Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik

Preprint No. M **16/07**

Ob ustojčivosti zamknutosti i samosoprjažennosti dlja 2 x 2 operator-matric

Andrej Andreevič Škalikov and Carsten Trunk

November 2016

Impressum:
Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik
Weimarer Straße 25
98693 Ilmenau
Tel.: +49 3677 69-3621
Fax: +49 3677 69-3270
http://www.tu-ilmenau.de/math/

Об устойчивости замкнутости и самосопряженности для 2×2 оператор-матриц

А. А. Шкаликов, К. Трунк

Рассматривается оператор, определенный в банаховом или гильбертовом пространстве $X = X_1 \times X_2$ матрицей

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где линейные операторы $A\colon X_1 \to X_1$, $B\colon X_2 \to X_1$, $C\colon X_1 \to X_2$, $D\colon X_2 \to X_2$ предполагаются неограниченными. В случае, когда операторы C и B ограничены относительно операторов A и D соответственно, получены новые условия замкнутости или замыкаемости оператора $\mathbf{L}$. Для оператора $\mathbf{L}$, действующего в гильбертовом пространстве, получены аналоги теорем Реллиха–Като об устойчивости самосопряженности.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: операторные матрицы, возмущения линейных операторов, замкнутые операторы, самосопряженные операторы.

1. Пусть X_1, X_2 – банаховы пространства. Рассмотрим линейные операторы A, B, C и D с областями определения $\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(C) \subset X_1$ и $\mathcal{D}(B), \mathcal{D}(D) \subset X_2$ и предположим, что они действуют следующим образом

$$A\colon \mathcal{D}(A) \to X_1, \qquad B\colon \mathcal{D}(B) \to X_1, \qquad C\colon \mathcal{D}(C) \to X_2, \qquad D\colon \mathcal{D}(D) \to X_2.$$

Тогда в пространстве $X = X_1 \times X_2$ определен линейный оператор

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{с областью} \quad \mathcal{D}(\mathbf{L}) := (\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(C)) \times (\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(D)).$$

Норму в пространстве X естественно определить равенством

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_X = \sqrt{\|x\|^2_{\mathcal{X}_1} + \|y\|^2_{\mathcal{X}_2}}. \tag{1}$$

Аргументы в пользу выбора такой нормы приведены в [1; гл. III.5.2]. Кроме того, при таком выборе нормы X – гильбертово пространство при условии, что пространства X_1 и X_2 гильбертовы.

Работа первого автора поддержана фондом РНФ (проект № 14-11-00754).

Теория неограниченных оператор-матриц берет начало от работ [2] и [3]. Многочисленные ссылки на другие работы по этой теме можно найти в книге [4]. В этой заметке мы рассмотрим задачу об устойчивости замкнутости или замыкаемости и устойчивости самосопряженности для оператор-матрицы $\mathbf{L}$ в случае *доминирующей диагонали*. Этот случай характеризуется следующим условием: операторы C и B ограничены относительно операторов A и D соответственно. Это означает, что $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C)$, $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{D}(C)$ и найдутся постоянные α, β, M_α, M_β такие, что

$$\|Cx\| \leqslant \alpha\|Ax\| + M_\alpha\|x\| \qquad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{D}(A), \tag{2}$$

$$\|By\| \leqslant \beta\|Dy\| + M_\beta\|y\| \qquad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{D}(D). \tag{3}$$

Здесь (и далее, где не возникает недоразумений) мы не указываем, в каких пространствах берутся нормы. В частности, в (2) нормы $\|Ax\|$ и $\|x\|$ понимаются в пространстве X_1, а $\|Cx\|$ – в X_2. Нижняя грань чисел α, для которых выполняется неравенство (2) с некоторой постоянной M_α, называется *A-гранью* оператора C. Обозначим ее через α^*. Так же определим число β^* – D-грань оператора B.

2. Напомним, что оператор A ныызывается *замкнутым*, если из одновременной сходимости последовательностей $x_n \to x$ (где $x_n \in \mathcal{D}(A)$) и $Ax_n \to z$ следует $x \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax = z$. Оператор A называется *замыкаемым*, если он допускает замкнутое расширение. Наименьшее замкнутое расширение называется *замыканием* A; мы будем обозначать его через $\overline{A}$.

Предположим, что оператор A замыкаем, а оператор C является A-ограниченным. Тогда из одновременной сходимости последовательностей $x_n \to x \in \mathcal{D}(\overline{A})$ и $Ax_n \to z$ и оценки (2) следует сходимость последовательности Cx_n к некоторому элементу $u \in X_2$. Полагая $Cx = u$, получаем продолжение по непрерывности оператора C на область $\mathcal{D}(\overline{A}) \cup \mathcal{D}(C)$. Это продолжение обозначим через $\widetilde{C}$. Отметим, что $\widetilde{C}$, вообще говоря, не совпадает с замыканием $\overline{C}$ (более того, C может даже не допускать замыкания).

Докажем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть A и D – замыкаемые операторы, а $\overline{A}$ и $\overline{D}$ – их замыкания. Пусть операторы C и D ограничены относительно операторов A и D с A-гранью и D-гранью α^* и β^* соответсвенно. Если $\alpha^*\beta^* < 1$, то оператор $\mathbf{L}$ также замыкаем, и его замыкание имеет вид*

$$\overline{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \overline{D} \end{pmatrix} \qquad \text{с областью} \quad \mathcal{D}(\overline{\mathbf{L}}) = \mathcal{D}(\overline{A}) \times \mathcal{D}(\overline{D}), \tag{4}$$

где $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ – описанные выше продолжения операторов B и C по непрерывности на области $\mathcal{D}(\overline{D}) \cup \mathcal{D}(B)$ и $\mathcal{D}(\overline{A}) \cup \mathcal{D}(C)$ соответственно. В частности, если A и D замкнуты и выполнено условие $\alpha^*\beta^* < 1$, то оператор $\mathbf{L}$ замкнут.

Доказательство. Рассматривая элементы пространства $X = X_1 \times X_2$ с нулевыми первой или второй координатами и учитывая неравенства (2) и (3), получаем, что область определения замыкания $\overline{\mathbf{L}}$ (если оно существует) должна включать область $\mathcal{D}(\overline{A}) \times \mathcal{D}(\overline{D})$.

Пусть выполнено условие $\alpha^*\beta^* < 1$. Предположим, что $\alpha^* < 1$, об изменениях в доказательстве в случае $\beta^* < 1$ скажем позже. Очевидно, числа α и β, при которых выполняются оценки (2) и (3), можно выбрать столь близкими к α^* и β^*, что сохранятся неравенства $\alpha < 1$ и $\alpha\beta < 1$.

Рассмотрим оператор

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} \overline{A} & \widetilde{B} \\ 0 & \overline{D} \end{pmatrix} \qquad \text{с областью} \quad \mathcal{D}(\mathbf{T}) = \mathcal{D}(\overline{A}) \times \mathcal{D}(\overline{D})$$

и покажем, что он замкнут. Пусть последовательность элементов $\begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}^T$, лежащих в области $\mathcal{D}(\mathbf{T})$, сходится к некоторому элементу $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \in X = X_1 \times X_2$, и пусть

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \overline{A}x_n + \widetilde{C}y_n \\ \overline{D}y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X_1 \times X_2 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Так как $\overline{D}$ замкнут, то $y \in \mathcal{D}(\overline{D}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{C})$ и $\overline{D}y = v$. Из оценки (3) (которая по непрерывности сохраняется после замены операторов D и B на $\overline{D}$ и $\widetilde{B}$) следует

$$\|\widetilde{B}y_n - \widetilde{B}y\| \leqslant \beta\|\overline{D}y_n - \overline{D}y\| + M_\beta\|y_n - y\|.$$

Поэтому $\widetilde{B}y_n \to \widetilde{B}y$ при $n \to \infty$, а тогда $Ax_n \to u - \widetilde{B}y$ при $n \to \infty$. Так как $\overline{A}$ замкнут, то $x \in \mathcal{D}(A)$ и $\overline{A}x = u - \widetilde{B}y$. Тем самым, мы показали, что оператор $\mathbf{T}$ замкнут.

Введем в пространстве $X = X_1 \times X_2$ норму

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_X = \|x\|_{X_1} + \|y\|_{X_2}. \tag{5}$$

В силу неравенств

$$(a+b) \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2)} \leqslant \sqrt{2}(a+b) \qquad a, b > 0,$$

нормы (1) и (5) эквивалентны. Свойство замкнутости или замыкаемости оператора не зависит от выбора эквивалентной нормы, поэтому достаточно доказать, что оператор $\overline{\mathbf{L}}$, определенный равенством (4), замкнут в норме (5).

Заметим, что

$$\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{T} + \mathbf{G}, \qquad \text{где} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{C} & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что оператор $\mathbf{G}$ является $\mathbf{T}$-подчиненным в норме (5), и найдем его $\mathbf{T}$-грань. Имеем

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| &= \|\widetilde{C}x\| \leqslant \alpha\|\overline{A}x\| + M_\alpha\|x\| \leqslant \alpha(\|\overline{A}x + \widetilde{B}y\| + \|\widetilde{B}y\|) + M_\alpha\|x\| \\
&\leqslant \alpha(\|\overline{A}x + \widetilde{B}y\| + \beta\|\overline{D}y\| + M_\beta\|y\|) + M_\alpha\|x\| \\
&\leqslant \max(\alpha, \alpha\beta)(\|\overline{A}x + \widetilde{B}y\| + \|\overline{D}y\|) + \max(M_\alpha, \alpha M_\beta)(\|x\| + \|y\|) \\
&\leqslant \max(\beta, \alpha\beta) \left\| \begin{pmatrix} \overline{A} & \widetilde{B} \\ 0 & \overline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| + \max(M_\alpha, \alpha M_\beta) \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|.
\end{aligned}$$

Тем самым, $\mathbf{T}$-грань оператора $\mathbf{G}$ равна $\max(\beta, \alpha\beta) < 1$. Так как $\mathbf{T}$ замкнут в силу известной теоремы об устойчивости [1; теорема IV.1.1], оператор $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{T} + \mathbf{G}$ также замкнут.

Доказательство теоремы проводится аналогично, если вместо вместо неравенства $\alpha^* < 1$ выполняется неравенство $\beta^* < 1$. В этом случае оператор $\overline{\mathbf{L}}$ нужно представить в виде

$$\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{G}_1, \qquad \text{где} \quad \mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ \widetilde{C} & \overline{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство замкнутости $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_1$-подчиненности оператора $\mathbf{G}_1$ с $\mathbf{T}_1$-гранью < 1 проводится так же, как прежде.

Замечание. Теорема 1 была доказана в [4] и [5] при более ограничительных условиях $\alpha^{*\,2}(1+\beta^{*\,2}) < 1$ или $\beta^{*\,2}(1+\alpha^{*\,2}) < 1$. Кроме того, в отличие от работы [5] мы представляем явную формулу для замыкания $\overline{\mathbf{L}}$ и не предполагаем, что внедиагональные операторы B и C также допускают замыкание.

Отметим также, что условие $\alpha^*\,\beta^* < 1$ в теореме 1 является точным в том смысле, что при выполнении равенства $\alpha^*\,\beta^* = 1$ утверждение о замыкаемости оператора $\mathbf{L}$ уже гарантировать нельзя. Это показывает следующий пример.

Пример. Положим $X_1 = X_2$ и рассмотрим неограниченный замкнутый оператор $A\colon X_1 \to X_1$ и незамыкаемый оператор $S\colon X_1 \to X_1$, который является A-ограниченным с нулевой A-гранью. Конечно, такой выбор возможен. В частности, можно взять $Ay = -y''$ в пространстве $X_1 = X_2 = L_2(-1,1)$ с областью

$$\mathcal{D}(A) = \{y \in W^{2,2}(-1,1),\, y(-1) = y(1) = 0\}$$

и $Sy = y(0)$, положив $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(A)$. Очевидно, A – самосопряженный оператор (а потому замкнут). Известно, что оператор S не допускает замыкания (так как существует последовательность функций y_n таких, что $Sy_n = y_n(0) = 1 \neq 0$, но $\|y_n\| \to 0$). Так как пространство $W^{2,2}[0,1]$ компактно вложено в пространство $C[0,1]$, то оператор S является A-подчиненным с нулевой A-гранью (детальное доказательство этого факта имеется в примерах IV.1.6 и IV.1.8 книги [1]). Теперь рассмотрим оператор-матрицу

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} A & \dfrac{1}{\alpha}A \\ \alpha(A-S) & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(1 - SA^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь правая часть – факторизация Фробениуса–Шура оператор-матрицы $\mathbf{L}$. Поскольку оператор SA^{-1} ограничен, то первый и третий множитель в правой части являются ограниченными и обратимыми операторами. Но тогда оператор $\mathbf{L}$ и второй множитель в правой части замыкаемы или нет одновременно. Но оператор S не замыкаем, поэтому $\mathbf{L}$ также не замыкаем. При этом оператор $C = \alpha(A-S)$ является A-ограниченным с A-гранью α, а оператор $B = \alpha^{-1}A$ также A-ограничен с A-гранью α^{-1}.

3. Теперь докажем теоремы об устойчивости свойства самосопряженности. Далее предполагаем, что пространства X_1 и X_2 гильбертовы, а операторы B и C связаны соотношением $C = B^*$ (определение сопряженного оператора для операторов, действующих в различных пространствах, см. в книге [1; гл. III.5.5]). Очевидно, при выполнении условий (2) и (3) и равенства $C = B^*$ квадратичная форма оператор-матрицы $\mathbf{L}$ принимает вещественные значения, а потому $\mathbf{L}$ является симметрическим оператором. Но он вовсе не обязан быть самосопряженным. Поэтому значимым представляется следующий результат.

Теорема 2. *Пусть A и D – самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах X_1, X_2 соответственно и $C = B^*$. Пусть операторы B^* и B являются A- и D-ограниченными, причем их A-грань и D-грань равны α^* и β^* соответственно. Если $\alpha^*\beta^* < 1$, то оператор $\mathbf{L}$ самосопряжен.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что так как операторы A и D самосопряжены, то их резольвентные множества $\rho(A)$ и $\rho(D)$ непусты и содержат множество $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Воспользуемся факторизацией Фробениуса–Шура. При $\lambda\in\rho(A)\cup\rho(D)$ имеем

$$\mathbf{L}-\lambda\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ B^*(A-\lambda)^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A-\lambda & 0\\ 0 & M(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & (A-\lambda)^{-1}B\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$M(\lambda):=D-\lambda-B^*(A-\lambda)^{-1}B=[1+B^*(A-\lambda)^{-1}B(D-\lambda)^{-1}](D-\lambda). \tag{7}$$

Здесь тождественный оператор в пространстве X мы обозначаем через $\mathbf{1}$, а через 1 по-прежнему обозначается единичный оператор в X_1 или X_2.

Напомним, что *дефектным числом* оператора называется число, равное коразмерности его образа. В силу теоремы 1 оператор $\mathbf{L}$ замкнут. Поэтому в силу известной теоремы [1; теорема V.3.16] достаточно доказать, что дефектные числа оператора $\mathbf{L}-\lambda\mathbf{1}$ при некоторых (а тогда при всех) значениях λ из открытых нижней и верхней полуплоскостей $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$ равны нулю. Заметим, что в силу (2) оператор $B^*(A-\bar\lambda)^{-1}$ ограничен, а сопряженный к нему совпадает на области $\mathcal{D}(B)$ с оператором $(A-\lambda)^{-1}B$. Так как область $\mathcal{D}(B)$ плотна в X_2, то по непрерывности этот оператор допускает ограниченное продолжение на все пространство X_2. Следовательно, первый и третий множители в правой части (6) являются ограниченными и обратимыми операторами. Но тогда достаточно доказать, что дефектные числа оператора $M(\lambda)$ при некоторых (а тогда при всех) $\lambda\in\mathbb{C}^\pm$ равны нулю (здесь мы учитываем, что дефектные числа $A-\lambda$ при $\lambda\notin\mathbb{R}$ равны нулю, так как A самосопряжен).

Поскольку оператор D самосопряжен, то в силу представления (7) достаточно показать, что

$$\|C(A-it)^{-1}B(D-it)^{-1}\|<1, \tag{8}$$

если $|t|>t_0$ и t_0 – достаточно большое число. Заметим, что из равенства

$$\|(D-it)y\|^2=((D-it)y,(D-it)y)=\|Dy\|^2+t^2\|y\|^2$$

следуют оценки

$$\|D(D-it)^{-1}y\|\leqslant\|y\| \qquad \text{и} \qquad \|(D-it)^{-1}y\|\leqslant\frac{1}{|t|}\|y\|. \tag{9}$$

Учитывая условие (3), получаем

$$\|B(D-it)^{-1}y\|\leqslant\beta\|D(D-it)^{-1}y\|+M_\beta\|(D-it)^{-1}y\|\leqslant\beta\|y\|+\frac{M_\beta}{|t|}\|y\|.$$

Аналогично, из (2) следует оценка

$$\|B^*(A-it)^{-1}x\|\leqslant\left(\alpha+\frac{M_\alpha}{|t|}\right)\|x\|.$$

Числа α и β в (2) и (3) можно выбрать столь близкими к α^* и β^*, что неравенство $\alpha\beta<1$ останется верным. Но тогда последние две оценки влекут неравенство (8), а это завершает доказательство теоремы.

Полезно отметить, что в условиях теоремы 2 сохраняется свойство полуограниченности. А именно, справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2; *кроме того, операторы* A *и* D *полуограничены снизу*:

$$(Ax,x) \geqslant \gamma_A\,(x,x) \qquad \text{для всех} \quad x\in\mathcal{D}(A),$$
$$(Dy,y) \geqslant \gamma_D\,(y,y) \qquad \text{для всех} \quad y\in\mathcal{D}(D).$$

Тогда оператор $\mathbf{L}$ *также полуограничен снизу.*

Доказательство. Операторы $A-\lambda$ и $D-\lambda$ обратимы при $\lambda<\gamma_A$ и $\lambda<\gamma_D$ соответственно, поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что найдется число $\gamma<\min(\gamma_A,\gamma_D)$, такое, что неравенство (8) выполнено при всех $\lambda<\gamma$. Воспользуемся очевидными неравенствами, справедливыми при $\lambda<\gamma_A$:

$$\|(A-\lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\gamma_A-\lambda}, \qquad \|A(A-\lambda)^{-1}\| \leqslant \sup_{t\in\sigma(A)}\left|\frac{1}{t-\lambda}\right| \leqslant \max\left(1,\frac{|\gamma_A|}{\gamma_A-\lambda}\right).$$

Тогда из (2) следует

$$\|B^*(A-\lambda)^{-1}\| \leqslant \alpha\max\left(1,\frac{|\gamma_A|}{\gamma_A-\lambda}\right)+\frac{M_\alpha}{\gamma_A-\lambda} =: \upsilon_A(\lambda), \qquad \text{если} \quad \lambda<\gamma_A.$$

Аналогично, из (3) следует

$$\|B(D-\lambda)^{-1}\| \leqslant \beta\max\left(1,\frac{|\gamma_D|}{\gamma_D-\lambda}\right)+\frac{M_\beta}{\gamma_D-\lambda} =: \upsilon_D(\lambda), \qquad \text{если} \quad \lambda<\gamma_D.$$

Но $\upsilon_A(\lambda)\,\upsilon_D(\lambda)\to\alpha\beta<1$ при $\lambda\to-\infty$. Следовательно, существует $\gamma\in\mathbb{R}$ такое, что неравенство (8) выполняется для всех $\lambda<\gamma$. Отметим, что число γ можно найти явно, решив неравенство $\upsilon_A(\lambda)\,\upsilon_D(\lambda)<1$. Но это выражение для γ громоздкое, и мы его не выписываем.

Первые две теоремы этой заметки были анонсированы в докладе авторов на конференции, посвященной памяти М. С. Бирмана, 3 июля 2014 года в г. Санкт-Петербурге.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[2] R. Nagel, "Towards a "matrix theory" for unbounded operator matrices", *Math. Z.*, **201**:1 (1989), 57–68.

[3] F. V. Atkinson, H. Langer, R. Menichen, A. A. Shkalikov, "The essential spectrum of some matrix operators", *Math. Nachr.*, **167** (1994), 5–20.

[4] C. Tretter, *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*, Imperial College Press, London, 2008.

[5] C. Tretter, "Spectral inclusion for unbounded block operator matrices", *J. Funct. Anal.*, **256** (2009), 3806–3829.

А. А. Шкаликов
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: shkalikov@mi.ras.ru

Поступило
18.07.2016

К. Трунк
Technische Universität Ilmenau, Germany
E-mail: carsten.trunk@tu-ilmenau.de