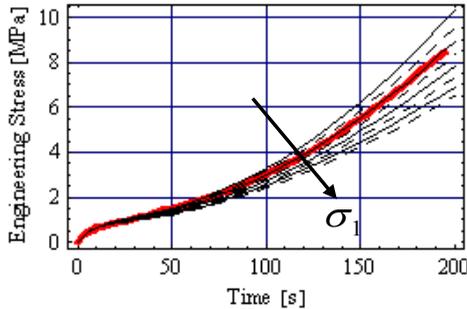
$$L\{v(t)\} = \frac{V_0}{s} = V(s) \quad (4.7)$$

Theoretisch würde sich daraus für die Übertragungsfunktion einer Admittanz-Ersatzschaltung folgendes ergeben:

$$G^*(s) = A_0 \cdot Y(s) = A_0 \cdot \frac{X(s)_{AUS}}{X(s)_{EIN}} = A_0 \cdot L\{\sigma(t)\} \cdot \frac{s}{v_0} = \frac{A_0}{v_0} \cdot \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{s^2(\sigma_0 + s)} \quad (4.8)$$

Diese Funktion erfüllt aber die vorangehend beschriebenen Bedingungen nicht, die Übertragungsfunktion eines realen Netzwerkes repräsentieren zu können: Im Nenner-Polynom sind nämlich zwei Wurzel an der imaginären Achse vorhanden. Wir „schieben“ aber jetzt einen dieser Wurzel in die linke Halbebene mit Hilfe eines angenommenen Wertes  $|\sigma_1|$  hinein. Bei schrittweise Modifizierung von  $|\sigma_1|$  wurde der Rücktransformierte ständig kontrolliert, um das Toleranzfeld der ursprünglichen Funktion nicht zu überschreiten.

**Abb. 3.** Die Wirkung der Wurzelkorrektur im Nenner der Übertragungsfunktion (die gemessene Kurve rot gezeichnet)

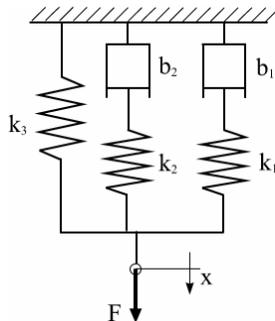


Wir fanden, dass für den Wert  $\sigma_1 = -0.002667$  die vorgegebene Genauigkeit noch erfüllt ist, und damit erhielten wir eine reale Admittanz-Schaltung.

$$G(s) = \frac{A_0}{v_0} \cdot \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{s(\sigma_0 + s)(\sigma_1 + s)} \quad (4.9)$$

Die Partialbruchzerlegung ermöglicht die Realisierung gleichwertiger Schaltungen. Hier wird zuerst die folgende Variante zur Ermittlung einer Schaltung herangezogen:

$$G(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \sigma_0} + \frac{C}{s + \sigma_1} = \frac{k_A}{s} + \frac{1}{\frac{s}{k_B} + \frac{1}{b_0}} + \frac{1}{\frac{s}{k_C} + \frac{1}{b_1}} \quad (4.10)$$



**Abb. 4.** Ersatzschaltung gemäß  $G^*(s)$  in der Gleichung 4.8

Dabei sind:  $b_0 = B/\sigma_0$ ,  $b_1 = C/\sigma_1$ ,  $k_A = A$ ,  $k_B = B$ , und  $k_C = C$ . Man sieht, dass das neue Modell aus 5 Parametern besteht und im Prinzip zwei parallele Maxwell-Modelle mit einer Feder parallel geschaltet repräsentiert. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass aus der Admittanz-Funktion weitere gleichwertige Ersatzschaltungen synthetisiert werden können. Wenn die Bedingungen nach [3] erfüllt sind, das ist ohne weiteres möglich.

Die Parameter werden natürlich unterschiedlich, und wir verwenden weiterhin nur Feder und Dämpfungen. Wie schon erwähnt, das im Bild 4. dargestellte Variante ist nur eine Möglichkeit, es gibt noch weitere Umformungsmöglichkeiten.

## 5. Zusammenfassung

Dieser Beitrag ermöglicht einen Einblick in die neue Methode der objektiven Bestimmung des linearen dynamischen Materialmodells des Silikongummis mit konzentrierten Parametern. Die Methode der System-Synthese wird ungewöhnlicher Weise in der materialwissenschaftlichen Untersuchungen angewendet.

## Literatur

- [1] Molnár L., Huba A.: Silicon Elastomers, It's Properties And Their Applications in the Precision Engineering and in the Medicine Conf. Gépészet 2000, Budapest, Ed. Springer
- [2] Tomanek, A.: Silicone & Technik. Hanser Verl. 1990.
- [3] Guillemin, E.A.: Synthesis of Passive Networks  
J. Wiley & S., New York, 1986.