

Untersuchungen an Bulkmaterialien für rauscharme, kryogene Interferometer

**Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades**

Doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomische Fakultät
der **FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA**

von Dipl. Phys. Gerd Hofmann
geboren am 20. November 1986 in Schillingsfürst

Gutachter

1. Prof. Dr. rer. nat. habil. Paul Seidel (Friedrich-Schiller-Universität Jena)
2. Prof. Dr. rer. nat. habil. Markus Rettenmayr (Friedrich-Schiller-Universität Jena)
3. Prof. Dr. rer. nat. habil. Paul Müller (Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg)

Tag der Disputation: 01. November 2016

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Gravitationswellen und ihre Detektion	3
2.1. Theoretische Beschreibung von Gravitationswellen	3
2.2. Resonanzmassen-Detektoren	7
2.3. Interferometrische Detektoren	7
2.4. KAGRA und Einstein Telescope	10
2.5. Rauschquellen in Gravitationswellendetektoren	12
2.5.1. Seismisches Rauschen	12
2.5.2. Quantenrauschen	13
2.6. Thermisches Rauschen in optischen Komponenten	16
2.6.1. Fluktuations-Dissipations-Theorem	17
2.6.2. Brownsches Rauschen	19
2.6.3. Thermoelastisches Rauschen	24
2.6.4. Thermorefraktives Rauschen	27
2.6.5. Thermooptisches Rauschen	29
2.7. Materialien für rauscharme Detektoren	30
2.7.1. Silizium	32
2.7.2. Saphir	34
3. Anelastische Festkörper	36
3.1. Elastisches und anelastisches Verhalten	36
3.2. Dynamisches Verhalten	39
3.3. Ursachen des mechanischen Verlusts	41
3.3.1. Thermoelastische Dämpfung	41
3.3.2. Phonon-Phonon-Wechselwirkung	42
3.3.3. Phonon-Elektron-Wechselwirkung	43
3.3.4. Defekte und Fremdatome	45
4. Mechanischer Verlust	46
4.1. Experimentelle Bestimmung des mechanischen Verlusts	46
4.2. Messungen an Silizium	47
4.2.1. Dotiertes Silizium	49
4.2.2. Vergleich mit intrinsischem Silizium	52
4.2.3. Mechanischer Verlust durch Sauerstoff	53
4.2.4. Wärmebehandeltes Silizium	58

4.3.	Messungen an Saphir	61
4.3.1.	Einfluss der Oberflächengüte	62
4.3.2.	Dotiertes Saphir	64
4.4.	Saphirfasern für die Pendelaufhängung	65
4.4.1.	Mechanischer Verlust von Saphirfasern	67
4.4.2.	Auswirkungen von Füge- und Ansatzstellen	71
4.5.	Untersuchungen an Fügeverbindungen	73
4.5.1.	Lösbare Indiumverbindungen	74
4.5.2.	Mechanischer Verlust von Fügeverbindungen	75
5.	Wärmeleitung	82
5.1.	Wärmeleitfähigkeit in Isolatoren und Halbleitern	82
5.2.	Experimentelle Untersuchungen an Prototypen für KAGRA	84
5.3.	Temperatur der Testmassen in KAGRA	89
5.4.	Wärmefluss durch eine Indiumschicht	90
6.	Rauschen in kryogenen Gravitationswellendetektoren	93
6.1.	KAGRA	93
6.2.	Einstein Telescope	96
6.3.	LIGO Voyager	97
7.	Zusammenfassung	101
Anhang		103
A.	Materialparameter	104
A.1.	Silizium	104
A.2.	Saphir	107
A.3.	Indium	108
A.4.	Kupfer	108
B.	Zusammengesetzte Systeme	112
B.1.	Extrapolations-Methode	112
B.2.	Grenzflächen-Methode	113
Lebenslauf		118
Ehrenwörtliche Erklärung		119

1. Einleitung

Bereits seit über einem halben Jahrhundert versuchen zahlreiche Wissenschaftler weltweit Gravitationswellen zu detektieren. Ihre Existenz wurde im Jahr 1916 von Albert Einstein im Rahmen seiner Allgemeinen Relativitätstheorie postuliert [1]. Demnach beeinflussen Massen durch ihr Gravitationsfeld die Verbindung aus Raum und Zeit und es kommt zu Verzerrungen in der sogenannten Raumzeit, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Von beschleunigten Massen gehen dabei Gravitationswellen aus, welche zu winzigen periodischen Kontraktionen und Expansionen des Raumes senkrecht zur Ausbreitungsrichtung führen. Wegen der schwachen Wechselwirkung mit Materie wird dieses Signal kaum absorbiert und erlaubt damit Einblicke in die Tiefen des Alls, die mit herkömmlicher Astronomie verborgen blieben.

Der Versuch eines direkten Nachweises von Gravitationswellen begann in den 1960er Jahren mit der Entwicklung der sogenannten Resonanzmassen-Detektoren durch den Physiker Joseph Weber. In den darauf folgenden Jahren entstand ein weiterer Detektor auf Basis eines Michelson-Interferometers [2, 3]. Große Spiegel fungieren dabei als Testmassen, um die durch eine Gravitationswelle hervorgerufenen Verzerrungen als Intensitätsschwankungen am Ausgang des Interferometers zu erfassen. An diesem grundsätzlichen Konzept hat sich bis heute nichts geändert, im Laufe der Jahre wurden diese Detektoren allerdings mit großem Aufwand immer weiter optimiert.

Im Herbst 2015 gelang schließlich erstmals der direkte Nachweis einer Gravitationswelle, verursacht durch zwei verschmelzende schwarze Löcher [4]. Registriert wurde das Signal von den beiden interferometrischen Detektoren Advanced LIGO in den USA. Zusammen mit Advanced Virgo in Italien und GEO in Deutschland gehören diese Detektoren mit zu den weltweit präzisesten metrologischen Systeme. Doch deren Empfindlichkeit ist noch immer zu gering, um dauerhaft Signale zu liefern und Astronomie wie beispielsweise mit optischen Teleskopen zu betreiben. Dennoch verdeutlicht diese erste direkte Detektion eines Gravitationswellensignals eindrucksvoll das Potential interferometrischer Gravitationswellendetektoren. Die Ära der Gravitationswellenastronomie beginnt jedoch vermutlich erst mit der nächsten Evolutionsstufe

und dem Wandel der Detektoren hin zu echten Observatorien – dazu soll diese Arbeit ihren Teil beitragen.

Die notwendige Steigerung der Empfindlichkeit kann nur durch das Absenken des Gesamttrauschens erzielt werden. Im empfindlichsten Frequenzbereich der Detektoren um 100 Hz hat insbesondere das thermische Rauschen der Testmassen einen maßgeblichen Anteil. Das thermische Rauschen ist sowohl eng mit der Temperatur als auch mit dem mechanischen Verlust verknüpft. Alle bisherigen Detektoren arbeiten bei Raumtemperatur – das Abkühlen der Testmassen stellt daher eine vielversprechenden Möglichkeit zur Rauschreduktion in Aussicht. Allerdings steigt bei tiefen Temperaturen der mechanische Verlust des bisher verwendeten Fused Silica (Quarzglas) um mehrere Größenordnungen an [5] und macht es dadurch untauglich. Sowohl Silizium als auch Saphir stellen als kristalline Materialien eine geeignete Alternative für den kryogenen Betrieb dar und wurden daher bezüglich ihrer Verwendung in zukünftigen Gravitationswellendetektoren untersucht. Im Fokus lag hierbei vor allem der mechanische Verlust (Kapitel 4). Unter Berücksichtigung der Reinheit bzw. einer möglichen Dotierung beider Materialien sowie der Oberflächengüte kann so eine Minimierung des damit einhergehende thermische Rauschens möglicher Testmassen bei der jeweiligen Betriebstemperatur erfolgen (Kapitel 6).

Neben den Testmassen tragen aber auch die dafür nötigen Pendelaufhängungen zum thermischen Rauschen bei. Während aktuelle Detektoren nur wenige hundert Mikrometer dünne, speziell profilierte Fused Silica Fasern nutzen, erfordern kryogene Detektoren Fasern mit größeren Durchmessern für eine ausreichende Wärmeabfuhr. Für den Bau des japanischen Detektors KAGRA wurde daher eine Charakterisierung von Saphirfaser-Prototypen mit unterschiedlichen Herstellungsverfahren im Hinblick auf deren mechanischen Verlust sowie ihre Wärmeleitfähigkeit bei tiefen Temperaturen durchgeführt (Kapitel 4 und 5).

Die Verbindung zwischen den Testmassen und den Pendelfasern wird in aktuellen Detektoren mit Hilfe des hydroxid-katalytischen Bondens sowie durch Laserschweißen hergestellt. Letzteres stört jedoch die bei tiefen Temperaturen für hohe Wärmeleitfähigkeiten erforderliche Kristallinität und entfällt daher für eine kryogene Anwendung. Im Gegensatz dazu erlaubt die sehr dünne Bondschicht einen nahezu ungestörten Wärmefluss. Das hydroxid-katalytische Bonden als etabliertes Fügeverfahren wurde deshalb bezüglich des mechanischen Verlusts auf seine Tieftemperaturtauglichkeit überprüft. Für eine alternativ dazu entwickelte Verbindung mittels Indium wurde darüber hinaus zusätzlich die Wärmeleitfähigkeit untersucht (Kapitel 4 und 5).

2. Gravitationswellen und ihre Detektion

In diesem Kapitel werden zunächst die grundlegenden Aspekte zur Entstehung und Wirkung von Gravitationswellen dargelegt. Es folgt ein Abriss über die Entwicklung der ersten Detektoren bis hin zu den aktuellen interferometrischen Detektoren. Die verschiedenen Rauschprozesse, die deren Empfindlichkeit limitieren, werden vorgestellt und im Anschluss am Beispiel von Advanced LIGO, einem Gravitationswellendetektor zweiter Generation, aufgezeigt. Das Kapitel beschließt ein kurzer Diskurs über das Material der Testmassen in zukünftigen Detektoren.

2.1. Theoretische Beschreibung von Gravitationswellen

Gravitationswellen sind eine Lösung der Feldgleichungen, die Albert Einstein 1916 in seiner allgemeinen Relativitätstheorie formulierte [1]. Darin beschreibt er den Effekt der Gravitation als eine Krümmung der Raumzeit. Als Raumzeit bezeichnet man dabei die Vereinigung von Zeit und Raum, dargestellt durch einen vierdimensionalen Vektor der Form (x_0, x_1, x_2, x_3) mit den Einträgen (ct, x, y, z) des Raumzeit-Punktes zusammen mit der Lichtgeschwindigkeit c .

In der speziellen Relativitätstheorie ist die Raumzeit flach (keine Gravitation) und das Raumzeitintervall ds zwischen zwei Punkten lautet:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.1)$$

bzw. mit Hilfe des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ ausgedrückt:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \quad (2.2)$$

Hierbei laufen die Indizes μ und ν von 0 bis 3 und es wird über doppelt auftretende Indizes summiert. Der Tensor $g_{\mu\nu}$ ist in diesem Fall identisch mit der Minkowski-Metrik

$\eta_{\mu\nu}$. Diese wird durch die diagonale 4×4 -Matrix repräsentiert:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie führt nun die Gravitation von Massen zu einer Krümmung der sonst flachen Raumzeit. Gleichzeitig wird auch die Bewegung von Massen durch eben diese Krümmung der Raumzeit beeinflusst. Für den Fall schwacher Gravitationsfelder in großer Distanz zur Quelle kann die Krümmung der Raumzeit als kleine Störung $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ auf dem Hintergrund des flachen Minkowski-Raumes verstanden werden. Der metrische Tensor ändert sich dann zu:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Unter dem Aspekt schwacher Felder können die nichtlinearen Einsteinschen Feldgleichungen linearisiert werden. Wie in der Elektrodynamik ist Eichfreiheit gegeben und ermöglicht durch die Wahl eines speziellen Koordinatensystems die Konstruktion ausgewählter Lösungen. Für die sogenannte TT-Eichung wird der Störungstensor $h_{\mu\nu}$ spurfrei und es ergeben sich am Ende nur transversale Wellen (daher: *transverse traceless gauge*). Die Koordinaten werden durch Geodäten, die Weltlinien frei fallender Testmassen vorgegeben. Die Feldgleichungen im Vakuum werden zu einer Wellengleichung der Form:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Die Lösung für eine ebene Welle der Kreisfrequenz ω , die sich mit Lichtgeschwindigkeit in z -Richtung ausbreitet, ist dann:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{yx} & h_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

wobei durch $h_{xx} = -h_{yy} = h_+$ und $h_{xy} = h_{yx} = h_\times$ die beiden Polarisationszustände Plus (+) und Kreuz (\times) der Welle gegeben sind.

Betrachtet man zwei Punkte im Abstand L in der xy -Ebene, so beträgt die Lauf-

zeit eines Lichtsignals $t_0 = L/c$. In Anwesenheit einer Gravitationswelle wird mit Gleichung (2.2) das Raumzeitintervall zwischen diesen Punkten:

$$ds^2 = (1 + h_+) dx^2 + 2(1 + h_\times) dx dy + (1 - h_+) dy^2 - c^2 dt^2. \quad (2.7)$$

Der Übersicht halber soll im Folgenden nur eine reine h_+ -Welle der Form $h_+ = \hat{h}_+ \cdot \sin(k_{GW}z - \omega_{GW}t)$ betrachtet werden. Liegen beide Punkte auf der x -Achse ($dy = 0$) erhält man für die Lichtausbreitung dazwischen wegen $ds^2 = 0$:

$$c^2 dt^2 = (1 + h_+) dx^2. \quad (2.8)$$

Ist die Periodendauer der Gravitationswelle sehr viel größer als die Laufzeit des Lichts wird durch Integration der Wurzel:

$$t_{GW} = \int dt = \frac{1}{c} \int_0^L \sqrt{1 + h_+} dx \approx \frac{1}{c} \int_0^L \left(1 + \frac{h_+}{2}\right) dx = \frac{L}{c} \left(1 + \frac{h_+}{2}\right). \quad (2.9)$$

Die Laufzeit für ein Signal verlängert sich also durch eine Gravitationswelle von t_0 auf t_{GW} um $L/c \cdot h_+/2$, oder anders ausgedrückt: der Abstand L zwischen zwei Punkten wird um ΔL_x vergrößert. Analog zeigt man eine Verkürzung der y -Achse und erhält somit die beiden Ausdrücke:

$$\frac{\Delta L_x}{L} = \frac{h_+}{2} \quad \frac{\Delta L_y}{L} = -\frac{h_+}{2} \quad (2.10)$$

Schematisch kann der Effekt einer Gravitationswelle durch eine periodische Verzerrung von kreisförmig angeordneten Punkten dargestellt werden, man spricht auch von der Wirkung auf einen Ring frei fallender Testmassen.¹ Abbildung 2.1 stellt dies jeweils für eine senkrecht zur Blattebene einfallende Gravitationswelle in Plus- (+) und Kreuzpolarisation (\times) dar.

Um die Größenordnung einer solchen Längenänderung abzuschätzen, sollen zunächst mögliche Quellen betrachtet werden. Während elektromagnetische Strahlung durch beschleunigte Ladungen entsteht, sind beschleunigte Massen verantwortlich für die Entstehung von Gravitationswellen. Im Gegensatz zur elektrischen Ladung existieren jedoch keine negativen Massen, sodass in niedrigster Form kein Dipolmoment sondern ein Quadrupolmoment auftritt. Folglich handelt es sich bei Gravitationswellen auch um

¹Das mit der TT-Eichung gewählte Bezugssystem, in dem Gravitationswellen beschrieben werden, entspricht dem frei fallender Testmassen. Diese wie auch das Bezugssystem folgen den geodätischen Linien in der Raumzeit.

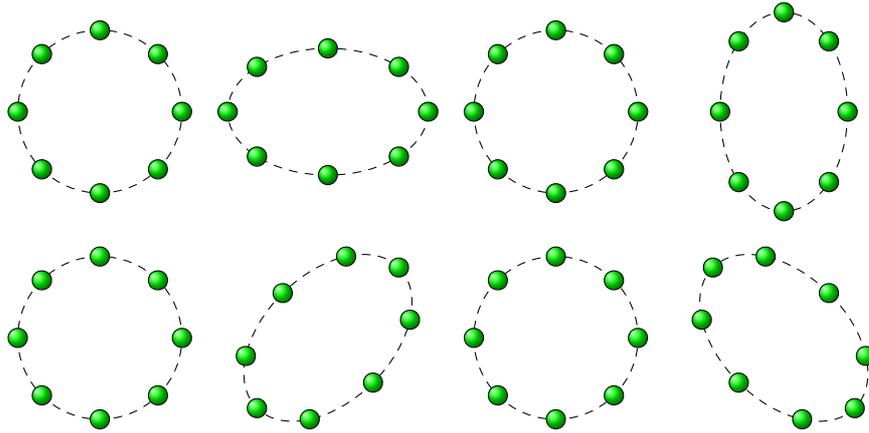


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung der Wirkung einer in die Papierebene einfallenden Gravitationswelle auf einen Ring frei fallender Testmassen während einer Periode für Plus (+, oben) und Kreuz (\times , unten) Polarisation. Die ursprünglich kreisförmige Anordnung wird dabei zu einer Ellipse verzerrt. Dieser Effekt bildet die Grundlage für interferometrische Detektoren.

Quadrupolstrahlung, die nur durch asymmetrische Masseverteilungen verursacht wird. In Frage kommen hierfür unter anderem Supernova-Explosionen, schwarze Löcher oder sich umkreisende Neutronensterne. Für Letztere gibt Saulson [6] folgende Näherung an:

$$h = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}. \quad (2.11)$$

Hierbei sind G , c und r die Gravitationskonstante, die Lichtgeschwindigkeit und der Abstand zwischen Quelle und Beobachter. Die zweite zeitliche Ableitung des Massenquadrupolmoments \ddot{I} beschreibt dessen Änderung. Zwei Sterne mit je rund 1,4 Sonnenmassen $M = 1,4M_{\odot}$, die sich in 20 km Abstand voneinander mit einer Frequenz von 400 Hz umkreisen, verursachen bei einem relativ nahem Beobachter in 15 Mpc Entfernung², dem Abstand zum Virgo Cluster, lediglich eine Amplitude von $h_0 = 10^{-21}$.

Viele Ereignisse sind jedoch weiter entfernt oder liefern schwächere Signale, sodass eine Detektion ebenjener sehr unwahrscheinlich ist. Indirekt konnten Gravitationswellen durch die Abnahme der Umlaufzeit eines Doppelsternsystems bereits nachgewiesen werden [7, 8, 9]. Mit welchen Mitteln eine direkte und erdgebundene Detektion ermöglicht werden soll, wird in den nächsten Abschnitten diskutiert.

²Ein Parsec pc entspricht etwa 3,26 ly (Lichtjahre) bzw. $3,09 \cdot 10^{13}$ km.

2.2. Resonanzmassen-Detektoren

Resonanzmassen- oder Resonant-Bar-Detektoren wurden in den 1960er Jahren von Joseph Weber für die ersten Versuche eines direkten Nachweises von Gravitationswellen verwendet. Weber nutzte große Zylinder aus Aluminium, die er bei Raumtemperatur im Vakuum isoliert vor äußeren Störungen in einer Schlinge aus Stahldraht platzierte. Eine Gravitationswelle sollte durch die periodische Längenänderung resonante Eigenschwingungen verursachen und durch Resonanzüberhöhung für ein entsprechendes Signal sorgen [10]. Obwohl diese Art von Detektoren bezüglich ihrer Bandbreite sehr limitiert war und ihre Empfindlichkeit äußerst gering ausfiel, verkündete Weber 1969 eine vermeintliche Detektion [11], die jedoch nicht verifiziert werden konnte. Bis heute existieren weltweit noch verschiedene Detektoren, die dieses Prinzip nutzen. Um thermische Störungen in den Zylindern zu schwächen, erfolgt der Betrieb mittlerweile bei tiefen Temperaturen. Die Bandbreite solcher Detektoren ist jedoch noch immer sehr eingeschränkt und beträgt trotz technischer Kniffe nur einige Hz wie am Beispiel des Auriga-Detektors später in Abbildung 2.4 gezeigt [12].

2.3. Interferometrische Detektoren

Sehr viel breitbandiger sind Detektoren mit der Topologie eines Michelson-Interferometers (Abbildung 2.2). Vorgeschlagen wurde diese Art Detektor unter anderem von Moss et al. [2] und Weiss [3]. Ein Laserstrahl mit Wellenlänge λ wird über einen Strahlteiler (BS) auf zwei orthogonale Arme der Länge L aufgeteilt und an verspiegelten Testmassen (ETM) am Ende der beiden Arme reflektiert.

Eine seismisch isolierte Pendelaufhängung der Testmassen im Vakuum sorgt dafür, dass diese sich oberhalb der Pendelfrequenz in Richtung des Laserstrahls wie frei

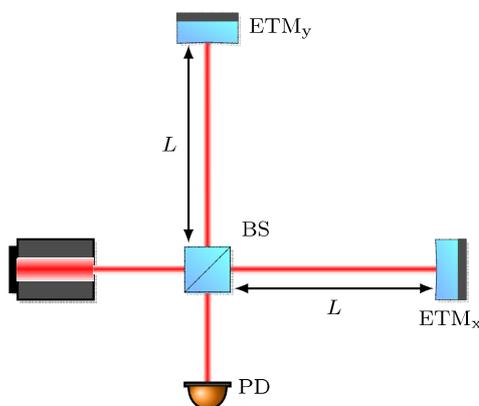


Abbildung 2.2.: Das Grundprinzip interferometrischer Gravitationswellendetektoren basiert auf einem Michelson-Interferometer. Laserstrahlung wird mit einem Strahlteiler (BS) auf zwei orthogonale Arme der Länge L verteilt, die Testmassen (ETM) reflektieren das Licht und es kommt am Strahlteiler zu Interferenz, die mit einer Photodiode (PD) erfasst wird.

fallende Testmassen verhalten. Folglich kommt es durch eine Gravitationswelle h zu einer periodischen Verzerrung wie in Abbildung 2.1 gezeigt. Während sich ein Arm gemäß Gleichung (2.10) periodisch um $Lh/2$ verlängert und verkürzt, erfolgt die Änderung im anderen Arm genau umgekehrt, sodass für die relative Längendifferenz bzw. die Verzerrung beider Arme gilt:

$$\frac{\Delta L}{L} = h \quad (2.12)$$

Unter Annahme einer Armlänge $L = 1$ km und mit der bereits genannten Amplitude von $h_0 = 10^{-21}$ beträgt die so zu erfassende Längendifferenz lediglich $\Delta L = 10^{-18}$ m. Die somit von einer Gravitationswelle h im Interferometer verursachte (periodische) Phasenverschiebung $\Delta\phi = 2\pi\Delta L/\lambda$ führt zu einer Modulation der Ausgangsleistung des Interferometers:

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \cos^2(\phi_0 + \Delta\phi) . \quad (2.13)$$

Dabei stellt ϕ_0 eine feste Anfangsphase dar, die sich durch einen Abgleich der beiden absoluten Armlängen ergibt und den Arbeitspunkt des Interferometers bestimmt. Die größte Empfindlichkeit erzielt man mit einem Arbeitspunkt, bei dem P_{out} der halben Eingangsleistung entspricht. Im Sinne eines möglichst geringen Schrotrauschens hat sich jedoch die sogenannte Dark-Fringe-Konfiguration mit $P_{\text{out}} = 0$ in Gravitationswellendetektoren als vorteilhaft erwiesen (vgl. Unterabschnitt 2.5.2).

Zusätzlich erschwert wird die messtechnische Erfassung einer Gravitationswelle durch zahlreiche Rausch- und Störprozesse, charakterisiert durch ihre jeweilige Rauschleistungsdichte $S_n(f)$. Anstatt der Rauschleistungsdichte erfolgt oftmals auch die Angabe einer, der Verzerrung entsprechenden, Rauschamplitude $h_n(f) = \sqrt{S_n(f)}$ und man erhält das Amplituden Signal-Rausch-Verhältnis zu [13]:

$$SNR = \frac{h_0/\sqrt{\Delta f}}{h_n(f)} . \quad (2.14)$$

Das Frequenzintervall Δf entspricht dabei der inversen Beobachtungszeit τ_{obs} für ein periodisches Signal mit Amplitude h_0 . Fordert man wenigstens ein Signal-Rausch-Verhältnis von eins, so gibt die Rauschamplitude $h_n(f)$ für $\tau_{\text{obs}} = 1$ s in diesem Fall unmittelbar die Empfindlichkeit des Interferometers wieder. In Abschnitt 2.5 wird eine Übersicht der für diese Arbeit relevanten Rausch- und Störprozesse gegeben, denn nur durch eine genaue Kenntnis dieser Prozesse kann die Empfindlichkeit zukünftiger Detektoren weiter gesteigert werden.

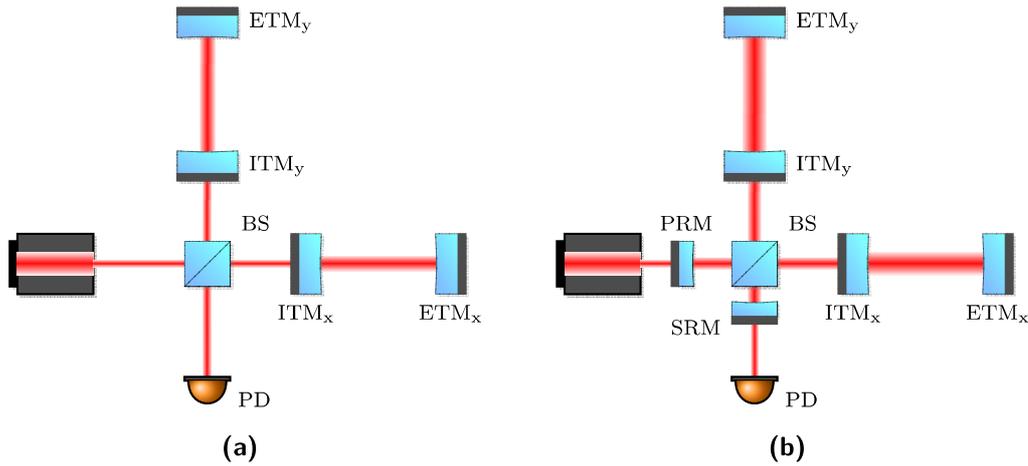


Abbildung 2.3.: Bereits in Gravitationswellendetektoren der ersten Generation verwendete man Fabry-Perot-Resonatoren in den Armen. Diese wurden durch Testmassen als Ein-/Auskoppelspiegel (ITM) und Endspiegel (ETM) gebildet und erhöhten die effektive Länge des Interferometers bzw. die umlaufende Leistung in jedem der Arme. Eine weitere Steigerung der Empfindlichkeit wird mit Hilfe zweier Spiegel am Ein- und Ausgang des Interferometers erzielt (Power- (PRM) und Signal-Recycling-Spiegel (SRM), Details hierzu im Text).

Abweichend von dem klassischen Aufbau eines Interferometers, wie von Michelson und Morley für ihr Äther-Experiment verwendet [14], finden sich verschiedene spezifische Modifikationen für die Verwendung als Gravitationswellendetektor. Entspricht die Laufzeit der Photonen in einem Interferometerarm genau der halben Periodendauer einer Gravitationswelle, so wird ihre verzerrende Wirkung maximal. Bei einer Frequenz von $f_{\text{GW}} = 100 \text{ Hz}$ entspräche dies folglich einer für erdgebundene Detektoren völlig unpraktikablen Armlänge von $L = c \cdot \tau_{\text{GW}}/4 \approx 750 \text{ km}$. Stattdessen verwendet man zwei zusätzliche halbdurchlässige Spiegel (ITM) am jeweiligen Armeingang nach dem Strahlteiler (Abbildung 2.3a), die zusammen mit den Endspiegeln des Interferometers (ETM) jeweils einen Fabry-Pérot-Resonator mit Finesse \mathcal{F} bilden und so die effektive Länge der Arme auf $L \cdot 2\mathcal{F}/\pi$ erhöhen, ohne ihre realen Abmaße zu vergrößern.

Weitere Maßnahmen um die Sensitivität zu erhöhen stellen das sogenannte Power- und Signal-Recycling dar (Abbildung 2.3b). Da je nach Konfiguration mindestens die Hälfte der Laserstrahlung das Interferometer über den Eingang wieder verlässt, nutzt man einen sogenannten Power-Recycling-Spiegel (PRM), der das Licht erneut einkoppelt und zu einem resonantem Subsystem führt. Dadurch erhöht sich die Eingangsleistung P_{in} um den Power-Recycling-Faktor C_{PRM} und steigert nicht nur das eigentliche Signal an der Photodiode, sondern reduziert auch das Schrotrauschen (vgl.

Unterabschnitt 2.5.2). Ebenso sorgt der Signal-Recycling-Spiegel (SRM) dafür, dass das Lichtsignal am Ausgang des Interferometers, verursacht durch eine Gravitationswelle, erneut umläuft und so durch weitere Wechselwirkung verstärkt werden kann.

Nach diesem Schema begann in den neunziger Jahren der Bau der ersten interferometrischen Detektoren wie TAMA 300, LIGO, Virgo und GEO 600. Alle Detektoren erreichten die geforderte Empfindlichkeit von 10^{-21} und wurden zwischenzeitlich von Detektoren der zweiten Generation abgelöst. Durch die jahrelange Forschung und Entwicklung fließen zahlreiche Verbesserungen wie z. B. die monolithische Pendelaufhängung [15] und neue Techniken wie Squeezing [16] ein. Dadurch soll die Empfindlichkeit im Vergleich zur ersten Generation um den Faktor 10 gesteigert und zu tieferen Frequenzen erweitert werden (vgl. Abbildung 2.4). Damit wird das Detektionsvolumen um den Faktor 10^3 vergrößert. In einem ersten Testlauf im Herbst 2015 konnte mit Advanced LIGO bereits eine erfolgreiche Detektion von Gravitationswellen erzielt werden [4]. Nach dem geplanten Umbau der Detektoren ist bis spätestens im Laufe des Jahres 2016 wieder ein regulärer Betrieb aller Detektoren zu erwarten.

2.4. KAGRA und Einstein Telescope

Die beiden Detektoren KAGRA und Einstein Telescope nehmen eine besondere Stellung ein. Wie Advanced LIGO und Advanced Virgo gehört auch der japanische Detektor KAGRA zur zweiten Generation während das Zukunftsprojekt Einstein Telescope bereits zur dritten Generation zählt. Advanced LIGO und Advanced Virgo nutzen bereits vorhandene Strukturen ihrer Vorgänger und setzen weiterhin auf optische Komponenten aus Fused Silica und einen Betrieb bei Raumtemperatur.

Im Gegensatz dazu ist KAGRA gänzlich neu konzipiert. Um die unvermeidlichen Störungen durch Seismik zu reduzieren, liegt er als erster Detektor unter der Erdoberfläche. Mit dem Bau der beiden entsprechenden Tunnel über je 3 km wurde bereits 2012 begonnen und unterdessen abgeschlossen [17]. Eine weitere Besonderheit ergibt sich durch die vorgesehene Temperatur der als Testmassen verwendeten Spiegel von 20 K. Dies macht allerdings einen Wechsel von Fused Silica zu einem kristallinen Material – in diesem Fall Saphir – notwendig, um auch bei tiefen Temperaturen einen niedrigen mechanischen Verlust und damit ein reduziertes thermisches Rauschen zu erzielen (vgl. Abschnitt 2.6). Zudem werden durch die niedrige Betriebstemperatur der Spiegel neue Anforderungen an die Pendelaufhängung gestellt. Diese muss neben einer hohen Festigkeit und einem geringen thermischen Rauschen zusätzlich für die

Abfuhr der durch Absorption anfallenden Wärme sorgen, also eine ausreichend hohe Wärmeleitfähigkeit aufweisen. KAGRA soll 2018 in Betrieb gehen.

Noch einen Schritt weiter geht das Europäische Vorhaben des Einstein Telescope. Als Detektor dritter Generation strebt man hier eine Verbesserung der Empfindlichkeit um den Faktor 100 im Vergleich zur ersten Generation an (vgl. Abbildung 2.4). Dadurch würde sich das Volumen für mögliche Quellen von Gravitationswellen gar um den Faktor 10^6 gegenüber der ersten Generation vergrößern. Anstatt einzelner Ereignisse wären dann dauerhaft Signale zu registrieren und man könnte vielmehr von einem Observatorium anstelle eines Detektors sprechen.

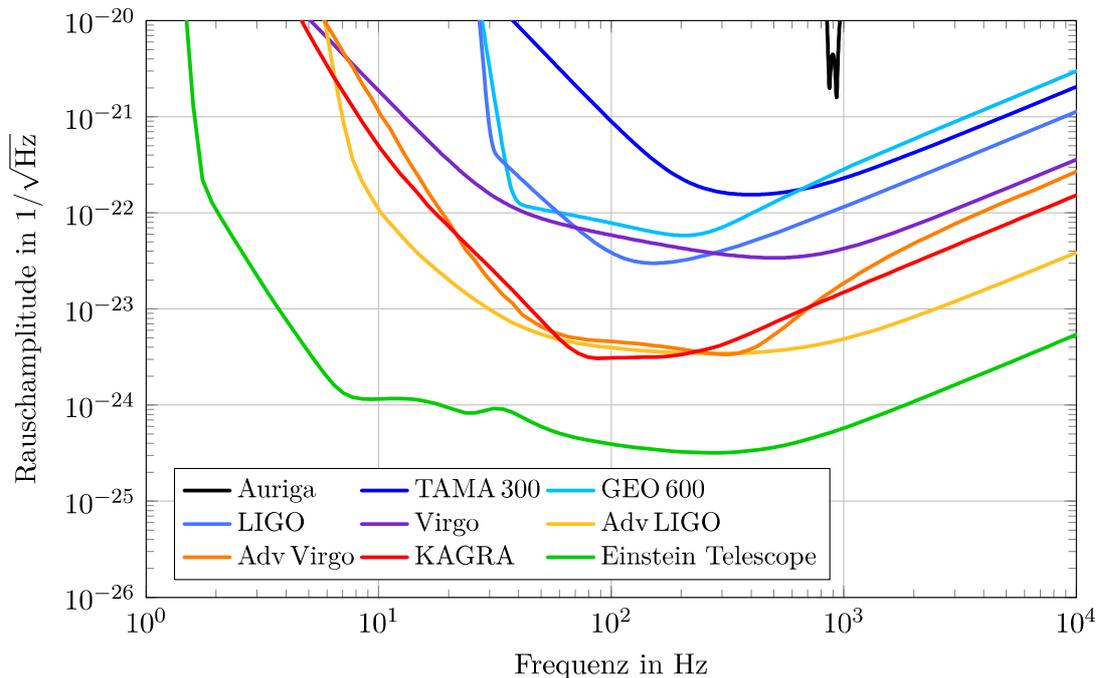
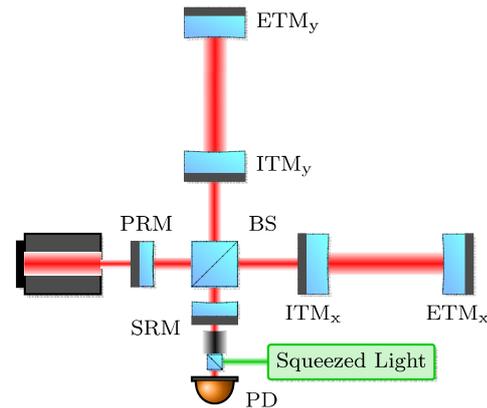


Abbildung 2.4.: Der Resonanzmassendetektor Auriga ist nur in einem schmalen Frequenzbereich knapp unterhalb von 1 kHz empfindlich [12]. Schon die interferometrischen Gravitationswellendetektoren der ersten Generation (blau-lilane Gruppe) erreichten in einem wesentlich größeren Frequenzbereich die nötige Empfindlichkeit besser 10^{-21} . Die zweite Generation (rot-gelbe Gruppe) liegt mit 10^{-23} um 100 Hz nochmals deutlich darüber. Das Einstein Telescope als Detektor dritter Generation soll nicht nur abermals empfindlicher werden, sondern ebenso das Detektionsband bis unter 10 Hz ausdehnen. Nach [18, 19, 20].

Auch für das Einstein Telescope ist eine unterirdische Lage vorgesehen. Hierfür wurden bereits mehrere mögliche Standorte auf seismische Störarmut untersucht, um diesbezüglich optimale Ausgangsbedingungen zu schaffen. Um das gesamte Detektionsband von wenigen Hz bis hinauf zu mehreren kHz abzudecken sollen außerdem zwei

Interferometer parallel betrieben werden. Während für den hochfrequenten Bereich (ET-HF) weiterhin die etablierte Technik mit Optiken aus Fused Silica bei Raumtemperatur zum tragen kommen soll, setzt man im Niederfrequenten auf einen kryogenen Detektor (ET-LF). Die Testmassen sollen hierbei auf eine Temperatur von 10 K gekühlt werden. Die für ein geringes Strahlungsdruckrauschen notwendige Masse von über 200 kg kann in der erforderlichen Qualität mit Saphir voraussichtlich nicht erreicht werden, stattdessen will man hier Silizium verwenden. Ebenfalls fest vorgesehen ist der Einsatz von Squeezing um das Quantenrauschen zu minimieren.

Abbildung 2.5.: Um das Quantenrauschen weiter abzusenken ist der Einsatz von sogenanntem gequetschtem Licht (Squeezed Light) vorgesehen, das am Ausgang des Interferometers eingekoppelt wird. Gleichzeitig sollen gekühlte Spiegel (ITM und ETM) für ein reduziertes thermisches Rauschen sorgen.



2.5. Rauschquellen in Gravitationswellendetektoren

In Abschnitt 2.3 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Empfindlichkeit eines Gravitationswellendetektors durch die Summe der Rauschamplituden $h_n(f)$ einer Vielzahl von Rausch- und Störprozessen bestimmt wird. Im Folgenden sollen vorerst zwei grundlegende Mechanismen kurz beschrieben werden, bevor dann auf das thermische Rauschen eingegangen wird. Für eine detaillierte und vollständige Übersicht sei auf die einschlägige Literatur und Publikationen verwiesen [6, 21, 22].

2.5.1. Seismisches Rauschen

Einen der anschaulichsten Störprozesse stellt die Seismik dar. Darunter sind sämtliche Bewegungen der Erdoberfläche aufgrund unterschiedlichster natürlicher Ursachen, wie vulkanische und geologische Aktivitäten, schwache Erdbeben, die Brandung des Meeres, Wind, Regen und Gezeiten aber auch durch Verkehr, Industrie und Landwirtschaft hervorgerufen, zu verstehen. Dies führt entweder direkt über eine mechanische Bewegung des Aufhängepunktes oder durch ein sich änderndes Gravitationspotential zu

einer Auslenkung Δz der Testmassen in Richtung des Laserstrahls. Näherungsweise ist die damit verbundene spektrale Amplitude $\sqrt{S_{\text{SSM}}(f)}$ oberhalb von etwa einem Hertz durch A/f^2 gegeben, wobei der Parameter A je nach Standort des Detektors zwischen 10^{-6} und 10^{-9} m Hz^{3/2} variiert [23, 24]. Die zugehörige Rauschamplitude folgt durch Division mit der Armlänge des Detektors [21]:

$$h_{\text{SSM}}(f) = \frac{A/f^2}{L}. \quad (2.15)$$

Das Rauschen von 10^{-13} bis 10^{-10} 1/ $\sqrt{\text{Hz}}$ liegt somit noch um mehrere Größenordnungen über der angestrebten Empfindlichkeit und macht daher eine entsprechende seismische Entkopplung notwendig.

Mit Hilfe der bereits angesprochenen Pendelaufhängung gelingt eine solche Isolation der Testmassen. Oberhalb der Resonanzfrequenz f_0 eines einzelnen Pendels wird das seismische Rauschen mit dem Faktor f_0^2/f^2 abgeschwächt. Nutzt man eine Kaskade von N Pendelstufen potenziert sich die Dämpfung zu $(f_0^2/f^2)^N$ und ermöglicht so einen Betrieb des Detektors. Jedoch sind Pendelfrequenzen deutlich unter einem Hertz nur schwer realisierbar. Der italienische Detektor Virgo beispielsweise nutzt hierfür ein als Superattenuator bezeichnetes, aufwendiges System aus sechs Pendelstufen, kombiniert mit einem invertiertem Pendel [25]. Eine weitere Reduktion seismischer Störungen lässt sich durch einen unterirdischen Detektor erreichen.

2.5.2. Quantenrauschen

Als Quantenrauschen bezeichnet man die Summe zweier Rauschbeiträge in einem Michelson-Interferometer, die sich jeweils aus der Teilchennatur von Licht ergeben. Die zeitliche Abfolge der Photonen in einem Laserstrahl ist nicht äquidistant, sondern unterliegt einer Poisson-Verteilung. Das Signal einer Photodiode³ ist demzufolge also nicht konstant, sondern unterliegt gewissen Schwankungen, die als Schrotrauschen bezeichnet werden [24]. Für ein einfaches Michelson-Interferometer nach Abbildung 2.2 aus Strahlteiler und zwei Endspiegeln mit dem Arbeitspunkt entsprechend der halben Eingangsleistung ($\phi_0 = \pi/4$) ist das Schrotrauschen (als einseitiges Spektrum) gegeben nach Saulson [6, Gl. (5.10)]:

$$h_{\text{SN}}^{\text{Mich}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{4\pi P}}, \quad (2.16)$$

³Die Effizienz η der Photodiode soll an dieser Stelle vernachlässigt werden und wird daher im Folgenden gleich eins angenommen.

mit der reduzierten Planck-Konstanten \hbar , der Lichtgeschwindigkeit c , der Wellenlänge λ des Lasers sowie der in einem Arm umlaufenden Leistung $P = P_{\text{in}}/2$. Ein zweiter Effekt ergibt sich durch die Reflexion des Laserstrahls an den Testmassen. Dabei überträgt ein einzelnes Photon seinen doppelten Impuls ($p_{\text{photon}} = h/\lambda$) auf die Testmasse, die durch den sogenannten Strahlungsdruck ausgelenkt wird. Die Photonen im Laserstrahl treffen allerdings wegen oben genannter Verteilung unregelmäßig auf die Oberfläche des Spiegels mit Masse m und führen daher zu einer Fluktuation in der Auslenkung [24]. Dieses sogenannte Strahlungsdruckrauschen gibt Saulson [6, Gl. (5.17)] an mit:

$$h_{\text{RPN}}^{\text{Mich}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\hbar P}{m^2 \pi^3 f^4 c \lambda}}. \quad (2.17)$$

Wählt man alternativ die Dark-Fringe-Konfiguration ($\phi_0 = 0$), so ergibt sich bei gleicher Leistung ein um den Faktor $1/\sqrt{2}$ geringeres Schrotrauschen während sich das Strahlungsdruckrauschen um $\sqrt{2}$ erhöht [26]. Dies lässt sich jedoch durch eine um rund 40 % größere Masse kompensieren. In Summe dominiert in beiden Fällen das Strahlungsdruckrauschen aufgrund seiner $1/f^2$ Abhängigkeit den niederfrequenten Bereich, während für höhere Frequenzen das Schrotrauschen überwiegt, siehe Abbildung 2.6. Da sich beide Gleichungen umgekehrt proportional zur Leistung P verhalten, kann für jeweils eine Frequenz genau eine optimale Leistung P bestimmt werden⁴, um das Quantenrauschen dort zu minimieren.

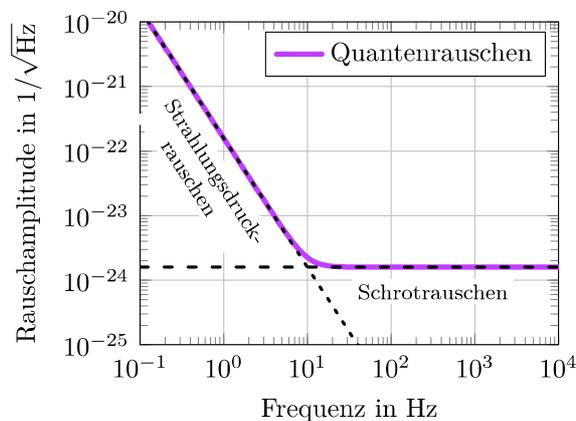


Abbildung 2.6.: Das Quantenrauschen in einem Michelson Interferometer wird bestimmt durch die Summe aus Strahlungsdruck- und Schrotrauschen. Für die hier gezeigte optimale Empfindlichkeit bei 10 Hz wären je Arm 15 MW Laserleistung notwendig (mit Werten des Einstein Telescope: $m = 211$ kg, $L = 10$ km, $\lambda = 1550$ nm [18]).

Allgemein beschreibt das sogenannte Standard Quanten Limit den Verlauf dieses Minimums mit der Frequenz. Da diese Grenze jedoch je nach gewählter Leistung immer

⁴Beide Terme stimmen an dieser Stelle überein und durch Gleichsetzen von Gleichung (2.16) und (2.17) erhält man für die optimale Leistung in einem Arm $P_{\text{opt}} = 1/2 \cdot m\pi c \lambda f^2$ bzw. analog dazu $P_{\text{opt}}^{\text{DF}} = 1/4 \cdot m\pi c \lambda f^2$

nur für eine bestimmte Frequenz erreicht werden kann, verläuft das Quantenrauschen ansonsten oberhalb davon (vgl. Abbildung 2.7). Das Standard Quanten Limit in einem einfache Michelson-Interferometer ist gegeben mit [6, Gl. (5.20)]:

$$h_{\text{SQL}}^{\text{Mich}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\hbar}{\pi^2 f^2 m}}. \quad (2.18)$$

Eine wie in Abbildung 2.6 gezeigte Optimierung auf 10 Hz würde in einem solchem Interferometer mit, wie beispielsweise für das Einstein Telescope vorgesehen, 211 kg schweren Testmassen am Ende 10 km langer Arme und einer Wellenlänge von 1550 nm eine Laserleistung von rund $P = 15$ MW je Arm erforderlich machen – ein Wert, weit über den Möglichkeiten aktuell erhältlicher Laserquellen.

Die Verwendung von Fabry-Pérot-Resonatoren mit Finesse \mathcal{F} in interferometrischen Gravitationswellendetektoren führt neben der in Abschnitt 2.3 schon beschriebenen virtuellen Verlängerung der Arme zu weiteren Effekten. Zum einen reduziert sich in Folge der Leistungsüberhöhung in den Armen um den Faktor $2\mathcal{F}/\pi$ die erforderliche Eingangsleistung zum Teil erheblich und das Schrotrauschen sinkt, während das Strahlungsdruckrauschen zunimmt. Zum anderen übersteigt ab einer bestimmten Frequenz der Gravitationswelle deren halbe Periodendauer die Laufzeit für ein Lichtsignal in den Resonatoren und die für Gleichung (2.9) vorausgesetzte Vereinfachung verliert ihre Gültigkeit. Wegen der Periodizität der Gravitationswelle kehrt sich ihre verlängernde Wirkung auf die Laufzeit während der ersten Hälfte einer Periode um zu einer Verkürzung in der zweiten Hälfte und kompensiert so den Effekt, die Signalstärke nimmt ab. Dadurch stellt sich zusätzlich noch eine Frequenzabhängigkeit für beide Rauschterme mit der Polfrequenz $f_p \approx c/4\mathcal{F}L$ ein. Das Schrotrauschen in einem Fabry-Pérot-Interferometer ist dann gegeben durch [21]:

$$h_{\text{SN}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{8\mathcal{F}P} \left[1 + (f/f_p)^2 \right]}, \quad (2.19)$$

und das Strahlungsdruckrauschen durch:

$$h_{\text{RPN}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{8\hbar\mathcal{F}P}{m^2\pi^4\lambda c f^4} \left[\frac{1}{1 + (f/f_p)^2} \right]}. \quad (2.20)$$

Das Standard Quanten Limit erhöht sich in einem Fabry-Pérot-Interferometer wegen der Verwendung von Armresonatoren um den Faktor zwei gegenüber einem einfachen

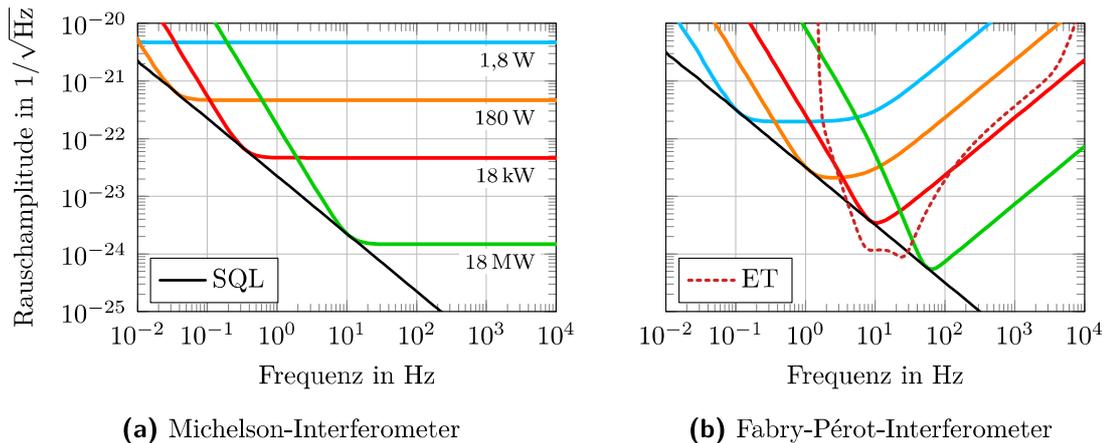


Abbildung 2.7.: Bei unterschiedlichen Laserleistungen erreicht das Quantenrauschen sowohl in einem Michelson-Interferometer (a) als auch einem Fabry-Pérot-Interferometer (b) jeweils für eine Frequenz das Standard-Quanten-Limit (SQL, schwarz). Die Verwendung von Armresonatoren sorgt für eine deutliche Frequenzabhängigkeit, reduziert allerdings auch den Leistungsbedarf erheblich. So ermöglicht ein Fabry-Pérot-Interferometer mit 18 kW unter 10 Hz nahezu die gleiche Empfindlichkeit wie ein vergleichbares Michelson-Interferometer bei 18 MW (je mit Werten des Einstein Telescope: $m = 211$ kg, $L = 10$ km, $\lambda = 1550$ nm, $\mathcal{F} = 880$ [18]). Im Vergleich dazu liegt die Zielempfindlichkeit des Einstein Telescope (ET) nochmals tiefer und soll mit Hilfe von Squeezing erreicht werden.

Michelson-Interferometer auf:

$$h_{\text{SQL}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\pi^2 f^2}}, \quad (2.21)$$

In klassischer Sichtweise ist damit eine fundamentale Grenze in der Empfindlichkeit von Gravitationswellendetektoren festgelegt. Es existieren allerdings Ansätze, das Standard-Quanten-Limit durch die Verwendung von sogenanntem gequetschtem Licht – squeezed light – zu umgehen [27]. In GEO 600 konnte dies bereits erfolgreich demonstriert werden [16] und wird als zukünftige Verbesserung in Advanced LIGO in Betracht gezogen [28]. Auch für das Einstein Telescope ist vorgesehen, das Quantenrauschen durch die Verwendung von Squeezing unterhalb des klassischen Limits zu senken [18]. Die in Abbildung 2.7 zusätzlich gezeigte Zielempfindlichkeit berücksichtigt dies bereits und verläuft folgerichtig um 10 Hz unterhalb des Standard-Quanten-Limits.

Um das gesteckte Ziel zu erreichen, erfordert dies im Umkehrschluss auch, dass keine anderen Rauschquellen die Empfindlichkeit limitieren dürfen. Das Quantenrauschen bzw. das Standard-Quanten-Limit können daher als eine Referenz verwendet werden.

2.6. Thermisches Rauschen in optischen Komponenten

Die beiden bisher vorgestellten Rauschprozesse sind maßgeblich durch den Standort, die Masse der Testmassen, deren Abstand zueinander sowie die Laserleistung bestimmt. Des Weiteren haben aber vor allem die Temperatur sowie zahlreiche Materialparameter der Testmassen großen Einfluss auf das Rauschverhalten des Detektors und sollen als thermisches Rauschen zusammengefasst werden. Nachfolgend erfolgt zunächst eine allgemeine Darstellung des Zusammenhangs von Dissipation und Rauschen in einem System, das die Grundlage zur Berechnung des Brownschen Rauschens liefert. Im Anschluss werden weitere Rauschmechanismen vorgestellt, die auf Temperaturfluktuationen im Material zurückgehen.

2.6.1. Fluktuations-Dissipations-Theorem

Das Fluktuations-Dissipations-Theorem nach Callen und Welton verknüpft Dissipation in einem linearen System auf direkte Weise mit Rauschen in selbigem [29]. Ausgehend von einer generalisierten Kraft V (beispielsweise Spannung U oder Kraft F) ergibt sich die Rauschleistungsdichte für die generalisierte Kraft S_V demnach gemäß:

$$S_V = 4k_B T \operatorname{Re}[Z] , \quad (2.22)$$

wobei T die Temperatur, k_B die Boltzmannkonstante und $\operatorname{Re}[Z]$ den Realteil der sogenannten Impedanz des Systems darstellt. Die Impedanz verbindet die generalisierte Kraft V mit einer generalisierten Verschiebung q (Ladung Q oder Position x) durch:

$$Z = \frac{V}{\dot{q}} . \quad (2.23)$$

Als dissipatives System soll zunächst ein einfacher elektrischer Widerstand betrachtet werden. Der Quotient aus Spannung U und Strom \dot{Q} liefert dessen Impedanz R und es folgt die entsprechende Rauschleistungsdichte der Spannung unmittelbar mit:

$$S_U = \frac{U_R^2}{\Delta f} = 4k_B T R . \quad (2.24)$$

Damit erhält man übereinstimmend mit Nyquist [30] das bekannte thermische Rauschen eines Widerstandes mit der entsprechenden Rauschspannung $U_R = \sqrt{4k_B T R \Delta f}$ für

das betrachtete Frequenzintervall Δf .⁵

Auch in mechanischen Systemen wie einem harmonischen Oszillator oder einem Festkörper tritt Dissipation auf. In diesem Fall entspricht die Impedanz dann dem Quotienten aus Kraft F und Geschwindigkeit \dot{x} . Anstatt der Rauschleistungsdichte der Kraft soll nun aber die Leistungsdichte des Positionsrauschens bestimmt werden. Dazu geht man über in den Frequenzraum und nutzt die Ersetzung:

$$F(t) = Z \cdot \dot{x} \quad \rightarrow \quad F(f) = Z \cdot i\omega x. \quad (2.25)$$

Dabei ist $\omega = 2\pi f$. Mit Hilfe von Gleichung (2.22) ergibt sich die Rauschleistungsdichte der Position x dann zu [32, 33]:

$$S_x = \frac{4k_B T}{\omega^2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{Z} \right]. \quad (2.26)$$

Im Falle eines eindimensionalen viskos gedämpften harmonischen Oszillator mit Masse m , Federkonstante k und Dämpfungskonstante γ ist die Bewegungsgleichung gegeben durch $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F$ und man erhält mit dem Ansatz $x = x_0 \exp(i\omega t)$ für den Kehrwert der Impedanz [34]:

$$\frac{1}{Z} = \frac{\dot{x}}{F} = \frac{\omega^2 \gamma + i(\omega k - \omega^3 m)}{\omega^2 \gamma^2 + (k - \omega^2 m)^2}, \quad (2.27)$$

und entsprechend eingesetzt in Gleichung (2.26) mit der Resonanzfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{k/m}$:

$$S_x^{\text{vis}}(\omega) = \frac{4k_B T \gamma}{\omega^2 \gamma^2 + (k - \omega^2 m)^2} = \frac{4k_B T \gamma}{\omega^2 \gamma^2 + m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (2.28)$$

Anstatt der im harmonischen Oszillator verwendeten viskosen Dämpfung, stellt für einen Festkörper die sogenannte Strukturdämpfung ein besseres Modell dar (vgl. Kapitel 3). Die Federkonstante wird hierbei durch eine komplexe Größe ausgedrückt und die Bewegungsgleichung lautet in diesem Fall $m\ddot{x} + k(1 + i \tan \phi)x = F$ wobei i die imaginäre Einheit und ϕ den Verlustwinkel bzw. den mechanischen Verlust darstellt [35]. Für kleine Winkel ist $\tan \phi \approx \phi$ und man erhält folglich mit dem gleichen Ansatz

⁵Üblicherweise wählt man $\Delta f = 1 \text{ Hz}$, in der Audio-/Video-Technik findet man jedoch beispielsweise auch $\Delta f \approx 20 \text{ kHz}$, die Spannung wird dann entsprechend über den gesamten hörbaren Frequenzbereich erfasst [31].

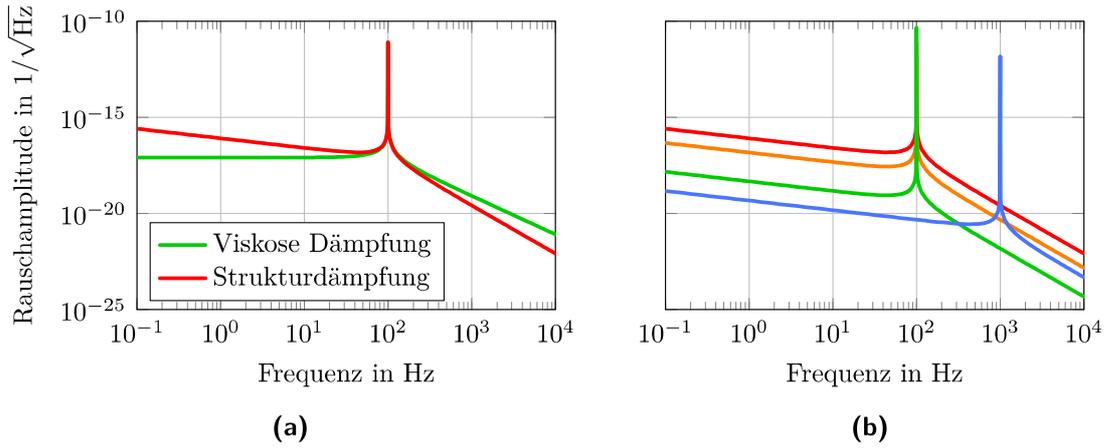


Abbildung 2.8.: (a) Vergleich des Amplitudenrauschens $\sqrt{S_x}$ eines harmonischen Oszillators mit viskoser Dämpfung und Strukturdämpfung. (Beispielwerte: $T = 300$ K, $f_0 = 100$ Hz, $m = 1$ kg, $\phi = 10^{-6}$) (b) Sowohl durch eine reduzierte Temperatur $T = 10$ K (orange), zusätzlich einen geringeren Verlustwinkel $\phi = 10^{-9}$ (grün) als auch durch eine erhöhte Resonanzfrequenz $f_0 = 1$ kHz (blau) kann eine Abnahme des Rauschens im strukturedämpften Oszillator erzielt werden.

wie oben:

$$\frac{1}{Z} = \frac{\dot{x}}{F} = \frac{\omega k \phi + i(\omega k - \omega^3 m)}{k^2 \phi^2 + (k - \omega^2 m)^2}, \quad (2.29)$$

und ebenfalls mit Gleichung (2.26) sowie der Resonanzfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

$$S_x^{\text{str}}(\omega) = \frac{4k_B T k \phi}{\omega (k^2 \phi^2 + (k - \omega^2 m)^2)} = \frac{4k_B T \omega_0 \phi}{\omega m (\omega_0^4 \phi^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)}. \quad (2.30)$$

Während die Rauschleistungsdichte der viskosen Dämpfung unterhalb der Resonanz nahezu konstant verläuft und oberhalb davon mit $1/\omega^4$ abfällt, findet man für die Strukturdämpfung die Abhängigkeit $1/\omega$ für Frequenzen kleiner bzw. $1/\omega^5$ für Frequenzen größer ω_0 . Die Strukturdämpfung lässt sich durch die Wahl eines frequenzabhängigen Verlustwinkels $\phi = \gamma\omega/k$ formal in das Bild der viskosen Dämpfung überführen. Abbildung 2.8a vergleicht die spektrale Rauschamplitude $\sqrt{S_x}$ für beide Dämpfungsmodelle mit einem konstanten Verlustwinkel $\phi = \gamma\omega_0/k$. Aus Gleichung (2.30) wird außerdem die direkte Abhängigkeit des Rauschens von der Temperatur T und dem Verlustwinkel ϕ sowie der Frequenz ω_0 deutlich, vgl. hierzu Abbildung 2.8b. Dies stellt einen wesentlich Aspekt für die nachfolgende Betrachtung des Brownschen Rauschens in optischen Komponenten dar.

2.6.2. Brownsches Rauschen

Atome und Moleküle besitzen aufgrund ihrer Temperatur eine thermische Energie von $1/2k_B T$ je Freiheitsgrad. Aufgrund dieser Energie kommt es zur sogenannten Brownschen Bewegung wie sie erstmals im Jahre 1827 von dem schottischen Mediziner und Botaniker Robert Brown an Pollensporen des Mandelröschens beobachtet wurde [36]. In einem Gravitationswellendetektor äußert sich diese Bewegung vor allem in Form von Fluktuationen an der Oberfläche der Testmassen und suggeriert eine Längenänderung im Interferometer.

Anfangs erfolgte die Berechnung des Brownschen Rauschens mit Hilfe der sogenannten Modensummation. Jede Eigenschwingung ω_j der Testmassen wurde als strukturgedämpfter harmonischer Oszillator mit dem mechanischen Verlust ϕ_j und effektiver Masse m_j aufgefasst und führte entsprechend Gleichung (2.30), gewichtet mit dem Strahlprofil des Lasers, zu einem Rauschbeitrag. Das Brownsche Rauschen der Testmassen ergab sich dann durch die Summation über alle Beiträge [37]. Schwächen dieser Herangehensweise finden sich in der Annahme eines homogenen Verlustwinkels für die gesamte Testmasse. Die hochreflektiven Schichtstapel an der Oberfläche weisen deutlich höhere Verluste auf, als das zugrunde liegende Substrat und müssen daher entsprechend gesondert behandelt werden [38]. Eine weitere Schwierigkeit stellt die große Anzahl an erforderlichen Eigenschwingung für eine konvergente Lösung dar [32].

Anstelle der Modensummation entwickelte Levin basierend auf dem Fluktuations-Dissipations-Theorem eine Möglichkeit zur direkten Berechnung des Brownschen Rauschens [32]. Dazu wird in einem ersten Schritt virtuell ein periodisch oszillierender Druck $P(t) = F_0 q(r) \exp(i\omega t)$ mit der Kraft F_0 sowie der Intensitätsverteilung des Laserstrahls $q(r)$ auf die Oberfläche der Testmassen aufgebracht. Für ein gaußförmiges Strahlprofil erhält man die Verteilung:

$$q(r) = \frac{1}{\pi r_0^2} \exp\left(\frac{-r^2}{r_0^2}\right). \quad (2.31)$$

Der Parameter r_0 gibt den Abfall der Intensität auf $1/e$ an, ebenfalls gebräuchlich ist auch die Angabe von w_0 als Abfall des Feldes auf $1/e$ bzw. demzufolge der Intensität auf $1/e^2$ an. Beide Größen werden als Strahlradius bezeichnet und sind entsprechend über $w_0 = \sqrt{2}r_0$ verknüpft. Im nächsten Schritt ermittelt man die Energiedissipation W_{diss} , die der periodisch oszillierende Druck im betrachteten Volumen verursacht. Die während einer Periode zum Zeitpunkt der größten Verformung durch den virtuellen Druck auftretende elastische Energie U_{max} liefert zusammen mit dem mechanischen

Verlust ϕ die dissipierte Energie W_{diss} in einem strukturedämpften Festkörper:

$$W_{\text{diss}} = \omega U_{\text{max}} \phi, \quad (2.32)$$

bzw. mit der elastischen Energiedichte ρ_U in integraler Form für das Volumen V :

$$W_{\text{diss}} = \omega \int_V \rho_U(r) \phi(r) dr. \quad (2.33)$$

Im letzten Schritt wird schließlich die Rauschleistungsichte berechnet mit Hilfe des Ausdrucks:

$$S_x(\omega) = \frac{8k_B T W_{\text{diss}}}{\omega^2 F_0^2}. \quad (2.34)$$

Diese Herangehensweise erlaubt sowohl analytische Lösungen, bietet aber auch die Möglichkeit kompliziertere Systeme wie z.B. die letzte Stufe einer Pendelaufhängung auf numerischem Wege mittels Finite Elemente Software zu untersuchen. Nachfolgend sind die wichtigsten Quellen Brownschen Rauschens kurz aufgeführt.

Brownsche Rauschen der Testmassen

Auf analytischem Wege ist es möglich das Brownsche Rauschen der Testmassen zu berechnen, falls der Strahlradius des Lasers w_0 wesentlich kleiner als der Radius der Testmassen ausfällt. Dann können diese in guter Näherung als unendlich ausgedehnter Halbraum angenommen werden. Der Beitrag durch das Substrat ergibt sich aus dem folgenden Ausdruck [33, 39, 40, 41]:

$$S_{\text{Brown}}^{\text{TM}} = \frac{2k_B T}{\sqrt{\pi^3} f} \frac{1 - \nu^2}{Y w_0} \phi. \quad (2.35)$$

Hierbei stehen Y und ν für die beiden elastischen Materialparametern E-Modul und Poissonzahl. Im Falle anisotroper Testmassen wie aus Silizium oder Saphir anstatt amorphem Quarzglas müssen die Kristallorientierung und damit verbundene Änderungen der elastischen Parameter berücksichtigt werden. Des Weiteren wird an Gleichung (2.35) die Bedeutung sowohl der Temperatur T als auch des mechanischen Verlustes ϕ der Testmassen deutlich.

Brownsches Schichtrauschen

Die hochreflektive Beschichtung der Testmassen führt trotz ihrer geringen Dicke aufgrund des hohen mechanischen Verlustes in dem isotropen Schichtstapel zu einem

weiteren Rauschterm. Harry et al. behandelten diesen Fall ebenfalls unter der Voraussetzung eines kleinen Strahlradius [42]. Mit Hilfe der Übergangsbedingungen für mechanische Spannungen und Verzerrungen zwischen dem Substrat und der dünnen Schicht kann die Energiedissipation in der Schicht berechnet werden und es folgt der Ausdruck für das Brownsches Rauschen der Schicht:

$$S_{\text{Brown}}^{\text{coat}} = \frac{2k_{\text{B}}T}{\sqrt{\pi^3}f} \frac{1 - \nu^2}{Yw_0} \phi_{\text{eff}}^{\text{coat}}. \quad (2.36)$$

Die beiden Parameter Y und ν beziehen sich dabei wiederum auf das Substratmaterial während $\phi_{\text{eff}}^{\text{coat}}$ für den effektiven Verlust des Schichtstapels mit Dicke t steht und für kleine Poissonzahlen ν in Substrat und Schicht gegeben ist durch:

$$\phi_{\text{eff}}^{\text{coat}} = \frac{t}{\sqrt{\pi}w_0} \left(\frac{Y}{Y_{\perp}} \phi_{\perp} + \frac{Y_{\parallel}}{Y} \phi_{\parallel} \right). \quad (2.37)$$

Die E-Moduln Y_{\perp} und Y_{\parallel} senkrecht und parallel zur Grenzfläche folgen aus den Werten Y_1 und Y_2 für die beiden alternierenden Schichtmaterialien und deren jeweilige Dicke t_1 und t_2 . Die zugehörigen mechanischen Verluste ϕ_{\perp} und ϕ_{\parallel} folgen unter Verwendung von ϕ_1 und ϕ_2 :

$$Y_{\perp} = \frac{t_1 + t_2}{t_1/Y_1 + t_2/Y_2}, \quad Y_{\parallel} = \frac{t_1 \cdot Y_1 + t_2 \cdot Y_2}{t_1 + t_2}, \quad (2.38)$$

$$\phi_{\perp} = \frac{(t_1/Y_1) \phi_1 + (t_2/Y_2) \phi_2}{(t_1 + t_2)/Y_{\perp}}, \quad \phi_{\parallel} = \frac{(Y_1 \cdot t_1) \phi_1 + (Y_2 \cdot t_2) \phi_2}{(t_1 + t_2) \cdot Y_{\parallel}}. \quad (2.39)$$

Granata et al. geben für unterschiedliche Materialkombinationen eine vereinfachten Ausdruck von Gleichung (2.36) mit dem material- und temperaturabhängigen Parameter A_{m} für einen optimierten Schichtstapel an [43]:

$$S_{\text{Brown}}^{\text{coat}} = \frac{2k_{\text{B}}T}{\pi^2 w_0^2 f} A_{\text{m}}. \quad (2.40)$$

Brownsches Rauschen der Pendelaufhängung

Auch die Pendelaufhängung der Testmassen verursacht Brownsches Rauschen. In den letzten Jahren wurden große Anstrengungen unternommen, um die Aufhängung zu verbessern. Dazu gehört unter anderem der Wechsel von Drahtschlingen zu einem monolithischen System aus vier dünnen, profiliert gezogenen Fasern am Ende einer mehrstufigen Kaskade [15, 44, 45]. Für die Rauschbetrachtung soll an dieser Stelle

lediglich ein einfaches Modell eines Pendels mit punktförmiger Masse m betrachtet werden. Für kleine Auslenkungen des Massenschwerpunkts kann das System als strukturedämpfter Oszillator interpretiert werden [34, 46]. Die Resonanz entspricht der Pendelfrequenz $f_p = 1/2\pi\sqrt{g/l}$, wobei l die Länge der Pendelfaser und g die Erdbeschleunigung bezeichnen, typische Werte von f_p liegen im Bereich einiger Hz. Analog zu Gleichung (2.30) folgt der von der Pendelmode ausgehende Rauschterm:

$$S_{\text{Brown}}^{\text{pend}} = \frac{k_B T}{2\pi^3 f m} \frac{f_p^2 \phi_p}{f_p^4 \phi_p^2 + (f_p^2 - f^2)^2}. \quad (2.41)$$

Dabei ist jedoch zu beachten, dass die rücktreibende Kraft bei einer horizontalen Auslenkung der Masse zum einen durch den Anstieg potentieller Energie E_{grav} im Gravitationsfeld der Erde verursacht wird, zum anderen von der elastisch gespeicherte Energie E_{el} im gebogenen Teil der Faser an beiden Enden. Während die potentielle Energie vollständig zurück gegeben wird, dissipiert aufgrund des mechanischen Verlusts im Material ϕ_{fib} ein Teil der elastischen Energie. Der Verlust des Pendels ϕ_p ist deshalb für $E_{\text{grav}} \ll E_{\text{el}}$ gegeben mit:

$$\phi_p = \frac{E_{\text{el}}}{E_{\text{grav}}} \phi_{\text{fib}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{YI}{\tau l^2}} \phi_{\text{fib}} = \frac{\phi_{\text{fib}}}{D_p}. \quad (2.42)$$

Der Vorfaktor, um den sich der Verlust der Faser ϕ_{fib} verringert bezeichnet man auch als Dilutionfaktor D_p [47]. Dabei ist Y das E-Modul und $I = \pi d^4/64$ das Flächenträgheitsmoment für den kreisförmigen Querschnitt einer Pendelfaser mit Durchmesser d und $\tau = mg$ die mechanische Spannung.

Eine weitere Rauschquelle stellen die Violinmoden der Pendelfaser dar [48]. Im Falle dünner, gespannter Fasern ist die v -te Eigenfrequenz näherungsweise gegeben durch [49, Gl. (6)]:

$$f_v = \frac{v}{2l} \sqrt{\frac{\tau}{\rho_l}} \left(1 + \frac{2}{kl} + \left(4 + \frac{v^2 \pi^2}{2} \right) \frac{1}{k^2 l^2} \right). \quad (2.43)$$

Der Vorfaktor entspricht den Frequenzen einer gespannten idealen Saite mit linearer Massendichte ρ_l . Die Faktoren, die in der Klammer mit der Größe $k \approx \sqrt{\tau/(YI)}$ verbunden sind, tragen hingegen der Steifigkeit der Faser Rechnung [46, 49]. Wie für die Pendelmode kann nur die elastisch gespeicherte Energie dissipiert werden, sodass der Verlust $\phi_v = \phi_{\text{fib}}/D_v$ ebenfalls mit einem entsprechenden Dilutionfaktor D_v

verknüpft ist [49, Gl. (8)]:

$$\frac{1}{D_v} = \frac{2}{kl} \left(1 + \left(4 + \frac{v^2 \pi^2}{2} \right) \frac{1}{kl} \right). \quad (2.44)$$

Das Brownsche Rauschen der v -ten Violinmode der Pendelfaser mit Masse m_{fib} ist schließlich gegeben durch [15, 46, 50]:

$$S_{\text{Brown}}^{\text{vio},v} = \frac{k_B T m_{\text{fib}}}{4\pi^4 m^2 v^2} \frac{f_v^2 \phi_v}{f_v^4 \phi_v^2 + (f_v^2 - f^2)^2}. \quad (2.45)$$

2.6.3. Thermoelastisches Rauschen

Der Begriff des thermoelastischen Rauschens geht auf die Verknüpfung von Temperaturfluktuationen in einem Festkörper mit dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten α zurück. Durch diese Kopplung kommt es an der Oberfläche zu Fluktuationen, die dann eine Längenänderung im Interferometer ergeben. Die Berechnung des thermoelastischen Rauschens kann ebenfalls nach dem von Levin aufgezeigten Schema erfolgen. Der periodisch oszillierende Druck führt umgekehrt zur thermischen Ausdehnung zu einer Temperaturverteilung in gestauchten und gestreckten Bereichen, die durch einen irreversiblen Wärmefluss ausgeglichen wird. Die dabei dissipierte Energie ergibt sich dann wie für das Brownsche Rauschen (Gleichung (2.32)) mit dem thermoelastischen Verlust ϕ_{te} als Funktion von Temperatur und Materialparametern (vgl. Unterabschnitt 3.3.1). Im Nachfolgenden werden kurz die wichtigsten Beiträge zum thermoelastischen Rauschen in einem Gravitationswellendetektor angegeben.

Thermoelastisches Rauschen der Testmassen

Braginsky et al. bestimmten das Rauschen für unendliche Testmassen und ein gaußförmiges Strahlprofil des Lasers. Unter der Voraussetzung einer thermischen Diffusionslänge im Material kleiner als der Strahldurchmesser $l_{\text{th}} = \sqrt{\kappa/\rho C 2\pi f} \ll 2w_0$ wird das thermoelastische Rauschen in adiabatischer Näherung angegeben mit [39]:

$$S_{\text{TE}}^{\text{TM}} = \frac{4k_B T^2}{\sqrt{\pi^5} f^2} \frac{\alpha^2 (1 + \nu)^2 \kappa}{\rho^2 C^2 w_0^3} \quad (2.46)$$

Die Größen ρ , κ , C und ν sind die (Massen-) Dichte, die Wärmeleitfähigkeit, die spezifische Wärmekapazität pro Volumen und die Poissonzahl des Testmassenmaterials bei der Temperatur T . Eine Behandlung mit Rücksicht auf endliche Abmessungen zeigt

nur geringe Abweichungen [40]. Bei tiefen Temperaturen nimmt jedoch die thermische Leitfähigkeit von Silizium und insbesondere von Saphir stark zu (vgl. Abbildung A.2) und macht daher laut Cerdonio et al. [51] eine Korrektur des thermoelastischen Rauschens erforderlich:

$$S_{\text{TE}}^{\text{TM}} = \frac{4k_{\text{B}}T^2w_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha^2(1+\nu)^2}{\kappa} J[\Omega] \quad (2.47)$$

mit dem numerisch zu lösendem Integral:

$$J[\Omega] = \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{u^3 \exp(-u^2/2)}{(u^2+v^2) [(u^2+v^2)^2 + \Omega^2]} \quad (2.48)$$

wobei Ω gegeben ist durch das Verhältnis $2\pi f/\omega_c$ mit der charakteristischen (Kreis-) Frequenz $\omega_c = 2\kappa/\rho C w_0^2$. Von Somiya et al. stammt eine analytische Lösung für das Integral [52]. Es zeigt sich, dass bei niedrigen Frequenzen der Beitrag des thermoelastischen Rauschens der Testmassen abnimmt. Eine weitere Besonderheit stellt sich für Silizium bei Temperaturen von etwa 18 K und 125 K ein, dort verschwindet der Ausdehnungskoeffizient α (vgl. Abbildung A.1) und damit auch das thermoelastische Rauschen.

Thermoelastisches Schichtrauschen

Ebenfalls von Braginsky et al. wurde das thermoelastische Rauschen einer einzelnen Schicht im adiabatische Grenzfall und zunächst unter der Annahme gleicher elastischer Konstanten für Substrat und Schicht behandelt [41]. Fejer et al. fanden schließlich eine Lösung ohne diese Vereinfachung, wonach sich das thermoelastische Rauschen für einen Schichtstapel der Gesamtdicke t aus N Doppellagen der Dicke t_1 und t_2 folgendermaßen ergibt [53]:

$$S_{\text{TE}}^{\text{coat}} = \frac{8k_{\text{B}}T^2}{\pi^2 f} \frac{t}{w_0^2} \frac{\alpha_s^2 C_c}{C_s^2} (1+\nu_s)^2 \Delta^2 g(f) . \quad (2.49)$$

Die Parameter α_s , C_s und ν_s beziehen sich hierbei wieder auf das zu Grunde liegende Substrat (die Testmasse), während die effektive Wärmekapazität des Schichtstapels $C_c = C_{\text{eff}}$ durch die nachfolgenden Mittlungsvorschrift für eine Größe X bestimmt ist:

$$X_{\text{eff}} = \frac{t_1}{t_1+t_2} X_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2} X_2 . \quad (2.50)$$

Durch die Indizes 1 und 2 werden jeweils Eigenschaften des betreffenden Schichtmaterials unterschieden. Der Parameter Δ folgt aus dem Ausdruck:

$$\Delta = \frac{C_s}{2\alpha_s C_c} \left(\frac{\alpha}{1-\nu} \left[\frac{1+\nu}{1+\nu_s} + (1-2\nu_s) \frac{Y}{Y_s} \right] \right)_{\text{eff}} - 1. \quad (2.51)$$

Die Funktion $g(f)$ schließlich liefert die Frequenzabhängigkeit des Rauschterms durch:

$$g(f) = \text{Im} \left[-\frac{1}{\sqrt{i2\pi f \tau_c}} \frac{\sinh \sqrt{i2\pi f \tau_c}}{\cosh \sqrt{i2\pi f \tau_c} + R \sinh i2\pi f \tau_c} \right], \quad (2.52)$$

mit der Zeitkonstanten $\tau_c = t^2 C_c / k_c$ für die thermische Diffusion im Schichtstapel und dem Parameter $R = \sqrt{(k_c C_c) / (k_s C_s)}$. Dabei ist die effektive Wärmeleitfähigkeit des Schichtstapels k_c wiederum mit Gleichung (2.50) gegeben und k_s die Wärmeleitfähigkeit des Substrates.

An der Vielzahl der Parameter wird die Komplexität des thermoelastischen Rauschens der hochreflektiven Schicht deutlich. Sowohl die Eigenschaften der beiden Schichtmaterialien selbst als auch ihr Kombination untereinander sowie das eingesetzte Substratmaterial haben Einfluss auf das Rauschverhalten.

Thermoelastisches Rauschen der Pendelaufhängung

Temperaturfluktuationen in den Pendelaufhängungen verkürzen bzw. verlängern die verwendeten Fasern stellenweise und führen so zu einer Auslenkung der Testmassen. Dieses thermoelastische Rauschen durch die Pendelaufhängung ist direkt mit dem bereits am Anfang dieses Abschnitts erwähnten thermoelastischen Verlust ϕ_{te} der verwendeten Faser verknüpft. Cagnoli et al. kombinierten den thermischen Ausdehnungskoeffizienten und die Änderung des E-Modul mit der Temperatur zu einem effektiven Ausdehnungskoeffizienten [54]:

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \frac{\tau}{Y} \frac{dY}{dT}. \quad (2.53)$$

Wegen $\phi_{te} \sim \alpha_{\text{eff}}$ folgt, dass bei gleichem Vorzeichen von α und dY/dT , wie im Falle von Quarzglas, eine passend gewählte mechanische Spannung τ das thermoelastische Rauschen verschwinden lässt [55]. Da ϕ_{te} außerdem maßgeblich durch den Durchmesser der Faser bestimmt wird (vgl. Gleichung (3.11) und (3.13)), verwendet man für Detektoren bei Raumtemperatur speziell angepasste, stark profiliert gezogene Fasern

für ein minimales Rauschen [15, 56].

Im Vergleich dazu unterscheiden sich die Anforderungen für kryogene Detektoren dahingehend, dass der Wärmeabtransport von den Testmassen nur über die Fasern erfolgt und daher einen gewissen Mindestquerschnitt erfordert [50]. Aufgrund der tiefen Temperaturen erwartet man allerdings ohnehin nur einen vernachlässigbaren Beitrag zum thermoelastischen Rauschen durch die Pendelaufhängung [44]

2.6.4. Thermorefraktives Rauschen

Neben der Kopplung von Temperaturfluktuationen über den Ausdehnungskoeffizienten α ist dies auch über den thermooptischen Koeffizienten $\beta = dn/dT$ möglich. Thermorefraktives Rauschen tritt folglich überall dort zu Tage, wo der Laserstrahl ein Material mit der Brechzahl n durchstrahlt. Die anschließende Darstellung soll dabei auf die wesentlichen Komponenten, den Strahlteiler, den Einkoppelspiegel sowie die Beschichtung der Testmassen, beschränkt werden.

Thermorefraktives Rauschen in Strahlteiler und Substrat

Für den adiabatischen Fall $l_{\text{th}} \ll 2w_0$ findet man ebenfalls von Braginsky et al. [57] eine Näherung für ein Substrat in Form einer unendlich ausgedehnten Scheibe und der Höhe l [57]:

$$S_{\text{TR}}^{\text{bulk}} = \frac{4k_{\text{B}}T^2}{\pi^3 f^2} \frac{l}{w_0^4} \frac{\beta^2 \kappa}{\rho^2 C^2}. \quad (2.54)$$

Dabei wird jedoch lediglich die einfache senkrechte Durchstrahlung des Substrates betrachtet. Benthem et al. berücksichtigten in ihrer Rechnung für den Strahlteiler sowohl die elliptische Verzerrung des Strahlprofils als auch den Effekt der stehenden Welle im Interferometer [58]:

$$S_{\text{TR}}^{\text{BS}} = \frac{4k_{\text{B}}T^2}{\pi^3 f^2} \frac{l'}{w_0^4} \frac{\beta^2 \kappa}{\rho^2 C^2} \frac{\eta + \eta^{-1}}{2\eta^2} \cdot \left(1 + \frac{k^2 w_0^2 \eta}{(\eta + \eta^{-1}) (1 + (2kl_{\text{th}})^4)} \right). \quad (2.55)$$

Hierbei ist l' die effektive Weglänge im Substrat und entspricht $l' = l/\cos\psi$ mit $\psi = \arcsin 1/\sqrt{2}n$ für einen Strahlteiler der Dicke l mit Brechzahl n , der im 45° Winkel zum Strahlengang steht. Durch den schrägen Einfall kommt es außerdem zu einer elliptischen Verzerrung des Strahls, die durch das Verhältnis $\eta = 1,23$ von großer zu kleiner Halbachse gegeben ist. Für senkrechten Einfall auf das Substrat wird $l' = l$, das Strahlprofil bleibt kreisförmig und somit $\eta = 1$. Die Wellenzahl ist bestimmt durch

$k = 2\pi n/\lambda$ mit der Wellenlänge λ des verwendeten Lasers. Die Rauschamplitude reduziert sich für den Strahlteiler als auch den Einkoppelspiegel wegen der Lage außerhalb der Armresonatoren um den Faktor $\pi/2F$ [59].

Eine Berechnung des thermorefraktiven Rauschens für zylindrische Substrate in finiter Geometrie mit Durchmesser $2r$ und Höhe h wurde von Heinert et al. durchgeführt [59] und in dieser Arbeit für das thermorefraktive Rauschen der Einkoppelspiegel (ITM) verwendet. Demnach erhält man:

$$S_{\text{TR}}^{\text{ITM}} = \frac{64k_{\text{B}}T^2}{\pi} \frac{hr^2}{w_0^4} \frac{\beta^2\kappa}{\rho^2C^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2}{(J_0(a_n))^2} \frac{K_n^2}{4\pi^2 f^2 + \frac{\kappa^2}{\rho^2 C^2} k_n^4}. \quad (2.56)$$

Hierbei ist $k_n = a_n/r$ und a_n bezeichnet die n -te Nullstelle der Besselfunktion erster Ordnung $J_1(a_n) = 0$. Den Parameter K_n erhält man durch das folgende Integral mit der Besselfunktion nullter Ordnung J_0 :

$$K_n = \int_0^1 J_0(a_n\xi) \exp\left(-\frac{4r^2}{w_0}\xi^2\right) \xi d\xi. \quad (2.57)$$

Dadurch konnte gezeigt werden, dass insbesondere bei tiefen Temperaturen wegen der erhöhten Wärmeleitfähigkeit das thermorefraktive Rauschen in kristallinen Testmassen aus Saphir oder Silizium bei niedrigen Frequenzen wesentlich geringer ausfällt, als ursprünglich angenommen.

Thermorefraktives Schichtrauschen

Das zwischen dem Ein-/Auskoppelspiegel und Endspiegel umlaufende Laserlicht im Interferometerarm dringt bei der Reflexion am jeweiligen Schichtstapel bis zu einer gewissen Tiefe ein. Daher führen oberflächennahe Temperaturfluktuationen zu einer Änderung in den Brechungsindizes der Schichten und somit zu einer Phasenänderung des reflektierten Lichts. Das sich daraus ergebende thermorefraktive Rauschen eines dünnen hochreflektiven Schichtstapels wird von Braginsky et al. angegeben mit [60]:

$$S_{\text{TR}}^{\text{coat}} = \frac{2k_{\text{B}}T^2}{\sqrt{\pi^3 f}} \frac{\lambda^2}{w_0^2} \frac{\beta_{\text{eff}}^2}{\sqrt{\rho C \kappa}}. \quad (2.58)$$

Der effektive thermooptische Koeffizient für den Fall einer niedrig brechenden Abschlusschicht des Schichtstapels β_{eff} ist dabei:⁶

$$\beta_{\text{eff}} = \frac{n_1 n_2 (\beta_1 + \beta_2)}{4(n_1^2 - n_2^2)}. \quad (2.59)$$

Die Indizes 1 und 2 kennzeichnen jeweils Eigenschaften der beiden amorphen niedrig bzw. hoch brechenden Schichten. Eine Verallgemeinerung findet sich bei Gorodetsky [61].

2.6.5. Thermooptisches Rauschen

Die bisherige Behandlung von thermoelastischem als auch thermorefraktivem Rauschen erfolgte getrennt voneinander. Beide Rauschmechanismen besitzen jedoch als Ursache die gleichen Temperaturfluktuationen im Material und sind folglich korreliert. Die Zusammenfassung beider Rauscharten wird dann als thermooptisches Rauschen bezeichnet.

Weisen sowohl der thermische Ausdehnungskoeffizient α als auch der thermooptische Koeffizient β das gleiche Vorzeichen auf, so führt eine Erhöhung der Temperatur um ΔT zu einer Ausdehnung (Kontraktion) und die Oberfläche bewegt sich hin zum (weg vom) einfallenden Laserstrahl. Gleichermaßen führt die Temperaturänderung aber auch zu einer Verlängerung (Verkürzung) der optischen Weglänge für die Eindringtiefe des Laserstrahls und verursacht somit eine entgegen gerichtete Bewegung der effektiven Reflexionsebene weg vom (hin zum) Laserstrahl.

Unabhängig voneinander wurde dieser Sachverhalt von Gorodetsky und Evans et al. behandelt. Gegenüber der Berechnung durch Braginsky et al. [41] konnte so bei geeigneter Materialwahl ein verringertes thermooptisches Rauschen gezeigt werden.

2.7. Materialien für rauscharme Detektoren

Für Detektoren bei Raumtemperatur wie die kürzlich äußerst erfolgreich in Betrieb genommenen Advanced LIGO Detektoren [4, 28] ist Fused Silica das bevorzugte Material und wurde in letzten Jahren intensivst untersucht. Es ist mit hoher Reinheit auch in großen Stücken verfügbar und die optische Absorption ist mit weniger als 1 ppm/cm bei 1064 nm sehr gering [63]. Eine hohe Masse der Testmassen erlaubt

⁶Die Angabe in [60] enthielt einen Fehler, der später von Braginsky et al. selbst korrigiert wurde [41].

daher in Verbindung mit sehr hohen Intensitäten ein geringes Quantenrauschen. Bei Raumtemperatur beträgt der mechanische Verlust von Fused Silica nur $4 \cdot 10^{-10}$ [64], entsprechend gering fällt auch der Beitrag durch Brownsches Rauschen der Testmassen aus. Ebenso wirken sich sowohl ein geringer Ausdehnungskoeffizienten α als auch ein geringer thermoelastischer Koeffizienten β günstig auf das thermoelastische (TE) und thermorefraktive (TR) Rauschen der Testmassen aus. Zudem lassen sich aus dem Material dünne Pendelfasern herstellen, die mittels silikatischem Bonden eine monolithische Aufhängung ermöglichen. In Verbindung mit entsprechend optimierten hochreflektiven Schichtstapeln [65, 66, 67] ergibt sich unter Verwendung der in den vorherigen Abschnitten präsentierten Gleichungen das in Abbildung 2.9 gezeigte Rauschspektrum für Advanced LIGO [28].

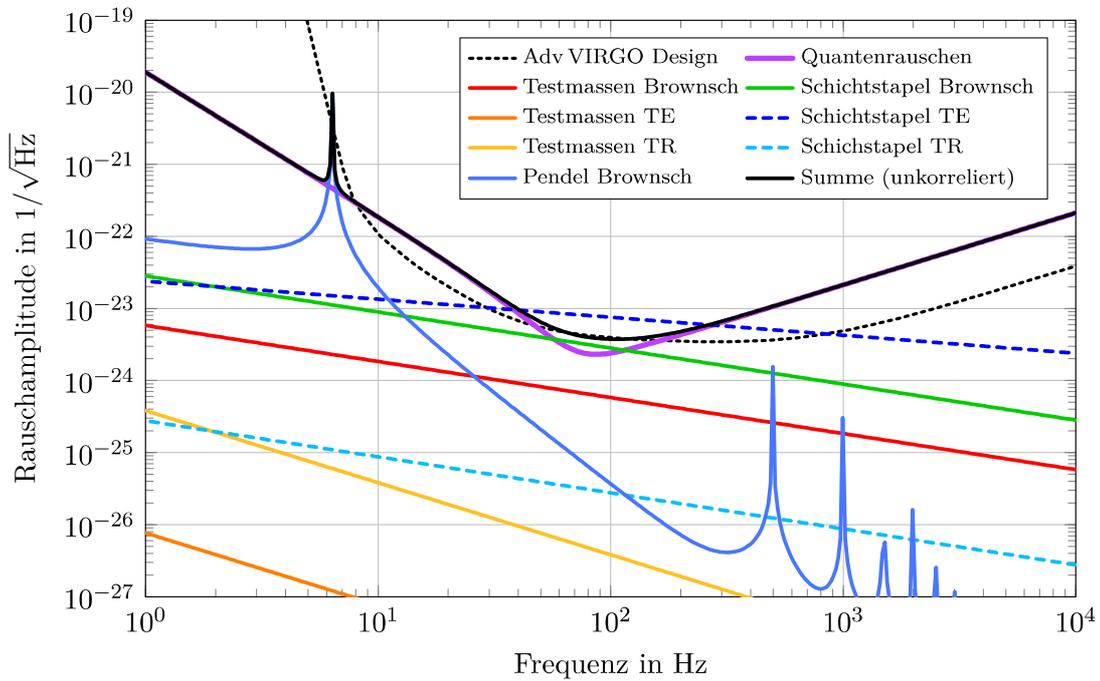


Abbildung 2.9.: Das Rauschspektrum für den Advanced LIGO Detektor [28] mit 750 kW Laserleistung in jedem der 4 km langen Arme wird in weiten Teilen durch das klassische Quantenrauschen bestimmt. Das gesamte thermische Rauschen der 40 kg schweren Testmassen verläuft deutlich unterhalb der Designkurve, genauso das Brownsche Rauschen der Aufhängung, das geprägt ist von den Resonanzen der Pendelmode bei ca. 9 Hz sowie den Violinmoden ab etwa 300 Hz. Um knapp 100 Hz hingegen limitiert das Brownsche Rauschen des Schichtstapels die Empfindlichkeit. Das thermoelastische (TE) und thermorefraktive (TR) Rauschen des Schichtstapels kompensiert sich bei der gemeinsamen Behandlung als thermoelastisches Rauschens und wurde daher in der unkorrelierten Summe nicht berücksichtigt.

Über den nahezu gesamten Frequenzbereich dominiert dabei das klassische Quantenrauschen die Empfindlichkeit des Detektors. Durch den Einsatz von Squeezing gelingt es jedoch das Quantenrauschen noch unter das thermische Rauschen der optischen Komponenten zu senken [16, 68]. Das thermische Rauschen wird dadurch zur maßgeblichen Grenze in der Empfindlichkeit für Gravitationswellendetektoren bei Raumtemperatur.

Das thermische Rauschen lässt sich wie in Abschnitt 2.4 bereits angedeutet sowie in Abschnitt 2.6 dargelegt durch das Absenken der Temperatur reduzieren. Während Fused Silica bei Raumtemperatur nahezu optimale Voraussetzungen für den Einsatz in Gravitationswellendetektoren bietet, ist es für einen kryogenen Einsatz als Testmassenmaterial völlig ungeeignet, denn bei tiefen Temperaturen steigt der mechanische Verlust auf etwa 10^{-3} [69]. Der Vorteil tiefer Temperaturen wäre durch das dann stark gesteigerte Brownsche Rauschen der Testmassen und ihrer Pendelaufhängung zunichte. Zudem beträgt die Wärmeleitfähigkeit κ in Fused Silica unterhalb von etwa 30 K weniger als $0,2 \text{ W/mK}$. Damit einher gehen parasitäre Effekte wie etwa die Bildung thermischer Linsen sowie eine unzureichende Wärmeabfuhr durch die Pendelfasern.

Im Gegensatz dazu weisen kristalline Materialien um den Faktor 1000 höhere Wärmeleitfähigkeiten auf und ermöglichen so eine ausreichende Abfuhr eingetragener Wärme. Sowohl Saphir als auch Silizium zeigen außerdem geringe mechanische Verluste von 10^{-8} und $4 \cdot 10^{-9}$ bei 20 K [70, 71]. Der Ausdehnungskoeffizient von Saphir verspricht mit weniger als $2 \cdot 10^{-8} \text{ 1/K}$ unterhalb 30 K nur wenig thermoelastisches Rauschen während die Wärmeleitfähigkeit Werte von bis zu 20 kW/mK erreicht. Für Saphir spricht zudem die Möglichkeit, dass die bisher übliche Wellenlänge von 1064 nm beibehalten werden kann und so viele optische Komponenten übernommen werden können. Die Absorption von Saphir bei 1064 nm liegt mit rund 90 ppm/cm [72] jedoch deutlich höher als die von Fused Silica. Nachteilig wirkt sich zudem die limitierte Größe der aktuell verfügbaren Saphirkristalle aus. Die für KAGRA vorgesehenen Testmassen mit 22 cm Durchmesser und 15 cm Höhe ergeben eine Masse von knapp 23 kg und stellen aktuell die größtmöglichen Substrate in der erforderlichen Orientierung entlang der c-Achse dar.

Getrieben durch die Halbleiter- und Photovoltaikindustrie wird Silizium mit immer größeren Durchmessern als Einkristall aus der Schmelze gezogen. Bis zum Bau des Einstein Telescope erwartet man Durchmesser von 50 cm und mehr. Dadurch ergibt sich für Silizium ein entscheidender Vorteil: durch die mögliche höhere Masse, geplant sind um 200 kg, reduziert sich das Strahlungsdruckrauschen bzw. die umlaufende

Laserleistung in den Resonatorarmen des Detektors kann erhöht werden um das Photonschrotauschen zu reduzieren (vgl. Unterabschnitt 2.5.2). Zudem ermöglichen die größeren Durchmesser einen größeren Strahldurchmesser. Hierbei ist jedoch ein Wechsel in der verwendeten Laserwellenlänge auf 1550 nm notwendig. Wie sich herausstellte, kann dabei die Absorption in Silizium bei tiefen Temperaturen nicht vernachlässigt werden sondern liegt im Bereich einiger hundert ppm/cm [73, 74].

Die Eigenschaften der beiden Materialien werden maßgeblich während des Wachstums des Kristalls aus speziellem Rohmaterial festgelegt. Nachfolgend sollen die wichtigsten Herstellungsverfahren sowie die jeweils damit verbundenen Vor- und Nachteile besprochen werden. Dabei werden lediglich die Verfahren genannt, wie sie auch für die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Proben angewandt wurden.

2.7.1. Silizium

Rund ein Viertel der gesamten Erdkruste besteht aus Silizium, zumeist in Verbindung mit Sauerstoff in Form von Silikaten als Feldspat und Oxiden wie Quarzsand. Reines Silizium kann über verschieden chemische Schritte gewonnen werden und bildet als Kristall eine Diamantstruktur aus. Die Herstellung von Siliziumeinkristallen erfolgt maßgeblich auf zwei Arten aus der Schmelze.

Czochralski-Verfahren Im Czochralski-Verfahren (CZ) wird polykristallines Silizium in einem großen Schmelztiigel aus Quarzglas verflüssigt. Ein sog. Keimkristall mit der gewünschten Orientierung wird in die Schmelze getaucht und mit wenigen mm/min unter ständigem Drehen herausgezogen. Dabei wächst ein Einkristall, dessen Durchmesser von der Ziehgeschwindigkeit bestimmt wird. Hierbei sind aktuell großtechnisch Durchmesser bis 30 cm üblich, während unter Laborbedingungen bereits 45 cm und mehr durchmessende Kristalle gezeigt wurden. Die für die Halbleiterindustrie übliche Dotierung des Materials erfolgt durch gezielt eingebrachte Fremdatome wie Bor für p-Typ- oder Phosphor für n-Typ-Silizium. Die Konzentration dieser Fremdatome variiert dabei im Bereich $10^{13} \dots 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ und liegt damit um mindestens fünf Größenordnungen unterhalb der Siliziumkonzentration von etwa 10^{23} cm^{-3} . Neben diesen beabsichtigten Verunreinigungen finden sich in CZ-Silizium zudem vor allem Sauerstoff und Kohlenstoff. Sauerstoff löst sich während des Schmelzvorgangs aus dem Quarztiigel und wird mit bis zu 10^{18} cm^{-3} [75, 76] eingelagert. Graphit wird unter anderem zur Ummantlung des Quarztiegels und für die Heizelemente so wie für die Halterung des Keimkristalls verwendet. So gelangt auch Kohlenstoff in die Schmel-

ze und reichert sich typischerweise mit 10^{16} cm^{-3} [75], $5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ [76] an. Andere metallische Verunreinigungen machen nur einen sehr kleinen Anteil aus ($\leq 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ [76]).

Sauerstoff lagert sich im Siliziumkristall zu einem Anteil von etwa 95 % auf einem Zwischengitterplatz ein. Dazu wird die kovalente Bindung zwischen zwei Siliziumatomen entlang der $\langle 111 \rangle$ Richtung unterbrochen und es bildet sich eine Si–O–Si Struktur aus. Die Festigkeit wird dadurch erhöht und erleichtert das Handling vor allem bzgl. Wafern [76]. Darüberhinaus können sich während des Abkühlvorgangs im Bereich um 450°C weitere Donatoren in Form von SiO_4 bilden. Im Gegensatz zum interstitiellen Sauerstoff, der sich elektrisch neutral verhält, kommt es hierbei zu einer unerwünschten n-Dotierung mit bis zu 10^{16} cm^{-3} .

Float-Zone-Verfahren Mit dem Float-Zone Verfahren gelingt es, eine höhere Reinheit des Siliziumkristalls zu erzielen. Ein Zylinder aus hochreinem polykristallinem Silizium wird mit einem Ringheizer lokal aufgeschmolzen. Ein Keimkristall gibt dabei die Orientierung für die anschließende Kristallation vor. Im Gegensatz zum Czochralski-Verfahren kommt die Siliziumschmelze dabei nicht in direkten Kontakt mit anderen Materialien. Die Dotierung erfolgt über dem Schutzgas beigemischt Monophosphan (veraltet: Phosphin) oder Diboran. Dies gelingt zwar nicht so homogen wie im Czochralski-Verfahren, dafür aber mit deutlich geringeren Konzentrationen. Damit erzielt man auch spezifische Widerstände im Bereich weniger zehn $\Omega \text{ cm}$ bis zu mehreren tausend $\Omega \text{ cm}$ wohingegen für CZ-Silizium nur Werte bis $50 \Omega \text{ cm}$ möglich sind. Die Sauerstoffkonzentration für im Float-Zone-Verfahren hergestelltes Silizium ist mit 10^{16} cm^{-3} rund zwei Größenordnungen kleiner und damit auch die Festigkeit des Materials. Der geringere Sauerstoffgehalt sorgt außerdem zusammen mit der höheren Wachstumsrate für mehr Kristallfehler.

Zone Refinement Ähnlich dem Float-Zone-Verfahren ist es möglich, Verunreinigungen durch lokales Aufschmelzen gewissermaßen aus dem Kristall heraus zu treiben. Die Löslichkeit für Verunreinigungen ist in der Schmelze höher als im erstarrten Zustand, sodass diese in der Schmelze verbleiben und nicht wieder im Kristall eingebaut werden. So gelingt es mit mehreren Durchläufen die Reinheit zu erhöhen.

2.7.2. Saphir

Wie Silizium wird auch Saphir vorzugsweise aus der Schmelze gewonnen. Im Czochralski-Verfahren verwendet man wegen der für Saphir nötigen höheren Temperatur Schmelztiegel aus Wolfram, Molybdän oder Iridium. Wie für Silizium lässt sich mit einem Keimkristall die Orientierung vorgeben. Die optisch günstige weil nicht doppelbrechende Richtung ist dabei die c-Achse. Allerdings bereitet das Wachstum in dieser Richtung Probleme und geht nur sehr langsam von statten. Andere Orientierungen wie die a-Achse sind leichter zu beherrschen und werden anschließend mit entsprechend Verschnitt in die gewünschte Form und Orientierung gebracht, wobei der maximale Durchmesser der im CZ-Verfahren produzierten Saphirkristalle etwa bei 15 cm liegt [77, 78]. Insgesamt ist diese Herstellungsmethode rückläufig.

Ähnlich dem CZ-Verfahren wird auch im Kyropoulos-Verfahren (KY) ein Keimkristall von oben in die Schmelze eingebracht. Durch eine aktive Wasserkühlung des Keims erfolgt die Kristallisation in die Schmelze hinein, ohne dass der Keim nach oben gezogen werden muss. Durch das langsame, kontrollierte Abkühlen kann gleichzeitig ein Ausheilen etwaiger Defekte und der Abbau von Verspannungen erfolgen wodurch sich eine sehr hohe Kristallqualität erzielen lässt. Großtechnisch sind damit c-Achsen orientierte Substrate mit 15 cm Durchmesser bei einer Masse von 100 kg üblich [79]. Allerdings gelang es mit dieser Methode mittlerweile auch bis zu 200 kg schwere Substrate zu produzieren, allerdings erfolgt auch hier das Wachstum entlang der a-Achse. Alternativ ermöglicht auch das HEM-Verfahren (heat exchanger method, Wärmetauscher Methode) die Herstellung solch großer Kristalle. Im Gegensatz zum KY-Verfahren befindet sich jedoch der mit Heliumgas gekühlte Keimkristall am Boden des Schmelztiegels.

Für die Herstellung besonderer Strukturen in Form von Bändern oder Fasern wie für das Aufhängesystem (siehe Abschnitt 4.4) aber auch Röhren kann das Stepanov- oder EFG-Verfahren (edge-defined film-fed growth) verwendet werden. Das Kristallwachstum erfolgt oberhalb einer Form, durch welche über die Kapillarwirkung die Schmelze nachströmt während der Kristall nach oben gezogen wird. Durch die bereits vorgegebene Form reduziert sich die Nachbearbeitung, allerdings weisen derart produzierte Kristalle eine weitaus höhere Versetzungsdichte so wie Gaseinschlüsse an der Oberfläche auf [78].

Des Weiteren existiert eine Vielzahl anderer Herstellungsmethoden, die hier aber nicht gänzlich aufgeführt werden können.

3. Anelastische Festkörper

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Merkmale des anelastischen Verhaltens eines Festkörpers in Bezug auf mechanische Spannung und Dehnung geklärt. Der statische Fall soll zunächst zu einem Verständnis des Begriffs der Anelastizität verhelfen. Die Betrachtung des dynamischen Falls erlaubt anschließend die Einführung des mechanischen Verlustes als, wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt, wichtigen Materialparameter für die Rauschberechnung zukünftiger Detektoren. Im Anschluss werden einige wesentliche Mechanismen vorgestellt, die einen mechanischen Verlust im Festkörper verursachen. Für eine vollständige und tiefer gehende Abhandlung sei auf die entsprechenden Werke von Nowick et al. [35], Schaller et al. [80] und Blanter et al. [81] verwiesen.

3.1. Elastisches und anelastisches Verhalten

Das elastische Verhalten eines Festkörpers kann in erster Näherung durch eine ideale Feder repräsentiert werden. Durch eine externe Kraft F bzw. eine mechanische Spannung σ verlängert sich solch eine Feder um Δu gegenüber ihrer Ausgangslänge u , es kommt zu einer Dehnung $\varepsilon = \Delta u/u$. Verantwortlich für dieses Verhalten ist das Wechselwirkungspotential zwischen den Atomen im Festkörper. Nahe der Gleichgewichtslage kann es durch einen harmonischen Verlauf angenähert werden und sorgt so dafür, dass die Atome wie durch eine ideale elastische Feder verbunden in ihre Ausgangslage zurück kehren. Bei kleinen Verzerrungen ε besteht dabei ein linearer Zusammenhang mit der Spannung und die Verformung ist vollständig reversibel.¹ In diesem Fall spricht man von einem ideal elastischen Festkörper und beschreibt sein Verhalten durch das Hookesche Gesetz mit dem Elastizitätsmodul (E-Modul) Y bzw.

¹Bei Überschreiten des elastischen Bereichs kommt es zu plastischer, nicht reversibler Deformation. Dieser Fall soll im Weiteren nicht behandelt werden.

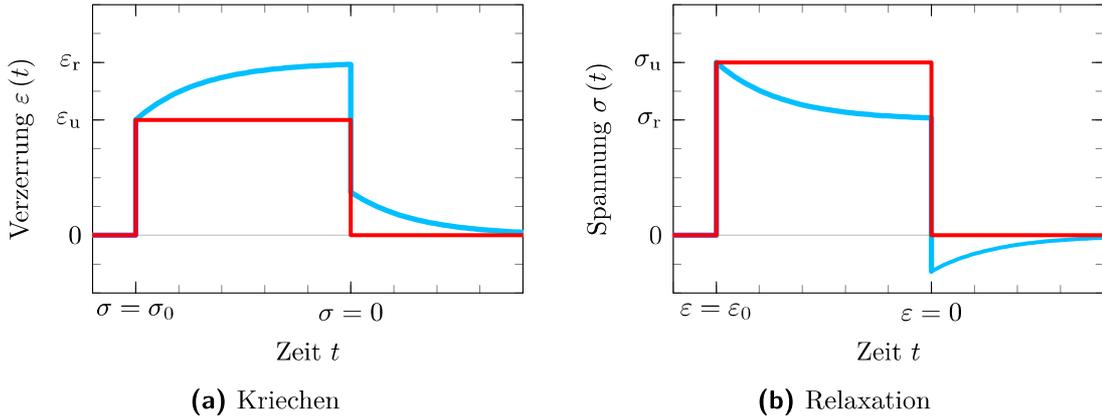


Abbildung 3.1.: Ein ideal elastischer Festkörper (rote Kurve) reagiert bei einem sprunghaften Anstieg der mechanischen Spannung auf σ_0 mit einer unmittelbaren Verzerrung und geht danach ebenso unmittelbar in seinen Ausgangszustand zurück (a). An realen Festkörpern (blaue Kurve) kann man hingegen eine weitere Zunahme der anfänglichen Verzerrung ε_u beobachten. Dieser als Kriechen bezeichnete Prozess sorgt für eine exponentielle Annäherung an das Gleichgewicht bei ε_r . Eine plötzliche Verzerrung ε_0 führt hingegen zu einer Anfangsspannung σ_u , die im weiteren Verlauf auf σ_r relaxiert (b). In beiden Fällen setzt nach der Wegnahme sowohl von Spannung als auch Verzerrung ein Erholungsprozess ein.

der Nachgiebigkeit J als Proportionalitätskonstante:

$$\sigma = Y\varepsilon = J^{-1}\varepsilon. \quad (3.1)$$

Gemäß dieser Beschreibung reagiert ein elastischer Festkörper also linear und instantan auf eine Spannung. In Experimenten beobachtet man jedoch, dass es unter einer sprunghaft angelegten konstanten Spannung σ_0 zum sog. Kriechen kommen kann. Die anfängliche unmittelbare Verzerrung ε_u nimmt im Laufe der Zeit zu und nähert sich einem Gleichgewicht ε_r . Ebenso geht die Verzerrung nach Wegnahme der Spannung nicht sofort vollständig zurück, sondern strebt erst mit einer gewissen Zeitkonstanten τ_σ wieder gegen Null. Wird dem Körper anstatt der Spannung eine Verzerrung ε_0 fest vorgegeben, so kommt es ebenfalls zu einer Relaxation der Anfangsspannung σ_u hin zu einer Gleichgewichtsspannung σ_r . Nach der Rückverformung in den Ausgangszustand bleibt eine gewisse Restspannung erhalten, die sich mit einer Zeitkonstanten τ_ε abbaut. Beide Experimente sind in Abbildung 3.1 illustriert.

Diese Verhalten kann durch ein empirisches Modell aus Hooke- und Newton-Elementen beschrieben werden [35, 80, 81]. Das Hooke-Element entspricht der bereits eingeführten ideal elastischen Feder mit E-Modul Y während das Newton-Element

einen ideal viskosen Dämpfer darstellt, bei dem sich anstatt der Dehnung ε die zeitliche Änderung $\dot{\varepsilon}$ proportional zur Spannung verhält:

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}. \quad (3.2)$$

Eine Reihenschaltung beider Elemente wird als Maxwell-Element bezeichnet wohingegen die Parallelschaltung das Voigt-Element darstellt.

Durch eine abrupt angelegte Spannung σ_0 wird die Feder im Maxwell-Element (Abbildung 3.2a) gestreckt und der Dämpfer beginnt sich mit konstanter Geschwindigkeit zu verformen. Nach Wegnahme der Spannung zum Zeitpunkt t_0 geht die Feder unmittelbar in ihren Ausgangszustand zurück, während der Dämpfer verformt bleibt. Ebenso reagiert die Feder sofort auf eine erzwungene Verformung ε_0 und setzt den Dämpfer unter Spannung σ . Der Dämpfer verformt sich abermals bis die Federspannung mit der Zeitkonstanten $\tau_\varepsilon = \eta/Y$ vollständig abgebaut ist. In gleichem Sinne erfolgt eine Rückverformung in den Ausgangszustand.

Eine solch unmittelbare Verformung ε_0 ist im Voigt-Element (Abbildung 3.2b) durch den Dämpfer schlicht unmöglich. Durch eine Spannung σ_0 kann der Dämpfer jedoch so lange verformt werden, bis die Gegenspannung der Feder die Bewegung stoppt. Nach einer aufgeprägten Verformung steht die Feder unter Spannung und das Element kehrt zeitlich exponentiell in den Ursprungszustand zurück.

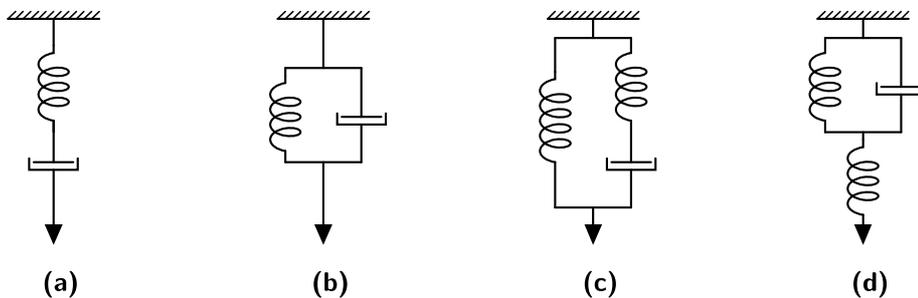


Abbildung 3.2.: (a) Maxwell- und (b) Voigt-Element sowie das Standardmodell des anelastischen Festkörpers mit (c) Maxwell- bzw. (d) Voigt-Element zur Beschreibung des Verhaltens von Festkörpern unter Spannung und Verformung.

Mit beiden Modellen ist demzufolge nur teilweise eine Beschreibung des in Abbildung 3.1 aufgezeigten Verhaltens möglich, erst die Kombination zweier Federelemente mit einem Dämpfer erlaubt eine hinlängliche Erklärung. Dabei kann sowohl ein Maxwell-Element parallel als auch ein Voigt-Element in Reihe mit einer Feder kombiniert werden (vgl. Abbildung 3.2c und 3.2d). Man spricht dann auch von einem

Drei-Parameter-Modell bzw. dem Standardmodell des anelastischen Festkörpers.

Auf eine sprunghaft einsetzende Spannung σ_0 reagiert das in Abbildung 3.2c gezeigte Modell zunächst mit dem unrelaxiertem E-Modul $Y_u = Y_r + \delta Y$. Wegen der parallelen Anordnung erfahren beide Zweige jeweils die gleiche Auslenkung $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Der Dämpfer η im Maxwell-Element beginnt zu fließen und die Spannung σ_2 in der Feder δY wird abgebaut. Gleichzeitig erhöht sich dadurch jedoch die Spannung σ_1 auf die parallel liegende Feder Y_r und somit auch die Verzerrung ε_1 . Dieser Prozesses dauert an, bis schließlich $\varepsilon = \sigma_0/Y_r$ erreicht ist. Das Verhältnis der beiden E-Module wird in diesem Fall als Relaxationsstärke $\Delta = \delta Y/Y_r$ bezeichnet. Mathematisch formuliert erhält man die folgenden Zusammenhänge:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{Y_r} \qquad (3.3)$$

$$= Y_r \varepsilon + \eta \cdot \varepsilon_\eta \qquad = \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{\delta Y} + \varepsilon_\eta \qquad (3.4)$$

und man erhält mit Gleichung (3.1) und (3.2) als Lösung die Differentialgleichung des anelastischen Festkörpers:

$$\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = Y_r \varepsilon + Y_u \tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} \qquad (3.5)$$

Analog erhält man dieses Ergebnis auch bei einer ähnlichen Betrachtung der linearen Anordnung aus Feder und Voigt-Element.

3.2. Dynamisches Verhalten

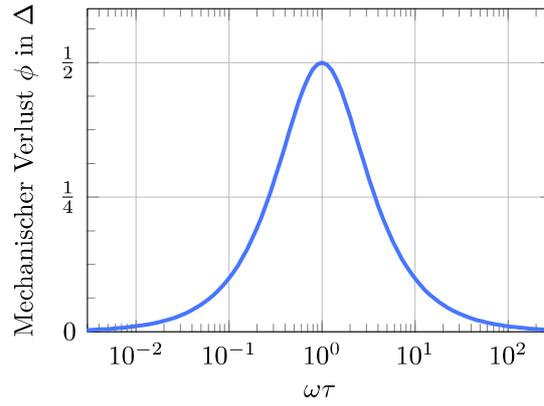
Neben den im Vorherigen besprochenen statischen Eigenschaften sind im Zusammenhang dieser Arbeit vor allem die dynamischen Eigenschaften eines Festkörpers von Interesse. Die zeitliche Verformung $\varepsilon(t)$ unter einer harmonisch variierenden mechanischen Spannung $\sigma(t)$ ist in einem anelastischem Festkörper um den Winkel ϕ phasenverschoben:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp i\omega t \qquad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp i(\omega t - \phi) \qquad (3.6)$$

Aus dem Quotienten von Spannung und Verformung ergibt sich daher für den Körper ein frequenzabhängiges komplexes E-Modul der Form:

$$Y(\omega) = Y_0(\omega) \exp i\phi(\omega) = Y_S(\omega) + iY_L(\omega) \qquad (3.7)$$

Abbildung 3.3.: Der mechanische Verlust für einen strukturedämpften Festkörper verläuft in einem Debyepeak. Der Wert des Maximums bei $\omega\tau = 1$ entspricht der Hälfte der Relaxationsstärke Δ (nach Gleichung (3.10)).



Diese Darstellung entspricht dem bereits erwähnten Konzept der sog. Strukturdämpfung in Festkörpern. Die Phasenverschiebung ϕ wird auch als der Verlustwinkel des Systems bezeichnet. Die beiden Größen Y_S und Y_L nennt man den Speicher- und Verlust-Modul. Ihre Frequenzabhängigkeit ist unter Zuhilfenahme von Gleichung (3.5) gegeben durch:

$$Y_S = Y_r + \delta Y \frac{\omega^2 \tau_\epsilon^2}{1 + \omega^2 \tau_\epsilon^2} \quad Y_L = \delta Y \frac{\omega \tau_\epsilon}{1 + \omega^2 \tau_\epsilon^2} \quad (3.8)$$

Die Bezeichnung Speicher- und Verlust-Modul erschließt sich durch die Energiebilanz mit der Energiedichte $\Gamma = \int \sigma d\varepsilon$. Während einer vollen Periode dissipiert das System im Volumen V den Betrag von $\Delta E = \Delta \Gamma \cdot V = \pi Y_L \varepsilon_0^2 \cdot V$. Die höchste Energiedichte von $\Gamma = 1/2 \cdot Y_S \varepsilon_0^2$ wird nach einer viertel Periode erreicht und ergibt so die maximale Energie $E = \Gamma \cdot V$. Dies führt direkt zum Ausdruck des mechanischen Verlustes, der definiert ist als:

$$Q^{-1} = \frac{\Delta E}{2\pi E} = \frac{Y_L}{Y_S} = \tan \phi \quad (3.9)$$

Mit der Frequenzabhängigkeit aus Gleichung (3.8) und unter der Annahme einer geringen Relaxationsstärke $\Delta \ll 1$ ($\delta Y \ll Y_r$) erhält man für kleine Verlustwinkel $\phi \ll 1$ den folgenden Ausdruck für den mechanischen Verlust:

$$\phi = \frac{\Delta E}{2\pi E} \approx \frac{\delta Y}{Y_r} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} = \Delta \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (3.10)$$

Der charakteristische Verlauf $\phi(\omega)$ wird als Debyepeak bezeichnet und ist in Abbildung 3.3 abgebildet. Das Maximum von $\Delta/2$ wird für $\omega\tau = 1$ erreicht. Dann stimmt die Relaxationszeit τ des internen Dämpfungsmechanismus im System mit der Periodendauer der Frequenz ω überein.

3.3. Ursachen des mechanischen Verlusts

Im Festkörper treten Verlustprozesse zum einen durch die intrinsischen Eigenschaften des Materials auf. Dies ist nachfolgend beispielsweise für die thermoelastische Dämpfung der Fall. Zum anderen können aber auch Punktdefekte im Kristall ursächlich sein. Treten verschiedene Mechanismen zusammen auf, so summieren sich ihre jeweiligen Verlustbeiträge ΔE_i bzw. ϕ_i auf. Im Folgenden werden einige dieser Mechanismen kurz vorgestellt. Umfassende Abhandlungen finden sich unter anderem in [35, 80, 81].

3.3.1. Thermoelastische Dämpfung

Bei der zyklischen Verformung eines Festkörpers mit der Frequenz ω werden Bereiche gestaucht, andere gestreckt. Über den Ausdehnungskoeffizienten α kommt es dabei lokal zu einer Erhöhung bzw. Absenkung der Temperatur T in den entsprechenden Gebieten und das thermische Gleichgewicht wird gestört. Bei niedrigen Frequenzen findet über einen irreversiblen Wärmefluss ein thermischer Ausgleich zwischen den beiden Bereichen statt, der der Schwingung Energie entzieht und auf diese Weise für eine Dämpfung der Schwingung sorgt. Der entsprechende Verlust ist bestimmt durch [82]:

$$\phi_{te} = \frac{Y\alpha^2 T}{\rho C} \frac{\omega\tau_{te}}{1 + \omega^2\tau_{te}^2}. \quad (3.11)$$

Dabei bezeichnen Y das E-Modul, C die spezifische Wärmekapazität pro Volumen und ρ die Dichte des Körpers. Für einfache Biegeschwingungen ist nach Zener die Zeitkonstante τ_{te} für einen Balkenschwinger (sog. Cantilever) mit rechteckigem Querschnitt und Dicke t gegeben durch [83]:

$$\tau_{te} = \frac{\rho C t^2}{\pi^2 \kappa}. \quad (3.12)$$

Für den runden Querschnitt eines Drahtes oder dünnen Stabes mit Radius r bzw. Durchmesser d gilt hingegen:

$$\tau_{te} = \frac{\rho C r^2}{0,539 \cdot 2\pi\kappa} = \frac{\rho C d^2}{2,156 \cdot 2\pi\kappa}. \quad (3.13)$$

In beiden Gleichungen ist κ die Wärmeleitfähigkeit. Bei Braginsky [84] findet sich für die reine Streckschwingung eines isotropen zylindrischen Substrates ebenfalls ein

Ausdruck für den mechanischen Verlust:

$$\phi_{\text{te}} = \frac{\kappa T \omega}{9C^2 \rho} \quad (3.14)$$

Im anisotropen Fall, bei komplizierten Geometrien und/oder Modenformen gelingt die Berechnung der thermoelastischen Dämpfung mit Hilfe der Finite Elemente Methode [85]. Dabei werden die elastisch gespeicherte Energie E und die Energiedissipation ΔE_{te} unter Berücksichtigung der jeweiligen Geometrie und Modenform mit den temperaturabhängigen Parametern berechnet und ergeben mit Gleichung (3.10) den mechanischen Verlust.

3.3.2. Phonon-Phonon-Wechselwirkung

Ein erster Ansatz für diesen Dämpfungsmechanismus wurde von Akhiezer entwickelt [86]. Demzufolge stört eine durch den Festkörper hindurchlaufende akustische Welle (bzw. die entsprechenden akustischen Phononen) die Planck-Verteilung der thermischen Phononen der Kristallschwingungen. Um ein neues Gleichgewicht zu erlangen, ist Energie nötig, die der Schwingung entzogen wird. Dadurch kommt es zu einer Dämpfung, der sogenannten Akhiezerdämpfung [87].

Sind die Frequenz f und die Temperatur T derartig, dass $\omega = 2\pi f < k_{\text{B}}T/h$ (oder $f/T < 3,3 \text{ GHz/K}$) erfüllt ist, dann ist die Wellenlänge der thermischen Phononen sehr viel kleiner als die der akustischen Welle $\lambda_{\text{therm}} \ll \lambda_{\text{acous}}$. Die thermischen Phononen bewegen sich dann im Festkörper wie durch ein gleichmäßiges Medium, das durch die akustische Welle periodisch verformt wird. Über geringe Abweichungen vom harmonischen Wechselwirkungspotential (Anharmonizität) wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit der thermischen Phononen je nach Ausbreitungsrichtung und Polarisation (entspricht verschiedenen Zweigen) durch die Verformung ebenfalls moduliert, hierbei sorgt der Grüneisen-Parameter für die Verknüpfung. Eine akustische Welle ändert die Geschwindigkeit und somit die Temperatur aller Phononen in einem Zweig. Der Temperaturunterschied zwischen den Zweigen wird durch Stöße zwischen den Phononen ausgeglichen und dabei Energie dissipiert. Braginsky [84] und Bömmel et al. [87] geben dafür eine grobe Abschätzung des Verlusts an:

$$\phi_{\text{phon}} = \frac{CT\gamma^2}{v^2} \frac{\omega\tau_{\text{ph}}}{1 + (\omega\tau_{\text{ph}})^2}. \quad (3.15)$$

Der Parameter γ dient dabei als freier Fit-Parameter, der ähnlich dem Grüneisenpa-

parameter die Kopplung zwischen thermischen und akustischen Phononen beschreibt und daher in etwa gleich groß ausfällt. Die Lebensdauer der Phononen τ_{ph} ist mit der Wärmeleitfähigkeit κ verknüpft durch:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho C v^2 \tau_{\text{ph}}. \quad (3.16)$$

Die Schallgeschwindigkeit im Festkörper v ergibt sich mit:

$$\frac{3}{v^3} = \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}, \quad (3.17)$$

aus den jeweiligen longitudinalen bzw. transversalen Geschwindigkeiten v_l und v_t .

3.3.3. Phonon-Elektron-Wechselwirkung

Die Wechselwirkung von akustischen Phononen mit Elektronen tritt vor allem bei hochreinen Metallen zu Tage. Braginsky [84] gibt diesen Verlust in Metallen an mit:

$$\phi_{\text{pe}} = \frac{8}{15} \frac{E_F m_e \sigma \omega}{\rho v^2 e^2}. \quad (3.18)$$

Dabei sind E_F die Fermienergie, m_e die Elektronenmasse, σ die elektrische Leitfähigkeit, ρ die Dichte, v die Schallgeschwindigkeit und e die Elementarladung. Beim Übergang zu einer supraleitenden Phase, beispielsweise in Indium, lässt sich eindrucksvoll der Wegfall dieses Verlustprozesses beobachten [88].

Im Gegensatz zu Metallen und ihrem freien Elektronengas ist bei Halbleitern die Ladungsträgerdichte allerdings stark reduziert. Nur wenige Elektronen bzw. Löcher besetzen das Leitungsband, abhängig von der Temperatur und Dotierung des Halbleiters. Neben der thermischen Energie kann auch die Bestrahlung mit Licht die Anzahl freier Ladungsträger erhöhen. Nowick et al. geben eine mögliche Beschreibung für den Mechanismus wie folgt. Die Bandstruktur $E(k)$ eines Halbleiters verläuft für die oberen bzw. unteren Ränder der Bänder parabelförmig. Die Bandstruktur und das Kristallsystem erfüllen die selbe Symmetrie. Eine Verzerrung ε kann über das Deformationspotential Ξ diese Symmetrie stören und es kommt zur sogenannten Intervalley-Streuung, bei der Elektronen zwischen verschiedenen Tälern im Leitungsband gestreut werden. Dazu ist allerdings ein Impulsaustausch notwendig, der über Phononen vermittelt wird. Lam gab in seiner Dissertation die folgende Relation als obere Grenze für den Verlust durch

die Wechselwirkung von elastischen Wellen und Ladungsträgern an [89]:

$$\phi_{\text{pe}} = \frac{\sigma \Xi^2 \omega}{\rho v^4 e^2}, \quad (3.19)$$

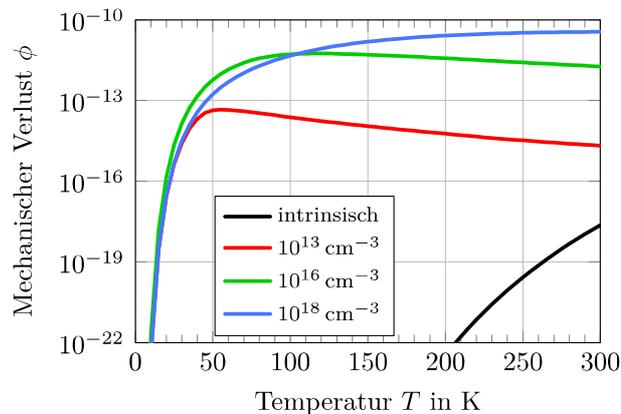
mit der elektrischen Leitfähigkeit σ , dem Deformationspotential Ξ , der Dichte ρ , der Schallgeschwindigkeit v sowie der Elementarladung e . Für Silizium finden sich Deformationspotentiale Ξ im Bereich um 11 eV [35], Yu et al. [90] nennt wie Lam [89] $\Xi \approx 5$ eV. Die elektrische Leitfähigkeit ergibt sich mit der Ladungsträgerdichte und der Beweglichkeit für Elektronen n_e , μ_e und Löcher n_h , μ_h zu [91]:

$$\sigma = n\mu e \quad \text{bzw.} \quad \sigma = (n_e\mu_e + n_h\mu_h) e. \quad (3.20)$$

Sowohl die Beweglichkeit als auch die Ladungsträgerdichte sind stark von der Dotierung sowie von der Temperatur abhängig. In intrinsischem (undotiertem) Material beträgt die Ladungsträgerdichte bei Raumtemperatur $n_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ und die Beweglichkeit $\mu = 1550 \text{ cm}^2/\text{V s}$. In n-Typ Silizium (Phosphor dotiert) liegt die Beweglichkeit hingegen etwa zwischen $300 \text{ cm}^2/\text{V s}$ für eine Dotierungskonzentration von 10^{18} cm^{-3} und $1500 \text{ cm}^2/\text{V s}$ für 10^{13} cm^{-3} [92]. Im stark dotierten Material sinkt die Beweglichkeit zu tiefen Temperaturen während sie für schwächer dotiertes zunimmt. Die Dichte der Ladungsträger bei Raumtemperatur ist mit 10^{12} cm^{-3} bis 10^{18} cm^{-3} gleich der Dotierungsstärke.

Abbildung 3.4 zeigt das Ergebnis einer Berechnung unter Anwendung von Gleichung (3.19) und (3.20) sowie mit Daten aus den genannten Quellen. Selbst für stark dotiertes Silizium findet man einen Verlust kleiner 10^{-10} im gesamten Temperaturbereich, daher kann dieser Dämpfungsmechanismus in Silizium vernachlässigt werden.

Abbildung 3.4.: Berechneter mechanischer Verlust durch Phonon-Elektron-Wechselwirkung in n-Typ Silizium. Selbst bei einer Phosphor-Dotierung mit 10^{18} Atomen/ cm^3 verläuft der Verlust im betreffenden Temperaturbereich vollständig unterhalb von 10^{-10} .



3.3.4. Defekte und Fremdatome

In jedem kristallinen Festkörper treten Defekte in Form von Fehlstellen, Fremd- und Zwischengitteratomen oder Versetzungen auf. Die thermische aktivierte Bewegung dieser Punktdefekte stellt eine weitere Ursache für den Anstieg des mechanischen Verlustes dar. Als ein anschauliches Modell bietet sich hier das in Abbildung 3.5 gezeigte Doppelmuldenpotential an. Zwei energetisch gleiche Zustände I und II im Potentialminimum sind durch einen Potentialwall der Höhe E_A getrennt. Die Wahrscheinlichkeit

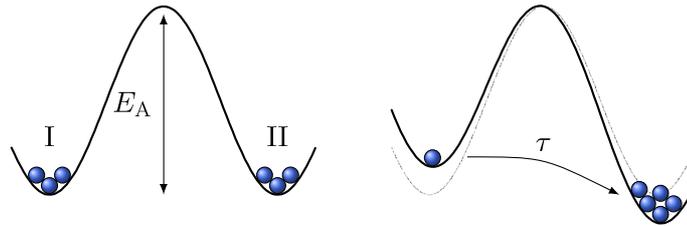


Abbildung 3.5.: Zwei äquivalente Zustände im Doppelmuldenpotential mit der Potentialbarriere E_A werden durch eine äußere Spannung energetisch verkippt. Der Umverteilungsprozess dissipiert Energie und sorgt so für eine Dämpfung.

für einen Übergang ist durch die Boltzmannverteilung gegeben. Im Gleichgewicht sind beide Zustände gleich bevölkert. Wird durch eine äußere Spannung das Potential verkippt und eine der Mulden angehoben während die andere abgesenkt wird, so setzt ein Umverteilungsprozess mit der Relaxationszeit τ ein. Diese ist für den thermisch aktivierten Prozess durch eine Arrhenius-Gleichung bestimmt:

$$\tau = \tau_0 \exp(E_A/k_B T) \quad (3.21)$$

Die Konstante τ_0 sowie die Aktivierungsenergie E_A sind dabei charakteristisch für den jeweils zu Grunde liegenden Verlustmechanismus. Im dynamischen Fall einer periodisch wechselnden äußeren Spannung verschiebt sich wegen der Bedingung $\omega\tau = 1$ an der Stelle des Maximums nach Gleichung (3.10) mit steigender Frequenz die zugehörige Temperatur T_{\max} für diesen Fall eines thermisch aktivierten Verlustprozesses ebenfalls nach oben. Durch Auftragen des natürlichen Logarithmus der Frequenz über der reziproken Temperatur erhält man eine Gerade gemäß:

$$\ln \omega = -\ln \tau_0 - \frac{E_A}{k_B} \frac{1}{T_{\max}}. \quad (3.22)$$

Aus dieser sogenannten Arrhenius Auftragung ergibt sich die Aktivierungsenergie E_A aus dem Anstieg als auch die Konstante τ_0 aus der erhaltenen Geraden.

4. Mechanischer Verlust

Der mechanische Verlust wurde als wichtige Kenngröße für das Rauschverhalten von Gravitationswellendetektoren vorgestellt (Abschnitt 2.6) sowie sein physikalischer Ursprung im Festkörper diskutiert (Kapitel 3). Nach einer kurzen Einführung zur messtechnischen Umsetzung werden nun die durchgeführten Versuche zum mechanischen Verlust von Silizium und Saphir sowie deren Ergebnisse dargelegt.

4.1. Experimentelle Bestimmung des mechanischen Verlusts

Der mechanische Verlust ϕ wurde in Abschnitt 3.2 identifiziert mit der Phasenverschiebung, die zwischen einer mechanischen Spannung $\sigma(t)$ und der daraus hervorgehenden Verformung $\varepsilon(t)$ in einem anelastischen Festkörper besteht. Für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten verlustarmen Materialien ist eine direkte Messung dieser Phasenverschiebung jedoch mit herkömmlichen Mitteln nicht möglich.

Indirekt kann der mechanische Verlust dennoch bestimmt werden. Dazu werden die zu untersuchenden Festkörperproben, in diesem Fall zylindrische Substrate und runde, dünne Stäbe bzw. Fasern zu mechanischen Schwingungen angeregt. Dies geschieht jeweils entweder über das elektrische Streufeld einer kammartig ineinander ragenden Struktur auf einer Platine bei einer Betriebsspannung von bis zu 1,6 kV oder über kleine Piezokristalle. Einen suffizienten Energieeintrag erreicht man dabei nur bei den entsprechenden Resonanzfrequenzen der Proben. Die Halterung der Zylinderproben wird mit einer Drahtschlinge am Umfang realisiert während für die Fasern ein spezieller Halter aus Kupfer verwendet wurde, weitere Details finden sich im Ergebnisteil. Die mechanischen Vibrationen der Zylinder wurden berührungslos über ein konventionelles Vibrometer SIOS SPS 120¹ erfasst, die der Fasern mit Hilfe des Schattenwurfs auf zwei benachbarte Photodioden.

¹<http://www.sios.de/>

Überstreicht die Frequenz f während der Anregung der Proben die Resonanzfrequenz f_0 , so ergibt sich ein Peak in Lorentzform. Aus dessen Halbwertsbreite Δf (bei $1/\sqrt{2}$ der Maximalamplitude) folgt der mechanische Verlust aus dem Quotient $\phi = \Delta f/f_0$. Oftmals fällt der mechanische Verlust allerdings so gering aus, dass sich keine symmetrischen Flanken ergeben. Schaltet man nach Erreichen der maximalen Amplitude A_0 bei der Resonanzfrequenz f_0 die Anregung ab, dann nimmt die Amplitude in diesem Fall exponentiell mit der Zeitkonstanten τ ab:

$$A(t) = A_0 e^{-t/\tau}. \quad (4.1)$$

Es kommt zur Dissipation der zuvor resonant eingekoppelten Energie E . Legt man abermals das Modell eines gedämpften harmonischen Oszillators zugrunde, kann die Energiedissipation ΔE je Periode bestimmt werden und es lässt sich zeigen, dass gilt:

$$\phi = \frac{1}{\pi f_0 \tau}. \quad (4.2)$$

Man erhält mit Kenntnis der Resonanzfrequenz f_0 sowie aus der gemessenen Abklingzeit τ auf diese Weise den mechanischen Verlust.

4.2. Messungen an Silizium

Der mechanische Verlust von Silizium wurde im Rahmen dieser Arbeit an verschiedenen zylindrischen Proben untersucht. Die Auswahl geeigneter Proben basierte dabei auf bereits durchgeführten, teils eigenen Messungen [93, 94] sowie auf vorausgehenden Arbeiten [95, 96, 97]. Hierbei zeigten sich scheibenförmige Proben mit geringer Höhe im Vergleich zum Durchmesser eher ungeeignet, da sich in diesem Fall die thermoelastische Dämpfung limitierend auswirkt [85]. Ebenso wurden stabförmige Proben wegen der einhergehenden Instabilität in der vorgesehenen Halterung mittels einer Drahtschlinge nach Möglichkeit vermieden. Ein kleines Verhältnis von Oberfläche zu Volumen ermöglicht nach bisheriger Kenntnis den geringsten mechanischen Verlust [98, 99] und wird daher mit möglichst großen Proben erreicht, dabei limitiert jedoch letztendlich die Größe des Versuchsaufbaus. Es wurden daher Proben mit geometrischen Abmessungen von 10 cm sowohl im Durchmesser als auch in der Höhe verwendet. Die Zylinderachsen aller Proben sind entlang der kristallografischen $\langle 100 \rangle$ oder $\langle 111 \rangle$ Richtung orientiert. Unterschiedliche Anforderungen wurden hingegen an die Reinheit bzw. Dotierung der Proben gestellt. Drei mit Bor (p-Typ) bzw. vier mit Phosphor (n-Typ) dotierte Proben,

hergestellt nach dem Czochralski (CZ) Verfahren, stammen von Silchem.² Die Politur hierzu wurde von Hellma Optics³ vorgenommen. Eine im Float Zone (FZ) Verfahren hergestellte Probe aus intrinsischem Material wurde über die Firma MicroChemicals bezogen und anschließend von Surfacenet poliert. Sowohl die Stirnflächen als auch der Umfang all dieser Proben wurde optisch poliert. Zusätzlich wurden für ein möglichst umfassende Studie drei weitere p-Typ Proben einbezogen. Diese stammen gemeinsam aus einem Zuchtkristall mit unbekannter Dotierstärke und wurden von der Universität Glasgow zur Verfügung gestellt. In Tabelle 4.1 findet sich eine Auflistung der Proben mit dem jeweiligen spezifischen Widerstand laut Hersteller und daraus ermittelter Konzentration des Dotanden. Das verfügbare breite Spektrum erlaubt so erstmals eine umfassende Studie des mechanischen Verlusts von dotiertem Silizium sowie einen direkten Vergleich mit intrinsischem Material.

Tabelle 4.1.: Übersicht der verwendeten Siliziumproben zur Untersuchung der Dotierabhängigkeit des mechanischen Verlustes. Alle Proben der Serie 5 haben die gleiche Zylindergeometrie mit 10 cm Durchmesser und 10 cm Höhe. Die kristallographische $\langle 100 \rangle$ Richtung entspricht jeweils der Zylinderachse. Die Proben G1 bis G3 sind hingegen $\langle 111 \rangle$ orientiert mit steigenden Höhen von 5 cm, 7 cm und 12 cm bei je 6,5 cm Durchmesser. Alle drei Proben stammen aus dem selben Zuchtkristall und sind daher identisch dotiert, der genaue Wert liegt jedoch nicht vor.

Probe	Dotand	Konzentration	Widerstand	Wachstum
5N1	Phosphor	$1,4\text{--}1,6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$	294–328 m Ω cm	CZ
5N2	Phosphor	$7,0\text{--}7,7 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$	600–665 m Ω cm	CZ
5N3	Phosphor	$1,2\text{--}4,6 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$	1–4 Ω cm	CZ
5N4	Phosphor	$1,9\text{--}2,3 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$	10–25 Ω cm	CZ
5P1	Bor	$2,3 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$	20 m Ω cm	CZ
5P2	Bor	$3,5\text{--}6,9 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$	2–4 Ω cm	CZ
5P3	Bor	$2,3 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$	20 m Ω cm	CZ
5I1			> 5 k Ω cm	FZ
G1	Bor			CZ
G2	Bor			CZ
G3	Bor			CZ

²<http://www.silchem.de/>

³<http://www.hellma-optics.com/>

4.2.1. Dotiertes Silizium

Abbildung 4.1 zeigt den experimentell ermittelten mechanischen Verlust für zwei ausgewählte Eigenfrequenzen der p-Typ Probe 5P2 mit 2...4 Ω cm. In Abbildung 4.2 ist zum Vergleich der mechanische Verlust der n-Typ Probe 5N4 mit 10...25 Ω cm bei gleichen Frequenzen zu sehen. In beiden Fällen ist wie für die Mehrheit aller durchgeführten Messungen an Silizium tendenziell eine Abnahme des mechanischen Verlustes ϕ zu tiefen Temperaturen zu beobachten. Während bei Raumtemperatur üblicherweise Werte von 10^{-7} bis knapp unter 10^{-8} erreicht werden, sinkt der mechanische Verlust im Falle der p-Typ Probe bei tiefen Temperaturen um 5 K bis nahezu 10^{-9} . Die bei 3 K mit $5,3 \cdot 10^{-10}$ niedrigsten Verluste konnten bisher von McGuigan et al. [71] gezeigt werden. Dabei wurde ebenfalls dotiertes p-Typ Silizium in $\langle 111 \rangle$ Orientierung mit 3...5 Ω cm, 10,6 cm Durchmesser und 22 cm Höhe bei einer Frequenz von 19,5 kHz untersucht. Über einen großen Temperaturbereich können die Messwerte mit Hilfe der Phonon-Phonon-Wechselwirkung modelliert werden. Für die gezeigten Kurven wurde jeweils der Parameter γ in der Größenordnung des Grüneisen-Parameters angepasst um eine bestmögliche Übereinstimmung zu erlangen. Dies ist gerechtfertigt, da γ lediglich die Summe der Kopplung zwischen den einzelnen thermischen und akustischen Phononen beschreibt, diese jedoch auf Grund der Form der Eigenschwingungen wie auch durch die Dotierung der Proben variieren kann. Die thermoelastische Dämpfung wurde mit Hilfe der Finite Elemente Software Comsol⁴ ermittelt und ist ebenfalls abgebildet. Sie liegt rund zwei Größenordnungen unter den gemessenen Werten und kann somit vernachlässigt werden.

Auffällig in beiden Abbildungen ist ein deutliches Verlustmaximum in Form eines Debyepeaks nach Gleichung (3.10) um 115 K für jeweils eine der gezeigten Frequenzen. Ein solches Verhalten konnte bereits in früheren eigenen Messungen [93, 94] sowie in der bereits erwähnten von McGuigan et al. [71] und Lam [89] beobachtet werden, dort jedoch nur für p-Typ Material. Diese Arbeit weist nun erstmals ein solches Maximum auch an n-Typ Silizium nach. Das Maximum ist, wie in Abbildung 4.6 zu sehen, für weitere Eigenfrequenzen einer Probe zu beobachten. Da die Temperatur des Maximums T_{\max} mit der Frequenz ansteigt handelt es sich offenbar um einen thermisch aktivierten Prozess. Die genaue Analyse soll im Anschluss in Unterabschnitt 4.2.3 erfolgen.

Für die Peaks bei rund 12 K, zu sehen jeweils für 39 kHz, wurden von Lam [89] weitere Donatoren als Ursache vorgeschlagen. Durch deren Einbau in das Kristallgitter degeneriert die sechsfache Entartung der Minima im Leitungsband und es kommt daher

⁴<https://www.comsol.de/>

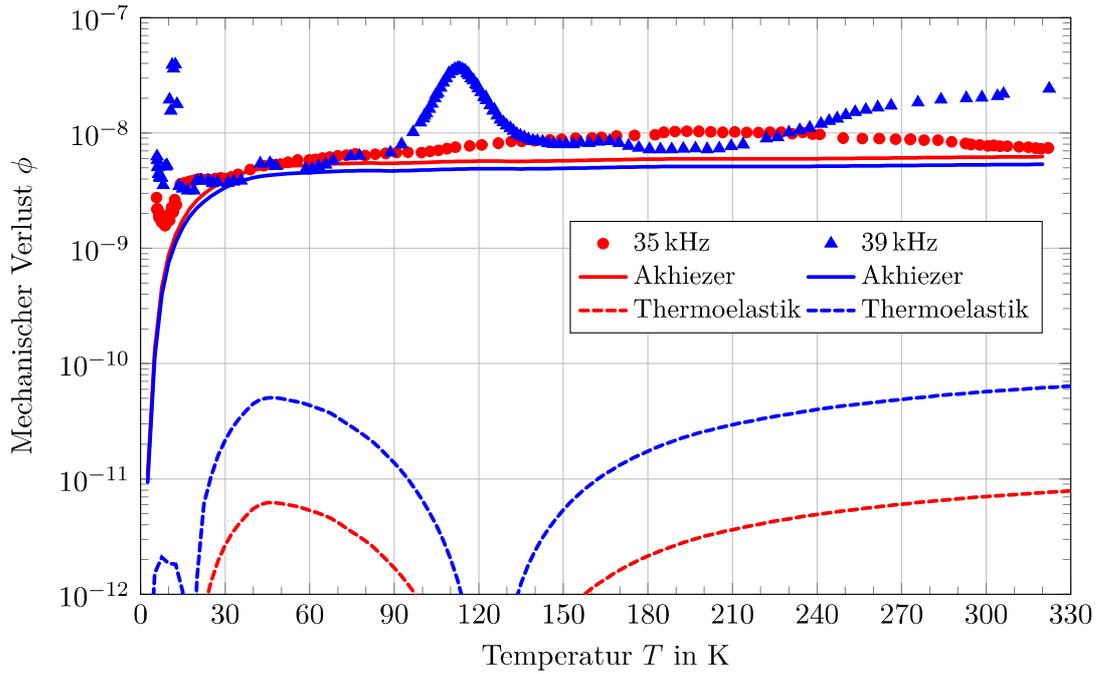


Abbildung 4.1.: Gemessener mechanische Verlust der p-Typ Silizium Probe 5P2 für zwei Eigenfrequenzen bei 35 kHz und 39 kHz. Die durchgezogene Linie stellt die jeweilige Akhiezer-Dämpfung durch Phonon-Phonon-Wechselwirkung nach Gleichung (3.15) dar und bestimmt in weiten Teilen den mechanischen Verlust. Der Parameter γ wurde für 35 kHz mit 0,84 und 39 kHz mit 0,73 angepasst. Die thermoelastische Dämpfung ist für beide Frequenzen um mehr als zwei Größenordnungen geringer und verschwindet an den Nulldurchgängen des Ausdehnungskoeffizienten α bei 18 K und 123 K. Auffällig ist der Verlustpeak bei etwa 115 K sowie ein weiterer Anstieg bei 12 K in einer der Kurven (Details hierzu im Text).

zu einer Energieverschiebung. Die Analyse der Peaks der 5P2 Probe bei 31 kHz, 36 kHz und 39 kHz weist eine Aktivierungsenergie von 10,5 meV auf und stimmt damit nahezu mit der für Phosphor gemessenen Verschiebung von 10,6 meV überein [100]. Die ermittelte Aktivierungsenergie von 20,3 meV in der 5N4 Probe bei 39 kHz, 55 kHz, 57 kHz und 72 kHz liegt nahe bei der für Arsen ermittelten Verschiebung von 19,8 meV [100]. Bei den anderen Proben mit geringerem spezifischen Widerstand konnten keine solch ausgeprägten Peaks ermittelt werden. Es ist daher naheliegend anzunehmen, dass die Bor-Dotierung der 5P2 Probe mit Phosphor kompensiert wurde, um die erforderlichen Widerstandswerte zu erreichen. Ebenso kann die Phosphor-Dotierung der 5N4 Probe mit Arsen kompensiert sein. Wegen der geringen Punktdichte ergeben sich jedoch relativ große Ungenauigkeiten (Faktor 2,5 der angegebenen Aktivierungsenergien), sodass für verlässliche Angaben an dieser Stelle weitere Messungen erfolgen müssten.

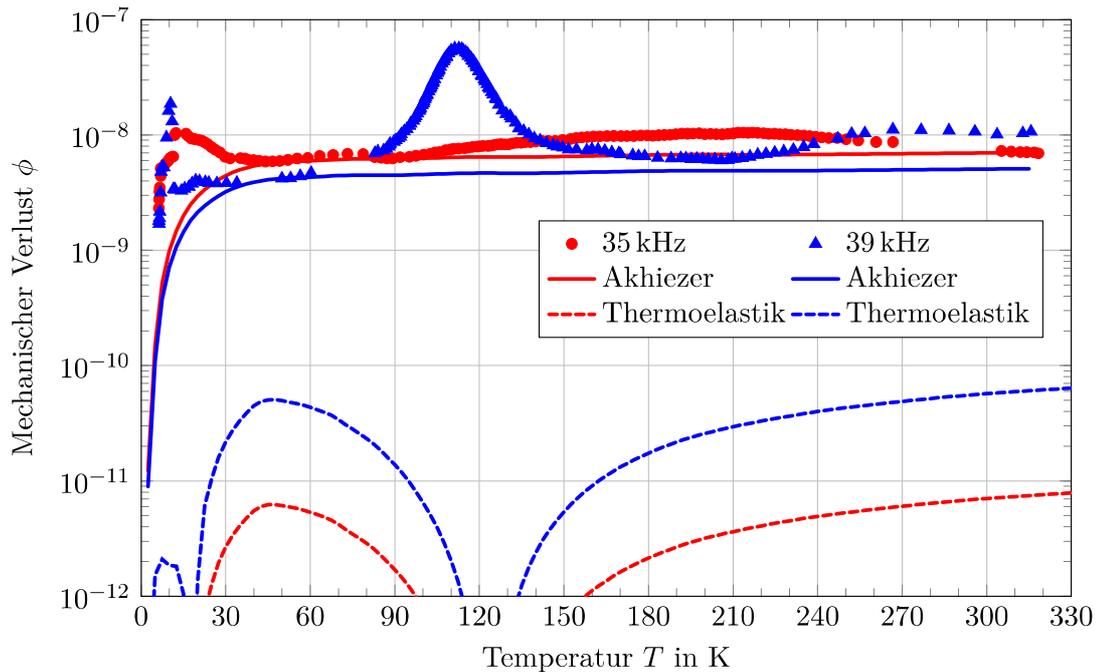


Abbildung 4.2.: Gemessener mechanischer Verlust der n-Typ Silizium Probe 5N4 bei 35 kHz und 39 kHz wie in Abbildung 4.1. Auch hier bestimmt die Akhiezer-Dämpfung gemäß Gleichung (3.15) mit $\gamma = 0,89$ für 35 kHz und $0,71$ für 39 kHz maßgeblich den Verlauf. Es tritt ebenfalls ein Verlustpeak bei 115 K auf, der durch den während des Kristallwachstums im Czochralski Verfahren eingelagerten interstitiellen Sauerstoff verursacht wird. Im Gegensatz zur 5P2 Probe sinkt der Verlust für 35 kHz unterhalb von 30 K nicht, sondern steigt sogar wieder an. Dieses Verhalten wurde insgesamt verstärkt für n-Typ Silizium beobachtet. Der minimale Verlust hingegen unterscheidet sich nur geringfügig.

Unter 30 K unterscheidet sich das Verhalten von p- und n-Typ Silizium im mechanischen Verlust. Während wie in Abbildung 4.1 für p-Typ Material mehrheitlich ein starkes Absinken des mechanischen Verlust unterhalb 10 K beobachtet wurde, wächst der Verlust bei n-Typ Proben zunächst bis zu dieser Temperatur wieder an, um dann ebenfalls abzufallen.

Weitere Messungen an der am stärksten dotierten Probe 5P3 (Abbildung 4.3) zeigen im Vergleich zu den beiden moderat dotierten 5P2 und 5N4 einen erhöhten mechanischen Verlust sowie insgesamt einen unruhigen Verlauf. Für einige Frequenzen tritt hier ein Maximum bei 95 K auf, das möglicherweise durch die große Anzahl an Fremdatomen hervorgerufen wird. Ebenso scheint durch die starke Dotierung der Verlustpeak um 115 K unterdrückt zu werden.

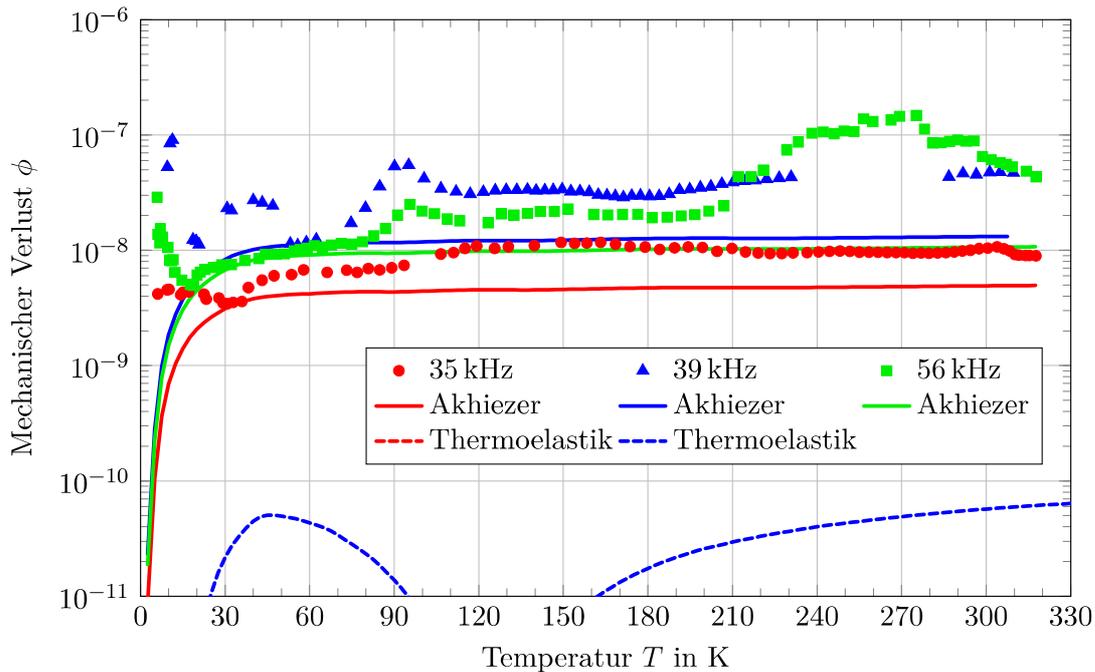


Abbildung 4.3.: Der mechanische Verlust ist für die am stärksten dotierte Probe insgesamt erhöht. Das Verlustmaximum um 115 K ist hier nicht vorhanden, allerdings treten mehrere andere Störungen zu Tage, deren Identifikation im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich war. Die Akhiezer-Dämpfung wurde hier für 35 kHz mit $\gamma = 0,76$, für 39 kHz mit 1,15 und für 56 kHz mit 0,87 berechnet.

4.2.2. Vergleich mit intrinsischem Silizium

Im Vergleich zu den im Vorherigen gezeigten Messungen an dotiertem Material zeigt intrinsisches Silizium ein etwas anderes Verhalten. Für eine der in Abbildung 4.4 gezeigten drei Eigenfrequenzen der 5I1 Probe nimmt der mechanische Verlust bis 100 K kontinuierlich ab während er für die beiden anderen bis 200 K zunächst deutlich und dann ebenfalls bis 100 K weiter sinkt. Dieser Effekt wurde mehrmals auch an anderen Proben beobachtet, tritt jedoch nicht systematisch auf und konnte daher nicht eindeutig zugeordnet werden. Es besteht aber die Vermutung, dass es sich um eine schwache Wechselwirkung mit der Aufhängung handelt, die durch eine langwierige Optimierung bei Raumtemperatur vermindert werden kann. Unterhalb von 200 K stellt sich ein flacher Verlauf ein bevor die mechanischen Verluste unter 100 K dann wieder ansteigen. Dieses Verhalten lässt sich ebenfalls durch die Wechselwirkung von Phononen beschreiben. Auf Grund des reduzierten Sauerstoffgehalts durch die Herstellung im Float Zone Verfahren erhöht sich die thermische Leitfähigkeit κ im Maximum um den Faktor fünf gegenüber Czochralski Material [101] (vgl. auch Abbildung A.2). Dadurch

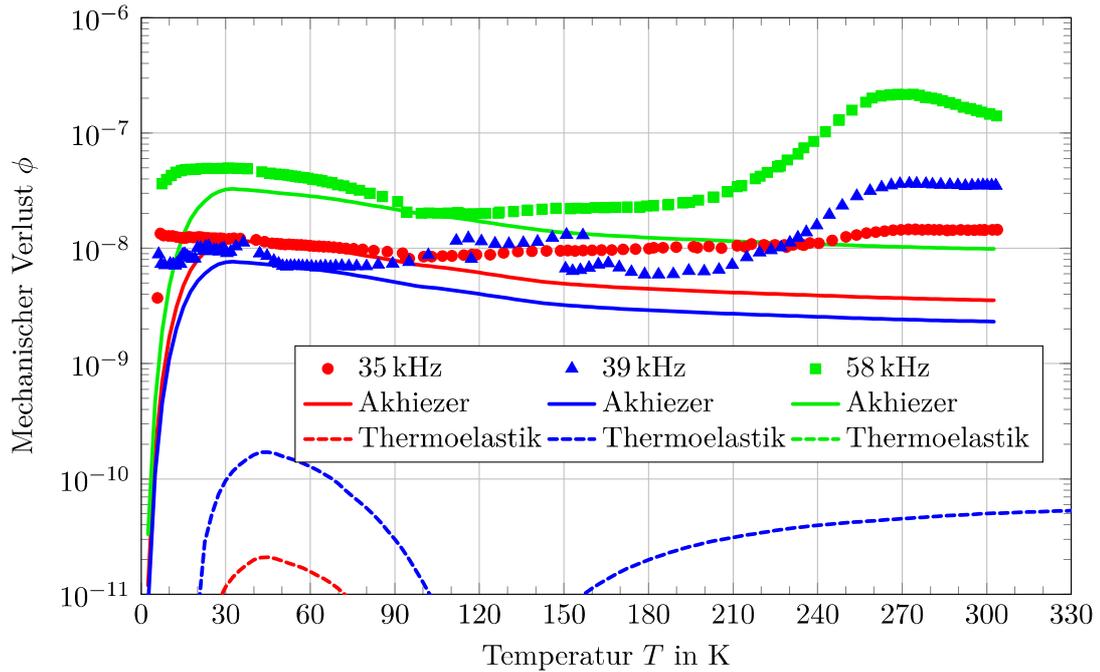


Abbildung 4.4.: Die Probe 5I1 aus intrinsischen Silizium zeigt zu tiefen Temperaturen einen leichten Anstieg im mechanischen Verlust. Die Herstellung im Float Zone Verfahren sorgt für eine geringere Konzentration interstitiellen Sauerstoffs. Die damit einhergehende höhere thermische Leitfähigkeit κ erklärt die ansteigende Akhiezer-Dämpfung nach Gleichung (3.15). Für 35 kHz wurde hier $\gamma = 0,69$ bzw. für 58 kHz 0,88 verwendet. Die thermoelastische Dämpfung hingegen fällt im Falle von Float Zone Material etwas geringer aus. Darüber hinaus ist kein Verlustpeak um 115 K zu beobachten.

ergibt sich ein anderer Verlauf des Akhiezer-Limits und erklärt den erhöhten Verlust des intrinsischen Silizium unterhalb von 100 K. Bei 20 K sinkt der mechanische Verlust der intrinsischen Probe auf rund $1 \cdot 10^{-8}$ gegenüber einem Wert von $4 \cdot 10^{-9}$ bei der p-Typ Probe (Abbildung 4.1).

Weiterhin auffällig ist das Fehlen des Verlustmaximums um 115 K für alle gemessenen Eigenfrequenzen. Auch in anderen Messungen bei Schwarz et al. [94] fand sich an Float Zone Silizium kein entsprechendes Maximum.

4.2.3. Mechanischer Verlust durch Sauerstoff

Die Vermutung von Sauerstoff als Ursache für den in Czochralski Silizium beobachteten Verlustpeak um 115 K wurde bereits in früheren, auch eigenen Arbeiten vorgeschlagen und diskutiert [89, 93, 102]. Das Sauerstoffatom wird im Siliziumkristall während des Czochralski Wachstums entlang einer der vier äquivalenten $\langle 111 \rangle$ Richtungen zwischen

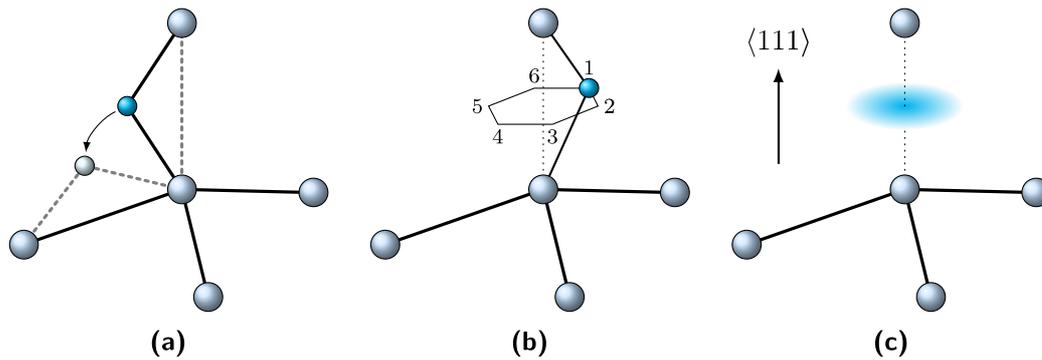


Abbildung 4.5.: Dreidimensionale Darstellung des Si–O–Si-Komplexes im Siliziumkristall. Der Sauerstoff als Zwischengitteratom (blau) geht eine Bindung mit zwei Siliziumatomen (grau) ein. Die Diffusion des Sauerstoffs erfolgt durch einen Sprung auf eine benachbarte Si–Si-Bindungsline (a). Im stationären Zustand existieren sechs äquivalenten Positionen des Sauerstoffs um die Si–Si-Achse (b), die allerdings schon mit der Grundzustandsenergie delokalisiert sind und zu einer zentralen Aufenthaltswahrscheinlichkeit zwischen den beiden Siliziumatomen führen (c) (vgl. Text).

zwei Siliziumatomen interstitiell eingelagert. Bei hohen Temperaturen um 1030°C beobachtete Southgate [103] bereits einen Verlustpeak, den er auf Platzwechselvorgänge des Sauerstoffs (sich Abbildung 4.5a) zwischen zwei Zwischengitterplätzen zurückführte. Die Aktivierungsenergie für diesen Prozess liegt bei $2,55\text{ eV}$ und tritt auf Grund der Defektsymmetrie nur unter Scherbelastung, d. h. für Verzerrungen entlang der $\langle 111 \rangle$ Richtung auf [104, 105].

Das im Rahmen dieser Arbeit beobachtete Verlustmaximum bei 115 K ist in Abbildung 4.6 beispielhaft für verschiedene Eigenfrequenzen der 5N4 Probe gezeigt. Mit steigender Eigenfrequenz f ist eine zunehmende Verschiebung des Maximums zu höheren Temperaturen T_{max} aus zu machen. Aus dem Anstieg der in Abbildung 4.7 gezeigten Arrhenius Auftragung $\ln 2\pi f$ über $1/T_{\text{max}}$ erhält man nach Gleichung (3.22) die Aktivierungsenergie. Im gezeigten Beispiel beträgt diese $(169 \pm 12)\text{ meV}$. Tabelle 4.2 listet die in gleicher Weise ermittelten Aktivierungsenergien auch für die übrigen Proben auf. Im Mittel beträgt der Wert für die Aktivierungsenergie 169 meV .

Weiterhin wird in Abbildung 4.6 die unterschiedlich starke Ausprägung des Maximums deutlich. Der Kurvenverlauf im Bereich des Maximums des mechanischen Verlusts kann in erster Näherung ausgedrückt werden durch die Überlagerung eines linearen Untergrunds ϕ_0 , der durch die Phonon-Phonon-Wechselwirkung entsteht (siehe

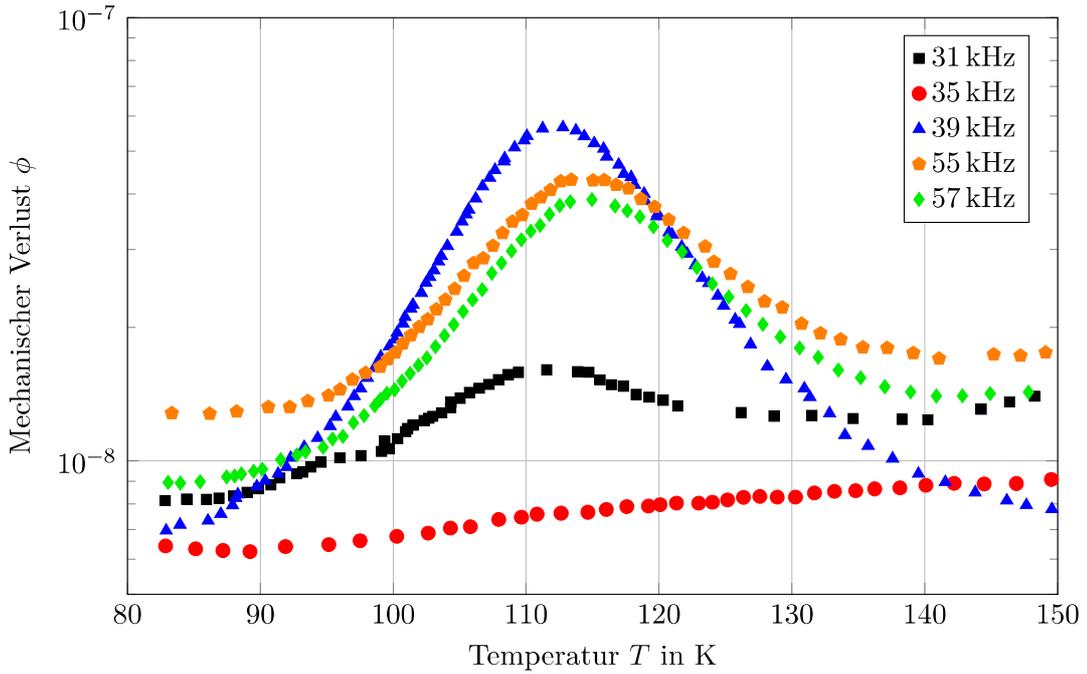


Abbildung 4.6.: Der mechanische Verlust zeigt, wie hier am Beispiel der 5N4 Probe zu sehen, ein Verlustmaximum, das sich mit steigender Frequenz zu höheren Temperaturen verschiebt und so auf einen thermisch aktivierten Verlustmechanismus schließen lässt. Die Höhe des Maximums bzw. die sogenannte Relaxationsstärke Δ , korreliert dabei mit dem Scheranteil der jeweiligen Eigenschwingung (siehe Abbildung 4.9).

Abbildung 4.1 und 4.2), und einem Debyepeak nach Gleichung (3.10):

$$\phi(f) = \phi_0(f) + \Delta \frac{2\pi f \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (4.3)$$

An der Stelle des Maximums ($2\pi f \tau = 1$) lässt sich dann aus $\phi = \phi_0 + \Delta/2$ die Relaxationsstärke Δ aus der Differenz zwischen dem Maximum und einer gedachten Linie etwa zwischen den beiden Fußpunkten abschätzen. Für 39 kHz liegt das Maximum beispielsweise bei $6,0 \cdot 10^{-8}$, der Untergrund bei $0,7 \cdot 10^{-8}$, sodass sich eine Relaxationsstärke von $10,6 \cdot 10^{-8}$ ergibt. Mit Hilfe eines Matlab-Skripts wurde diese Anpassung optimiert und für alle Maxima durchgeführt. Des Weiteren wurden unter Verwendung der FEM-Software Comsol die Scheranteile einer jeden Eigenresonanz berechnet. Abbildung 4.8 zeigt die Eigenschwingungen für die Proben der Serie 5 bei 35 kHz und 39 kHz. Bei ersterer handelt es sich um eine reine Streck-schwingung des Zylinders, daher fällt der Scheranteil mit 1 % sehr gering aus, letztere zeigt hingegen eine starke Scherung mit einem Anteil von 93 %. Trägt man wie in Abbildung 4.9 über dem

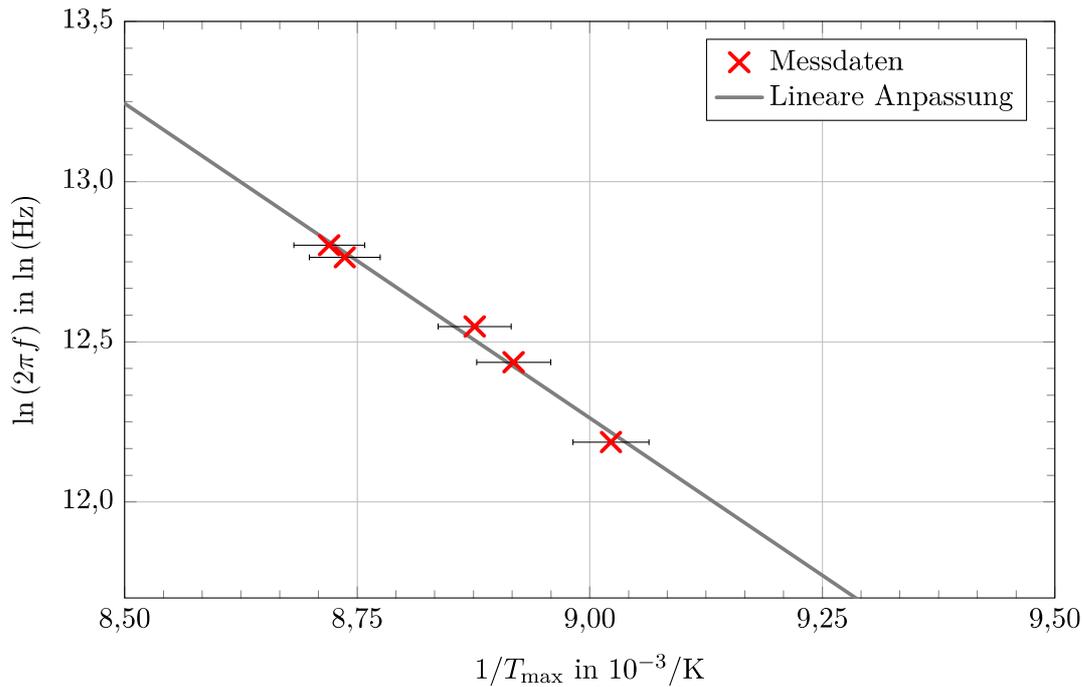


Abbildung 4.7.: Arrhenius Auftragung des natürlichen Logarithmus der Eigenfrequenz über der inversen Temperatur an der Stelle des Maximums T_{\max} nach Gleichung (3.10). Aus dem linearen Anstieg erhält man die Aktivierungsenergie, hier in diesem Fall mit $E_A = (169 \pm 12)$ meV.

ermittelten Scheranteil einer jeden Eigenfrequenz die zugehörige Relaxationsstärke des Peaks auf, so wird durch die ansteigende Ausgleichsgerade ein linearer Zusammenhang deutlich.

Für alle Proben der Serie G ergibt sich dabei die gleiche Abhängigkeit der Relaxationsstärke pro Scheranteil (vgl. Tabelle 4.2). Diese Proben unterscheiden sich lediglich in ihren Abmessungen, sind im Material jedoch identisch. Für die übrigen Proben sind an dieser Stelle jeweils verschiedene Abhängigkeit der Relaxationsstärke pro Scheranteil zu finden. Geht man von einer isotropen Verteilung der für den Verlustprozess verantwortlichen Struktur aus, so muss diese folglich jeweils in unterschiedlicher Konzentration im Material vorliegen.

Das Auftreten des Verlustpeaks ausschließlich in Czochralski Silizium, sowohl im p- als auch im n-Typ, nicht aber bei Float Zone Material sowie der beobachtete Zusammenhang von Relaxationsstärke und Scheranteil deuten stark auf den eingangs bereits erwähnten interstitiell gelösten Sauerstoff als Ursache hin. Das Sauerstoffatom bindet dabei mit den beiden benachbarten Siliziumatomen kovalent. Experimentell sind verschiedene Absorptionsbanden im Infraroten beobachtet worden, die von Bosomworth

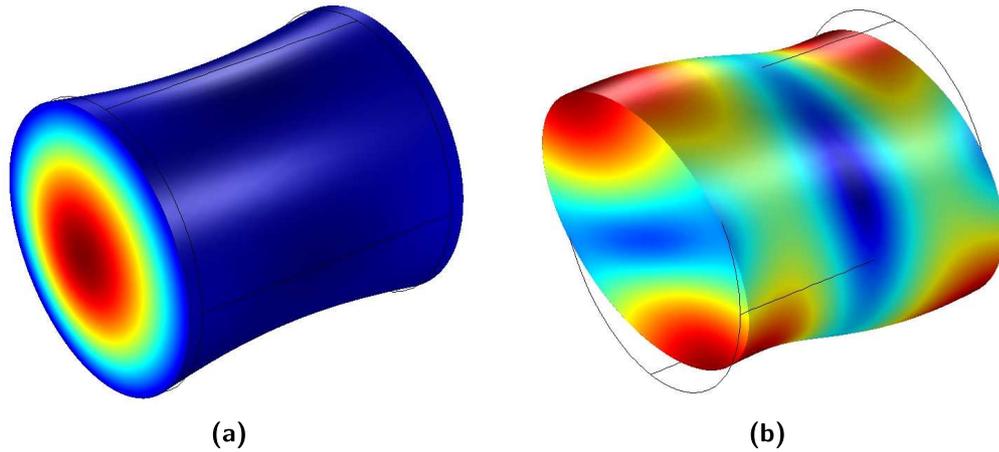


Abbildung 4.8.: Eigenschwingungen bei (a) 35 kHz und (b) 39 kHz für einen Siliziumzylinder mit je 10 cm Durchmesser und Höhe. Der Scheranteil beträgt wegen der Verzerrung hauptsächlich entlang der Zylinderachse entsprechend der $\langle 100 \rangle$ Kristallachse in (a) lediglich 1 %. In (b) hingegen liegt der Scheranteil bei 93 %.

et al. [106] mit den Normalschwingungen eines nichtlinearen Si–O–Si-Quasimoleküls erklärt wurden. Im stationären Grundzustand sitzt das Sauerstoffatom dabei auf einer der sechs äquivalenten Positionen neben der Si–Si Verbindungslinie (Abbildung 4.5b). Nach Bosomworth et al. [106] sorgt jedoch ein Potentialberg mittig zwischen beiden Siliziumatomen dafür, dass das Sauerstoffatom bereits im Grundzustand ringförmig um die Achse delokalisiert ist. Neuere Ansätze liefern einen Potentialberg von lediglich 1 meV noch unter der Grundzustandsenergie [107]. Damit ergibt sich eine maximale Aufenthaltswahrscheinlichkeit zentral zwischen den beiden Siliziumatomen (Abbildung 4.5c), sodass sich eine D_{3d} -Defektsymmetrie einstellt [108]. Anstatt der Si–O–Si-Struktur erfolgt hier die Beschreibung ausgehend von $\text{Si}_3 \equiv \text{Si}-\text{O}-\text{Si} \equiv \text{Si}_3$. Auf Grundlage dessen konnten in den letzten Jahren Absorptionsbanden zwischen 25 cm^{-1} und 1900 cm^{-1} erklärt werden, ein Termschema findet sich in [109, 110]. Darin tauchen unter anderem Banden um 30 cm^{-1} , 517 cm^{-1} , 648 cm^{-1} und 1136 cm^{-1} auf, die Schwingungen des Sauerstoffatoms (2D LEAE, two-dimensional low energy anharmonic excitation) bzw. der beiden benachbarten Siliziumatome (E_u) in der jeweiligen (111)-Ebene und der symmetrischen (A_{1g}) sowie asymmetrischen Streckschwingung (A_{2u}) zuzuordnen sind.

Lam et al. [102] führte den von ihm beobachteten Verlustpeak auf Grund der Aktivierungsenergie von 140 meV entsprechend 1136 cm^{-1} auf die asymmetrische Streckschwingung zurück. Die in dieser Arbeit ermittelte Aktivierungsenergie von 169 meV (1363 cm^{-1}) kann bisher keiner Anregung im Termschema zugeordnet werden. Rein energetisch betrachtet käme dafür jedoch ein Übergang von 517 cm^{-1} auf die 1800 cm^{-1} -

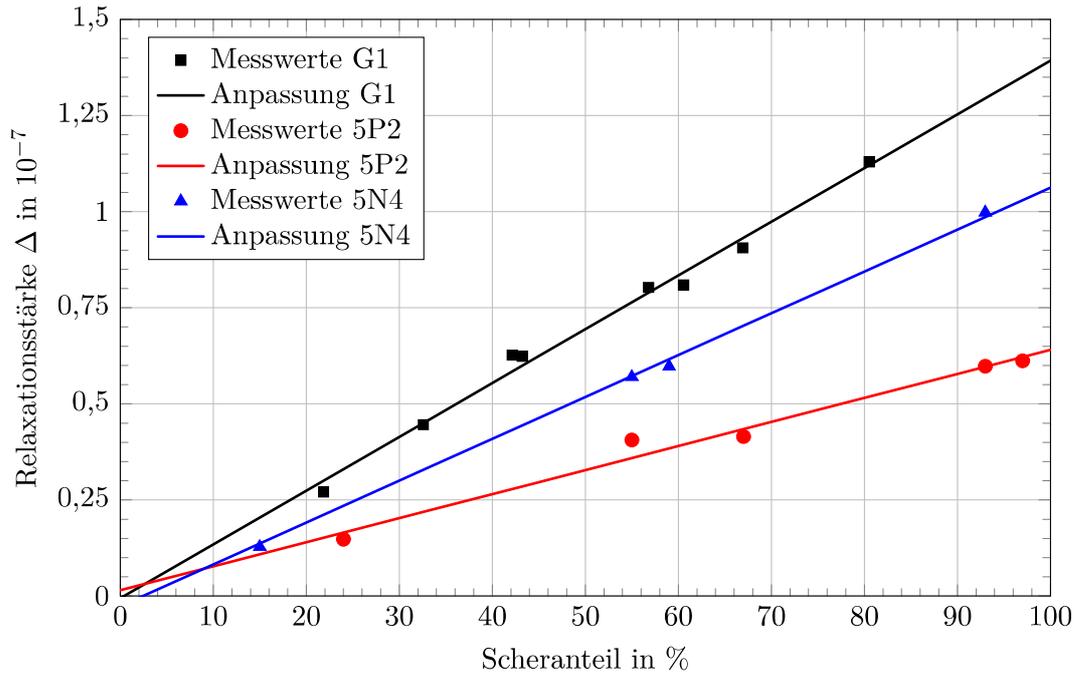


Abbildung 4.9.: Die Relaxationsstärke skaliert linear mit dem Scheranteil jeder Eigenschwingung. Für alle Proben der Serie G aus dem gleichen Material wurden übereinstimmend die größten Relaxationsstärken pro Scheranteil ermittelt (siehe Tabelle 4.2). Die restlichen Proben hingegen zeigen eine größere Variation und lassen eine jeweils andere Sauerstoffkonzentration vermuten.

Bande ($A_{2u} + A_{1g} + 2D$ LEAE [110]) in Betracht. Zur weiteren Untersuchung wurde daher eine Wärmebehandlung der Proben durchgeführt. Dadurch können die Sauerstoffatome im Kristall ihre interstitielle Position verlassen und umgelagert werden. Im Umkehrschluss ist ein Ausbleiben bzw. eine Abschwächung des Verlustmaximums zu erwarten.

4.2.4. Wärmebehandeltes Silizium

Die Wärmebehandlung von Silizium wird in der Halbleiterindustrie gezielt eingesetzt, um bei Wafern eine Schicht frei von Defekten zu erhalten. In einem ersten Hochtemperaturschritt um 1200 °C diffundiert zunächst Sauerstoff bis zu einer Tiefe von 10 μm aus dem Material. Im zweiten Schritt bei 700 °C bis 800 °C bildet der verbliebene Sauerstoff Keime, die im dritten Schritt bei 1000 °C zu SiO_x -Clustern wachsen. Diese wirken schließlich attraktiv auf metallische Verunreinigungen und Defekte, sodass schlussendlich eine dünne hochkristalline sowie reine Siliziumschicht für weitere Prozessschritte zur Verfügung steht.

Tabelle 4.2.: Zusammenfassung der Ergebnisse der Analyse des Verlustmaximums um 115 K in Silizium. Die Aktivierungsenergie liegt für alle Proben im Mittel bei 169 meV, für die Probe 5N2 lagen nur zwei Verlustmaxima zur Analyse vor und erklären die starke Abweichung. Die Relaxationszeit ist Die Relaxationsstärke variiert für Proben der Serie 5 aufgrund der verschiedenen Materialzusammensetzung. Für die Proben der Serie G aus dem identischen Material ist dies nicht zu erkennen.

Probe	Aktivierungsenergie	Relaxationszeit	Relaxationsstärke pro Scheranteil in 10^{-8}
5N1	(171 ± 6) meV	(100 ± 61) fs	$9,0 \pm 0,6$
5N2	(181 ± 55) meV	(37 ± 206) fs	$5,1 \pm 2,1$
5N3	nicht vermessen		
5N4	(169 ± 12) meV	(98 ± 114) fs	$10,9 \pm 0,3$
5P1	kein Peak		
5P2	(165 ± 11) meV	(158 ± 175) fs	$6,3 \pm 0,4$
5P3	kein Peak		
5I1	kein Peak		
G1	(168 ± 6) meV	(98 ± 55) fs	$14,0 \pm 0,6$
G1O	(169 ± 11) meV	(100 ± 107) fs	$13,6 \pm 1,1$
G2	(167 ± 8) meV	(65 ± 51) fs	$12,5 \pm 1,6$
G3	(161 ± 6) meV	(187 ± 112) fs	$13,7 \pm 2,1$

Da in diesem Fall lediglich eine Änderung weg von der interstitiellen Position des Sauerstoffs erzielt werden sollte, wurden die entsprechenden Substrate 6 h bei 750 °C zur Keimbildung und 24 h bei 950 °C zum Wachstum der Cluster behandelt [76, S. 55]. Um das Eindiffundieren von Fremdatomen zu verhindern, erfolgte das Tempern auf einem Halter aus amorphem Silizium sowie mit leichtem Stickstoffüberdruck in einem Rohrofen. Ebenso wurden Siliziumwafer thermisch behandelt und die Änderung im IR-Absorptionsspektrum verfolgt, da eine direkte Messung an den Proben auf Grund ihrer Dicke mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht möglich war.

Der interstitiell eingelagerte Sauerstoff verursacht durch die vielfältigen Übergänge im Termschema (siehe vorheriger Abschnitt) bei Raumtemperatur ein Absorptionsmaximum um 1107 cm^{-1} , das sogenannte $9 \mu\text{m}$ -Band. Durch Transmissionsmessungen ist es auf diese Weise möglich, den Sauerstoffgehalt zu bestimmen. Die Transmission einer planparallelen beidseitig polierten Siliziumscheibe der Dicke t ist gegeben durch:

$$T = I_0 \frac{(1 - R)^2 e^{-\alpha t}}{1 - R^2 e^{-2\alpha t}} \quad (4.4)$$

wobei I_0 die einfallende Intensität, R die Reflektivität und α den Absorptionskoeffizien-

ten bezeichnen. Der Absorptionskoeffizient setzt sich hierbei aus Gitterschwingungen, freien Elektronen sowie dem Anteil durch Sauerstoff zusammen:

$$\alpha = \alpha_{\text{phon}} + \alpha_e + \alpha_O \quad (4.5)$$

Für hochohmiges Silizium kann der Beitrag durch freie Elektronen vernachlässigt werden. Zudem kann in diese Fall Silizium aus dem Float Zone Prozess gegenüber Czochralski Silizium als quasi sauerstofffrei betrachtet werden, sodass für das Verhältnis der beiden Transmissionen gilt [75]:

$$\frac{T_{CZ}}{T_{FZ}} \approx \exp(-(\alpha_{CZ} - \alpha_{FZ})t) = \exp(-\alpha_O t), \quad (4.6)$$

woraus sich unmittelbar der Absorptionskoeffizient α_O ergibt. Die Konzentration interstitiellen Sauerstoffs folgt schließlich durch Multiplikation der Höhe des Absorptionsmaximums mit der Kalibrierkonstanten $(3,14 \pm 0,09) \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$ [111]. In Abbildung 4.10 sind die Messwerte des auf diese Weise ermittelten Absorptionskoeffizient α_O für hochohmiges n-Typ Silizium sowohl vor als auch nach dem oben beschriebenen Temperprozess gezeigt. Deutlich zu sehen ist darin eine Abnahme des Absorptionskoeffizienten im Bereich um 1112 cm^{-1} um rund 28 %. Die Konzentration interstitiellen Sauerstoffs konnte demnach um knapp ein Drittel von $(7,85 \pm 0,86) \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ auf $(5,65 \pm 0,79) \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ reduziert werden. An der Zunahme des Absorptionsbandes bei 1230 cm^{-1} ist außerdem wie erwartet die Bildung der SiO_2 -Ausscheidungen zu erkennen [112].

In Abbildung 4.11 ist der mechanische Verlust der getemperten Probe 5N4 gezeigt. Das vor der thermischen Behandlung um 120 K aufgetretene Maximum (siehe Abbildung 4.6) ist hier nicht mehr vorhanden. Dies ist auf die durch den Temperprozess reduzierte Konzentration interstitiellen Sauerstoffs zurückzuführen. Insgesamt hat sich jedoch der mechanische Verlust durch das Tempern erhöht. Da es nachweislich zur Bildung von SiO_2 -Ausscheidungen kommt, könnten diese dafür verantwortlich sein. Fused Silica (amorphes Siliziumdioxid) zeigt bei 30 K einen sehr hohen Verlust um 10^{-3} , daher können schon geringe Mengen, eingelagert im Siliziumkristall, zum beobachteten Anstieg führen. Zum anderen erfolgt durch die Ausscheidungen eine Störung der Kristallinität, die sich ebenfalls negativ auf den mechanischen Verlust auswirken kann. Ob darüber hinaus mit dem durchgeführten Temperprozess auch die optischen Eigenschaften, insbesondere die Absorption von Silizium verändert werden, sollte durch zukünftige Arbeiten untersucht werden.

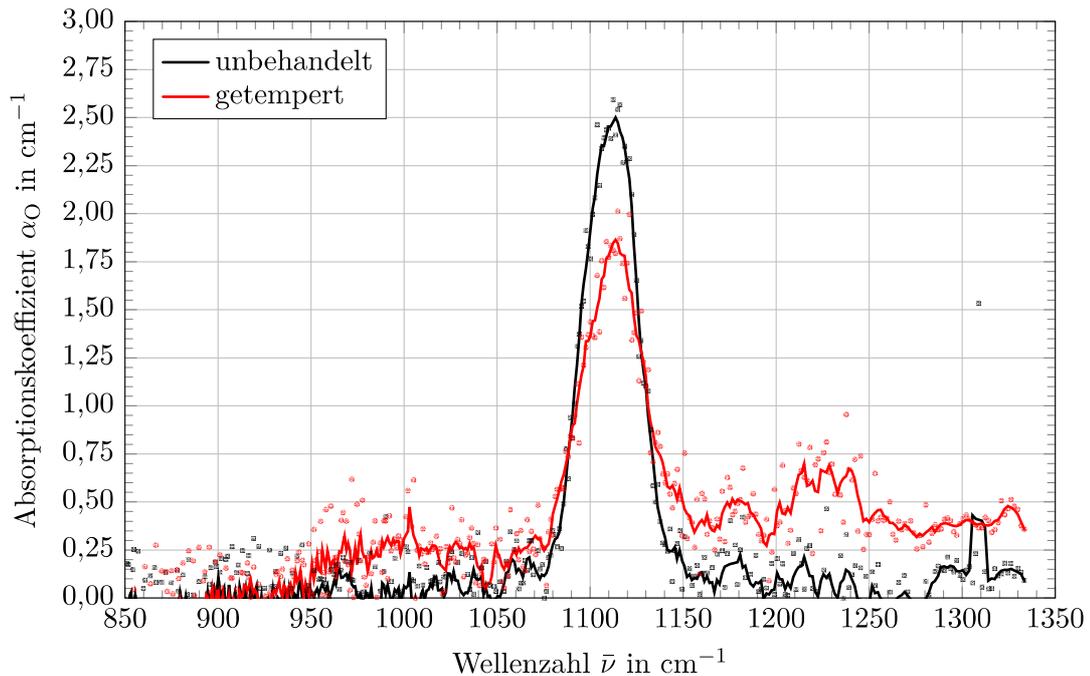


Abbildung 4.10.: Der Absorptionspeak bei 1112 cm^{-1} in Form des $9\text{ }\mu\text{m}$ -Bandes in Silizium korreliert mit der interstitiellen Sauerstoffkonzentration. Durch Tempern für 6 h bei 750 und 24 h bei $950\text{ }^\circ\text{C}$ (rot) kommt es zu einer Absenkung um knapp ein Drittel gegenüber dem unbehandelten Silizium (schwarz). Die erhöhte Absorption um 1230 cm^{-1} weist zudem auf die Bildung von SiO_2 -Ausscheidungen hin.

4.3. Messungen an Saphir

Saphir stellt ein weiteres Material dar, das für den zukünftigen Einsatz in Gravitationswellendetektoren in Betracht kommt. Im Gegensatz zu Silizium ist Saphir jedoch sehr hart, wodurch eine Politur mit hoher Oberflächenqualität nur mit viel Aufwand zu erreichen ist. Ob und inwieweit die Qualität der Oberfläche eine Rolle spielt, wird im Folgendem geklärt.

4.3.1. Einfluss der Oberflächengüte

Um den Einfluss der Oberflächengüte auf den mechanischen Verlust zu untersuchen, kamen drei unterschiedlich bearbeitete Saphirsubstrate zum Einsatz (siehe Tabelle 4.3). Das Verhältnis von Oberfläche S zu Volumen V eines jeden Substrates unterscheidet sich dabei um weniger als 30 %. Die optische Politur der scheibenförmigen Probe 1 entspricht dabei der höchsten Güte, mittels Rasterkraftmikroskopie wurde eine

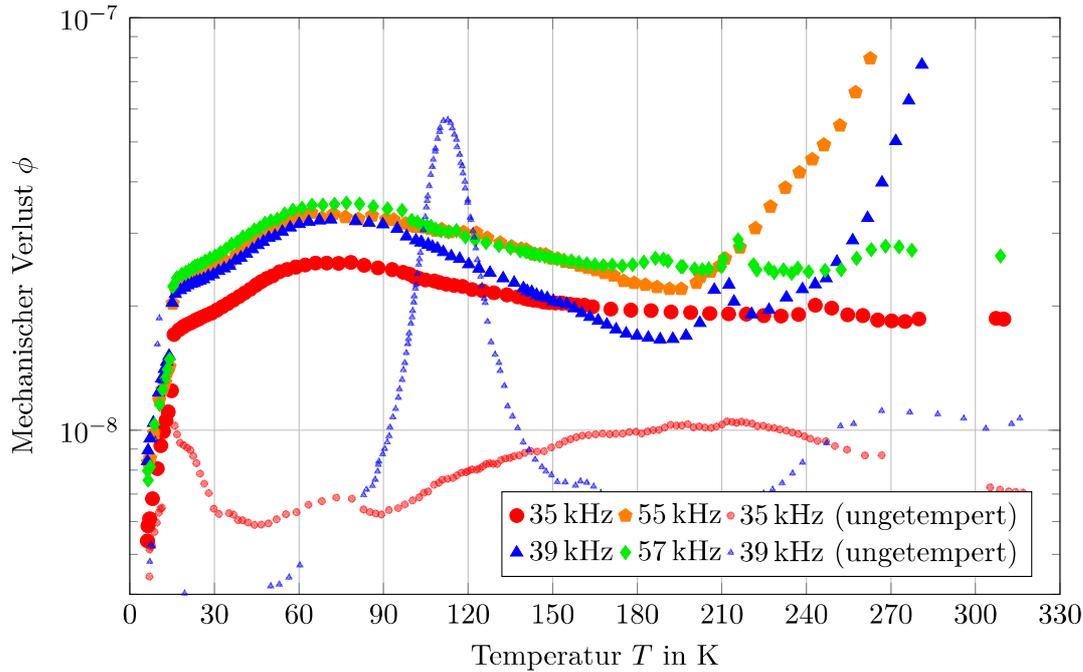


Abbildung 4.11.: Die mechanische Verlustmessung an getemperten Siliziumproben mit reduzierter Konzentration interstitiellen Sauerstoffs, hier wiederum für die Probe 5N4, zeigt im Bereich um 120 K kein Maximum mehr (vgl. mit Abbildung 4.6). Vermutlich kommt es jedoch durch die SiO_2 -Ausscheidungen insgesamt zu einer Erhöhung des mechanischen Verlusts. Zum besseren Vergleich ist die vorhergehende Messung an der ungetemperten Probe für 35 kHz und 39 kHz ebenfalls angedeutet.

Rauheit R_q von $(0,3 \pm 0,1)$ nm sowie eine Welligkeit W_q von $(3,0 \pm 0,5)$ nm ermittelt⁵. Die geringste Oberflächengüte liegt für die geschliffene Probe 3 vor, diese wurde mit Hilfe eines Tastschnittverfahrens zu $R_q = (0,12 \pm 0,03)$ μm und $W_q = (0,70 \pm 0,02)$ μm bestimmt⁶. Eine weitere stabförmige Probe ist bezüglich ihrer Oberflächenqualität dazwischen einzuordnen. Hier erfolgte lediglich eine einfache Politur, sodass eventuelle Einschlüsse oder Störungen im Inneren sichtbar sind (inspection polished).

Durch die verschiedenen Verfahren der mechanischen Oberflächenbearbeitung kann sich eine einige zehn μm dünne polykristalline Schicht l bilden, in der wahllos orientiert Kristallite und Defekte mit einer charakteristischen Größe a von wenigen μm liegen [70, 84]. Während einer periodischen Verformung kommt es in diesen Kristalliten zu thermoelastischer Dämpfung. Der dadurch zu erwartenden mechanischen Verlust kann

⁵Rasterkraftmikroskop Nanosurf Easyscan 2 AFM, Bildausschnitt mit $8,4 \mu\text{m} \times 8,4 \mu\text{m}$ auf $256 \text{ Pixel} \times 256 \text{ Pixel}$, Auswertung mit Gwyddion, Messstrecke 12 μm

⁶Profilometer Dektak 3030, Auswertung mit Gwyddion, 2000 Punkte auf eine Messstrecke von 1 mm

Tabelle 4.3.: Saphirproben zur Untersuchung des Einflusses der Oberflächengüte.

Probe	Durchmesser D	Höhe H	Verhältnis S/V	Oberfläche
1	76 mm	25,4 mm	$0,14 \text{ mm}^{-1}$	optisch poliert
2	25,4 mm	90 mm	$0,18 \text{ mm}^{-1}$	poliert
3	30 mm	120 mm	$0,15 \text{ mm}^{-1}$	geschliffen

in erster Näherung wie folgt abgeschätzt werden:

$$\phi_{\text{surf}} = \frac{4l Y \alpha^2 T}{D \rho C} \frac{\omega \tau_{\text{surf}}}{1 + \omega^2 \tau_{\text{surf}}^2}. \quad (4.7)$$

Der Vorfaktor $4l/D$ setzt dabei den Anteil der Schicht zum gesamten Substrat in Verhältnis. Die Zeitkonstante $\tau_{\text{surf}} = a^2 C \rho / \kappa$ wird durch die Kristallitgröße bestimmt.

In Abbildung 4.12 sind drei Messkurven des mechanischen Verlustes repräsentativ für jeweils eine der untersuchten Proben zu sehen. Der niedrigste Verlust konnte insgesamt an der Probe mit der höchsten Oberflächengüte gemessen werden. Mit zunehmender Rauigkeit allerdings erhöht sich der mechanische Verlust. Während im Bereich um 30 K der gemessene Kurvenverlauf mit der Akhiezerdämpfung nach Gleichung (3.15) übereinstimmt, sind sowohl zu tieferen als auch höheren Temperaturen unterschiedlich starke Abweichungen zu sehen.

Nutzt man obige Gleichung (4.7) so ergibt sich unter Annahme einer Kristallitgröße von $1 \mu\text{m}$ sowie einer Schichtdicke von $50 \mu\text{m}$ im Falle des optisch polierten Substrates die gestrichelte Linie leicht unterhalb der zugehörigen Messkurve. Für größere Kristallite um $30 \mu\text{m}$ und eine tiefere Störschicht von $100 \mu\text{m}$ steigt der Verlustbeitrag stark an, sodass die Messkurve des geschliffenen Substrates erreicht wird. Da eine Verteilung der Kristallitgröße vorliegt, kann der Kurvenverlauf als Summe von Gleichung (4.7) über die Kristallitgröße verstanden werden. Insgesamt wird deutlich, dass sich der Einfluss der Oberfläche aber zu tiefen Temperaturen verringert.

4.3.2. Dotiertes Saphir

Wie auch in Silizium finden sich in einkristallinem Saphir Verunreinigungen oder gezielt eingebrachte Fremdatome in Form von Dotierungen. Als ein Beispiel hierfür wurde Rubin, also mit Chrom dotiertes Saphir, $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}_3^+$, mit 25,4 mm Durchmesser und 110 mm Höhe untersucht. Die Dotierung von Saphir ist vor allem im Bereich der Festkörperlaser üblich, prominentestes Beispiel ist der Titan-Saphir-Laser. Die Beimischung von Chrom und auch Titan erhöht darüber hinaus allerdings auch die

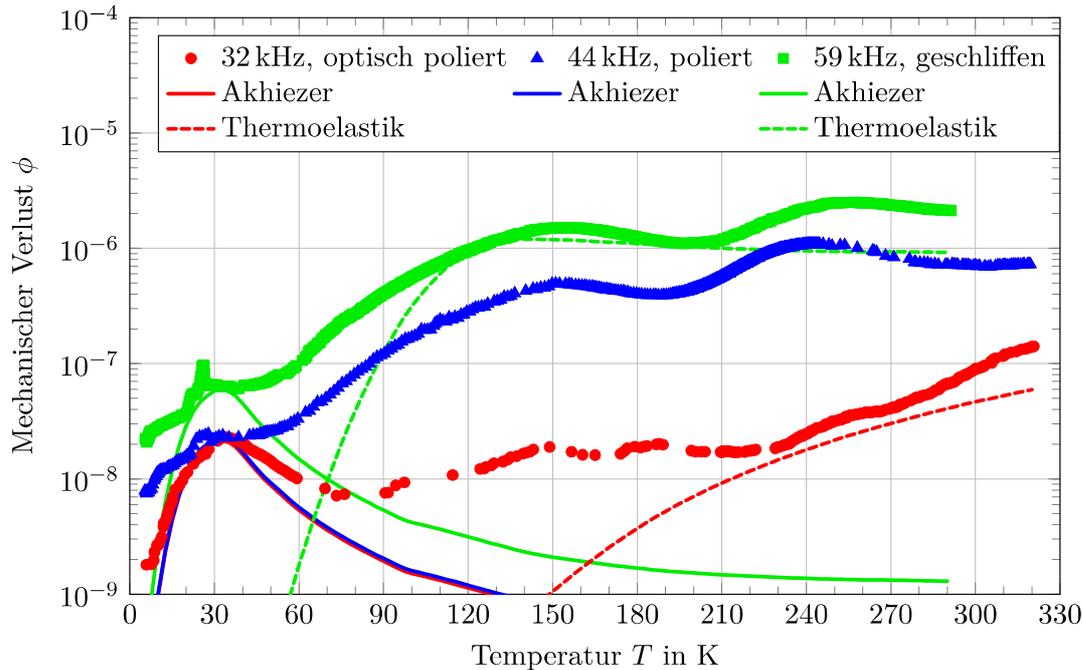


Abbildung 4.12.: Der mechanische Verlust für drei Saphirproben mit unterschiedlicher Oberflächengüte. Im Bereich um 30 K wird das Akhiezer-Limit erreicht, während sowohl bei tieferen als auch bei höheren Temperaturen mit zunehmender Rauigkeit der mechanische Verlust teils stark zunimmt. Dieses Verhalten kann durch zusätzliche Verlustbeiträge aus der gestörten Oberflächenschicht erklärt werden (siehe Text).

Festigkeit und Härte von Saphir [113, 114].

Eigene Messungen zeigen ebenfalls eine positive Wirkung auf den mechanischen Verlust, wie in Abbildung 4.13 zu sehen. Im Bereich um 30 K zeigt sich wieder die für Saphir typische Limitierung in Form der Akhiezer-Dämpfung. Im Temperaturbereich zwischen 60 K und 240 K liegt der mechanische Verlust für beinahe alle Eigenfrequenzen der Probe unterhalb von 10^{-8} . Solch geringe Verluste konnten an keinem anderen Substrat gemessen werden. Bei tiefen Temperaturen unter 20 K entspricht der mechanische Verlust dem von reinem Saphir (vgl. Abbildung 4.12).

4.4. Saphirfasern für die Pendelaufhängung

Die Pendelaufhängung der Testmassen mit dünnen Stahlsaiten oder gezogenen Quarzglasfasern, wie sie in Gravitationswellendetektoren der ersten und auch zweiten Generation zum Einsatz kommt, erfüllt nicht die Anforderungen an die Wärmeabfuhr

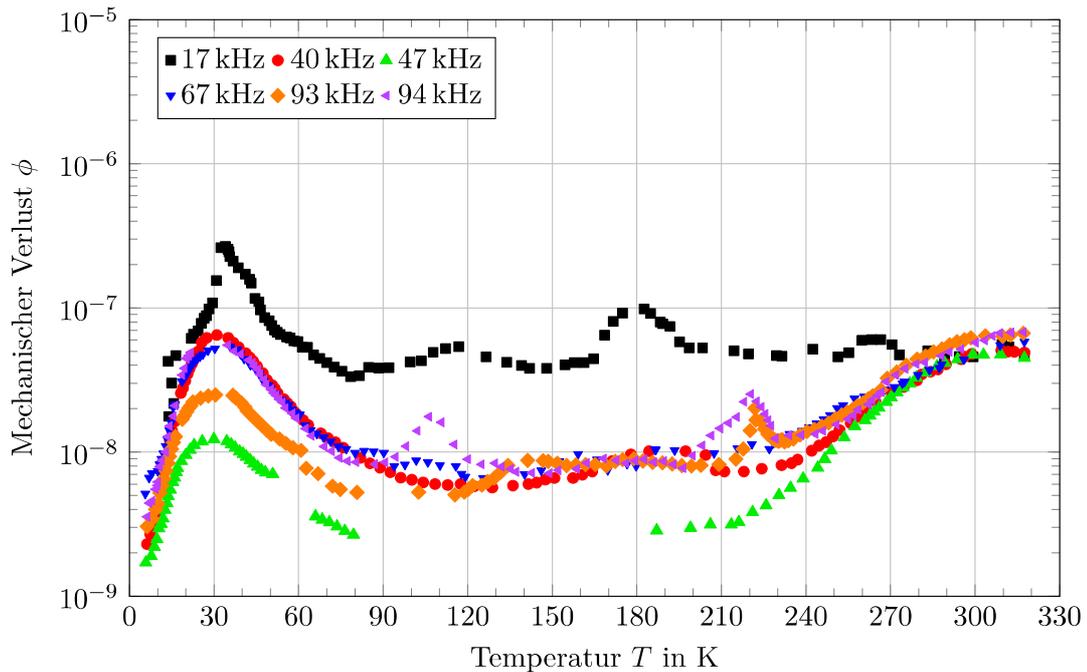


Abbildung 4.13.: Mit Chrom dotiertes Saphir zeigt im Vergleich mit allen anderen Messungen im Bereich von 60 K bis 240 K die geringsten Verluste unterhalb von 10^{-8} . Im Bereich um 30 K limitiert die Akhiezer-Dämpfung den minimalen mechanischen Verlust. Unterhalb von 20 K ist kein Unterschied zu reinem Saphir festzustellen (vgl. Abbildung 4.12).

in kryogenen Detektoren. Im japanischen Detektor KAGRA oder auch dem Einstein Telescope ist daher der Einsatz von Aufhängeelementen mit größerem Querschnitt erforderlich [50, 115, 116]. Neben der Wärmeleitung solcher Elemente (siehe Kapitel 5) stellt sich auch die Frage nach ihrem mechanischen Verlust ϕ , da dieser über Gleichung (2.41) bzw. (2.45) direkten Einfluss auf den Rauschbeitrag durch die Aufhängung hat.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde daher auch der mechanische Verlust an Prototypen aus Saphir für die Aufhängung in KAGRA untersucht. Es handelt sich dabei jeweils um dünne Stäbe bzw. Fasern mit einem zylindrischen Kopf mit 10 mm Durchmesser und 5 mm Höhe an mindestens einem Ende (Abbildung 4.14). Diese Köpfe sollen später an spezielle Halterungen eingehakt die Testmassen mit der vorletzten Pendelstufe verbinden (siehe Abbildung 6.1).

Die mit 35 cm längste Faser wurde von der Firma MolTech⁷ hergestellt. Dazu wurde zunächst ein Endstück bestehend aus dem Kopf zusammen mit einem ca. 1,5 cm

⁷<http://www.mt-berlin.com/>

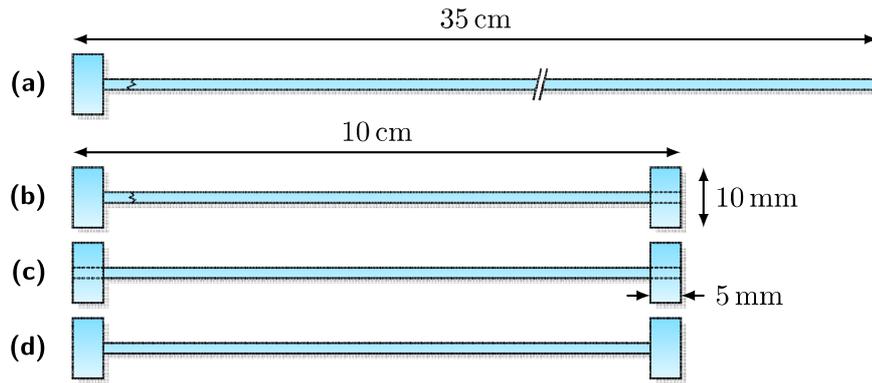


Abbildung 4.14.: Schematische Darstellung zur Unterscheidung der untersuchten Fasern. (a) Durchgängiges Endstück aus Kopf und Faseransatz, an das die restliche Faser angewachsen wurde. Der in Abbildung 4.15a zu sehende Übergang ist angedeutet. (b) Wie (a) mit angefügtem zweitem Kopf (vgl. Abbildung 4.15b). (c) Faser mit zwei angefügten Köpfen. (d) Durchgängige, rein monolithische Faser.

langem Teilstück der Faser aus einem Saphirkristall herausgearbeitet. Im Anschluss wurde dann die restliche Faser unter Zuhilfenahme dieses Endstücks als Keim aus der Schmelze gezogen. Die Längsachse der so gewachsenen Faser entspricht dabei, wie bei allen anderen Fasern auch, der kristallografischen c -Achse von Saphir. Die Oberfläche dieser Fasern wurde nicht weiter bearbeitet. Im Mittel betrug der Durchmesser 1,8 mm.

Weitere Fasern stammen von der Firma Impex⁸. Hierbei handelt sich um mit 1,6 mm Durchmesser etwas dünnere Fasern, allerdings mit jeweils zwei Köpfen anstatt nur einem. Auch hier wurde zunächst eines der beiden Enden hergestellt um dann die restliche Faser im Stepanov-Verfahren aus der Schmelze zu ziehen. Das freie Ende der Faser wird danach durch ein spezielles Lötverfahren unter Verwendung von Aluminiumoxidpulver in einer Bohrung des zweiten Kopfes verankert. Die Gesamtlänge der so hergestellten Fasern beträgt 10 cm. Abbildung 4.15 zeigt beide Varianten im direkten Vergleich.

Durch das Anwachsen der Faser an ein Endstück wie auch durch die Fügeverbindung von Faser und Kopf können Unregelmäßigkeiten sowohl geometrisch als auch in der Kristallstruktur auftreten. Für den Übergang zwischen präpariertem und gezogenem Teil der Faser ist ein durchgängiges Kristallsystem zu erwarten und kann so als quasi monolithisch bezeichnet werden. Dahingegen gilt dies nicht für das andere Ende mit dem angesetztem Kopf.

Die Herstellung durchgängig monolithischer Fasern mit zwei Köpfen wurde ebenfalls von der Firma Impex durchgeführt. Dazu wurde ein Saphirkristall in die entsprechende

⁸<http://www.impex-hightech.de/>



(a) monolithisch



(b) angefügt

Abbildung 4.15.: Der in (a) gezeigte monolithische Kopf ist aus einem Saphirkristall geschliffen worden und geht ungestört in den dünnen Teil der Faser über. Dieses Endstück dient dann als Keim für das weitere Kristallwachstum der Faser, erkennbar an der dunklen Ansatzstelle. Im Gegensatz dazu zeigt (b) die Verbindung des durch ein spezielles Lötverfahren an die Saphirfaser angefügten Kopfes. Dadurch entsteht im Innerem ein gestörter Bereich. Beide Herstellungsverfahren wurden sowohl in ihrem mechanischen Verlust als auch ihrer Wärmeleitfähigkeit untersucht.

Form der Faser geschliffen. Dieses Verfahren ist allerdings äußerst aufwendig und kostenintensiv, sodass insbesondere diese Art der Herstellung von Fasern mit der für KAGRA vorgesehenen Länge von 40 cm fragwürdig erscheint.

4.4.1. Mechanischer Verlust von Saphirfasern

Um den mechanischen Verlust der Saphirfasern zu untersuchen wurden diese jeweils einseitig in einer speziellen Kupferklemme fixiert. Dazu wurde die Faser durch eine Bohrung bzw. Aussparung größer als der Faserdurchmesser geführt. Der Kopf wurde anschließend mit einem Stempel in eine Flachslenkung bzw. in eine Kegelsenkung eingespannt. Im ersten Fall kann es durch eventuell vorhandene Unebenheiten in der Flachslenkung oder am Stempel sowie durch eine leichte Verkippung zueinander zu einer ungleichmäßigen Einspannung und dem Auftreten von Reibung und dadurch zu erhöhten mechanischen Verlusten kommen. Durch eine dünne Schicht Indium zwischen der Flachslenkung und dem Kopf konnte hier eine gewisse Verbesserung gezeigt

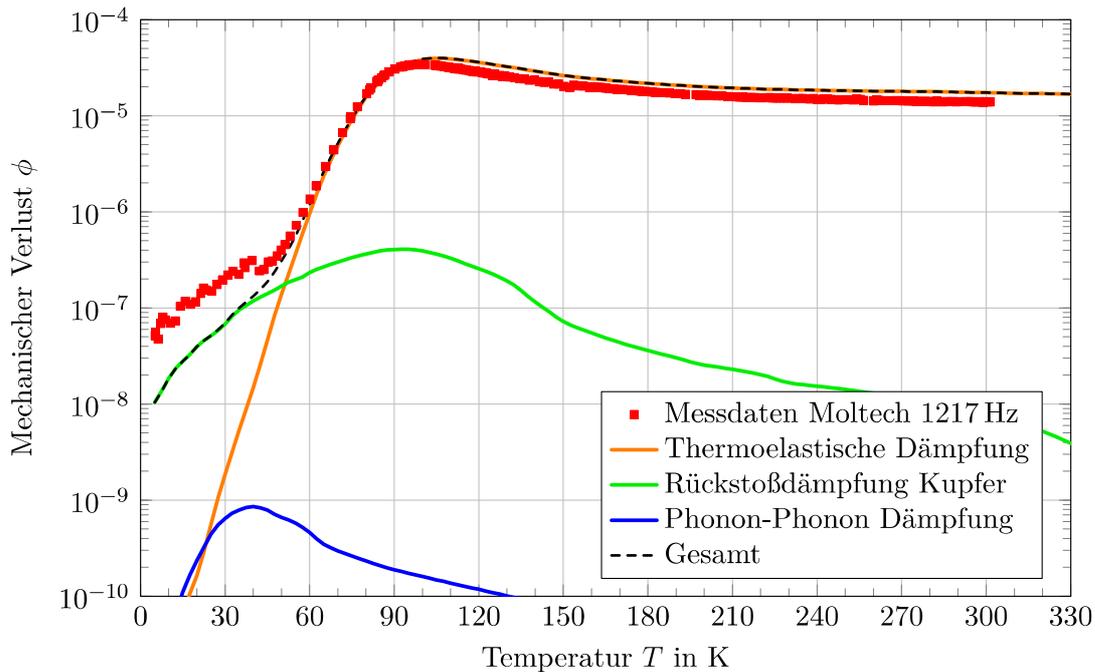


Abbildung 4.16.: Der mechanische Verlust der 35 cm langen und 1,8 mm durchmessenden Saphirfaser wird von Raumtemperatur bis hinab zu 60 K durch die thermoelastische Dämpfung bestimmt. Unterhalb von 60 K führt der Einfluss der Rückstoßdämpfung in Kupfer zu einem Abflachen des Abfalls der Messdaten während die Dämpfung durch Phononen-Wechselwirkung vernachlässigt werden kann. Bei 5,1 K wird ein um den Faktor fünf erhöhter Wert von $5 \cdot 10^{-8}$ gegenüber dem erwarteten Gesamtverlust erreicht.

werden, da durch das Indium diese Unebenheiten bzw. eine leichte Verkippung offenbar ausgeglichen werden. Noch bessere Resultate wurden allerdings mit der Kegelsenkung erzielt. Der Kopf kann dabei in gewissen Grenzen optimal zum Stempel ausgerichtet werden und wird unter dessen Druck leicht in das Kupfer hinein gepresst. Auf diese Weise reduziert sich die Kontaktfläche des Kopfes mit dem Träger im Idealfall zu einer Linie. Es ergibt sich eine sehr gleichmäßige Einspannung wie sie für alle nachfolgenden Messungen verwendet wurde.

Der an der 35 cm langen Saphirfaser gemessene Verlust ist in Abbildung 4.16 exemplarisch für die fünfte harmonische Biegeschwingung bei 1,2 kHz gezeigt (vgl. Abbildung 4.17b). Von Raumtemperatur bis hinab zu 60 K sinkt der Verlust von rund 10^{-5} bis auf 10^{-6} in Übereinstimmung mit dem thermoelastischen Verlust ϕ_{TED} nach Gleichung (3.11). Dabei wurde insbesondere die an dieser Moltech Faser ermittelte Wärmeleitfähigkeit κ (siehe Abbildung 5.4) verwendet.

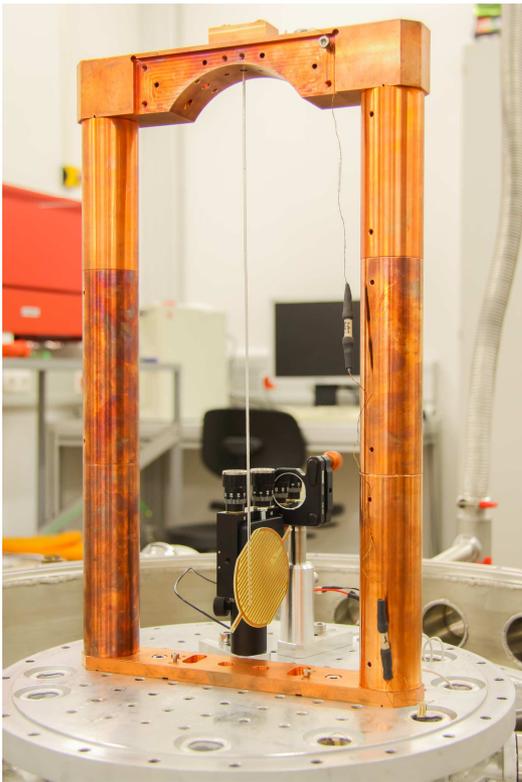
Unterhalb von 60 K folgt die Messung nicht mehr dem steilen Abfall der thermo-

elastischen Dämpfung sondern beginnt abzuflachen. Bei 20 K wird schließlich ein Wert von knapp über 10^{-7} erreicht, der sich bis hinab zur Minimaltemperatur von 5,1 K auf $5 \cdot 10^{-8}$ nochmals halbiert. Dieser Wert liegt jedoch immer noch etwa eine Größenordnung über dem mechanischen Verlust, wie er an zylindrischen Proben in guter Übereinstimmung mit dem durch die Akhiezerdämpfung gegebenem Limit gemessen wurde (siehe Abbildung 4.12 sowie [84]).

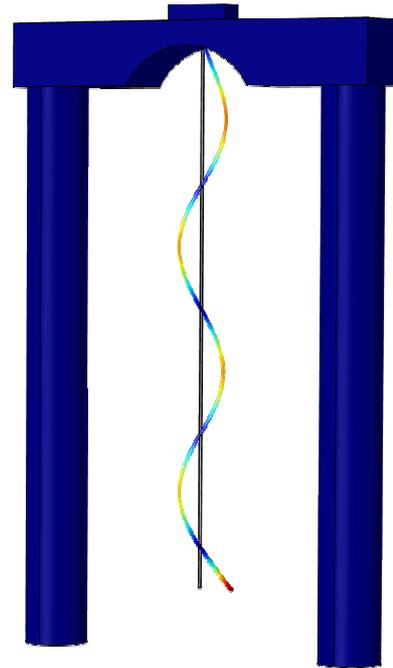
Daher wurde für die Faser ebenfalls die Akhiezerdämpfung nach Gleichung (3.15) berechnet und ist in Abbildung 4.16 als Phonon-Phonon-Dämpfung angegeben. Verwendet wurden wie zuvor die entsprechenden für diese Faser relevanten thermischen Parameter sowie der freie Parameter γ in Höhe des Grüneisen-Parameters 1,18 für Saphir [117]. Die Akhiezerdämpfung liegt mehr als zwei Größenordnungen unter den experimentell ermittelten Werten und kann demzufolge in diesem Fall als limitierender Faktor ausgeschlossen werden.

Weiterhin wurde der Einfluss durch den Kupferträger, in welchen die Faser eingespannt wurde, genauer untersucht. Kupfer bietet eine gute thermische Leitfähigkeit und macht es dadurch möglich, auch ohne den Einsatz von Kontaktgas die Faser ausreichend gut thermisch zu koppeln. Bedingt durch die große Länge der Faser und das eingeschränkte Probenvolumen im Kryostaten erfolgte die Montage der in diesem Fall verwendeten Kupferklemme auf zwei 35 cm hohen und 38 mm durchmessenden Säulen wie in Abbildung 4.17a zu sehen. Die mittels Comsol durchgeführte Finite-Elemente-Analyse zeigt allerdings, dass die mit den Eigenschwingungen der Faser verbundene elastische Verformung zu einem geringem Anteil auch in die Kupferstruktur übertragen wird und es so zu einer Form von Rückstoßdämpfung kommt. Die gesamte während einer Periode elastisch gespeicherte Energie E_{tot} teilt sich auf Faser E_{Faser} und Kupfer E_{Kupfer} auf. Aus dem numerisch ermitteltem Verhältnis $E_{\text{Kupfer}}/E_{\text{tot}}$ und dem Verlauf des mechanischen Verlusts von Kupfer ϕ_{Kupfer} (siehe Abbildung A.9) [118] kann so eine grobe Abschätzung für den Anteil des Kupferaufbaus am mechanischen Verlust getroffen werden. Die Rückstoßdämpfung durch den Kupferaufbau ist ebenfalls in Abbildung 4.16 eingezeichnet.

Über die Summe aus thermoelastischer Dämpfung und Rückstoßdämpfung kann so erfolgreich das Abflachen der Messwerte zwischen 60 K und 45 K erklärt werden. Für tiefere Temperaturen ist die durch den Aufbau zu erwartende untere Grenze des mechanischen Verlusts um den Faktor fünf niedriger als die Messwerte. Daher kann davon ausgegangen werden, dass in diesem Temperaturbereich die intrinsischen Eigenschaften der Faser den mechanischen Verlust begrenzen.



(a)



(b)

Abbildung 4.17.: Die 35 cm lange Saphirfaser wurde für die mechanische Verlustmessung mit ihrem Kopf in dem gezeigten Kupferaufbau eingeklemmt. Der dünne Teil der Faser mit 1,8 mm Durchmesser ragt dabei frei nach unten. Für die Abschätzung möglicher Einflüsse durch den Kupferaufbau wurde das vereinfachte Modell rechts verwendet. Ebenfalls dargestellt ist hierbei die fünfte harmonische Biegeschwingung der Faser bei 1,2 kHz wobei die Auslenkung parallel zum Querträger erfolgt. Eine starke Auslenkung wird durch rot gekennzeichnet während blaue Bereiche kaum ausgelenkt werden.

4.4.2. Auswirkungen von Füge- und Ansatzstellen

Am Übergang der Faser von ihrem Kopf zum dünnen Teil treten während der Eigenschwingungen die größten mechanischen Spannungen und somit höchsten Energiedichten auf wie in Abbildung 4.18 im jeweiligen Schnittmodell gezeigt. Je nach Frequenz der Eigenschwingung ergeben sich zusätzlich weitere Bereiche im Verlauf der Faser mit besonders hohen Energiedichten. Diese Abschnitte sind daher besonders empfindlich gegenüber dissipativen Prozessen. Inwieweit sich ein nachträglich an die Faser angefügter Kopf (vgl. Abbildung 4.15b) auf den mechanischen Verlust auswirkt, wurde an den 10 cm langen Fasern mit je einem monolithischem sowie einem angefügtem Kopf untersucht. Hierzu erfolgte zunächst eine Messung, für die einer der beiden Köpfe der

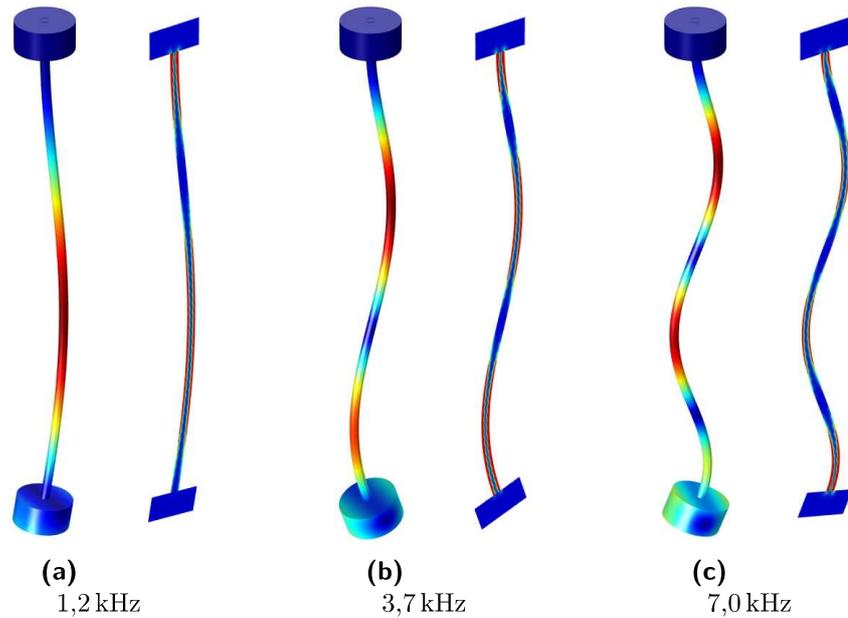


Abbildung 4.18.: Drei Eigenschwingungen der 10 cm langen Impex Faser mit fixiertem (oberem) und freiem (unterem) Kopf, rote Bereiche markieren hierbei starke Auslenkungen gegenüber der Ruheposition (blau). Ergänzend ist jeweils rechts daneben im Schnittmodell die Verteilung der elastischen Energiedichte gezeigt. Die rötliche Färbung unmittelbar zum oberen Kopf für alle drei Frequenzen sowie an weiteren unterschiedlichen Stellen entlang der Faser repräsentieren besonders sensitive Bereiche in Bezug auf den mechanischen Verlust.

Faser in der Klemme fixiert wurde während der andere frei blieb. Im Anschluss wurden die Faser mit vertauschten Köpfen erneut vermessen. So war es möglich unter sonst gleichen Bedingungen einen direkten Vergleich anzustellen.

Oberhalb von 60 K ist wie bei der im vorherigen Abschnitt diskutierten Moltech Faser der Verlauf durch den thermoelastischen Verlust vorgegeben und keine Unterschiede zwischen beiden Experimenten erkennbar (Abbildung 4.19). Im weiteren Verlauf hin zu tieferen Temperaturen folgen die Werte der Faser mit fixiertem monolithischen Kopf wie auch zuvor oberhalb dem aus thermoelastischer Dämpfung und Rückstoßdämpfung gegebenem Verlust (durchgezogene Linien). Im Minimum wird dennoch nur ein um gut den Faktor zwei höherer Verlust erreicht als bei der 35 cm lange Faser. Dies kann teilweise mit der verstärkten Rückstoßdämpfung auf Grund der geänderten Geometrie der Faser erklärt werden.

Mit gedrehter Faser und fixiertem angefügten Kopf zeigt sich der mechanische Verlust unterhalb von 60 K im direkten Vergleich dann stark erhöht. Der nachträglich mit der gewachsenen Faser verbundene Kopf scheint also den minimal möglichen Verlust bei tie-

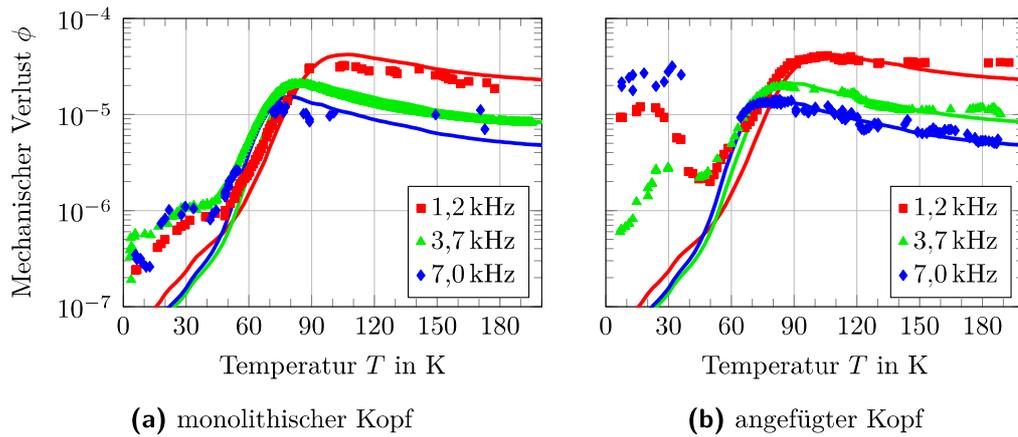


Abbildung 4.19.: Der gemessene mechanische Verlust verläuft für die drei in Abbildung 4.18 gezeigten Eigenschwingungen im Falle des fixierten monolithischen Kopfes (a) nahe an der Summe aus thermoelastischer und Rückstoßdämpfung (durchgezogene Linien). Im Gegensatz dazu erhöht sich der Verlust unterhalb von 60 K bei einer Fixierung des angefügten Kopfes (b). Als mögliche Ursache kommen sowohl die Fügeverbindung im Kopf als auch die Ansatzstelle für das Wachstum der Faser am gegenüberliegenden Ende in Frage.

fen Temperaturen zu beeinträchtigen. Dissipative Prozesse in der augenscheinlich leicht porösen und als amorph anzunehmenden Verbindungsstelle innerhalb des zylindrischen Kopfes erscheinen plausibel und haben auf Grund der Energieverteilung auf alle drei gezeigten Eigenfrequenzen Einfluss. Ebenso kann auch die Ansatzstelle ca. 2 cm vom monolithischen Ende entfernt zum erhöhten Verlust beitragen. Wie in Abbildung 4.15a zu sehen, ist die Ansatzstelle dunkel verfärbt und deutet damit den Einschluss von Fremdstoffen an. Eine solche Störung im Kristall führt sehr wahrscheinlich zu einer stark lokalisierten Energiedissipation, die je nach Temperatur und dem zu Grunde liegenden Mechanismus mehr oder weniger zum Gesamtverlust beiträgt. Im Falle des fixierten monolithischen Kopfes ist die Energiedichte im Bereich um die Ansatzstelle gering, sodass dort keine zusätzliche Energiedissipation auftreten kann. Das freie Ende wiederum weist jedoch am Übergang zum angefügten Kopf insbesondere bei 3,7 kHz und 7,0 kHz eine hohe Energiedichte auf und könnte sich so selbst im nicht fixiertem Zustand besonders dissipativ auswirken.

Diese Vermutung bestärken weitere Messungen an einer rein monolithischen, aus einem einzigen Stück Saphir gearbeiteten Faser. Die Werte unterhalb von 60 K liegen bis hinab zur Minimaltemperatur nur leicht über dem Limit aus thermoelastischer und Rückstoßdämpfung und damit nochmals niedriger als zuvor für die Fasern mit einseitig angefügtem Kopf. Die Rückstoßdämpfung konnte für diese Messung durch eine

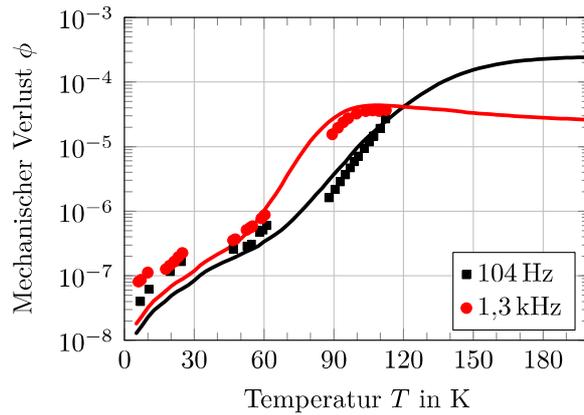


Abbildung 4.20.: Für eine vollkommen monolithische Faser mit geschliffener Oberfläche konnte die beste Übereinstimmung mit der Summe aus thermoelastischer und Rückstoßdämpfung erzielt werden. Die Messung dazu wurde mit einer als Pendel aufgehängenen Kupferklemme durchgeführt. Der mechanische Verlust beträgt minimal $4 \cdot 10^{-8}$ bei 6,8 K und knapp über 10^{-7} bei 20 K.

Pendelaufhängung des Kupferklemmblocks mit zwei $100 \mu\text{m}$ dünnen Wolframdrähten anstatt einer festen Montage auf einem massivem Kupferstab wie in den vorherigen Experimenten etwa um die Hälfte gesenkt werden. Die von der Faser ausgehenden Rückstoßkräfte führen dabei nicht nur zu einer dissipativen Verformung des Blocks, sondern das Pendel wird gleichzeitig leicht im Gravitationsfeld ausgelenkt. Dieser Vorgang ist jedoch energierhaltend und reduziert dadurch den Verlust. Derart durchgeführt konnten an den 10 cm langen monolithischen Fasern mit zwei Köpfen die insgesamt geringsten Verluste bis hinab zu $4,0 \cdot 10^{-8}$ gemessen werden.

4.5. Untersuchungen an Fügeverbindungen

Die erste Generation der Gravitationswellendetektoren Virgo, Ligo und GEO 600 verwendete Schlingen aus Stahlsaiten für die Aufhängung der Fused Silica Testmassen. Der hohe mechanische Verlust ϕ der Stahlsaiten von 10^{-4} [119] sowie zusätzliche Dämpfung durch Reibung führen nach Gleichung (2.41) zu einem erhöhtem niederfrequenten Rauschbeitrag. Dies führte dazu, dass stattdessen profilierte dünne Fasern mit $400 \mu\text{m}$ Durchmesser aus Fused Silica ($\phi = 10^{-8}$) entwickelt wurden und in nachfolgenden Generationen zum Einsatz kommen [15]. Die Befestigung erfolgt durch Anschweißen der Fasern an speziell geformte Prismen (als Ohren bezeichnet) mit Hilfe eines Lasers. Die Ohren wiederum werden zuvor durch Bonden mit hydroxid-katalysierte Hydratation/Dehydratation an die Testmassen angebracht. Während dieses Vorgangs bildet sich eine dauerhafte und mechanisch stabile, chemische Silizium-Sauerstoff-Verbindungen zwischen den beiden Fused Silica Oberflächen, weitere Details hierzu finden sich bei Gwo [120] und in zwei US-Patenten [121, 122]. Derartige Aufhängungen werden auch

als monolithische Pendel bezeichnet und finden in Detektoren der zweiten Generation Verwendung. Das Verfahren des hydroxid-katalysierten Bondens ist ebenso für Saphir und Silizium anwendbar und wird bereits für den zukünftigen Einsatz in den Detektoren der dritten Generation KAGRA bzw. Einstein Telescope untersucht [123, 124, 125]. Im Rahmen dieser Arbeit wurden speziell für den japanischen Detektor Versuche mit Saphir durchgeführt [126].

Abbildung 6.1 zeigt die letzte Stufe der Pendelaufhängung bestehend aus der Testmasse, zwei Prismen und vier Fasern sowie vier Blattfedern aus Saphir. Alle Einzelkomponenten tragen ebenso wie alle Verbindungsstellen durch ihren mechanischen Verlust einen Anteil zum Gesamtsystem bei. Daher wurde über die bisher vorgestellten Messungen hinaus auch der mechanische Verlust einer hydroxid-katalytischen Bondschicht zwischen Saphir, sowie, als Ergänzung zu diesem Verfahren, der einer Verbindung mittels Indium bestimmt.

4.5.1. Lösbare Indiumverbindungen

Eine Verbindung von zwei Saphirteilen über hydroxid-katalysiertes Bonden lässt sich nur schwer zerstörungsfrei wieder trennen. Die Herstellung muss zudem für gewöhnlich unter Reinraumbedingungen stattfinden und erfordert anschließend eine mehrwöchige Ruhephase, die sich durch Wärmezufuhr zwar verkürzen, aber nicht gänzlich vermeiden lässt. Auf Grund seiner geologischen Lage kommt es in Japan immer wieder zu kleineren Erdbeben, sodass es trotz umfangreicher Vorsichtsmaßnahmen zu einer Beschädigung der Fasern der Pendelaufhängung während des Betriebs kommen kann. Um eventuelle Reparaturen zu erleichtern, galt es daher eine Möglichkeit zu finden, die einen relativ einfachen Austausch der Fasern erlaubt und etwaige Ausfallzeiten auf ein Minimum reduziert. Unter anderem wurde diesbezüglich auch über die Verwendung von Saphirschrauben nachgedacht [127]. Eine andere Möglichkeit bietet die Verwendung von Indium. Das duktile Material wird zahlreich für kryogene Dichtungen oder als Lot für Metalle und Gläser eingesetzt und weist eine geringe Schmelztemperatur von nur 156,6 °C auf.

Für die Verlustmessungen wurden zwei Saphirzylinder mit 30 mm Durchmesser und 50 mm respektive 70 mm Länge verbunden. Beide Proben sind wie auch die 120 mm lange Vergleichsprobe selben Durchmessers mit ihrer kristallographischen c-Achse entlang der Zylinderachse orientiert. Die Kontaktflächen der beiden kürzeren Proben besitzen eine Ebenheit von $\lambda/10$ ($\lambda = 633 \text{ nm}$), alle übrigen Oberflächen wurden inspektionspoliert. Indiumfolie mit 100 μm Dicke wurde bei einem Druck von 23,6 kPa zwischen den

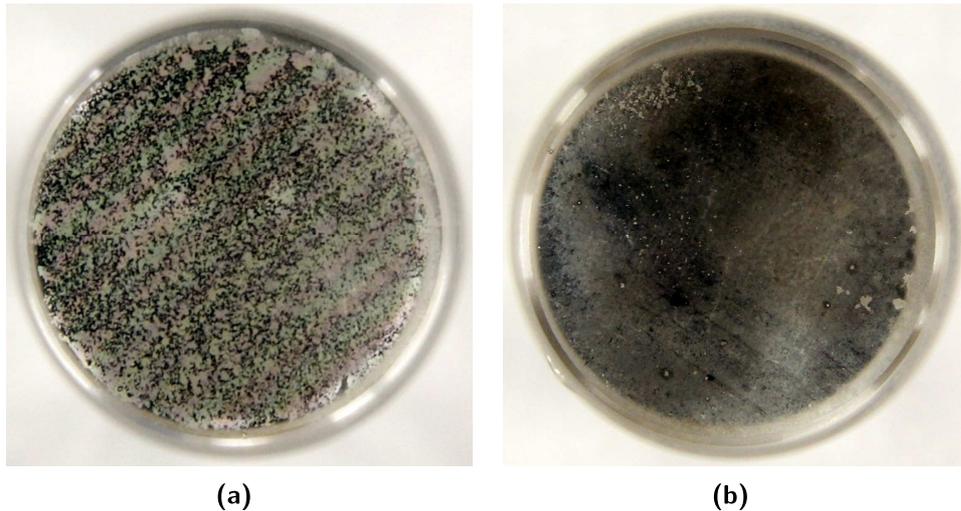


Abbildung 4.21.: Die Verbindungsschicht zwischen zwei Saphirzylindern nach dem Aufschmelzen einer 100 μm dicken Indiumfolie ist nur zu $(40 \pm 10) \%$ geschlossen (a). Durch vorheriges Beschichten der Saphirkontaktflächen ergibt sich hingegen eine nahezu durchgängige Schicht mit $(95 \pm 5) \%$ Bedenkung (b).

beiden axial zentrierten⁹ Proben auf einer Heizplatte geschmolzen. Abbildung 4.21a zeigt als Resultat eine nicht geschlossene Schicht mit einem Bedeckungsgrad von $(40 \pm 10) \%$ zwischen den Proben. Die schwach zu erkennenden zehn diagonal verlaufenden Interferenzstreifen deuten auf eine leichte Verkippung von $5 \mu\text{m}$ hin. Messungen unter dem Lichtmikroskop konnte dies bestätigen und ergaben eine mittlere Dicke von $(8,4 \pm 2,0) \mu\text{m}$ bzw. $(3,3 \pm 1,9) \mu\text{m}$ effektiv, gewichtet mit dem Bedeckungsgrad. Bei den unbedeckten Stellen muss es sich offenbar um Gaseinschlüsse handeln, da die Kontaktflächen zu eben und zu weit voneinander entfernt sind.

Durch Erhitzen zusammen mit dem Einsatz von Salpetersäure kann die Verbindung rückstandsfrei gelöst werden. In einem zweiten Versuch wurden beide Kontaktflächen zunächst mit etwa $0,5 \mu\text{m}$ Indium thermisch bedampft und anschließend der Fügevorgang wie oben bereits beschrieben wiederholt. Abbildung 4.21b zeigt die nun zu $(95 \pm 5) \%$ geschlossenen Indiumschicht mit einer Dicke von $(13,6 \pm 2,0) \mu\text{m}$ ($(12,9 \pm 2,7) \mu\text{m}$ effektiv).

⁹Ein gegeneinander verdrehtes Kristallsystem der beiden verbundenen Saphirzylinder führt zu weniger als 4% Frequenzabweichung der Eigenschwingungen gegenüber einem durchgängigen Kristall. Daher konnte die radiale Kristallorientierung vernachlässigt werden.

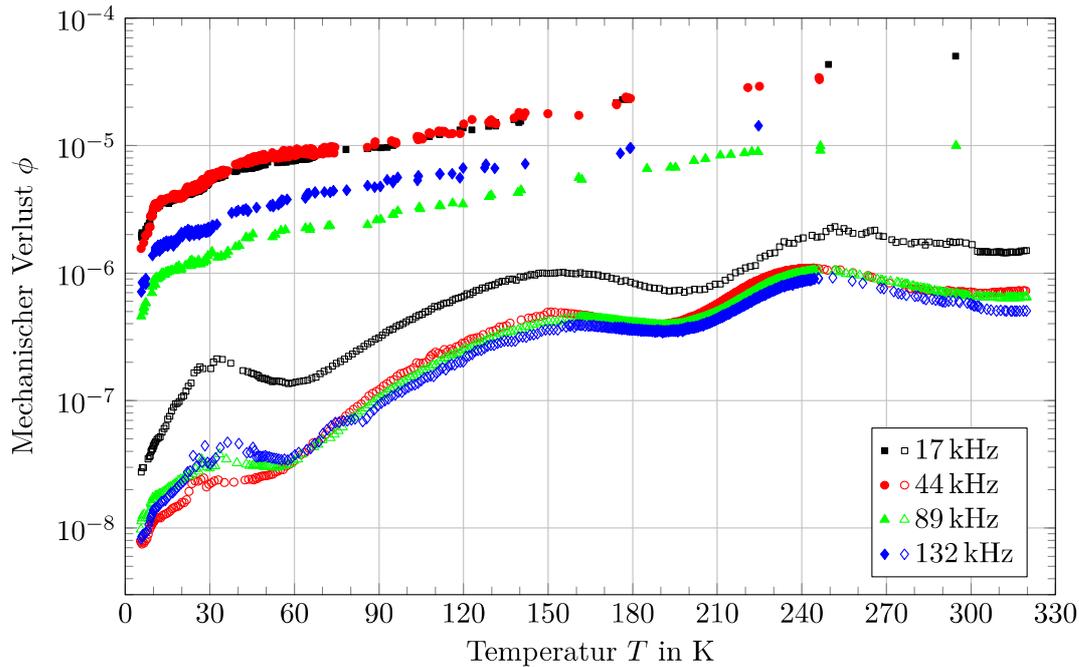


Abbildung 4.22.: Der mechanische Verlust liegt für die aus zwei Saphirzylindern mit einer $12,9\mu\text{m}$ dicken Indiumschicht zusammengesetzte Probe (volle Symbole) bei den gleichen Eigenfrequenzen um mehr als eine Größenordnung über dem der Referenzprobe gleicher Geometrie (offene Symbole).

4.5.2. Mechanischer Verlust von Fügeverbindungen

Der mechanische Verlust ϕ von einkristallinem Saphir wurde bereits in Abschnitt 4.3 diskutiert und ist bestimmt durch die Energiedissipation ΔE über die Periodendauer einer Schwingung (vgl. Gleichung (3.10)). In Abbildung 4.22 ist der mechanische Verlust für das zusammengesetzte Substrat mit nahezu geschlossener und $12,9\mu\text{m}$ dicker Indiumschicht über der Temperatur aufgetragen. Im Vergleich zur aus einem Stück gefertigten Referenzprobe ist der gemessene Verlust allerdings um mehr als eine Größenordnung erhöht.

Für ein zusammengesetztes System ist der Gesamtverlust ΔE durch die Summe aller Verlustbeiträge bestimmt, in diesem Fall durch das Substrat mit ΔE_{sub} und die Schicht mit ΔE_{layer} , sodass gilt:

$$\phi_{\text{tot}} = \frac{\Delta E_{\text{sub}} + \Delta E_{\text{layer}}}{2\pi E_{\text{tot}}} = \frac{\Delta E_{\text{sub}}}{2\pi E_{\text{sub}}} \frac{E_{\text{sub}}}{E_{\text{tot}}} + \frac{\Delta E_{\text{layer}}}{2\pi E_{\text{layer}}} \frac{E_{\text{layer}}}{E_{\text{tot}}} \quad (4.8)$$

$$= \phi_{\text{sub}} \frac{E_{\text{sub}}}{E_{\text{tot}}} + \phi_{\text{layer}} \frac{E_{\text{layer}}}{E_{\text{tot}}}. \quad (4.9)$$

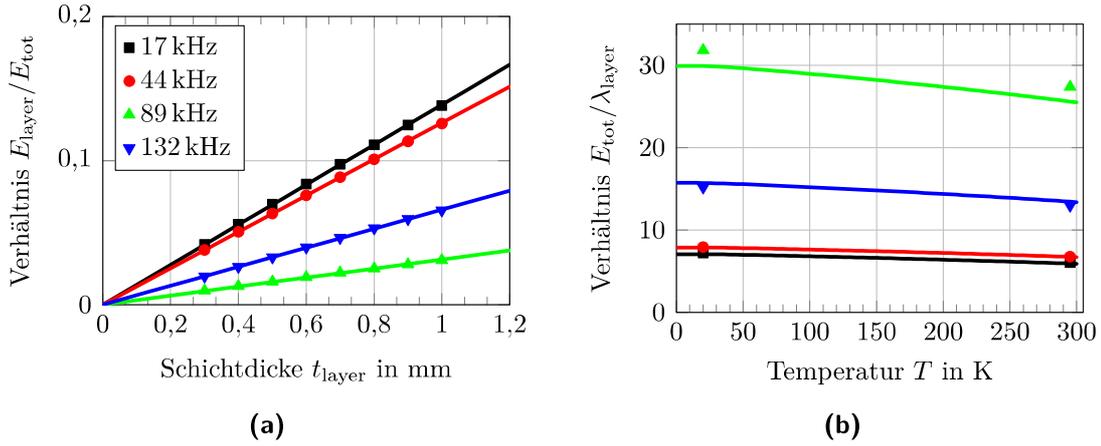


Abbildung 4.23.: Das für die Bestimmung des Schichtverlustes nötige Verhältnis $E_{\text{tot}}/E_{\text{layer}}$ wurde auf zwei Wege mittels Finite-Elemente-Analyse ermittelt. Aus dem linearen Zusammenhang von Schichtdicke und darin elastisch gespeicherter Energie $E_{\text{layer}} = \lambda_{\text{layer}} t_{\text{layer}}$ ist, wie in (a) für eine Temperatur von 20 K gezeigt, eine Extrapolation für kleine, nicht direkt zugängliche Werte t_{layer} möglich. Dieser Ansatz (Symbole in (b)) führt zu nahezu identischen Werten für das Verhältnis $E_{\text{tot}}/\lambda_{\text{layer}}$ wie eine direkte Berechnung unter Verwendung von Übergangsbedingungen zwischen den Saphirproben und der Indiumschicht (durchgezogene Linien in (b)).

Die während jeder Eigenschwingung elastisch gespeicherte Energie wird maßgeblich durch das Saphirsubstrat bestimmt und es kann mit $E_{\text{tot}} \approx E_{\text{sub}}$ angenähert werden. Wegen $\phi_{\text{tot}} \gg \phi_{\text{sub}}$ folgt dann für den mechanischen Verlust der Indiumschicht:

$$\phi_{\text{layer}} \approx \phi_{\text{tot}} \frac{E_{\text{tot}}}{E_{\text{layer}}} \quad (4.10)$$

Das Verhältnis $E_{\text{tot}}/E_{\text{layer}}$ wurde auf zwei Arten über eine Finite-Elemente-Analyse mit der Software Comsol ermittelt. Eine im Vergleich zum restlichen Modell extrem dünne Schicht erfordert normalerweise die Verwendung eines entsprechend fein aufgelösten Gitters zur adäquaten Beschreibung, verlangt dann aber nach einer stark erhöhten Rechenleistung. Eine Alternative dazu besteht darin, die Schichtdicke t_{layer} im Modell zunächst sukzessive zu reduzieren und anschließend auf die Zieldicke zu extrapolieren. Betrachtet man die Gesamtdeformation kann in erster Näherung von einer linearen Abhängigkeit gemäß $E_{\text{layer}} = \lambda_{\text{layer}} \cdot t_{\text{layer}}$ ausgegangen werden und die spezifische Energiedichte pro Schichtdicke λ_{layer} kann direkt dem Anstieg entnommen werden. Abbildung 4.23a zeigt dazu den linearen Verlauf von $E_{\text{layer}}/E_{\text{tot}}$ über t_{layer} für eine Temperatur von 20 K. Abbildung B.1b im Anhang zeigt die Werte für 295 K.

Ein anderer Ansatz nach [42] nimmt die Übergangsbedingungen an der Grenzfläche der Indiumschicht und den Saphirproben zum Ausgang. Auftretende laterale Verformungen sowie axiale Kräfte in der Kontaktfläche des Saphir müssen mit denen in der angrenzenden Schicht übereinstimmen und können wegen der geringen Ausdehnung über den gesamten Verlauf der Schichtdicke als konstant betrachtet werden. Damit lassen sich Ausdrücke für die mechanische Spannung σ'_{ij} sowie die Verformung ϵ'_{ij} in der isotropen Indiumschicht finden (siehe Abschnitt B.2), sodass am Ende die spezifische Energiedichte aus dem Modell berechnet werden kann mit:

$$\lambda_{\text{layer}} = \frac{E_{\text{layer}}}{t_{\text{layer}}} = \int_A \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \epsilon'_{ij} d^2r \quad (4.11)$$

Beide Wege führen im Rahmen ihrer Genauigkeit zum gleichen Ergebnis und sind in Abbildung 4.23 gegenübergestellt. Damit gelingt es nun, aus den Messwerten den mechanischen Verlust der Indiumschicht zu bestimmen. Abbildung 4.24 zeigt für die 12,9 μm dicke, annähernd geschlossene Schicht bei Raumtemperatur einen Wert von $2 \cdot 10^{-2}$, der damit sogar unter dem von größeren Proben polykristallinen Indiums liegt [128]. Zu tieferen Temperaturen kommt es zu einem Absinken und bei 20 K werden zwischen $2 \cdot 10^{-3}$ und $3 \cdot 10^{-3}$ erreicht. Im Vergleich dazu fällt der mechanische Verlust für die nicht durchgängige Schicht bereits bei Raumtemperatur leicht höher aus und erreicht selbst bei tiefen Temperaturen lediglich um etwa den Faktor 10 schlechtere Werte. Anzunehmen ist, dass sich an dieser Stelle die zahlreichen Gaseinschlüsse in der nicht geschlossenen Indiumschicht negativ auswirken und folglich vermieden werden müssen.

Weitere Versuche an einseitig mit (530 ± 30) nm Indium beschichteten Cantilevern aus Silizium ergaben für den Schichtverlust Werte von 10^{-2} bei Raumtemperatur. Für Temperaturen unter 50 K betrug der Verlust weniger als 10^{-3} und erreichten bei 20 K schließlich $4 \cdot 10^{-4}$ [129]. Die durch thermisches Verdampfen aufgebrauchte und anschließend nicht aufgeschmolzene Indiumschicht zeigt daher das mögliche Potential, gleichzeitig aber auch einen weiteren Optimierungsbedarf des Fügeprozesses auf.

Auf die gleiche Art und Weise wie bisher beschrieben, ist es ebenfalls möglich, den mechanischen Verlust einer durch hydroxid-katalysiertes Bonden hergestellten Verbindung zu ermitteln. Allerdings fällt die durchschnittliche Dicke einer solchen Verbindung mit 100 nm deutlich geringer aus. Wie Abbildung 4.25 zeigt, ist ebenso der Unterschied zum mechanischen Verlust des Referenzsubstrates ϕ_{sub} in diesem Fall deutlich kleiner und kann daher nicht mehr vernachlässigt werden, sodass an dieser

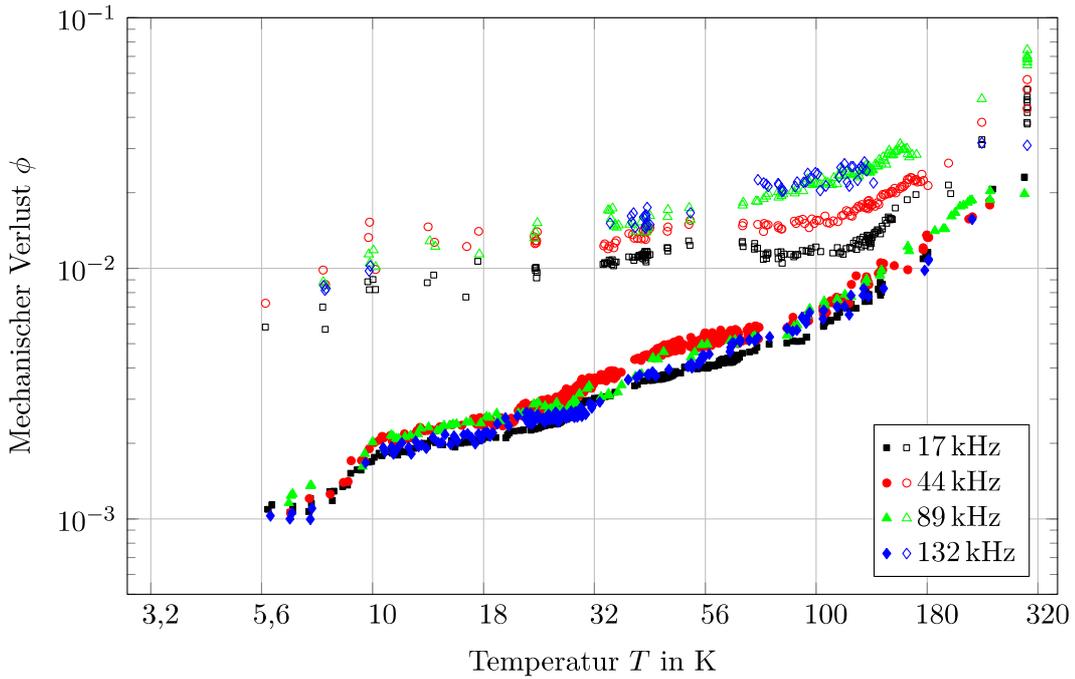


Abbildung 4.24.: Die Fügeverbindung mit einer 12,9 μm dicken, durchgängigen Indiumschicht (volle Symbole) führt gegenüber der dünneren, nicht vollständig geschlossenen Schicht (offen Symbole) zu einem deutlich niedrigeren mechanischen Verlust. Bei tiefen Temperaturen beträgt der Unterschied fast eine Größenordnung.

Stelle gilt:

$$\phi_{\text{layer}} \approx \frac{E_{\text{tot}}}{\lambda_{\text{layer}}} \frac{1}{t_{\text{layer}}} (\phi_{\text{tot}} - \phi_{\text{sub}}) \quad (4.12)$$

Die notwendigen elastischen Parameter zur bereits beschriebenen Ermittlung des spezifischen Energieverhältnisses $E_{\text{tot}}/\lambda_{\text{layer}}$ wurden von Sneddon et al. [130] übernommen. Die Ebenheit von $\lambda/10$ der zu verbindenden Flächen führt zu einer Schichtdicke von mindestens 127 nm. Abbildung 4.26 zeigt analog zu Abbildung 4.24 den mechanischen Verlust der hydroxid-katalytischen Bondschicht, dieser beträgt bei Raumtemperatur $2 \cdot 10^{-2}$, bei 20 K erhält man einen Wert von $3 \cdot 10^{-4}$.

Während beide Verfahren bei Raumtemperatur bezüglich ihres mechanischen Verlusts vergleichbare Werte liefern, zeigt sich bei tiefen Temperaturen um 20 K eine Differenz von etwa einer Größenordnung. Schätzt man außerdem die Dicke der Indiumschicht für eine spätere Anwendung mit 1 μm ab, so ergibt sich insgesamt ein um den Faktor 100 größerer Beitrag zum Gesamtverlust gegenüber einer hydroxid-katalytischen Bondschicht.

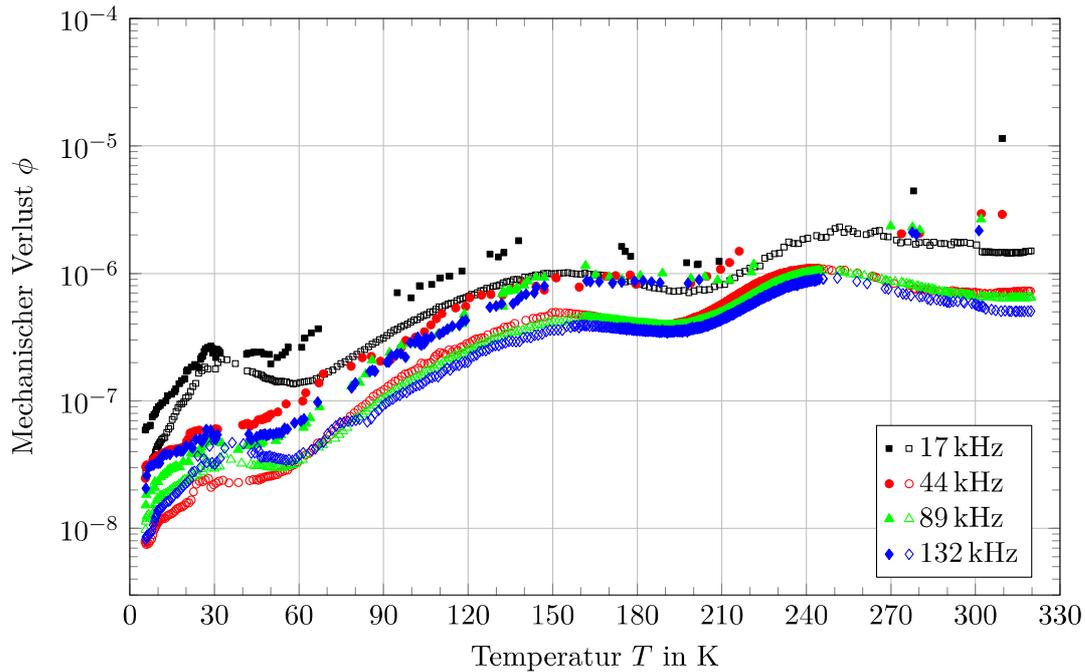


Abbildung 4.25.: Der gemessene mechanische Verlust der mittels hydroxid-katalysierten Bondens verbundenen Probe (gefüllt) liegt nur geringfügig über dem der Referenzprobe (offen Symbole).

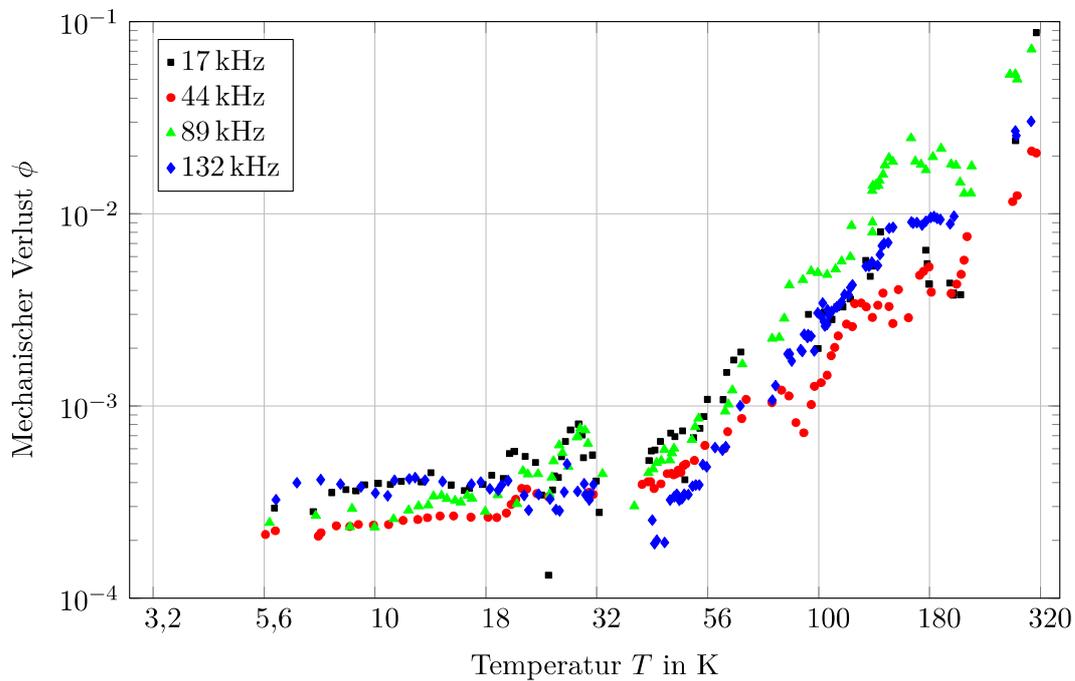


Abbildung 4.26.: Mechanischer Verlust der hydroxid-katalytischen Bondschicht.

5. Wärmeleitung

Die Wärmeleitfähigkeit κ in Festkörpern wirkt sich sowohl auf den in dieser Arbeit untersuchten mechanischen Verlust ϕ in Form der thermoelastischen Dämpfung und der Phonon-Phonon-Wechselwirkung als auch auf die zukünftigen Detektoren mit kryogenen Testmassen aus. Dort spielt sie in den optischen Komponenten eine wichtige Rolle für die Vermeidung von thermischen Linsen sowie für die verschiedenen zu erwartenden Rauschbeiträge wie thermoelastisches oder thermorefraktives Rauschen.

Für den geplanten Bau von Detektoren mit tiefkalten Testmassen im Vakuum ist zudem auch die Wärmeleitfähigkeit dünner Strukturen für die Pendelaufhängung von entscheidender Bedeutung. Die hohe Laserleistung in den Armresonatoren führt selbst bei geringer Absorption in den Testmassen und den hochreflektiven Schichten im Falle von KAGRA zu einem Wärmeeintrag von etwa 1 W [131], der zuverlässig abgeführt werden muss. Durch die thermische Strahlung durch die Ein- und Austrittsöffnungen der Kryostaten kann dieser Wert auf bis zu 1,2 W ansteigen [115]. Neben dem mechanischen Verlust einer Reihe von Prototypen für die Pendelaufhängung (siehe Abschnitt 4.4) wurde daher auch deren Wärmeleitfähigkeit untersucht. Die Ergebnisse wurden anschließend verwendet, um die Endtemperatur der Testmassen in KAGRA abzuschätzen und den thermoelastischen Beitrag zum mechanischen Verlust zu berechnen (siehe Abschnitt 6.1). Im nachfolgenden Abschnitt sollen dazu zunächst einige grundlegende Zusammenhänge für das Verständnis der Wärmeleitfähigkeit in knapper Form dargestellt werden, ausführliche Abhandlungen finden sich unter anderem in [132, 133].

5.1. Wärmeleitfähigkeit in Isolatoren und Halbleitern

In Isolatoren sowie mäßig dotierten Halbleitern, wie sie für diese Arbeit von Bedeutung sind, erfolgt die Wärmeleitung vorwiegend über die Ausbreitung der Phononen im Kristallsystem. In Anlehnung an die kinetische Gastheorie ist der entsprechende

Zusammenhang gegeben durch:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho C v l_{\text{ph}}. \quad (5.1)$$

Während die Dichte ρ als auch die Schallgeschwindigkeit v als annähernd temperaturunabhängig betrachtet werden können, variieren die Wärmekapazität je Einheitsvolumen C und die freie Weglänge l_{ph} der Phononen zum Teil stark mit der Temperatur und bestimmen maßgeblich das Verhalten der Wärmeleitfähigkeit.

Die Debye-Theorie liefert eine Näherung für die Wärmekapazität C eines Kristallgitters mit N Einheitszellen [134]:

$$C = \begin{cases} \frac{12\pi^4}{5} N k_B \frac{T^3}{\Theta_D^3} & \text{für } T \ll \Theta_D \\ 3Nk_B & \text{für } T \gg \Theta_D \end{cases}, \quad (5.2)$$

dabei ist Θ_D die Debye-Temperatur des betreffenden Materials. Für hohe Temperaturen stellt sich übereinstimmend mit dem Dulong-Petitschen Gesetz ein konstanter Wert der Wärmekapazität C ein, bei tiefen Temperaturen hingegen folgt eine T^3 Abhängigkeit, wie sie auch in den meisten Experimenten zu beobachten ist. Die freie Weglänge l_{ph} wird in einem idealen Kristallgitter nur durch die zunehmende Anzahl an Phononen mit steigender Temperatur und deren Stöße untereinander begrenzt (sog. Umklapp Prozess), sodass bei sehr hohen Temperaturen $l_{\text{ph}} \sim T^{-1}$ gilt [133]. Mit sinkender Temperatur würde die freie Weglänge immer weiter exponentiell mit $l_{\text{ph}} \sim \exp(T^{-1})$ ansteigen, allerdings sind jedoch in jedem Kristall diverse Störstellen vorhanden, die ihrerseits zu einer Streuung der Phonon führen. Somit wird die freie Weglänge bei tiefen Temperaturen durch den mittleren Abstand der Störstellen bestimmt und geht daher in einen konstanten Wert über [132, 134]. Der typische Verlauf der Wärmeleitfähigkeit eines Materials über der Temperatur ist also im wesentlichen geprägt von einem Anstieg mit T^3 bei tiefen Temperaturen, gefolgt von einem Maximum, das dann zunächst exponentiell, dann mit T^{-1} wieder abfällt, vgl. Abbildung 5.1a. Die Temperatur, bei der das Maximum auftritt, ist dabei je nach Material und dessen Zusammensetzung unterschiedlich (meist bei etwa $\Theta_D/10$ [133]).

Bei tiefen Temperaturen kann die freie Weglänge der Phononen größer als die Ausdehnung einer Probe werden und es erfolgt eine Begrenzung von l_{ph} durch die Streuung an einer ideal rauen Grenzflächen des Kristalls. Mit sinkenden Abmessungen erfolgt so eine Parallelverschiebung des T^3 Anstiegs nach rechts und die Wärmeleitfähigkeit bei tiefen Temperaturen wird reduziert (Abbildung 5.1a). Sind die Grenzflächen hingegen

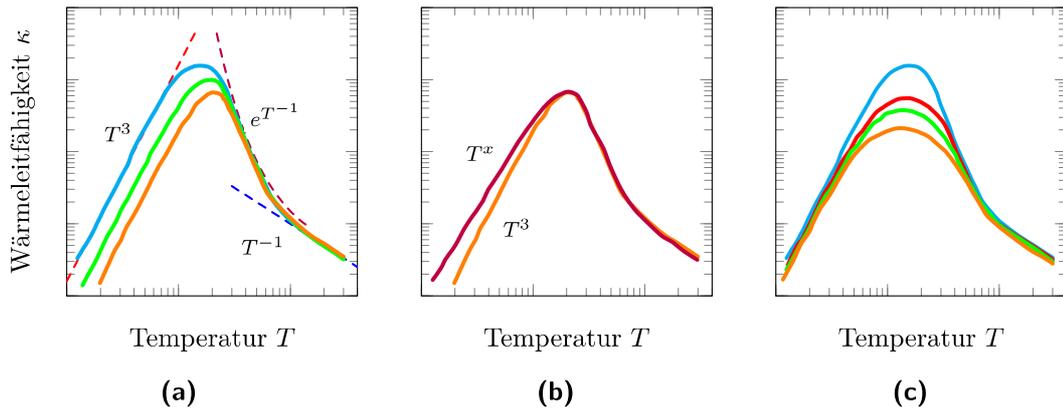


Abbildung 5.1.: Der Verlauf des Maximums in der Wärmeleitfähigkeit durch Phononen in einem kristallinen Festkörper wird durch die charakteristischen Flanken geprägt (a), gestrichelte Kurven. Die Leitfähigkeit im Tieftemperaturbereich wird durch die Geometrie des Körpers beschränkt und sinkt mit den Abmessungen (a), durchgezogene Kurven. Bei gleichen Abmessungen erlaubt hingegen eine polierte Oberfläche die Reflektion von Phononen und erhöht so in diesem Temperaturbereich die Leitfähigkeit (b), rote Kurve. Störungen im Kristall sorgen für eine reduzierte Wärmeleitfähigkeit im Maximum (c). Oberhalb davon bestimmen die intrinsischen Eigenschaften des Materials den Verlauf. (Für Details siehe Text, Kurvenverläufe nach Messungen an LiF [135].)

frei von Störungen (Versetzungen, Risse, Verunreinigungen etc.), so können die Phononen teilweise reflektiert werden. Dadurch wird die freie Weglänge nur leicht reduziert und es ergibt sich ein flacherer Anstieg T^x mit $x < 3$. Eine hohe Oberflächengüte kann folglich vor allem in Verbindung mit geringen Probenabmessungen die Wärmeleitfähigkeit bei tiefen Temperaturen begünstigen (Abbildung 5.1b). Ebenso hat eine hohe Materialqualität im Sinne von Reinheit, Versetzungsfreiheit etc. Auswirkungen auf die maximale Wärmeleitfähigkeit. Während an isotypenreinen Proben die höchsten Leitfähigkeiten beobachtet werden können, kommt es durch jegliche Störung (z. B. Dotierung) im Kristallgitter zu einer Reduzierung (Abbildung 5.1c).

5.2. Experimentelle Untersuchungen an Prototypen für KAGRA

Ein Wärmestrom \dot{Q} ist für ein isotropes Material bei gegebenem Querschnitt A und konstanter Wärmeleitfähigkeit κ zwischen zwei Punkten 1 und 2 im Abstand d mit der

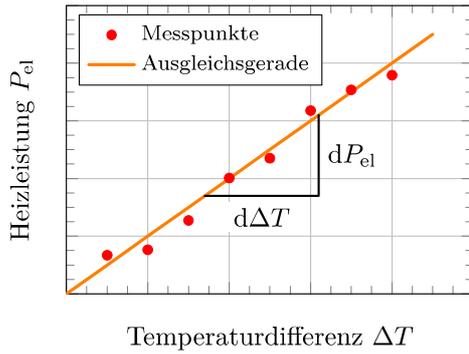


Abbildung 5.2.: Die gemessene Temperaturdifferenz ΔT ist mit der jeweils zugeführten Heizleistung P_{el} linear verknüpft. Der Anstieg einer Ausgleichsgeraden durch mehrere Messpunkte erlaubt eine genauere Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit nach Gleichung (5.4) als eine vergleichbare Einzelmessung.

Temperaturdifferenz $T_1 - T_2 = \Delta T$ im statischen Fall folgendermaßen verknüpft:

$$\dot{Q} = \frac{A}{l} \kappa \Delta T \quad (5.3)$$

Führt man an einem Ende der Probe über einen elektrischen Heizer die Leistung P_{el} zu und über eine entsprechende Wärmesenke am anderen Ende wieder ab, so ist der Wärmestrom leicht zugänglich und man erhält die Wärmeleitfähigkeit dann aus den geometrischen Abmessungen sowie zwei Temperaturmessungen. Typische Werte für die untersuchten Proben sind hierbei eine Querschnittsfläche von $(2,0 \pm 0,2) \text{ mm}^2$ ($(1,60 \pm 0,05) \text{ mm}$ Durchmesser) und ein Abstand von $(50,0 \pm 0,5) \text{ mm}$ der beiden Temperatursensoren [116]. Bei 12 mW elektrischer Leistung und einer Temperaturdifferenz von 100 mK ergibt sich so eine Wärmeleitfähigkeit von etwa 3 kW/m K. Die elektrische Leistung kann mittels Vierdrahtmessung auf 10 μW genau bestimmt werden während die Temperaturmessung selbst mittels kalibrierter Sensoren (Lakeshore DT 670) bei 10 K mit jeweils 12 mK Unsicherheit behaftet ist. Dadurch ergibt sich für die obigen Beispielwerte ein relativ großer Fehler von 33 %.

Eine Variation des Wärmestroms bzw. der Heizleistung dP_{el} führt immer zu einer Änderung der Temperaturdifferenz $d\Delta T$ und man kann Gleichung (5.3) umschreiben in eine differentielle Form:

$$\kappa = \frac{l}{A} \frac{dP_{el}}{d\Delta T} \quad (5.4)$$

Aus einer Messreihe mit wachsender Heizleistung über der zugehörigen Temperaturdifferenz lässt sich so aus dem Anstieg schließlich die Wärmeleitfähigkeit ermitteln (vgl. Abbildung 5.2). Durch die größere Anzahl an Messpunkten gegenüber der Einzelmessung lässt sich so der Fehler durch die Unsicherheit in der Temperaturmessung reduzieren und erlaubt schlussendlich eine Angabe der Wärmeleitfähigkeit mit maximal 10 % Abweichung [116].

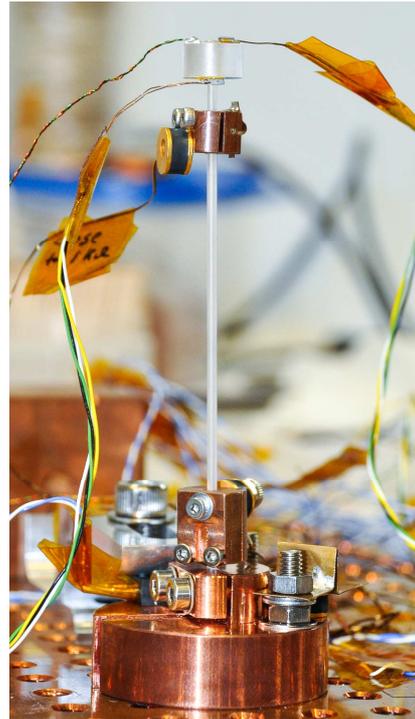


Abbildung 5.3.: Das Bild zeigt den Prototyp einer Saphirfaser für die Pendelaufhängung im Meßaufbau zur Wärmeleitungsmessung. Als Wärmequelle dient ein am oberen Kopf aufgeklebter elektrischer Heizer. Die so zugeführte bekannte Heizleistung P_{el} wird über die Wärmesenke am anderen Ende wieder abgeführt und es stellt sich entlang der Faser eine Temperaturdifferenz ΔT zwischen den beiden im Abstand d mit speziellen Kupferklemmen montierten Temperatursensoren ein. Zusätzlich wurde hier mit zwei weiteren Temperatursensoren an der Ober- und Unterseite des Kopfes die Temperaturverteilung erfasst, um den Einfluss der Fügeverbindung zwischen Kopf und Faser zu untersuchen.

Für alle Messungen wurden speziell angepasste Klemmen aus Kupfer verwendet, um die runden Fasern an die Wärmesenke, den elektrischen Heizer sowie an die Temperatursensoren zu koppeln (Abbildung 5.3). Eine dünne Schicht Indium stellt dabei den Formschluss und thermischen Kontakt sicher. Auf ebenen Flächen wurden Heizer oder Temperatursensoren direkt aufgeklebt.¹ Die elektrischen Zuführungen wurden mit speziellen Manganinkabeln mit geringer thermischer Leitfähigkeit realisiert um parasitäre Wärmeströme zu unterdrücken.

Die geringste Wärmeleitfähigkeit weisen die von der Firma Impex nach dem Stepanov-Verfahren hergestellten Fasern mit 1,6 mm Durchmesser auf. Wie an den Messkurven in Abbildung 5.4 zu erkennen, macht es dabei nur einen geringen Unterschied, ob die Wärmeleitfähigkeit nur entlang dem gewachsenem Teil der Faser (Impex b) oder einschließlich des Übergangs vom als Keim verwendeten Endstück gemessen wird (Impex c, vgl. hierzu Abbildung 4.15a). Die mit 1,8 mm Durchmesser etwas dickere Faser der Firma Moltech liefert in der Spitze bei 35 K eine nahezu doppelt so hohe Wärmeleitfähigkeit (Moltech). Der größere Querschnitt führt offensichtlich dazu, dass der Anteil der während des Wachstums an der Oberfläche induzierten Defekte ab

¹Verwendet wurde sogenannter GE-Lack, auch unter IMI 7031, GE 7031 oder VGE 7031 zu finden. Dieser spezielle Lack findet seit Jahren Verwendung in der Kryotechnik um Kabel, Temperatursensoren und ähnliches zu fixieren. Nach dem Trocknen oder Aushärten ist er vakuumtauglich, isoliert elektrisch aber nicht thermisch.

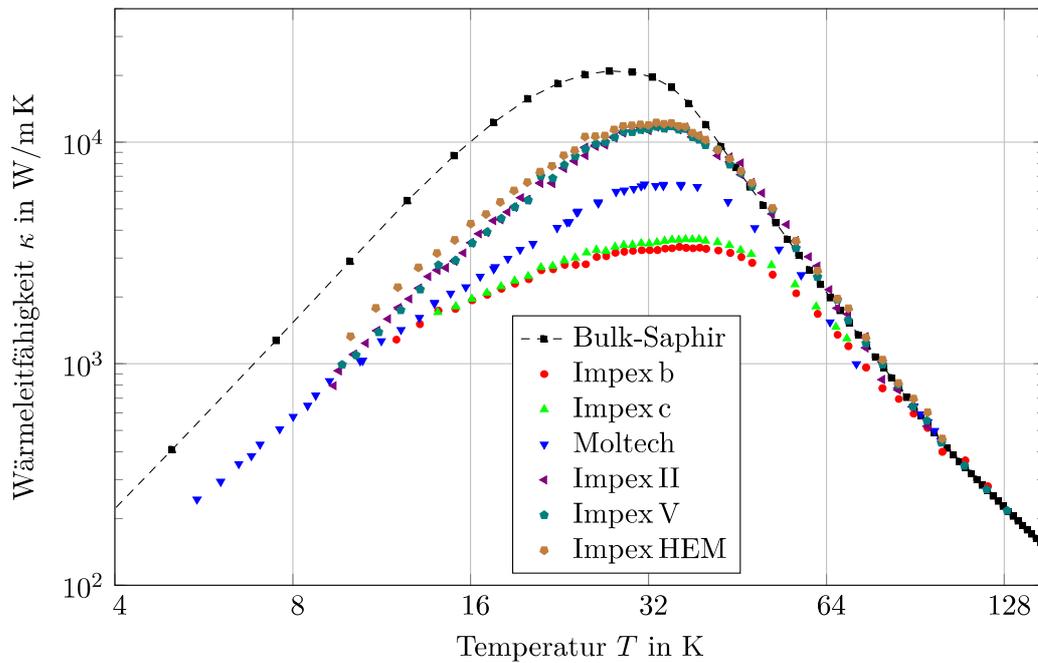


Abbildung 5.4.: Die Wärmeleitfähigkeit wurde an Saphirfaserprototypen mit 1,6 mm (Impex) bzw. 1,8 mm (Moltech) Durchmesser untersucht. In unbearbeiteten Fasern mit wie gewachsener Oberfläche führt die Wechselwirkung der Phononen mit der defektreichen Probenoberfläche zu einer geringen Wärmeleitfähigkeit bei tiefen Temperaturen (Impex b und c, Moltech). Formgeschliffene (Impex II und V) und anschließend thermopolierte Fasern (Impex HEM) weisen hingegen deutlich höhere Werte auf.

nimmt und so die Wärmeleitung weniger gestört wird.

Anstatt die Fasern direkt mit dem Zieldurchmesser zu wachsen, erscheint es daher zielführender, diese aus Vollmaterial heraus zu arbeiten. Dadurch wird die gestörte Oberflächenschicht entfernt und es kann nahezu der vollständige Querschnitt effektiv zur Wärmeleitung beitragen. Derart aus Stepanov-Saphir hergestellte Fasern erreichen dann Werte über 10 kW/m K (Impex I bis V). Ein weiterer Vergleich erfolgte mit HEM-Saphirfasern mit angesetzten Köpfen (Impex HEM). Diese wurden laut Hersteller nach dem Formschleifen eine Stunde bei 1700°C getempert, um Oberflächendefekte auszuheilen (als Thermopolieren bezeichnet). Während im Maximum keine Verbesserung gegenüber den Stepanov-Fasern zu erkennen ist, erhöht sich zu tieferen Temperaturen die Wärmeleitfähigkeit jedoch.

Die Wärmeleitfähigkeit nähert sich für alle Fasern oberhalb des Maximums den Werten für Bulk-Saphir. In diesem Bereich wird die Wärmeleitfähigkeit ganz allgemein durch die intrinsische Phonon-Phonon-Wechselwirkung in Saphir bestimmt, während

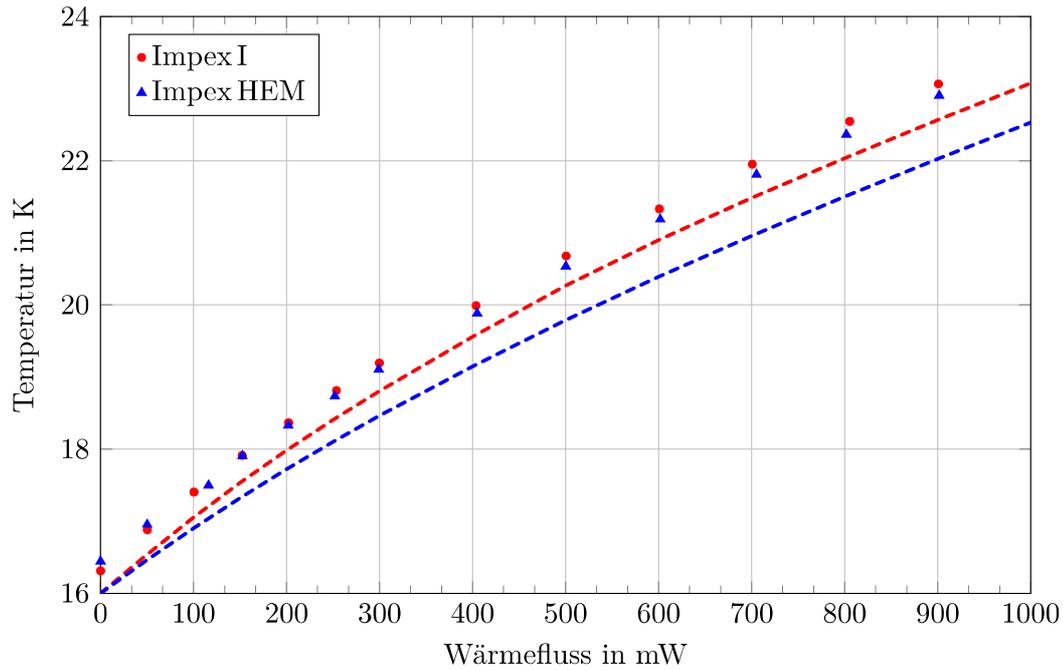


Abbildung 5.5.: Vergleich des Verlaufs der Temperatur bei ansteigendem Wärmefluss an der Oberseite für einen monolithischen (Impex I) sowie einen angesetzten Kopf (Impex HEM). Die geringe Abweichung der Messwerte für Impex I von der Modellrechnung unter Verwendung der gemessenen Wärmeleitfähigkeit (Abbildung 5.4) ist durch eine perfekte thermische Ankontaktierung der Faser zur Wärmesenke sowie unendliche Einstellzeit für das thermische Gleichgewicht bedingt. Die starke Abweichung bei Impex HEM hingegen lässt nur den Schluss eines erhöhten Wärmewiderstands der Fügeverbindung zwischen Faser und angesetztem Kopf zu.

bei tiefen Temperaturen die Wechselwirkung der Phononen mit der Probenoberfläche maßgebend ist [136]. Dies ist deutlich an den durchgeführten Messungen zu erkennen.

Weiterhin wurde untersucht, inwieweit sich der Wärmeübergang im Falle eines an die Faser angesetzten Kopfes gegenüber einem monolithischen Ende unterscheidet (vgl. Abbildung 4.15a und 4.15b). An beide Faserköpfe wurde dazu jeweils ein Heizer sowie zwei Temperatursensoren und ein weiterer Sensor an der Faser in unmittelbarem Abstand zum Kopf angebracht und so die Temperaturverteilung bei verschiedenen Heizleistungen erfasst (siehe Abbildung 5.3). In 85 mm Abstand zum Kopf ist die Faser mit der konstant auf 16 K gekühlten Wärmesenke verbunden.

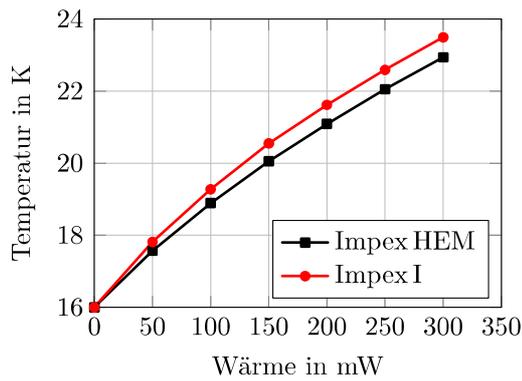
Abbildung 5.5 vergleicht die gemessene Temperatur der Kopfoberseite in Abhängigkeit der zugeführten Wärme für die weiter vorn bereits beschriebenen Fasern Impex I mit monolithischem Kopf und Impex HEM mit angesetztem Kopf. Im Rahmen der

Messgenauigkeit zeigt sich zunächst kein Unterschied, beide Faserköpfe erreichen mit zunehmendem Wärmestrom eine immer höhere Temperatur. Mit der für die jeweilige Faser bekannten Wärmeleitfähigkeit (vgl. Abbildung 5.4) wurde in einer Finite-Elemente Analyse die zu erwartende Temperatur am Kopf ermittelt und ist als gestrichelte Linie für beide Fasern ebenfalls eingetragen. Dem Modell liegt hierbei eine perfekte thermische Ankontaktierung der Faser zur Wärmesenke sowie eine gegen unendlich strebende Einstellzeit für das thermische Gleichgewicht zu Grunde. Dadurch lässt sich die geringe Differenz gegenüber den experimentellen Daten im Fall der Faser Impex I erklären. Wegen der höheren Wärmeleitfähigkeit der Faser Impex HEM müsste bei dieser jedoch die Temperatur am Kopf deutlich geringer ausfallen wie die Modellrechnung zeigt. Daher kann man an dieser Stelle nur die Schlussfolgerung ziehen, dass der Wärmeübergang zwischen dem angesetztem Kopf und der Faser mit einem bestimmtem Wärmewiderstand verbunden ist. Weitere Modellrechnungen unter Annahme eines Wärmewiderstandes von bis zu $0,2 \text{ W/m}^2$ untermauern diese Vermutung [116].

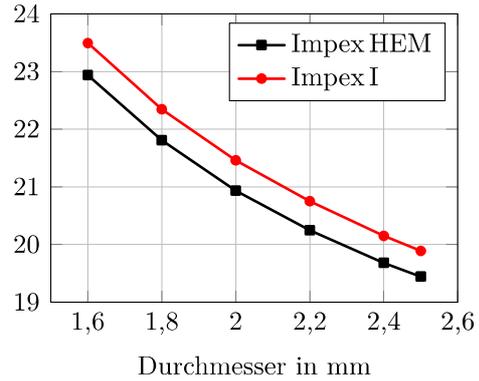
Im für KAGRA relevanten Bereich von bis zu 300 mW abzuführender Wärme (siehe nächster Abschnitt) liegt die Abweichung der gemessenen Daten zu denen der Modellrechnung bei 0,6 K für Impex HEM und 0,4 K für Impex I, sodass sich insgesamt nur ein geringer Unterschied ergibt. Weiterhin sollen die zylinderförmigen 5 mm hohen Köpfe der Prototypen durch Würfel mit 10 mm Kantenlänge ersetzt werden. Die Kontaktfläche zwischen Kopf und Faser wird so verdoppelt und reduziert die geringe Temperaturdifferenz zwischen angesetztem und monolithischem Kopf zusätzlich. Zusammenfassend kann davon ausgegangen werden, dass sich durch die Verwendung von Fasern mit monolithischen Köpfen bezüglich der erreichbaren Endtemperatur der Testmassen nur ein marginaler Vorteil ergibt.

5.3. Temperatur der Testmassen in KAGRA

Mit Hilfe der gemessenen Daten ist es nun erstmals möglich abzuschätzen, welche Endtemperatur der Testmassen in KAGRA in Abhängigkeit des Wärmeeintrags zu erreichen ist. Als Vorgabe wurde bereits eine Wärmeleitfähigkeit von mindestens 5 kW/m K bei 20 K formuliert [137]. Diese Grenze wird nur von den formgeschliffenen Fasern Impex I bis V und der thermopolierten Impex HEM übertroffen. Die für KAGRA vorgesehenen Fasern unterscheiden sich von den hier untersuchten Prototypen nur durch eine Gesamtlänge von 30 cm. Vier dieser Fasern verbinden die auf 16 K gekühlte vorletzte Pendelstufe mit der Testmasse. Anhand eines finite Elemente



(a) Temperatur der Testmasse abhängig von der je Faser transportierten Wärme



(b) Temperatur der Testmasse abhängig vom Durchmesser der Fasern

Abbildung 5.6.: Je höher die pro Saphirfaser abzuführende Leistung, desto wärmer fällt die Endtemperatur der Testmassen in KAGRA aus (a). Mit einem größerem Faserdurchmesser könnte trotz maximal 300 mW Wärme das Ziel von 20 K erreicht werden (b). Deutlich zu sehen ist außerdem der Vorteil von Fasern aus formgeschliffenem und thermopoliertem HEM-Saphir gegenüber geschliffenem Stepanov-Saphir.

Modells wurde für jeweils eine dieser Fasern die Temperatur ermittelt, die sich bei Wärmezufuhr an einem Ende ergibt, während das andere auf 16 K gekühlt wird. Für die Wärmeleitung wurden dabei die experimentellen Werte Impex I und Impex HEM verwendet. Abbildung 5.6a stellt das Ergebnis beider Rechnungen gegenüber. Dabei wird deutlich, dass im Falle von formgeschliffenem Stepanov-Saphir schon bei einer pro Faser abzuführenden Leistung von knapp 130 mW (insgesamt 520 mW) das angestrebte Ziel von 20 K überschritten wird. Mit thermopoliertem HEM-Saphir könnten dagegen 150 mW (650 mW) Wärme abtransportiert werden. Geht man hingegen von einer in die Testmassen eingetragenen Leistung von 1,2 W aus [115], so ergeben sich 22,9 K bzw. 23,5 K. Um dennoch die Zieltemperatur zu erreichen müssten die Fasern (unter Annahme gleichbleibender Wärmeleitfähigkeit) im Durchmesser stark vergrößert werden, siehe Abbildung 5.6b.

5.4. Wärmefluss durch eine Indiumschicht

Die Wärmeabfuhr über die Pendelaufhängung ist für den geplanten kryogenen Betrieb ein entscheidender Faktor. Mit Hilfe der durchgeführten Messungen der Wärmeleitfähigkeit der Fasern konnte im vorangegangenen Abschnitt bereits eine Abschätzung

für die Temperatur der Testmassen in KAGRA getroffen werden (Abbildung 5.6). Dabei blieben allerdings die unumgänglichen Kontaktstellen außer Acht. An dieser Stelle sollen daher die Auswirkungen einer Indiumschicht als Fügeverbindung zwischen Saphir untersucht werden.

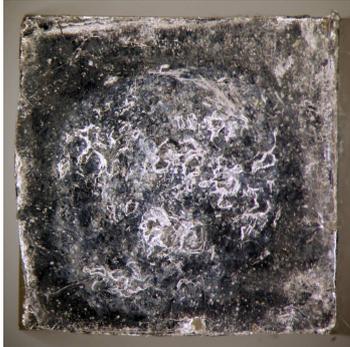


Abbildung 5.7.: Die Indiumschicht zwischen zwei $5\text{ mm} \times 5\text{ mm} \times 50\text{ mm}$ großen Saphirquadern ist vollkommen geschlossen und fällt mit rund $80\text{ }\mu\text{m}$ deutlich dicker aus, als zwischen den zylindrischen Proben (Abbildung 4.21).

Der Einfluss der Indiumschicht auf die Wärmeleitung wurde mit Hilfe von zwei $5\text{ mm} \times 5\text{ mm} \times 50\text{ mm}$ großen Saphirquadern ermittelt. Auch hier wurden eine $100\text{ }\mu\text{m}$ dicke Indiumfolie zwischen den $5\text{ mm} \times 5\text{ mm}$ großen, auf $\lambda/10$ polierten Kontaktflächen im Fokus einer 35 W -Halogenlampe erhitzt und so eine Verbindung hergestellt. Die Schichtdicke wurde ebenfalls unter dem Lichtmikroskop mit $(77,4 \pm 3,4)\text{ }\mu\text{m}$ bestimmt. Nach Abschluss des Experiments wurden beide Quader getrennt um die wegen der geschliffenen Oberfläche nicht einsehbare Schicht visuell inspizieren zu können (vgl. Abbildung 5.7). Die Indiumschicht wurde anschließend entfernt, abgewogen und daraus im Rahmen der Fehlergenauigkeit übereinstimmend die Schichtdicke zu $(82 \pm 22)\text{ }\mu\text{m}$ berechnet.

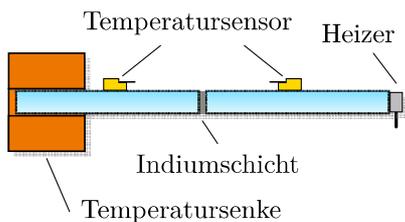


Abbildung 5.8.: In zwei durch eine Indiumschicht zusammengefügte Saphirquadern wurde über einen elektrischen Heizer auf der einen und eine Temperatursenke auf der anderen Seite ein definierter Wärmestrom erzeugt und mit zwei Temperatursensoren in jeweils 12 mm Abstand zur Verbindungsschicht die Temperaturdifferenz ΔT erfasst.

Abbildung 5.8 zeigt schematisch den verwendeten Messaufbau. Analog zu Abschnitt 5.2 wird mit einem elektrischen Heizer an einem Ende die definierte Heizleistung P_{el} zugeführt, das andere Ende befindet sich in Kontakt mit der gekühlten Probenplattform über die die Wärme abgeführt wird. Zwei kalibrierte Temperatursensoren (Lakeshore DT-670, Genauigkeit $\pm 12\text{ mK}$) erfassen jeweils im Abstand von 12 mm zur

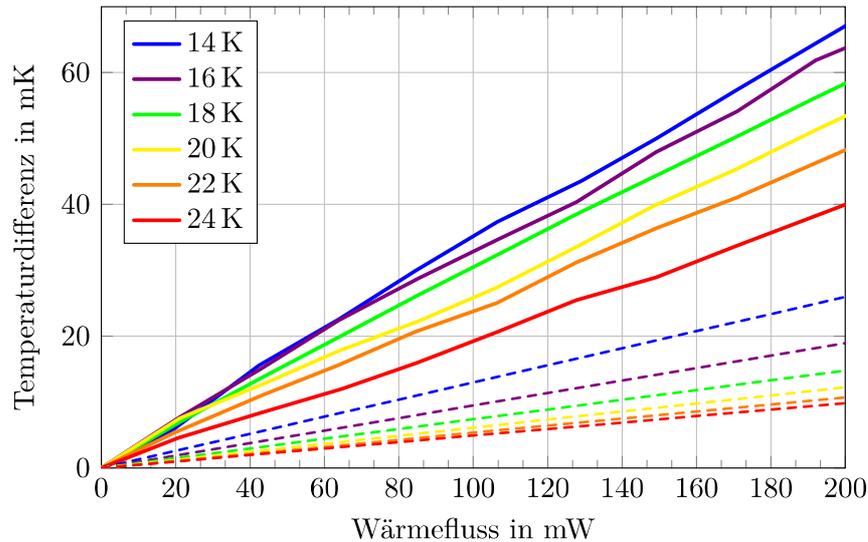


Abbildung 5.9.: Die Fügeverbindung zweier Saphirquadern mittels einer $77,4\ \mu\text{m}$ dicken Indiumschicht führt zu einer Erhöhung der Temperaturdifferenz ΔT gegenüber der eines durchgängigen Saphirkristalls (gestrichelte Linien).

Indiumschicht die Temperatur. In Abbildung 5.9 ist die mit wachsendem Wärmefluss zunehmende Temperaturdifferenz ΔT für verschiedene mittlere Proben temperaturen aufgetragen. Auf Grund des Maximums in der Wärmeleitfähigkeit von Saphir bei 30 K fällt die Differenz bei höheren Temperaturen geringer aus. Zum Vergleich wurde ΔT für eine entsprechende Saphirprobe ohne Indiumzwischen schicht berechnet und ist ebenfalls eingezeichnet (gestrichelte Linien).

Der nach Somiya [115] in KAGRA erwartete maximale Wärmefluss von $1,2\ \text{W}$ verteilt sich auf vier Fasern (vgl. Abbildung 6.1). Die Kontaktfläche der würfelförmigen Faserköpfe beträgt dabei jeweils $350\ \text{mm}^2$, dementsprechend ist über die hier betrachtete Fläche von $25\ \text{mm}^2$ ein Wärmefluss von knapp $22\ \text{mW}$ zu betrachten. Bei 16 K, der Zieltemperatur der vorletzten Pendelstufe und damit auch der oberen Köpfe, ist Abbildung 5.9 ein Anstieg der Temperaturdifferenz von lediglich 6 mK durch die Indiumzwischen schicht zu entnehmen, bei höheren Temperaturen fällt der Anstieg geringer aus. Daher ist nicht davon auszugehen, dass die Wärmeabfuhr in KAGRA durch die Verwendung der lösba ren Indiumverbindung beeinträchtigt wird, zumal die hier betrachtete Schicht mit $77,4\ \mu\text{m}$ deutlich dicker ist, als die mit etwa $1\ \mu\text{m}$ vorgesehene. Damit behalten demnach auch die in Abbildung 5.6 gegebenen Werte weiterhin ihre Gültigkeit.

6. Rauschen in kryogenen Gravitationswellendetektoren

Das vorangegangene Kapitel 5 zur Wärmeleitfähigkeit, insbesondere die durchgeführten Untersuchungen an Saphirelementen und möglichen Fügeverbindungen durch hydroxid-katalytisches Bonden sowie mit Hilfe von Indium haben gezeigt, dass ein Betrieb des japanischen Detektors KAGRA bei tiefen Temperaturen realisierbar ist. Gleiches ist für das europäische Einstein Telescope in Bezug auf Silizium anzunehmen. In diesem Kapitel sollen daher abschließend die Ergebnisse zu Messungen des mechanischen Verlustes aus Kapitel 4 erneut aufgegriffen werden und Abschätzungen der Empfindlichkeit von geplanten und potentiellen Detektorkonfigurationen diskutiert werden.

6.1. KAGRA

Der letzten Stufe der mehrstufigen Pendelaufhängung der Testmassen in Gravitationswellendetektoren kommt eine besondere Bedeutung zu. Sie trägt entscheidend zum Gesamtrauschverhalten des gesamten Systems bei. Abbildung 6.1 zeigt das CAD-Modell der geplanten Pendelaufhängung einer der vier Testmassen in KAGRA. Das Brownsche Rauschen der polierten Testmassen aus Saphir ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (2.35) und des ermittelten mechanischen Verlustes von $\phi = 10^{-8}$ bei der geplanten Betriebstemperatur von 20 K (Abbildung 4.12). Für das Rauschen der Fasern der Pendelaufhängung wurden Gleichung (2.41) und (2.45) mit einem Verlust von $\phi = 1,1 \cdot 10^{-7}$ (vgl. Abbildung 4.20) verwendet. Zusätzlich wurden das thermoelastische (TE) und thermorefraktive (TR) Rauschen der Testmassen nach Gleichung (2.47) und (2.56) sowie das Brownsche Rauschen einer Beschichtung der Testmassen wie in Advanced LIGO [28] berechnet (Gleichung (2.36)).

Um den Einfluss der hydroxid-katalytischen Bondschichten zwischen den angebrachten Prismen sowie den Indiumfügestellen an jedem der quaderförmigen Faserköpfe zu ermitteln, wurde zudem in einer Finite Elemente Rechnung nach dem Schema von

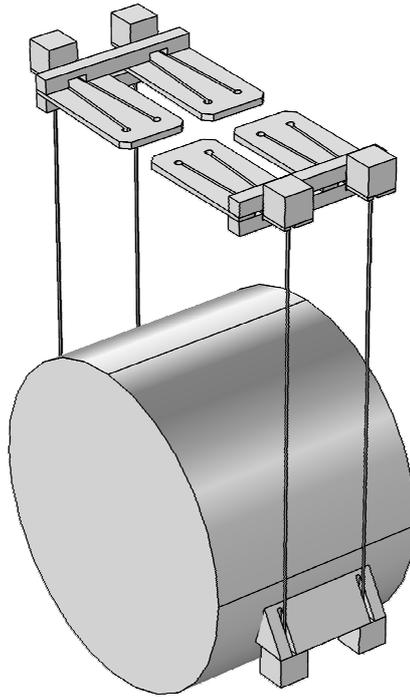


Abbildung 6.1.: CAD-Zeichnung der geplanten Pendelaufhängung in KAGRA. An den Umfang der Saphirtestmasse sind mittels hydroxid-katalytischen Bondens zwei Prismen angebracht. Pro Seite stellen jeweils zwei Saphirfasern die Verbindung zur darüber liegenden Stufe her, angekoppelt über vier Blattfedern aus Saphir. Für den Fall eines Defekts sind die Würfelförmigen Köpfe der Fasern durch eine dünne, lösbare Schicht Indium sowohl mit den Prismen als auch mit den Blattfedern verbunden.

Levin (vgl. Unterabschnitt 2.6.2) eine virtueller oszillatorischer Druck entprechend dem Strahlprofil des Lasers auf die Testmassen aufgebracht. Mit Hilfe von Gleichung (2.34) kann so das Brownsche Rauschen des in Abbildung 6.1 gezeigten Gesamtsystems ermittelt werden. Dabei wurde für die hydroxid-katalytische Bondschicht jeweils eine typische Dicke von 60 nm sowie ein mechanischer Verlust von $\phi = 3 \cdot 10^{-4}$ (vgl. Abbildung 4.25) angenommen. Die Indiumfügestellen hingegen gehen mit 1 μm Dicke und einem Verlust von $\phi = 2 \cdot 10^{-3}$ (Abbildung 4.24) in die Rechnung ein.

Abbildung 6.2 stellt die einzelnen Rauschbeiträge aus der analytischen Rechnung dem Ergebniss des Finite Elemente Modells gegenüber und vergleicht beides mit dem zu erwartendem Quantenrauschen (mit Power- aber ohne Signal-Recycling) sowie der Designkurve von KAGRA. Vor allem bei Frequenzen unterhalb von 100 Hz liefert die Finite Elemente Rechnung dabei einen merklichen Unterschied zum analytisch berechneten Brownschen Rauschen der Pendelaufhängung. Grund dafür ist die Ver-

nachlässigung der Fugestellen in der analytischen Rechnung. Oberhalb von etwa 100 Hz hingegen ist eine Übereinstimmung mit dem Brownschen Rauschen der Testmassen sowie den Violinresonanzen zu erkennen, das jedoch deutlich unterhalb der Designkurve verläuft. In diesem Bereich dominiert daher einzig das Quantenrauschen, während bei tieferen Frequenzen zusätzlich die Pendelaufhängung etwa in gleicher Größenordnung zur Limitierung der Empfindlichkeit beiträgt.

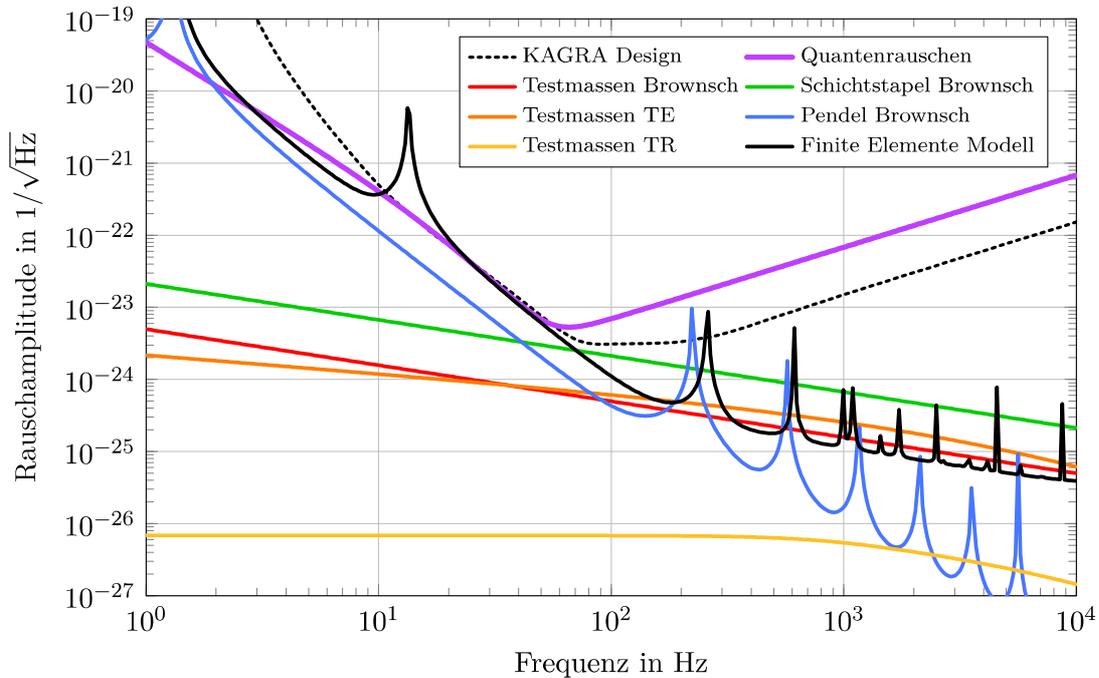


Abbildung 6.2.: Vergleich des analytisch ermittelten Rauschens der Testmassen und Pendelaufhängung in KAGRA (siehe Abbildung 6.1) mit den Resultaten einer numerischen Finite Elemente Berechnung des Brownschen Rauschens bei jeweils 20 K. Das Finite Elemente Modell berücksichtigt dabei den Einfluss aller Fugestellen sowie die finiten Abmessungen der Testmassen, nicht jedoch deren Beschichtung. Neben dem Quantenrauschen ist lediglich bei tiefen Frequenzen ein Einfluss des Brownschen Rauschens der Pendelaufhängung zu erwarten.

6.2. Einstein Telescope

Für das Einstein Telescope sieht die Mitte 2011 veröffentlichte Designstudie [18] eine Temperatur der Testmassen aus Silizium von lediglich 10 K vor. Vier jeweils 2 m lange Fasern mit einem Durchmesser von 3 mm sollen dazu die Verbindung zur auf 5 K gekühlten vorletzten Stufe der Pendelkaskade herstellen. Der maximal mögliche Abtransport von Wärme wurde mit etwa 100 mW abgeschätzt während die bei der Durchstrahlung des Einkoppelspiegels eingetragene Wärme durch Absorption mit 20 mW angenommen wurde.

Zusammen mit anderen durchgeführten Messungen zur Absorption in Silizium zeigen jedoch, dass von den Einkoppelspiegeln etwa 1 W Laserleistung absorbiert wird [74] und unweigerlich zu einem Anstieg der Temperatur der Testmassen führt. Ein weiteres Absenken der Temperatur der vorletzten Stufe unter 5 K wäre nicht nur extrem aufwendig, sondern wäre aufgrund der dadurch entlang der Faser immer weiter abnehmenden Wärmeleitfähigkeit (vgl. Abbildung 5.1) nicht gewinnbringend. Sinniger erscheint es daher zunächst, kürzere Pendelfasern zu verwenden oder deren Querschnitt zu erhöhen. Allerdings ginge dies durch die damit verbundene Erhöhung der Eigenfrequenz und folglich dem Anstieg des Brownschen Rauschens der Pendelaufhängung gemäß Gleichung (2.41) wiederum zu Lasten der Empfindlichkeit des Detektors bei niedrigen Frequenzen.

Eine Erhöhung der Temperatur der Testmassen hingegen würde gleichsam zu einem Anstieg der Wärmeleitfähigkeit in den Pendelfasern führen und stellt damit eine vielversprechende Alternative dar. Um dabei eine Obergrenze für die Temperatur der Testmassen abzuschätzen, wurde das thermische Rauschen der Testmassen als Summe von Brownschem, thermoelastischem (TE) sowie thermorefraktivem (TR) Rauschen für verschiedene Temperaturen bestimmt. Für eine realistische Abschätzung wurde moderat dotiertes Czochralski Silizium als Material für die Testmassen vorausgesetzt. Der mechanische Verlust wurde dementsprechend aus Abbildung 4.1 bzw. 4.2 zu rund $3 \cdot 10^{-9}$ entnommen. Die nötigen Temperaturabhängigkeiten des thermischen Ausdehnungskoeffizienten, der Wärmeleitfähigkeit sowie der Wärmekapazität finden sich im Anhang in Abbildung A.1, A.2 und A.3. Der thermooptische Koeffizient wurde aus eigenen Messungen übernommen [138]. Abbildung 6.3 fasst die Rauschbeiträge bei verschiedenen Temperaturen zusammen. Dabei zeigt sich, dass für Temperaturen bis 20 K nahezu keine Änderung des thermischen Rauschens stattfindet. Erst für höhere Temperaturen ist vor allem um 10 Hz ein deutlicher Anstieg aufgrund des zunehmenden

thermoelastischen Rauschens zu erkennen. Bei 24 K wird schließlich die Designkurve des niederfrequenten Teils des Einstein Telescope (ET-LF) erreicht.

Mit Blick auf das thermische Rauschen der Testmassen erscheint daher eine Temperatur von 20 K als sinnvolles oberes Limit vertretbar. Die Wärmeleitfähigkeit in den Pendelfasern könnte damit näherungsweise um etwa den Faktor acht erhöht werden (T^3 -Abhängigkeit, vgl. Abbildung 5.1), sodass dann in Verbindung mit einer nur mäßigen Erhöhung des Faserquerschnitts trotz der eingetragenen Leistung von 1 W ein kryogener Betrieb möglich sein wird.

6.3. LIGO Voyager

Unter dem Namen LIGO Voyager erfolgt aktuell die Entwicklung der dritten Generation der beiden amerikanischen Detektoren des Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory [139, 140]. Bereits 2012 wurde, damals noch unter dem Namen LIGO III - Blue Concept, von Adhikari die Verwendung von Testmassen aus Silizium bei ca. 120 K vorgeschlagen [141]. Der thermische Ausdehnungskoeffizient zeigt dort wie bei 18 K einen Nulldurchgang und sorgt so für ein verschwindendes thermoelastisches Rauschen. Zudem kann ein signifikanter Anteil der in die Testmassen eingetragenen Leistung bei dieser Temperatur durch Wärmestrahlung an eine gekühlte Umhausung abgeführt werden (T^4 -Abhängigkeit) [142]. Anstatt einer aufwendigen Kühlung mit flüssigem Helium wie im Einstein Telescope geplant bzw. durch den Einsatz von sogenannten Pulse-Tube Kühlern in KAGRA könnte außerdem auf den in großen Mengen verfügbaren flüssigen Stickstoff zurückgegriffen werden. Darüber hinaus konnte jüngst für mit Phosphor dotiertes Silizium eine reduzierte Absorption bei 125 K gezeigt werden [143]. Die erhöhte thermische Leitfähigkeit mindert auch die Gefahr von Instabilitäten durch thermische Linsen im durchstrahlten Material. Die aktuellen Pläne für einen LIGO Detektor der dritten Generation sehen aus diesem Grund eine auf 3,2 MW erhöhte Laserleistung in den Interferometerarmen bei 450 W Eingangsleistung vor. Die geplante Masse der Testmassen von rund 160 kg erfordert bei der Verwendung von Silizium Abmessungen von beispielsweise 45 cm Durchmesser und 43 cm Höhe, ähnliche wie für das Einstein Telescope.

Betrachtet man allerdings Abbildung 4.6, so erkennt man starke Unterschiede im mechanischen Verlust für die unterschiedlichen Resonanzfrequenzen der Siliziumprobe. Es wurde gezeigt, dass der erhöhte Verlust eindeutig mit dem jeweiligen Scheranteil der Eigenschwingung verknüpft ist (Abbildung 4.9). Im gewählten Beispiel variiert

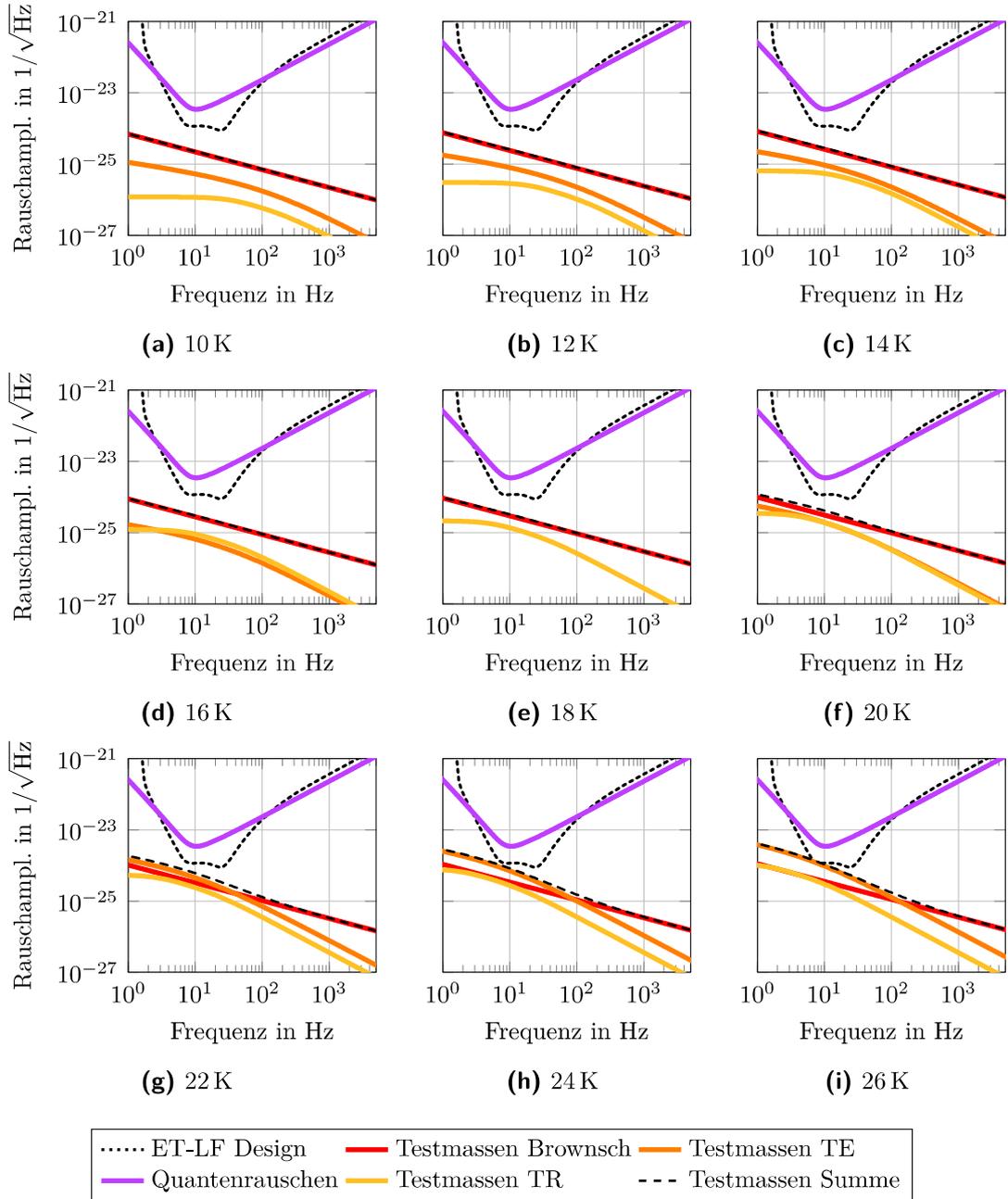


Abbildung 6.3.: Das thermische Rauschen der Testmassen im geplanten niederfrequenten Teil des Einstein Telescope wird für Temperaturen von 10 K bis etwa 20 K durch das Brownsche Rauschen bestimmt. Für höhere Temperaturen überwiegt das thermoelastische Rauschen (TE) und die Summe der Rauschbeiträge erreicht bei 24 K die Designkurve (ET-LF). Das thermorefraktive Rauschen (TR) geht dabei nur für die beiden Einkoppelspiegel ein. Bei 18 K verschwindet das thermoelastische Rauschen in Folge des Nulldurchgangs des thermischen Ausdehnungskoeffizienten.

der mechanische Verlust um eine Größenordnung zwischen rund $7 \cdot 10^{-8}$ für einen Scheranteil nahe 100 % und dem Minimalwert von $7 \cdot 10^{-9}$.

Für eine grobe Abschätzung des möglichen thermischen Rauschens wurde daher nach dem Levinschem Schema auf potentielle Testmassen aus Silizium ein statischer Druck mit Gaußscher Verteilung (vgl. Gleichung (2.31)) aufgebracht. Anschließend wurde das Verhältnis der elastisch gespeicherten Energie durch Normal- U_{Norm} bzw. Scherverformung U_{Scher} zur Gesamtenergie U_{Ges} für die drei gängigen Kristallorientierungen bestimmt und ist in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Tabelle 6.1.: Anteil der elastischen Energie durch Normal- bzw. Scherverformung U_{Norm} und U_{Scher} für drei übliche Kristallorientierungen von Silizium.

Kristallorientierung	$\langle 100 \rangle$	$\langle 110 \rangle$	$\langle 111 \rangle$
Normalanteil $U_{\text{Norm}}/U_{\text{Ges}}$	76 %	54 %	55 %
Scheranteil $U_{\text{Scher}}/U_{\text{Ges}}$	24 %	46 %	45 %
skalierter Verlust	$2,2 \cdot 10^{-8}$	$3,6 \cdot 10^{-8}$	$3,5 \cdot 10^{-8}$
E-Modul	130 GPa	169 GPa	188 GPa

Während in $\langle 100 \rangle$ Orientierung der Scheranteil lediglich ein Viertel beträgt, liegt er mit 46 bzw. 45 % für die beiden anderen merklich höher. Die entsprechend dem Scheranteil skalierten mechanischen Verluste finden sich zusammen mit dem zugehörigen E-Modul jeder Orientierung ebenfalls in Tabelle 6.1. Das nach Gleichung (2.35) damit berechnete Brownsche Rauschen ist in Abbildung 6.4a zusammen mit dem thermorefraktivem Rauschen und dem Quantenrauschen eines möglichen Detektors mit 4 km Armlänge gegenübergestellt. Es zeigt sich so gut wie kein Unterschied zwischen den unterschiedlichen Orientierungen, das Brownsche Rauschen der Testmassen überschreitet knapp unter 100 Hz immer das Quantenrauschen und limitiert so die Empfindlichkeit. Eine Verbesserung diesbezüglich könnte durch den Einsatz von Testmassen aus sauerstofffreiem Float-Zone Silizium statt des wie in den bisherigen Überlegungen stillschweigend angenommenen Czochralski Materials erzielt werden. Der mechanische Verlust von Float-Zone Silizium zeigt keine Abhängigkeit vom Scheranteil und beträgt bei 120 K nur $9 \cdot 10^{-9}$ (siehe Abbildung 4.4). Damit kann das Brownsche Rauschen der Testmassen auf die gleiche Höhe wie das Quantenrauschen reduziert werden, vgl. Abbildung 6.4b.

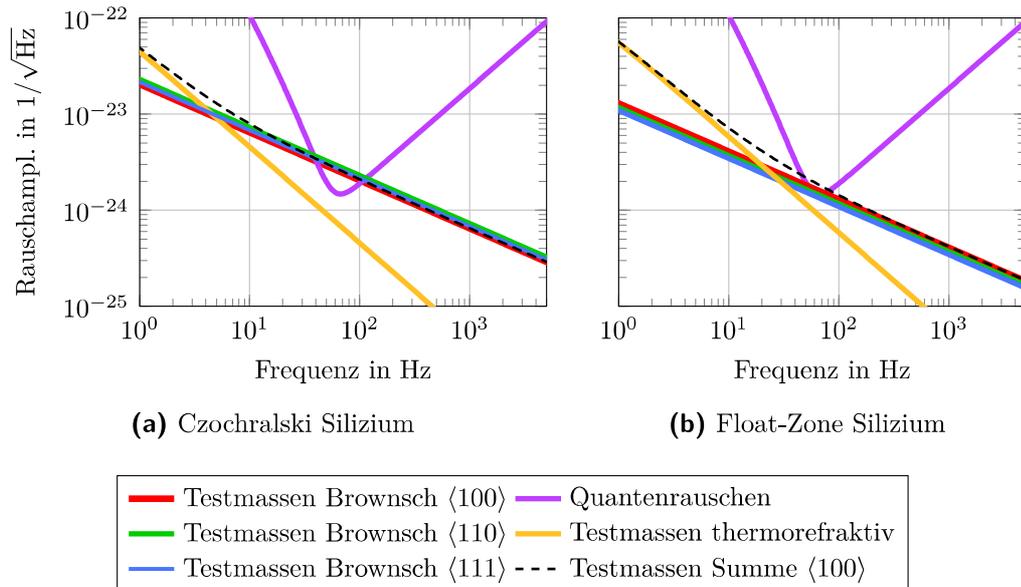


Abbildung 6.4.: Als potentieller Detektor dritter Generation soll LIGO Voyager mit Testmassen aus Silizium bei 120 K betrieben werden. Ein Vergleich des thermischen Rauschens der Testmassen in verschiedenen Kristallorientierungen mit dem Quantenrauschen zeigt für den Fall von Czochralski Material eine Limitierung (a). Durch die Verwendung von Float-Zone Silizium gelingt eine Reduzierung auf Höhe des Quantenrauschens (b). Das thermoelastische Rauschen verschwindet hier in Folge des Nulldurchgangs des thermischen Ausdehnungskoeffizienten erneut.

7. Zusammenfassung

Mit den aktuellen interferometrischen Detektoren ist es bereits gelungen, einzelne Signale von Gravitationswellen zu empfangen [4], doch für eine zu den herkömmlichen Verfahren vergleichbare Gravitationswellenastronomie ist eine nochmals gesteigerte Empfindlichkeit notwendig. Das thermische Rauschen der Testmassen muss dazu reduziert werden. Dies ist nur durch das Absenken der Temperatur und den damit verbundenen Wechsel von Fused Silica zu kristallinem Silizium oder Saphir zu realisieren. Tiefe Temperaturen können jedoch nur in Verbindung mit einem geringen mechanischen Verlust eine Verringerung des thermischen Rauschens sichern. Aus diesem Grund wurden im Rahmen dieser Arbeit umfangreiche temperaturabhängige Messungen zum mechanischen Verlust von kristallinem Silizium und Saphir durchgeführt.

Silizium als typisches industriell hergestelltes Halbleitermaterial liegt in der Regel mit Bor (p-Typ) oder Phosphor (n-Typ) dotiert vor. Im Vergleich zu speziellem intrinsischen (hochreinen) Silizium konnten bei tiefen Temperaturen geringere mechanische Verluste in Zusammenhang mit einer mäßigen Dotierung festgestellt werden. Darüber hinaus erwies sich speziell p-Typ Silizium bezüglich des mechanischen Verlusts als am besten für kryogene Anwendungen geeignet. Nach bisherigem Kenntnisstand ergibt sich so erstmals eine konkrete Materialempfehlung für die Testmassen des Einstein Telescope. In diesem Zusammenhang wurde außerdem gezeigt, dass sich bezogen auf das thermische Rauschen der Testmassen keine wesentlichen Nachteile einer Betriebstemperatur von bis zu 20 K ergeben.

Der überwiegende Teil der an Silizium durchgeführten Messungen förderte zudem ein Verlustmaximum um 120 K zu Tage. Dieses Maximum konnte in eindeutiger Weise mit der entsprechenden Scherbelastung der verwendeten Proben korreliert werden. Als Ursache des Anstiegs wird interstitiell eingelagerter Sauerstoff im Kristallgitter angesehen. Das Ausbleiben des Maximums in (quasi) sauerstofffreiem Silizium sowie nach einer Temperaturbehandlung zur Umlagerung des Zwischengittersauerstoffs in SiO_2 -Ausscheidungen belegen dies. Sollen Siliziumtestmassen wie etwa in LIGO Voyager speziell bei knapp 120 K zur Unterdrückung des thermoelastischen Rauschens in

Verbindung mit einem Gaußschen Strahlprofil eingesetzt werden, so liefert in diesem Fall intrinsisches Material die besten Resultate.

Für Saphir konnte der mechanischen Verlust im Bereich um 30 K jeweils auf die Akhieser-Dämpfung als fundamentales Limit zurückgeführt werden. Sowohl für höhere und insbesondere für tiefere Temperaturen wurde die Notwendigkeit einer hohen Oberflächengüte für möglichst geringe mechanische Verluste nachgewiesen. Verantwortlich hierfür sind die spezifischen eingebrachten Störungen je nach Art der Oberflächenbehandlung. An mit Chrom dotiertem Material verringerte sich zwar der Verlust im mittleren untersuchten Temperaturbereich, es zeigten sich jedoch im Tieftemperaturbereich keinerlei Vorteile.

Bei der Charakterisierung verschiedener Saphirfasern schnitten vollständig monolithische, aus einem Stück HEM-Saphir formgeschliffene Elemente bezüglich des mechanischen Verlusts deutlich besser ab, als nachträglich aus mehreren, zum Teil im Stephanov-Verfahren gewachsenen Einzelteilen zusammengesetzte Fasern. Gleiches konnte für die ermittelte Wärmeleitfähigkeit beobachtet werden, sodass im Sinne einer möglichst hohen Wärmeabfuhr als auch eines geringen thermischen Rauschens durch die Pendelaufhängung dieses Herstellungsverfahrens der Fasern bevorzugt werden sollte. Für die Verbindung der Testmassen mit der Pendelaufhängung wurden das hydroxidkatalytische Bonden sowie das Fügen mittels Indium untersucht. Ersteres erweist sich aufgrund geringerer mechanischer Verluste als auch geringerer Schichtdicken dabei als vorteilhaft. Indium-Fügeverbindungen stellen jedoch eine gangbare Alternative dazu dar, um Verbindungen im Falle eines möglichen Defekts leicht lösen zu können. Die Wärmeleitung wird durch beide Verfahren kaum beeinträchtigt.

Mit den gewonnenen Daten konnte so eine erstmalige Abschätzung der erreichbaren Endtemperatur der Testmassen als auch des thermischen Rauschens mit konkreten Messwerten für den bereits in Bau befindlichen Detektor KAGRA gegeben werden.

Die vorliegende Arbeit liefert somit wichtige Impulse für die weitere Entwicklung von Gravitationswellendetektoren mit kryogenen Testmassen. Ein Großteil der erzielten Ergebnisse fand bereits unmittelbar Verwendung für den Bau des japanischen Detektors KAGRA. Ebenso konnten in dieser Arbeit entscheidende Beiträge für die weitere Planung und Umsetzung des europäischen Einstein Telescope sowie den Ausbau der amerikanischen LIGO Detektoren gewonnen werden. Des Weiteren ergeben sich Ansatzpunkte für zukünftige Arbeiten wie beispielsweise Untersuchungen zum Einfluss der Dotierung sowie einer Wärmebehandlung auf die optische Absorption.

Literatur

- [1] A. Einstein. „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“. In: *Annalen der Physik* 354.7 (1916), S. 769–822.
- [2] G. E. Moss, L. R. Miller und R. L. Forward. „Photon-Noise-Limited Laser Transducer for Gravitational Antenna“. In: *Appl. Opt.* 10.11 (Nov. 1971), S. 2495–2498.
- [3] R. Weiss. „Electromagnetically coupled broadband gravitational antenna“. In: *Quarterly Prog. Rep., Research Lab. Electronics, MIT* 105 (1972), S. 54–76.
- [4] B. P. Abbott et al. „Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger“. In: *Phys. Rev. Lett.* 116 (6 Feb. 2016), S. 061102.
- [5] A. Schroeter et al. „On the mechanical quality factors of cryogenic test masses from fused silica and crystalline quartz“. In: *arXiv preprint arXiv:0709.4359* (2007).
- [6] P. R. Saulson. *Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors*. Bd. 7. World Scientific, 1994.
- [7] J. H. Taylor, L. A. Fowler und P. M. McCulloch. „Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR1913 + 16“. In: *Nature* 277.5696 (Feb. 1979), S. 437–440.
- [8] J. M. Weisberg und J. H. Taylor. „The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis“. In: *Binary Radio Pulsars*. Hrsg. von F. A. Rasio und I. H. Stairs. Bd. 328. Astronomical Society of the Pacific Conference Series. Juli 2005, S. 25.
- [9] J. M. Weisberg, D. J. Nice und J. H. Taylor. „Timing Measurements of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16“. In: *The Astrophysical Journal* 722.2 (2010), S. 1030.
- [10] J. Weber. „Detection and Generation of Gravitational Waves“. In: *Physical Review* 117 (1 Jan. 1960), S. 306–313.

- [11] J. Weber. „Evidence for Discovery of Gravitational Radiation“. In: *Physical Review Letters* 22 (24 Juni 1969), S. 1320–1324.
- [12] A. Vinante und the AURIGA Collaboration. „Present performance and future upgrades of the AURIGA capacitive readout“. In: *Classical and Quantum Gravity* 23.8 (2006), S103.
- [13] S. W. Hawking und W. Israel. *Three hundred years of gravitation*. Cambridge University Press, 1989.
- [14] A. A. Michelson und E. W. Morley. „On the Relative Motion of the Earth and of the Luminiferous Ether“. In: *Sidereal Messenger, vol. 6, pp. 306-310* 6 (1887), S. 306–310.
- [15] A. V. Cumming et al. „Design and development of the advanced LIGO monolithic fused silica suspension“. In: *Classical and Quantum Gravity* 29.3 (2012), S. 035003.
- [16] The LIGO Scientific Collaboration. „A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit“. In: *Nature Physics* 7.12 (2011), S. 962–965.
- [17] T. Akutsu und KAGRA collaboration. „Large-scale cryogenic gravitational-wave telescope in Japan: KAGRA“. In: *Journal of Physics: Conference Series* 610.1 (2015), S. 012016.
- [18] ET Science Team. „Einstein gravitational wave Telescope conceptual design study“. In: *Internal Report ET-0106C-10* (2011).
- [19] S. Hild. „Beyond the second generation of laser-interferometric gravitational wave observatories“. In: *Classical and Quantum Gravity* 29.12 (2012), S. 124006.
- [20] C. J. Moore, R. H. Cole und C. P. L. Berry. „Gravitational-wave sensitivity curves“. In: *Classical and Quantum Gravity* 32.1 (2015), S. 015014.
- [21] M. Maggiore. *Gravitational waves*. Oxford Univ. Press, 2008.
- [22] G. Harry, T. P. Bodiya und R. DeSalvo. *Optical coatings and thermal noise in precision measurement*. Cambridge University Press, 2012.
- [23] D. G. Blair et al. *Advanced gravitational wave detectors*. Hrsg. von D. G. Blair et al. Cambridge University Press, 2012.
- [24] M. Bassan. *Advanced Interferometers and the Search for Gravitational Waves*. Bd. 404. Springer, 2014, S. 275–290.

-
- [25] T. Accadia et al. „The seismic Superattenuators of the Virgo gravitational waves interferometer“. In: *Low Frequency Noise, Vibration and Active Control* 30.1 (2011), S. 63–79.
- [26] J. Hough und S. Rowan. „Laser interferometry for the detection of gravitational waves“. In: *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* 7.6 (2005), S257.
- [27] C. M. Caves. „Quantum-mechanical noise in an interferometer“. In: *Physical Review D* 23 (8 Apr. 1981), S. 1693–1708.
- [28] The LIGO Scientific Collaboration. „Advanced LIGO“. In: *Classical and Quantum Gravity* 32.7 (2015), S. 074001.
- [29] H. B. Callen und T. A. Welton. „Irreversibility and Generalized Noise“. In: *Physical Review* 83 (1 Juli 1951), S. 34–40.
- [30] H. Nyquist. „Thermal agitation of electric charge in conductors“. In: *Physical review* 32.1 (1928), S. 110–113.
- [31] M. Zollner und E. Zwicker. *Elektroakustik*. Springer-Verlag, 2003.
- [32] Y. Levin. „Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach“. In: *Physical Review D* 57 (2 Jan. 1998), S. 659–663.
- [33] F. Bondu, P. Hello und J.-Y. Vinet. „Thermal noise in mirrors of interferometric gravitational wave antennas“. In: *Physics Letters A* 246.3–4 (1998), S. 227–236.
- [34] P. R. Saulson. „Thermal noise in mechanical experiments“. In: *Physical Review D* 42 (8 Okt. 1990), S. 2437–2445.
- [35] A. S. Nowick und B. S. Berry. *Anelastic Relaxation In Crystalline Solids*. Hrsg. von A. M. Alper, J. L. Margrave und A. S. Nowick. Materials science and technology. New York und London: Academic Press, 1972.
- [36] J. G. Powles. „Brownian Motion - June 1827“. In: *Physics Education* 13.5 (1978), S. 310.
- [37] A. Gillespie und F. Raab. „Thermally excited vibrations of the mirrors of laser interferometer gravitational-wave detectors“. In: *Physical Review D* 52 (2 Juli 1995), S. 577–585.
- [38] K. Yamamoto et al. „Theoretical approach to thermal noise caused by an inhomogeneously distributed loss: Physical insight by the advanced modal expansion“. In: *Phys. Rev. D* 75 (8 Apr. 2007), S. 082002.

- [39] V. Braginsky, M. Gorodetsky und S. Vyatchanin. „Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational wave antennae“. In: *Physics Letters A* 264.1 (1999), S. 1–10.
- [40] Y. T. Liu und K. S. Thorne. „Thermoelastic noise and homogeneous thermal noise in finite sized gravitational-wave test masses“. In: *Physical Review D* 62 (12 Nov. 2000), S. 122002.
- [41] V. Braginsky und S. Vyatchanin. „Thermodynamical fluctuations in optical mirror coatings“. In: *Physics Letters A* 312.3–4 (2003), S. 244–255.
- [42] G. M. Harry et al. „Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings“. In: *Classical and Quantum Gravity* 19.5 (2002), S. 897.
- [43] M. Granata et al. „Cryogenic measurements of mechanical loss of high-reflectivity coating and estimation of thermal noise“. In: *Optics Letters* 38.24 (Dez. 2013), S. 5268–5271.
- [44] G. D. Hammond et al. „Reducing the suspension thermal noise of advanced gravitational wave detectors“. In: *Classical and Quantum Gravity* 29.12 (2012), S. 124009.
- [45] S. M. Aston et al. „Update on quadruple suspension design for Advanced LIGO“. In: *Classical and Quantum Gravity* 29.23 (2012), S. 235004.
- [46] C. Brif. „Notes on anelastic effects and thermal noise in suspensions of test masses in interferometric gravitational wave detectors“. In: (1999).
- [47] G. Cagnoli et al. „Damping dilution factor for a pendulum in an interferometric gravitational waves detector“. In: *Physics Letters A* 272.1-2 (2000), S. 39–45.
- [48] A. Gillespie und F. Raab. „Thermal noise in the test mass suspensions of a laser interferometer gravitational-wave detector prototype“. In: *Physics Letters A* 178.5–6 (1993), S. 357–363.
- [49] P. Willems et al. „Investigations of the dynamics and mechanical dissipation of a fused silica suspension“. In: *Physics Letters A* 297.1–2 (2002), S. 37–48.
- [50] A. V. Cumming et al. „Silicon mirror suspensions for gravitational wave detectors“. In: *Classical and Quantum Gravity* 31.2 (2014), S. 025017.

-
- [51] M. Cerdonio et al. „Thermoelastic effects at low temperatures and quantum limits in displacement measurements“. In: *Physical Review D* 63 (8 März 2001), S. 082003.
- [52] K. Somiya, K. Kokeyama und R. Nawrodt. „Remarks on thermoelastic effects at low temperatures and quantum limits in displacement measurements“. In: *Physical Review D* 82 (12 Dez. 2010), S. 127101.
- [53] M. M. Fejer et al. „Thermoelastic dissipation in inhomogeneous media: loss measurements and displacement noise in coated test masses for interferometric gravitational wave detectors“. In: *Phys. Rev. D* 70 (8 Okt. 2004), S. 082003.
- [54] G. Cagnoli und P. A. Willems. „Effects of nonlinear thermoelastic damping in highly stressed fibers“. In: *Phys. Rev. B* 65 (17 Apr. 2002), S. 174111.
- [55] C. J. Bell et al. „Experimental results for nulling the effective thermal expansion coefficient of fused silica fibres under a static stress“. In: *Classical and Quantum Gravity* 31.6 (2014), S. 065010.
- [56] A. Cumming et al. „Finite element modelling of the mechanical loss of silica suspension fibres for advanced gravitational wave detectors“. In: *Classical and Quantum Gravity* 26.21 (2009), S. 215012.
- [57] V. Braginsky und S. Vyatchanin. „Corner reflectors and quantum-non-demolition measurements in gravitational wave antennae“. In: *Physics Letters A* 324.5–6 (2004), S. 345–360.
- [58] B. Benthem und Y. Levin. „Thermorefractive and thermochemical noise in the beamsplitter of the GEO600 gravitational-wave interferometer“. In: *Phys. Rev. D* 80 (6 Sep. 2009), S. 062004.
- [59] D. Heinert et al. „Thermorefractive noise of finite-sized cylindrical test masses“. In: *Phys. Rev. D* 84 (6 Sep. 2011), S. 062001.
- [60] V. Braginsky, M. Gorodetsky und S. Vyatchanin. „Thermo-refractive noise in gravitational wave antennae“. In: *Physics Letters A* 271.5–6 (2000), S. 303–307.
- [61] M. L. Gorodetsky. „Thermal noises and noise compensation in high-reflection multilayer coating“. In: *Physics Letters A* 372.46 (2008), S. 6813–6822.
- [62] M. Evans et al. „Thermo-optic noise in coated mirrors for high-precision optical measurements“. In: *Phys. Rev. D* 78 (10 Nov. 2008), S. 102003.

- [63] S. Hild et al. „Measurement of a low-absorption sample of OH-reduced fused silica“. In: *Applied Optics* 45.28 (Okt. 2006), S. 7269–7272.
- [64] S. D. Penn et al. „Frequency and surface dependence of the mechanical loss in fused silica“. In: *Physics Letters A* 352.1–2 (2006), S. 3–6.
- [65] G. M. Harry et al. „Titania-doped tantala/silica coatings for gravitational-wave detection“. In: *Classical and Quantum Gravity* 24.2 (2007), S. 405.
- [66] R. Flaminio et al. „A study of coating mechanical and optical losses in view of reducing mirror thermal noise in gravitational wave detectors“. In: *Classical and Quantum Gravity* 27.8 (2010), S. 084030.
- [67] C. Michel et al. „Realization of low-loss mirrors with sub-nanometer flatness for future gravitational wave detectors“. In: *Proceedings of SPIE* 8550 (2012), 85501P–7.
- [68] The LIGO Scientific Collaboration. „Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light“. In: *Nat Photon* 7.8 (2013), S. 613–619.
- [69] C. Schwarz. „Cryogenic Setup for Q-factor measurements on bulk materials for future gravitational wave detectors“. In: *Proceedings of ICEC22-ICMC 2008* (2009).
- [70] T. Uchiyama et al. „Mechanical quality factor of a cryogenic sapphire test mass for gravitational wave detectors“. In: *Physics Letters A* 261.1–2 (1999), S. 5–11.
- [71] D. McGuigan et al. „Measurements of the mechanical Q of single-crystal silicon at low temperatures“. English. In: *Journal of Low Temperature Physics* 30.5-6 (1978), S. 621–629.
- [72] T. Tomaru et al. „Cryogenic measurement of the optical absorption coefficient in sapphire crystals at 1,064 μm for the large-scale cryogenic gravitational wave telescope“. In: *Physics Letters A* 283.1–2 (2001), S. 80–84.
- [73] J. Degallaix et al. „Bulk optical absorption of high resistivity silicon at 1550 nm“. In: *Opt. Lett.* 38.12 (Juni 2013), S. 2047–2049.
- [74] J. Degallaix et al. „Measurement of the optical absorption of bulk silicon at cryogenic temperature and the implication for the Einstein Telescope“. In: *Classical and Quantum Gravity* 31.18 (2014), S. 185010.

-
- [75] F. Shimura et al. *Oxygen in Silicon*. Semiconductors and semimetals. Elsevier Science, 1994.
- [76] L. Válek und J. Šik. „Modern Aspects of Bulk Crystal and Thin Film Preparation“. In: Hrsg. von N. Kolesnikov und E. Borisenko. InTech, 2012. Kap. Defect Engineering During Czochralski Crystal Growth and Silicon Wafer Manufacturing, S. 43–70.
- [77] H. Tang, H. Li und J. Xu. „Growth and Development of Sapphire Crystal for LED Applications“. In: *Advanced Topics on Crystal Growth*. Hrsg. von S. Ferreira. InTech, 2013. Kap. 10.
- [78] M. S. Akselrod und F. J. Bruni. „Modern trends in crystal growth and new applications of sapphire“. In: *Journal of Crystal Growth* 360 (2012). 5th International Workshop on Crystal Growth Technology, S. 134–145.
- [79] E. V. Zharikov. „Problems and recent advances in melt crystal growth technology“. In: *Journal of Crystal Growth* 360 (2012). 5th International Workshop on Crystal Growth Technology, S. 146–154.
- [80] R. Schaller, G. Fantozzi und G. Gremaud. „Mechanical spectroscopy 2001 with applications to materials science“. In: *Materials science forum*. Trans Tech Publications. 2001.
- [81] M. Blanter et al. *Internal Friction in Metallic Materials*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [82] C. Zener. „Internal Friction in Solids. I. Theory of Internal Friction in Reeds“. In: *Phys. Rev.* 52 (3 Aug. 1937), S. 230–235.
- [83] C. Zener. „Internal Friction in Solids II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction“. In: *Phys. Rev.* 53 (1 Jan. 1938), S. 90–99.
- [84] V. B. Braginsky. *Systems with small dissipation*. University of Chicago Press, 1985.
- [85] D. Heinert et al. „Potential mechanical loss mechanisms in bulk materials for future gravitational wave detectors“. In: *Journal of Physics: Conference Series* 228.1 (2010), S. 012032.
- [86] A. Akhiezer. „On the absorption of sound in solids“. In: *Journal of Physics (USSR)* 1.4 (1939), S. 277–287.

- [87] H. E. Bömmel und K. Dransfeld. „Excitation and Attenuation of Hypersonic Waves in Quartz“. In: *Phys. Rev.* 117 (5 März 1960), S. 1245–1252.
- [88] E. S. Bliss und J. A. Rayne. „Ultrasonic Attenuation in Normal and Superconducting Indium“. In: *Phys. Rev.* 177 (2 Jan. 1969), S. 673–687.
- [89] C. C. Lam. „Study of internal friction in single crystal silicon“. Diss. Rochester, New York: University of Rochester, 1979.
- [90] P. Yu und M. Cardona. *Fundamentals of Semiconductors: Physics and Materials Properties*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [91] S. M. Sze und K. K. Ng. *Physics of semiconductor devices*. John Wiley & sons, 2006.
- [92] S. S. Li und W. R. Thurber. „The dopant density and temperature dependence of electron mobility and resistivity in n-type silicon“. In: *Solid-State Electronics* 20.7 (1977), S. 609–616.
- [93] G. Hofmann. „Charakterisierung von Bulk-Materialien bei tiefen Temperaturen“. Magisterarb. Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2011.
- [94] C. Schwarz et al. „Mechanical spectroscopy of silicon as a low loss material for high precision mechanical and optical experiments“. In: *Solid State Phenomena* 184 (2012), S. 443–448.
- [95] R. Nawrodt. „Kryogene Gütemessung an optischen Substratmaterialien für zukünftige Gravitationswellendetektoren“. Diss. Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2008.
- [96] D. Heinert. „Thermisches Rauschen in interferometrischen Gravitationswellendetektoren“. Diss. Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2012.
- [97] C. Schwarz. „Mechanische Verlustmessungen an Materialien für die Präzisionsmesstechnik“. Diss. Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2012.
- [98] P. Mohanty et al. „Intrinsic dissipation in high-frequency micromechanical resonators“. In: *Phys. Rev. B* 66 (8 Aug. 2002), S. 085416.
- [99] R. Nawrodt et al. „Investigation of mechanical losses of thin silicon flexures at low temperatures“. In: *Classical and Quantum Gravity* 30.11 (2013), S. 115008.
- [100] T. G. Castner. „Direct Measurement of the Valley-Orbit Splitting of Shallow Donors in Silicon“. In: *Phys. Rev. Lett.* 8 (1 Jan. 1962), S. 13–15.

-
- [101] W. P. Mason und T. B. Bateman. „Relation between Third-Order Elastic Moduli and the Thermal Attenuation of Ultrasonic Waves in Nonconducting and Metallic Crystals“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 40.4 (1966), S. 852–862.
- [102] C. Lam und D. Douglass. „Observation of oxygen impurities in single-crystal silicon by means of internal friction“. English. In: *Journal of Low Temperature Physics* 44.3-4 (1981), S. 259–264.
- [103] P. D. Southgate. „Internal Friction of Single Crystal Silicon from 25 °C to 1100 °C“. In: *Proceedings of the Physical Society. Section B* 70.8 (1957), S. 804.
- [104] P. D. Southgate. „Internal Friction in Germanium and Silicon I: Electron and Impurity Relaxation“. In: *Proceedings of the Physical Society* 76.3 (1960), S. 385.
- [105] C. Haas. „The diffusion of oxygen in silicon and germanium“. In: *Journal of Physics and Chemistry of Solids* 15.1 (1960), S. 108–111.
- [106] D. R. Bosomworth et al. „Absorption of Oxygen in Silicon in the Near and the Far Infrared“. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 317.1528 (1970), S. 133–152.
- [107] H. Yamada-Kaneta, C. Kaneta und T. Ogawa. „Theory of local-phonon-coupled low-energy anharmonic excitation of the interstitial oxygen in silicon“. In: *Phys. Rev. B* 42 (15 Nov. 1990), S. 9650–9656.
- [108] E. Artacho et al. „Interstitial oxygen in germanium and silicon“. In: *Phys. Rev. B* 56 (7 Aug. 1997), S. 3820–3833.
- [109] H. Yamada-Kaneta. „Expanded model for anharmonic vibrational excitation of oxygen in silicon“. In: *Physica B: Condensed Matter* 308–310 (2001). International Conference on Defects in Semiconductors, S. 309–312.
- [110] H. Yamada-Kaneta. „Vibrational energy levels of oxygen in silicon up to one-A_{2u}-phonon plus one-A_{1g}-phonon states“. In: *Physica B: Condensed Matter* 302–303 (2001). Proceedings of Yanada Conference LIV. The 9th International Conference on Shallow-Level Centers in Semiconductors, S. 172–179.
- [111] A. Borghesi et al. „Oxygen precipitation in silicon“. In: *Journal of Applied Physics* 77.9 (1995), S. 4169–4244.
- [112] A. Borghesi et al. „Infrared study of oxygen precipitate composition in silicon“. In: *Phys. Rev. B* 46 (7 Aug. 1992), S. 4123–4127.

- [113] E. R. Dobrovinskaya, L. A. Lytvynov und V. Pishchik. *Sapphire: material, manufacturing, applications*. Springer, 2009.
- [114] B. Müller, P. Gratj und G. Kluge. „The hardness of chromium-and titanium-doped sapphire crystals“. In: *physica status solidi (a)* 83.2 (1984), S. 499–506.
- [115] K. Somiya. „Detector configuration of KAGRA – the Japanese cryogenic gravitational-wave detector“. In: *Classical and Quantum Gravity* 29.12 (2012), S. 124007.
- [116] A. Khalaidovski et al. „Evaluation of heat extraction through sapphire fibers for the GW observatory KAGRA“. In: *Classical and Quantum Gravity* 31.10 (2014), S. 105004.
- [117] J. B. Wachtman et al. „Exponential Temperature Dependence of Young’s Modulus for Several Oxides“. In: *Physical Review* 122 (6 Juni 1961), S. 1754–1759.
- [118] D. H. Niblett und J. Wilks. „The internal friction of cold-worked copper at low temperatures“. In: *Philosophical Magazine* 2.24 (1957), S. 1427–1444.
- [119] G. Cagnoli et al. „Low-frequency internal friction in clamped-free thin wires“. In: *Physics Letters A* 255.4–6 (1999), S. 230–235.
- [120] *Ultra-precision bonding for cryogenic fused-silica optics*. Bd. 3435. 1998, S. 136–142.
- [121] D. Gwo. „Ultra precision and reliable bonding method“. US 6,284,085 B1. US Patent 6,284,085. Sep. 2001.
- [122] D. Gwo. „Hydroxide-catalyzed bonding“. US 6,548,176 B1. US Patent 6,548,176. Apr. 2003.
- [123] K. A. Haughian. „Aspects of materials research for advanced and future generations of gravitational wave detectors“. Diss. School of Physics und Astronomy, University of Glasgow, 2012.
- [124] R. Douglas et al. „Cryogenic and room temperature strength of sapphire jointed by hydroxide-catalysis bonding“. In: *Classical and Quantum Gravity* 31.4 (2014), S. 045001.

-
- [125] K. Haughian et al. „The effect of crystal orientation on the cryogenic strength of hydroxide catalysis bonded sapphire“. In: *Classical and Quantum Gravity* 32.7 (2015), S. 075013.
- [126] G. Hofmann et al. „Indium joints for cryogenic gravitational wave detectors“. In: *Classical and Quantum Gravity* 32.24 (2015), S. 245013.
- [127] E. Hirose et al. „Sapphire screws and strength test on them at liquid nitrogen temperature“. In: *Review of Scientific Instruments* 85.10, 104503 (2014).
- [128] S. Kim und H. Ledbetter. „Low-temperature elastic coefficients of polycrystalline indium“. In: *Materials Science and Engineering: A* 252.1 (1998), S. 139–143.
- [129] P. G. Murray et al. „Low-temperature mechanical dissipation of thermally evaporated indium film for use in interferometric gravitational wave detectors“. In: *Classical and Quantum Gravity* 32.11 (2015), S. 115014.
- [130] P. H. Sneddon et al. „The intrinsic mechanical loss factor of hydroxy-catalysis bonds for use in the mirror suspensions of gravitational wave detectors“. In: *Classical and Quantum Gravity* 20.23 (2003), S. 5025.
- [131] Y. Sakakibara et al. „Progress on the cryogenic system for the KAGRA cryogenic interferometric gravitational wave telescope“. In: *Classical and Quantum Gravity* 31.22 (2014), S. 224003.
- [132] H. Frey und R. A. Haefer. „Tieftemperaturtechnologie“. In: *Duesseldorf: VDI Verlag, 1981, edited by Eder, Franz Xaver (Hrsg.)* 1 (1981).
- [133] T. M. Tritt. *Thermal conductivity: theory, properties, and applications*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [134] R. Gross und A. Marx. *Festkörperphysik*. Oldenbourg Verlag, 2012.
- [135] P. D. Thacher. „Effect of Boundaries and Isotopes on the Thermal Conductivity of LiF“. In: *Phys. Rev.* 156 (3 Apr. 1967), S. 975–988.
- [136] R. Berman, E. L. Foster und J. M. Ziman. „Thermal Conduction in Artificial Sapphire Crystals at Low Temperatures. I. Nearly Perfect Crystals“. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 231.1184 (1955), S. 130–144.
- [137] K. Yamamoto. „Cryogenic payload for KAGRA“. In: 2013.
- [138] J. Komma et al. „Thermo-optic coefficient of silicon at 1550 nm and cryogenic temperatures“. In: *Applied Physics Letters* 101.4 (2012), S. 041905.

- [139] The LIGO Scientific Collaboration. „Instrument Science White Paper 2013-2014“. In: *LIGO Technical Document LIGO-T1300433-v3* (2013).
- [140] The LIGO Scientific Collaboration. „Instrument Science White Paper 2014-2015“. In: *LIGO Technical Document LIGO-T1400316-v4* (2015).
- [141] R. Adhikari. „LIGO III: Blue Concept“. In: *LIGO Technical Document LIGO-G1200573* (2012).
- [142] R. X. Adhikari. „Gravitational radiation detection with laser interferometry“. In: *arXiv preprint arXiv:1305.5188* (2013).
- [143] J. Degallaix. „Silicon, the test mass substrate of tomorrow?“ In: *The Next Detectors for Gravitational Wave Astronomy – Beijing* (2015).

Anhang

A. Materialparameter

A.1. Silizium

Die elastischen Konstanten C_{ij} für reines Silizium gibt Hall für eine Temperatur von (25 °C) an mit [144]:

$$C_{11} = 165,64 \text{ GPa} \quad (\text{A.1})$$

$$C_{12} = 63,94 \text{ GPa} \quad (\text{A.2})$$

$$C_{44} = 79,51 \text{ GPa} \quad (\text{A.3})$$

Die Änderung der elastischen Konstanten von Silizium im für diese Arbeit relevanten Temperaturbereich beläuft sich auf maximal 3 % und wurde daher vernachlässigt. Ein deutlicher Unterschied ist allerdings bei extrem stark dotiertem Material (Phosphor-Dotierung mit ca. $2 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$) auszumachen [144]. Für die unterschiedlichen Kristallorientierungen ergibt sich aus den gegebenen Werten das jeweilige E-Modul Y zu 130 GPa in $\langle 100 \rangle$ -, 169 GPa in $\langle 110 \rangle$ - und 188 GPa in $\langle 111 \rangle$ -Richtung. Die Poissonzahl ν beträgt 0,22, die Dichte ρ liegt bei 2331 kg/m^3 .

Die Werte des thermischen Ausdehnungskoeffizienten α , der Wärmeleitfähigkeit κ und der spezifischen Wärmekapazität C pro Volumen sind in Abbildung A.1, A.2 und A.3 mit den zugehörigen Quellen gezeigt. Auf Grund des Sauerstoffgehalts von weniger als 10^{15} cm^{-3} bei Float-Zone-Silizium gegenüber etwa 10^{18} cm^{-3} in Czochralski-Silizium unterscheiden sich beide bei tiefen Temperaturen deutlich in der Wärmeleitfähigkeit. Der thermooptische Koeffizient von Silizium bei 1550 nm wurde von Frey et al. im Temperaturbereich 30...295 K gemessen [145] und ist in Abbildung A.4 zu finden. Die ebenfalls gezeigte Erweiterung bis hinab zu 5 K konnte durch eigene Arbeiten realisiert werden [138] und wurde insbesondere zur Berechnung des thermorefraktiven Rauschens verwendet. Der Brechungsindex bei 1550 nm wurde ebenfalls von Frey et al. übernommen und beträgt bei kryogenen Temperaturen demnach $n = 3,45$, bei Raumtemperatur 3,48 [145].

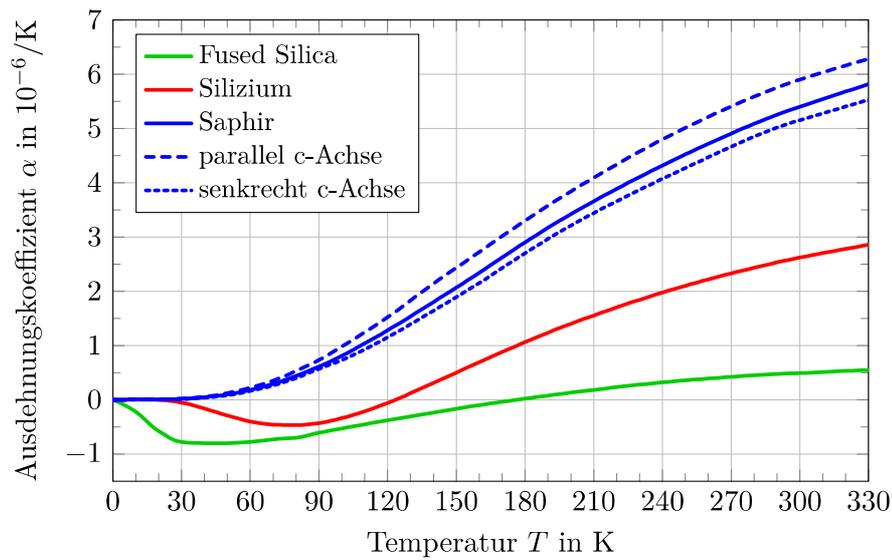


Abbildung A.1.: Der thermische Ausdehnungskoeffizient α von Silizium zeigt bei 123 K und 18 K einen Nulldurchgang. Für Saphir zeigt sich ein anisotropes Verhalten bezüglich der c-Achse des Kristallsystems. Alle Werte aus [146].

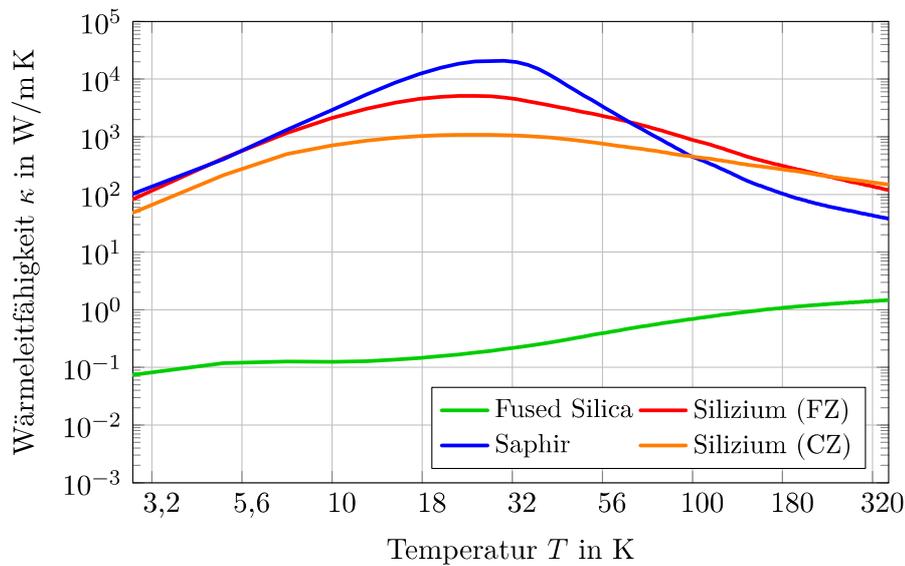


Abbildung A.2.: Im Gegensatz zu kristallinem Saphir und Silizium weist Fused Silica, typisch für amorphe Gläser, nur eine geringe Wärmeleitfähigkeit κ auf. Float-Zone- und Czochralski-Silizium unterscheiden sich bei tiefen Temperaturen wegen ihres Sauerstoffgehalts deutlich. Werte für Fused Silica, Silizium (FZ) und Saphir stammen aus [147], für Silizium (CZ) aus [101].

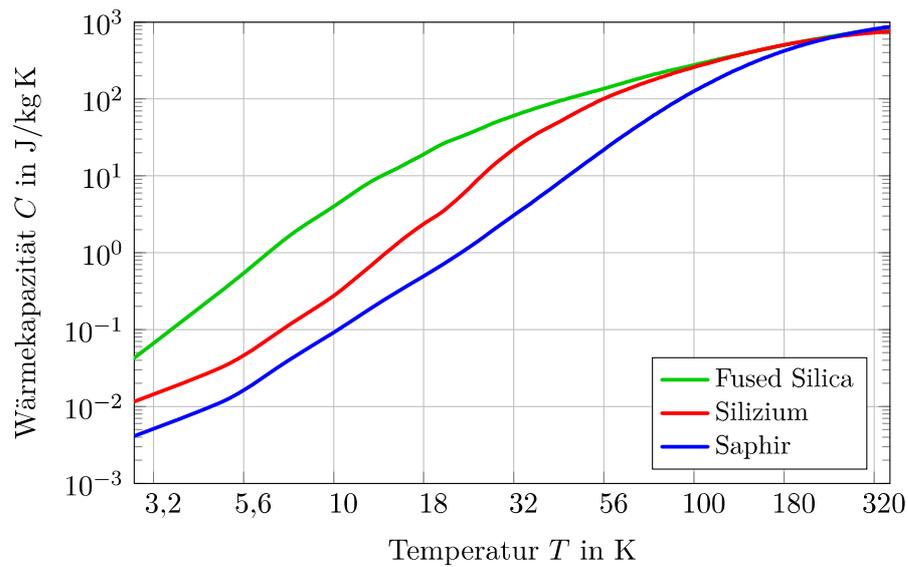


Abbildung A.3.: Die Spezifische Wärmekapazität C von Fused Silica, Silizium und Saphir nimmt bei tiefen Temperaturen um mehrere Größenordnungen ab. Werte für Fused Silica, und Saphir stammen aus [147], für Silizium aus [148].

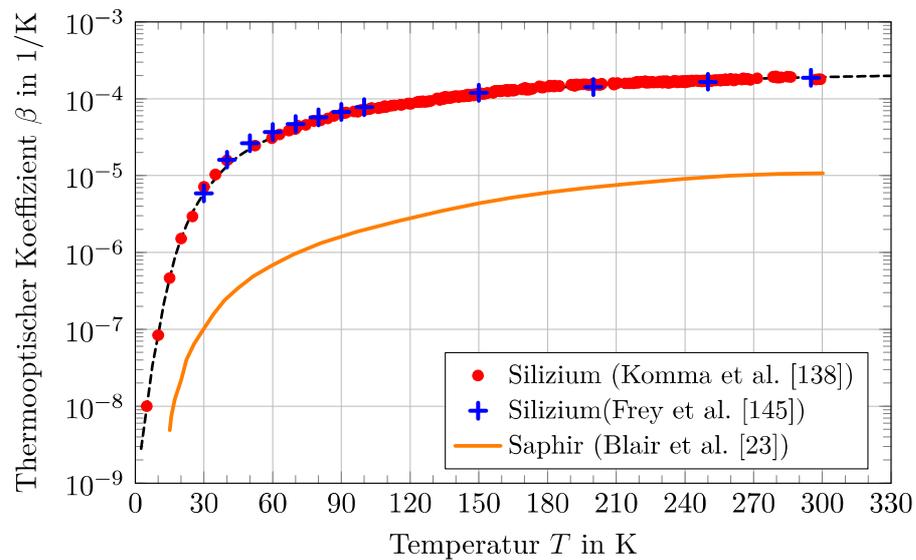


Abbildung A.4.: Der Thermooptische Koeffizient β von Silizium [138]. Der Messung zugrunde liegt ein von Cocorullo et al. [149] vorgeschlagenes interferometrisches Verfahren. Zum Vergleich sind die Werte einer Messung von Frey et al. [145] gegeben. Ebenfalls gezeigt ist der Verlauf des thermooptischen Koeffizienten β für Saphir aus [23].

A.2. Saphir

Die elastischen Konstanten C_{ij} von Saphir ändern sich unterhalb von 300 K ebenfalls kaum (vgl. Abbildung A.5) und wurden daher als konstant angenommen. Dabei wurden die folgenden Werte von Goto et al. [150] bei 296 K verwendet:

$$C_{11} = 497,3 \text{ GPa} \qquad C_{12} = 162,8 \text{ GPa} \qquad (\text{A.4})$$

$$C_{33} = 500,9 \text{ GPa} \qquad C_{13} = 116,0 \text{ GPa} \qquad (\text{A.5})$$

$$C_{44} = 146,8 \text{ GPa} \qquad C_{14} = 21,9 \text{ GPa} \qquad (\text{A.6})$$

Weitere Quellen finden sich unter anderem bei [113, 151, 152, 153, 154]. Wachtman et al. geben für das E-Modul in Richtung der c -Achse des Kristalls einen Wert von 463 GPa bei tiefen Temperaturen an. Die Poissonzahl ν beträgt 0,27...0,30 [113], die Dichte ρ liegt bei 25 °C bei 3986 kg/m³ [117].

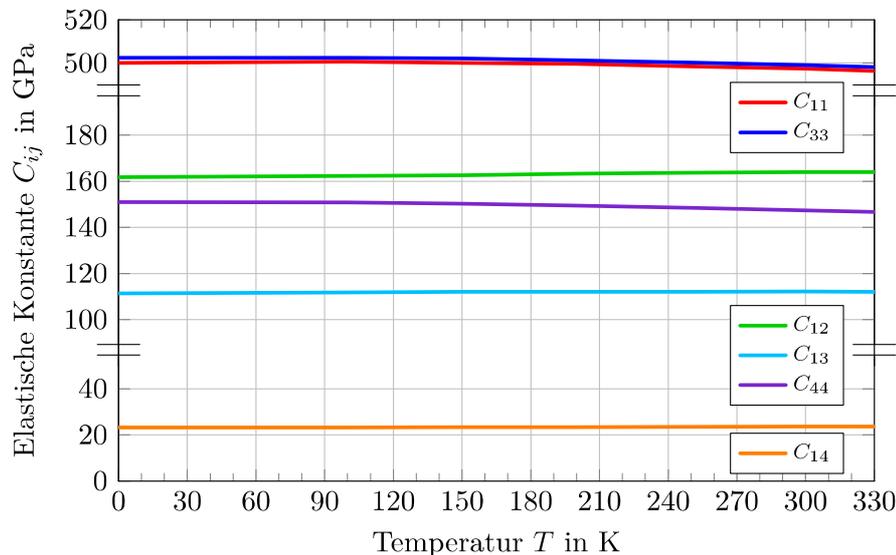


Abbildung A.5.: Abhängigkeit der elastischen Konstanten C_{ij} von Saphir von der Temperatur nach Tefft [154]. Die Änderung beträgt maximal 2% und kann daher vernachlässigt werden.

Der Verlauf des thermischen Ausdehnungskoeffizienten α , der Wärmeleitfähigkeit κ sowie der spezifischen Wärmekapazität C sind ebenfalls in Abbildung A.1, A.2 und A.3 zu finden. Der thermooptische Koeffizient β wurde von Tomaru et al. [155] für 1064 nm im Temperaturbereich 5...40 K mit kleiner als $9,0 \cdot 10^{-8} \text{ 1/K}$ angegeben. Bei Raumtemperatur liegt der Wert ca. zwei Größenordnungen darüber bei etwa $10^{-5} \dots 2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$ [156]. In Blair et al. [23] findet sich für Saphir der Verlauf des

thermooptischen Koeffizienten β über der Temperatur und ist in Abbildung A.4 ebenfalls mit angegeben. Die Brechzahl beträgt für 1064 nm $n = 1,75$ [113].

A.3. Indium

Das

finden sich bei Kim et al. [128] zu $Y = 12,74$ GPa und $\nu = 0,4498$. Die Änderung beider Größen mit der Temperatur kann im Gegensatz zu Silizium und Saphir nicht vernachlässigt werden und wird in gleicher Quelle ebenfalls angegeben mit:

$$Y(T) = 12,74 \text{ GPa} \times \left(1,536 - \frac{0,1814}{\exp(86,02 \text{ K}/T) - 1} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\nu(T) = 0,4498 \times \left(0,9574 - \frac{-0,01518}{\exp(90,83 \text{ K}/T) - 1} \right) \quad (\text{A.8})$$

Diese Werte fanden Eingang in die durchgeführten Berechnungen. Zudem ist es möglich E-Modul und Poissonzahl im polykristallinen Zustand aus den elastischen Konstanten für kristallines Indium nach dem sogenannten Voigt-Reuss-Hill (VRH) Verfahren zu berechnen [157]. Mit entsprechenden Werten von Chandrasekhar et al. [158] erhält man ein etwas höheres E-Modul (siehe Abbildung A.6) bzw. eine leicht geringere Poissonzahl (siehe Abbildung A.7).

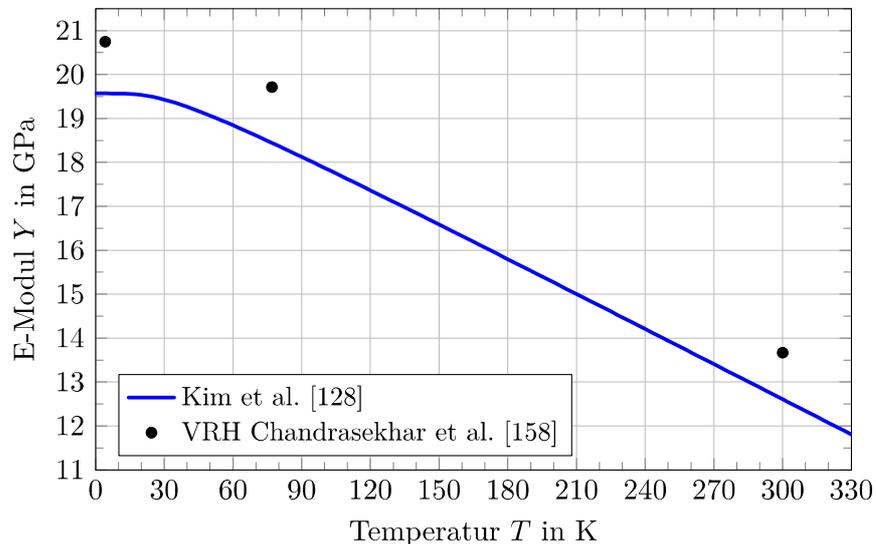


Abbildung A.6.: E-Modul von polykristallinem Indium nach Kim et al. [128] (blaue durchgezogene Linie) und berechnet aus den elastischen Konstanten für kristallines Indium nach dem Voigt-Reuss-Hill (VRH) Verfahren [157] (schwarze Punkte).

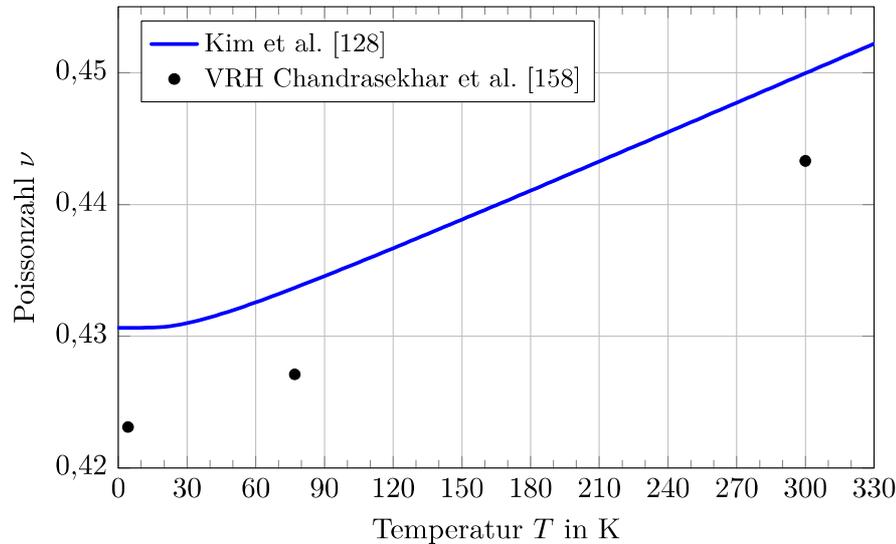


Abbildung A.7.: Poissonzahl von polykristallinem Indium nach Kim et al. [128] (blaue durchgezogene Linie) und berechnet aus den elastischen Konstanten für kristallines Indium nach dem Voigt-Reuss-Hill (VRH) Verfahren [157] (schwarze Punkte).

A.4. Kupfer

Kupfer eignet sich wegen seiner hohen Wärmeleitfähigkeit bei tiefen Temperaturen optimal für thermische Verbindungen. Abbildung A.8 zeigt die Wärmeleitfähigkeit für zwei unterschiedlich reine Materialien. Das Restwiderstandsverhältnis (Residual Resistance Ratio – RRR) gibt dabei das Verhältnis des elektrischen Widerstands bei 293 K zum verbleibenden Restwiderstand bei tiefen Temperaturen an. Wegen dem Ausfrieren der Phononen führen dann nur noch Störstellen zu einer Streuung der Elektronen. Ein großes Restwiderstandsverhältnis repräsentiert folglich ein Material mit wenigen Störstellen.

Der mechanische Verlust von Kupfer wurde von Niblett et al. [118] und Niblett [160] untersucht. Dabei konnte bei rund 60 K der für Kupfer typische Bordoni-Peak gezeigt werden. In bearbeitetem polykristallinem Kupfer ist dieser Peak von einem Verlustmaximum bei etwa 90 K überdeckt. Die in [118, 160] veröffentlichten Werte sind in Abbildung A.9 zu finden und wurden in dieser Arbeit für Abschätzungen möglicher externer Verluste verwendet.

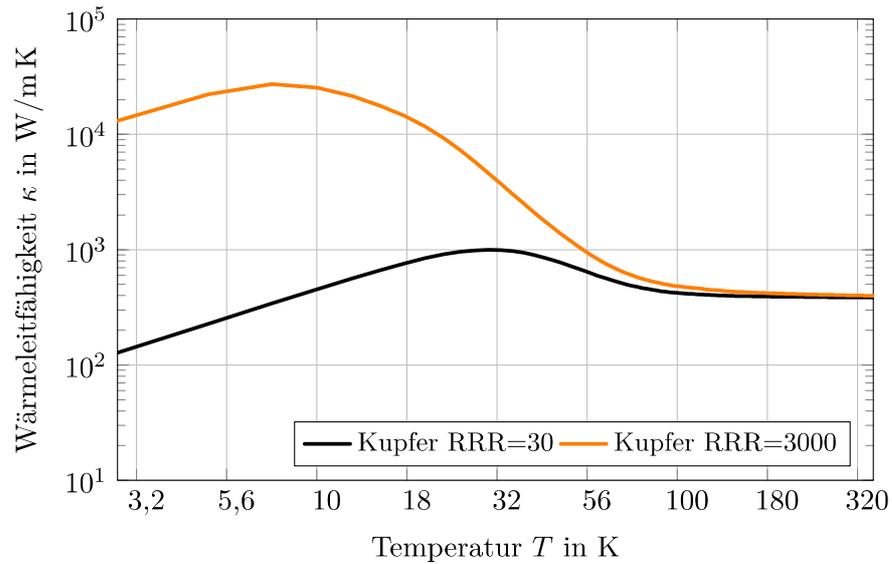


Abbildung A.8.: Kupfer ist sowohl ein guter elektrischer wie auch thermischer Leiter. Material mit einem hohen Restwiderstandsverhältnis (RRR) deutet auf geringe Verunreinigungen hin und zeigt eine erhöhte Wärmeleitfähigkeit bei tiefen Temperaturen. Werte aus [159].

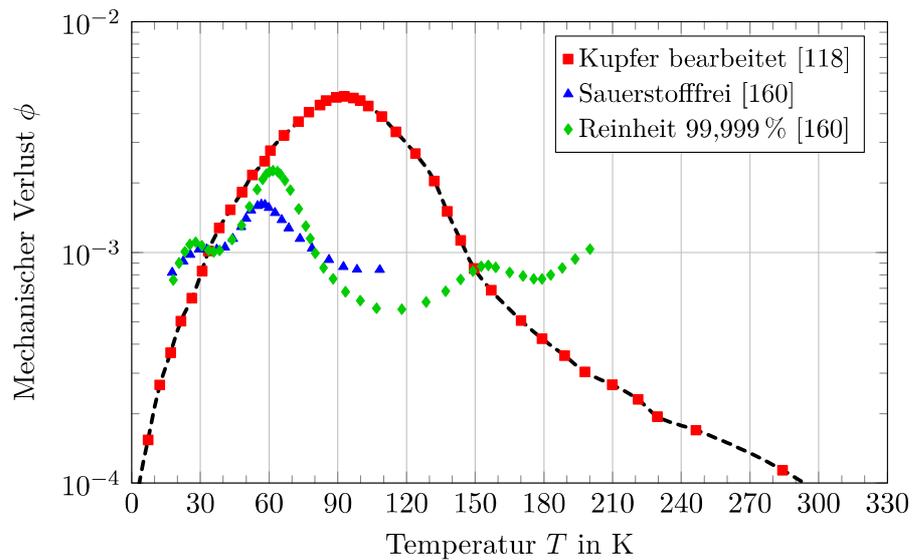


Abbildung A.9.: Der Temperaturverlauf des mechanischen Verlustes von bearbeitetem polykristallinem Kupfer zeigt ein Maximum bei etwa 90 K. Der Verlust von sauerstofffreiem (sog. OFHC-Kupfer – oxygen free, high conductivity) oder hoch reinem Material zeigt insbesondere bei tiefen Temperaturen keine wesentliche Verbesserung. Für Abschätzungen in dieser Arbeit wurde die gestrichelte Kurve verwendet. Alle Daten stammen von Niblett et al. [118, 160].

B. Zusammengesetzte Systeme

Die Verteilung der elastischen Energie $E_{\text{tot}} = \sum_i E_i$ innerhalb eines zusammen gesetzten Systems mit unterschiedlichen mechanischen Verlusten ϕ_i bestimmt den zu erwartenden Gesamtverlust ϕ_{tot} gemäß:

$$\phi_{\text{tot}} = \frac{\sum_i \Delta E_i}{2\pi E_{\text{tot}}} = \sum_i \frac{\Delta E_i}{2\pi E_i} \frac{E_i}{E_{\text{tot}}} = \sum_i \phi_i \frac{E_i}{E_{\text{tot}}} \quad (\text{B.1})$$

Ist der Verlust ϕ_i jeder Komponente bekannt, kann mit Hilfe der Energieverhältnisse E_i/E_{tot} der Gesamtverlust ermittelt werden.

Im hier relevanten Fall hingegen sollte der unbekannt mechanische Verlust einer dünnen Schicht zwischen zwei 50 mm und 70 mm hohem Zylindern mit 30 mm Durchmesser bestimmt werden (vgl. Abschnitt 4.5). Für die Ermittlung der elastischen Energie der dünnen Schicht wurden in dieser Arbeit zwei verschiedene Ansätze verwendet, die nachfolgend aufgezeigt werden.

B.1. Extrapolations-Methode

Bei der Analyse eines Systems mit Hilfe von Finite Elemente Software wie beispielsweise Comsol oder Ansys ist ein möglichst zweckmäßiges Gitter als Grundgerüst (Mesh) für das Modell erforderlich. Wird das Gitter unnötigerweise zu fein gewählt, erhöht sich die Rechenzeit drastisch während eine zu grobe Auflösung die Resultate verfälschen kann. Im vorliegenden Fall verbindet eine nur wenige μm dünne Schicht zwei mehrere cm große Saphirzylinder miteinander (vgl. Unterabschnitt 4.5.1). Für eine möglichst effektive Berechnung wurde statt einer exakten Nachbildung ein Modell mit einer wesentlich dickeren Verbindungsschicht von bis zu 1 mm genutzt und darauf basierend anschließend das Energieverhältnis der Schicht zum Gesamtsystem bestimmt. Die in der Schicht gespeicherte Energie nimmt bei einer schrittweisen Reduzierung der Dicke immer mehr ab und es ist außerdem klar, dass die Energie für eine verschwindende Schichtdicke ebenfalls verschwinden muss. Daher gilt insbesondere für sehr dünne

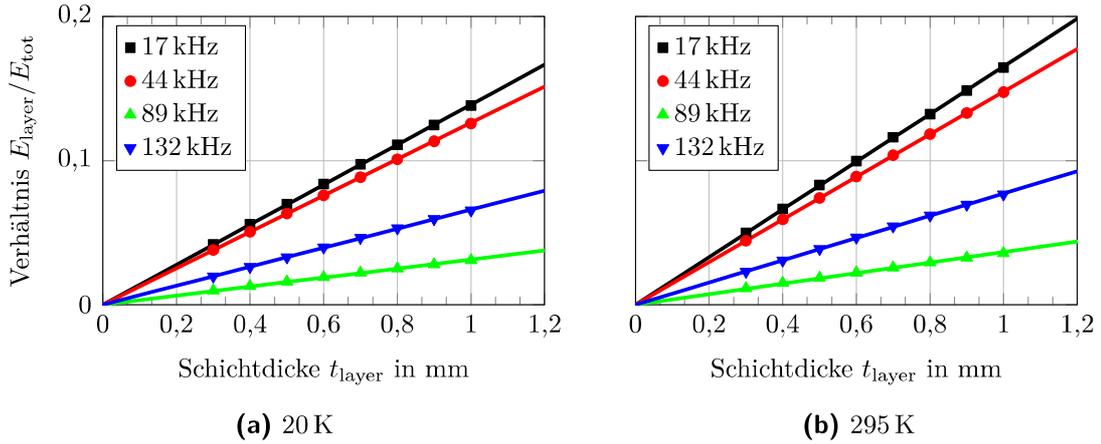


Abbildung B.1.: Der lineare Zusammenhang von Schichtdicke und darin elastisch gespeicherter Energie $E_{\text{layer}} = \lambda_{\text{layer}} t_{\text{layer}}$ erlaubt eine Extrapolation auf kleine, nicht direkt zugängliche Werte t_{layer} . Dies wurde sowohl bei 20 K (a) als auch 295 K (b) durchgeführt und anschließend mit der direkten Berechnung unter Verwendung von Übergangsbedingungen zwischen den Saphirproben und der Indiumschicht verglichen (vgl. Abbildung 4.23b).

Schichten eine lineare Abhängigkeit von der Dicke gemäß $E_{\text{layer}} = \lambda_{\text{layer}} \times t_{\text{layer}}$ und man erhält:

$$\frac{E_{\text{tot}}}{E_{\text{layer}}} = \frac{E_{\text{tot}}}{\lambda_{\text{layer}}} \times \frac{1}{t_{\text{layer}}}. \quad (\text{B.2})$$

Das Verhältnis von Gesamtenergie zur Energiedichte je Schichtdicke $E_{\text{tot}}/\lambda_{\text{layer}}$ wurde bei Temperaturen von 20 K und 295 K jeweils aus dem Anstieg von E_{layer} über t_{layer} bestimmt (vgl. Abbildung B.1a und B.1b).

B.2. Grenzflächen-Methode

Dem Ansatz von Harry et al. [42] folgend lassen sich Annahmen über das elastische Verhalten einer dünnen Schicht während der Deformation bei resonanten Eigenschwingungen treffen. Verformungen u und v der Saphirflächen parallel zu der Fügenschicht (also der beiden einander zu gewandten Endflächen der Zylinder) werden unmittelbar in die Indiumschicht übertragen. Ebenso gehen Kräfte F_z senkrecht zu diesen Flächen direkt und unverändert über. Die Übergangsbedingungen bezüglich mechanischer

Spannung σ_{ij} und Verzerrung ε_{ij} lauten daher folgendermaßen:

$$\sigma'_{xz} = \sigma_{xz} \qquad \varepsilon'_{xx} = \varepsilon_{xx} \qquad (\text{B.3})$$

$$\sigma'_{yz} = \sigma_{yz} \qquad \varepsilon'_{yy} = \varepsilon_{yy} \qquad (\text{B.4})$$

$$\sigma'_{zz} = \sigma_{zz} \qquad \varepsilon'_{xy} = \varepsilon_{xy}, \qquad (\text{B.5})$$

wobei gestrichene Größen für Eigenschaften der Indiumschicht und ungestrichene für Saphir stehen. Nach Landau et al. [161, p. 13] ergeben sich die fehlenden Verknüpfungen durch:

$$\sigma'_{xx} = \frac{Y'}{(1 + \nu')(1 - 2\nu')} \left[(1 - \nu') \varepsilon'_{xx} + \nu' (\varepsilon'_{yy} + \varepsilon'_{zz}) \right] \qquad (\text{B.6})$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{Y'}{(1 + \nu')(1 - 2\nu')} \left[(1 - \nu') \varepsilon'_{yy} + \nu' (\varepsilon'_{xx} + \varepsilon'_{zz}) \right] \qquad (\text{B.7})$$

$$\sigma'_{xy} = \frac{Y'}{1 + \nu'} \varepsilon'_{xy} \qquad (\text{B.8})$$

$$\varepsilon'_{zz} = \frac{1}{Y'} [\sigma'_{zz} - \nu' (\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy})] \qquad (\text{B.9})$$

$$\varepsilon'_{xz} = \frac{1 + \nu'}{Y'} \sigma'_{xz} \qquad (\text{B.10})$$

$$\varepsilon'_{yz} = \frac{1 + \nu'}{Y'} \sigma'_{yz}, \qquad (\text{B.11})$$

und schlussendlich nach Umstellen:

$$\sigma'_{xx} = \frac{\sigma'_{zz} \nu' (1 + \nu') + (\varepsilon'_{xx} + \varepsilon'_{yy} \nu') Y'}{1 - \nu'^2} \qquad (\text{B.12})$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{\sigma'_{zz} \nu' (1 + \nu') + (\varepsilon'_{yy} + \varepsilon'_{xx} \nu') Y'}{1 - \nu'^2} \qquad (\text{B.13})$$

$$\varepsilon'_{zz} = \frac{\sigma'_{zz} (1 - \nu' - 2\nu'^2) - (\varepsilon'_{xx} + \varepsilon'_{yy}) \nu' Y'}{(1 - \nu') Y'}. \qquad (\text{B.14})$$

Da die Schicht nur äußerst dünn ist, können diese Werte über den gesamten Verlauf der Dicke als konstant betrachtet werden. Aus diesem Grund ergibt sich die gesamte elastische Energie in der Schicht mit Hilfe des Integrals über die vollständige Fügefläche A zu:

$$\lambda_{\text{layer}} = \frac{E_{\text{layer}}}{t_{\text{layer}}} = \int_A \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} d^2r. \qquad (\text{B.15})$$

Die Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten Y' und ν' von Indium wurden dabei Kim et al. [128] entnommen (vgl. auch Abbildung A.6 und A.7). Abbildung 4.23b zeigt den Verlauf von $E_{\text{tot}}/\lambda_{\text{layer}}$ über der Temperatur.

Literatur im Anhang

- [23] D. G. Blair et al. *Advanced gravitational wave detectors*. Hrsg. von D. G. Blair et al. Cambridge University Press, 2012.
- [42] G. M. Harry et al. „Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings“. In: *Classical and Quantum Gravity* 19.5 (2002), S. 897.
- [101] W. P. Mason und T. B. Bateman. „Relation between Third-Order Elastic Moduli and the Thermal Attenuation of Ultrasonic Waves in Nonconducting and Metallic Crystals“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 40.4 (1966), S. 852–862.
- [113] E. R. Dobrovinskaya, L. A. Lytvynov und V. Pishchik. *Sapphire: material, manufacturing, applications*. Springer, 2009.
- [117] J. B. Wachtman et al. „Exponential Temperature Dependence of Young’s Modulus for Several Oxides“. In: *Physical Review* 122 (6 Juni 1961), S. 1754–1759.
- [118] D. H. Niblett und J. Wilks. „The internal friction of cold-worked copper at low temperatures“. In: *Philosophical Magazine* 2.24 (1957), S. 1427–1444.
- [128] S. Kim und H. Ledbetter. „Low-temperature elastic coefficients of polycrystalline indium“. In: *Materials Science and Engineering: A* 252.1 (1998), S. 139–143.
- [138] J. Komma et al. „Thermo-optic coefficient of silicon at 1550 nm and cryogenic temperatures“. In: *Applied Physics Letters* 101.4 (2012), S. 041905.
- [144] J. J. Hall. „Electronic Effects in the Elastic Constants of *n*-Type Silicon“. In: *Physical Review* 161 (3 Sep. 1967), S. 756–761.
- [145] B. J. Frey, D. B. Leviton und T. J. Madison. „Temperature-dependent refractive index of silicon and germanium“. In: *Proc. SPIE* 6273 (2006), 62732J–10.
- [146] G. K. White. „Reference materials for thermal expansion: certified or not?“ In: *Thermochimica Acta* 218 (1993), S. 83–99.

- [147] Y. S. Touloukian. *Thermophysical properties of matter*. Hrsg. von C. Y. Ho. New York: Purdue University. Thermophysical Properties Research Center.IFI/Plenum, 1970.
- [148] R. Hull. *Properties of crystalline silicon*. London, United Kingdom: INSPEC, The Institution of Electrical Engineers, 1999.
- [149] G. Cocorullo, F. Della Corte und I. Rendina. „Temperature dependence of the thermo-optic coefficient in crystalline silicon between room temperature and 550 K at the wavelength of 1523nm“. In: *Applied physics letters* 74.22 (1999), S. 3338–3340.
- [150] T. Goto et al. „Elastic constants of corundum up to 1825 K“. In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 94.B6 (1989), S. 7588–7602.
- [151] S. Shang et al. „Temperature-dependent elastic stiffness constants of α - and θ -Al₂O₃ from first-principles calculations“. In: *Journal of Physics: Condensed Matter* 22.37 (2010), S. 375403.
- [152] J. R. Gladden et al. „Reconciliation of ab initio theory and experimental elastic properties of Al₂O₃“. In: *Applied Physics Letters* 85.3 (2004), S. 392–394.
- [153] J. M. Winey, Y. M. Gupta und D. E. Hare. „r-axis sound speed and elastic properties of sapphire single crystals“. In: *Journal of Applied Physics* 90.6 (2001), S. 3109–3111.
- [154] W. E. Tefft. „Elastic constants of synthetic single crystal corundum“. In: *Elastic* 70.4 (1966).
- [155] T. Tomaru et al. „Maximum heat transfer along a sapphire suspension fiber for a cryogenic interferometric gravitational wave detector“. In: *Physics Letters A* 301.3–4 (2002), S. 215–219.
- [156] I. H. Malitson. „Refraction and Dispersion of Synthetic Sapphire“. In: *J. Opt. Soc. Am.* 52.12 (Dez. 1962), S. 1377–1379.
- [157] J. M. J. den Toonder, J. A. W. van Dommelen und F. P. T. Baaijens. „The relation between single crystal elasticity and the effective elastic behaviour of polycrystalline materials: theory, measurement and computation“. In: *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 7.6 (1999), S. 909.
- [158] B. S. Chandrasekhar und J. A. Rayne. „Elastic Constants of Indium from 1,4° to 300 °K“. In: *Physical Review* 124 (4 Nov. 1961), S. 1011–1014.

- [159] G. White und M. Minges. „Thermophysical properties of some key solids: An update“. English. In: *International Journal of Thermophysics* 18.5 (1997), S. 1269–1327.
- [160] D. H. Niblett. „Low Frequency Measurements on the Bordoni Internal Friction Peak in Copper“. In: *Journal of Applied Physics* 32.5 (1961), S. 895–899.
- [161] L. D. Landau und E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*. Course of theoretical physics. Butterworth-Heinemann, 1986.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, um allen zu danken, die durch ihre Hilfe und Unterstützung zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Dank geht an erster Stelle an Prof. Dr. Paul Seidel. Mit der Etablierung des Sonderforschungsbereiches Transregio 7 – Gravitationswellenastronomie sowie der anschließenden zweimaligen Verlängerung der Förderperiode ermöglichte er mir nicht nur diese Arbeit, sondern auch bereits meine Diplomarbeit als auch Studienarbeit.

Großer Dank gilt ebenfalls Dr. Ronny Nawrodt, der jederzeit motivierend mit Rat und Tat zur Seite stand und mit dessen Hilfe sich alle großen und kleinen Probleme des Laboralltags stets meistern ließen. Daneben möchte ich auch Dr. Daniel Heinert sowie Dr. Christian Schwarz danken, die mich durch ihren breiten Erfahrungsschatz auf theoretischer und praktischer Seite unterstützten.

Dem Tieftemperaturservice in Form von Matthias Thürk, Lutz Föllmer und Tobias Eißmann danke ich für die problemlose und immer zuverlässige Versorgung mit Stickstoff und Helium aber auch für die vielen praktischen Hinweise und Zusammenarbeit. Dank geht auch an die wissenschaftlichen Werkstätten, vertreten durch Peter Hanse und Stefan Eiweleit, insbesondere für die Erfüllung zahlreicher Sonderwünsche im Eilverfahren. Um elektronische Probleme und Fragestellungen sowie die hauseigene Rechentechnik kümmerten sich dankenswerterweise Holger Mühlig und Ralf Neubert.

Während meiner Aufenthalte in Kashiwa standen mir Prof. Kazuhiro Yamamoto, Prof. Eiichi Hirose sowie Prof. Seiji Kawamura bei Fragen, auch über das wissenschaftliche Themengebiet hinaus, zur Seite. Außerdem geht mein Dank an alle Studenten, Doktoranden und Mitarbeiter, die ich in dieser Zeit dort kennenlernen und mit denen ich zusammenarbeiten durfte. Für den regen Austausch mit den Kollegen aus Glasgow danke ich stellvertretend Prof. Sheila Rowan, Dr. Giles Hammond, Dr. Peter Murray, Dr. Karen Haughian.

Allen Mitarbeitern des gelben Hauses, Doktoranden und Studenten danke ich für die kollegiale Zusammenarbeit sowie den entspannten Umgang. Besonders die alljährlichen gemeinsamen Ausflüge werden mir in Erinnerung bleiben.

Julius Komma, meinem treuen Mitstreiter während des gesamten Studiums sowie der Promotionszeit, danke ich für die vielen gemeinsam bestrittenen Stunden im Labor, die gegenseitige Motivation und Unterstützung.

Dank gilt auch all meinen Freunden, die für den nötigen Ausgleich gesorgt haben. Insbesondere danke ich meiner Anja, die mir immer zur Seite Stand. Meiner ganzen Familie, besonders meinen Eltern, möchte ich für die aufgebrauchte Geduld, die richtigen Worte zur richtigen Zeit und die immer währende Unterstützung danken.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Gerd Hofmann

geboren am 20. November 1986

in Schillingsfürst

wohnhaft in Fuchslöcherstr. 24, 07749 Jena

Schulbildung und Studium

1993 – 1997 **Grundschule**, Feuchtwangen

1997 – 2006 **Gymnasium**, Feuchtwangen

Abschluss **Abitur/Allgemeine Deutsche Hochschulreife**, Note 1,9

2006 – 2011 **Physik-Studium**, *Friedrich-Schiller-Universität*, Jena

Abschluss **Diplom**, Note 1,4

ab 2011 **Promotion**, *Friedrich-Schiller-Universität – Institut für Festkörperphysik*, Jena

Wissenschaft und Lehre

2008 – 2011 **Studentische Hilfskraft**, *Friedrich-Schiller-Universität – Institut für Festkörperphysik*, Jena

Tutor im Elektronik- und Messtechnikpraktikum

2011 – 2015 **Wissenschaftlicher Mitarbeiter**, *Friedrich-Schiller-Universität – Institut für Festkörperphysik*, Jena

Sonderforschungsbereich Transregio 7 – Gravitational Wave Astronomy

Betreuer im physikalischen Grundpraktikum, Elektronik- und Messtechnikpraktikum

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Weitere Personen waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder andere Personen) in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt. Die geltende Promotionsordnung der Physikalisch-Astronomischen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena ist mir bekannt. Ich versichere ehrenwörtlich, dass ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Jena, den 23. April 2016

Ort, Datum

Gerd Hofmann