



UNTERSUCHUNGEN VON ROTIERENDEN UND GELADENEN
STAUBSCHEIBEN MIT HOCHGENAUEN NÄHERUNGSLÖSUNGEN
UND DER GRENZÜBERGANG ZU SCHWARZEN LÖCHERN

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
doktor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomische Fakultät
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Diplom Physiker Martin Breithaupt
geboren am 02.07.1983 in Nordhausen

Jena, 13. Oktober 2015

Gutachter:

1. Prof. Dr. rer. nat. habil. Reinhard Meinel,
Theoretisch Physikalisches Institut,
Friedrich Schiller Universität Jena
2. Prof. Dr. rer. nat. habil. Claus Lämmerzahl,
Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation (ZARM),
Universität Bremen
3. Prof. Dr. rer. nat. habil. Thomas Wolf,
Department of Mathematics and Statistics,
Brock University, Canada

Tag der Disputation: 26.04.2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	VII
Zusammenfassung	IX
1 Grundlagen	1
1.1 Die EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen und das Materiemodell	1
1.1.1 EINSTEIN'sche Feldgleichungen	1
1.1.2 MAXWELL-Gleichungen	1
1.1.3 Materiemodell und Energie-Impuls-Tensor	2
1.1.4 Der Energie-Impuls-Satz	4
1.1.5 KILLING-Vektoren	4
1.1.6 Metrik und Viererpotential	6
1.1.7 Die Feld- und Wellengleichungen	9
1.1.8 Extremal geladener Staub	10
1.1.9 Geladener rotierender Staub im thermodynamischen Gleichgewicht	11
1.2 Die ERNST-Gleichungen	12
1.2.1 Die Potentiale \mathcal{E} und Φ	12
1.2.2 Die Potentiale ξ und q	15
1.2.3 Äquatorsymmetrie	15
1.2.4 Invarianztransformationen	16
1.3 Multipolmomente	17
1.4 Das mitrotierende Bezugssystem	18
1.4.1 Transformation der Potentiale und Tensoren	18
1.4.2 Bewegungsgleichungen	20
1.4.3 Die Quasi-ERNST-Gleichungen	20
1.5 KERR-NEWMAN-Lösung und BOYER-LINDQUIST-Koordinaten	21
1.5.1 Die KERR-NEWMAN-Lösung	23
1.5.2 Die KERR-NEWMAN-Lösung im mitrotierenden System	24
1.5.3 Das Verhalten der Potentiale auf dem Ereignishorizont	26
1.5.4 Die Multipolmomente der KERR-NEWMAN-Lösung	26
1.5.5 Schwarze Löcher und die extreme KERR-NEWMAN-Lösung	27
1.6 Elliptische Koordinaten	27
1.6.1 Lösung der LAPLACE-Gleichung mit LEGENDRE-Polynomen	28
1.7 Reihenentwicklung: Optimierung und Konvergenz	30
1.7.1 Konvergenz aus physikalischer Sicht	31

1.7.2	Das Konvergenzkriterium nach RAABE-DUHAMEL	31
1.7.3	Generalisierte PADÉ-Approximation	32
2	Fernfeldverhalten in asymptotischen Kugelkoordinaten	33
3	Physikalische Größen	35
3.1	Ladung und baryonische Masse	36
3.2	Energie und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes	36
3.3	Gravitative Masse und Drehimpuls	38
3.3.1	Formel für die gravitative Masse	39
3.3.2	Relative Bindungsenergie	39
4	Der ultra-relativistische Grenzfall	41
4.1	Trennung der Raumzeiten	41
4.2	Bedingung für den Übergang zu Schwarzen Löchern	42
5	Das Randwertproblem der starr rotierenden geladenen Staubscheibe	45
5.1	Die Regularitätsbedingungen im räumlich Unendlichen	46
5.2	Die Randwerte auf der Scheibenoberfläche	46
5.2.1	Berechnung im mitrotierenden System	46
5.2.2	Übersetzung ins ruhende System	51
5.2.3	Physikalische Interpretation	52
5.3	Untersuchung von Invarianz-Transformationen	53
5.3.1	HARRISON-Transformation	53
5.3.2	Vereinfachung der Randbedingungen im mitrotierenden System	54
6	Untersuchungen zur Post-NEWTON'schen Entwicklung der starr rotierenden Staubscheibe mit konstanter spezifischer Ladung	55
6.1	Mathematische Problemstellung und Lösung	55
6.1.1	Parameterraum	56
6.1.2	Entwicklung der Potentiale	56
6.1.3	Entwicklung des Randwertproblems	57
6.1.4	Lösungsalgorithmus	60
6.1.5	Lösungsstruktur	61
6.1.6	Physikalische Parameter	62
6.1.7	Praktische Umsetzung in MAPLE	63
6.2	Auswertung	64
6.2.1	Zur Konvergenz der Reihenentwicklung	64
6.2.2	Zur Optimierung der Reihenentwicklung	67
6.2.3	Quasistationäre Übergänge	68
6.2.4	Weitere (Skalen-) Parameter	68
6.2.5	Grenzübergang zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung	70
6.2.6	Das Verhalten nahe am Grenzfall zum Schwarzen Loch	79
6.2.7	Ergosphären	84

7 Ausblick	87
Appendix	89
A.1 Originalzitat von HENRY POINCARÉ	89
A.2 Einheiten	90
A.3 Notation	91
A.4 Formeln	94
A.4.1 Fernfeldverhalten der Potentiale bis zur dritten bzw. vierten Ordnung in $1/r$	96
A.4.2 Terme der EINSTEIN'schen Feldgleichungen	97
Literaturverzeichnis	99
Eigene Publikationen und Vorträge	105
Ehrenwörtliche Erklärung	107
Danksagung	109
Lebenslauf	111

Einleitung

Es gibt unter den Geometern und den Astronomen eine Art Missverständnis über die Bedeutung des Begriffs Konvergenz:

Die Geometer sind beschäftigt mit vollkommener Strenge und oftmals gleichgültig ob der Länge der unentwirrbaren Berechnungen, deren prinzipielle Möglichkeit sie nachvollziehen, ohne darüber zu sinnieren, wie sie diese tatsächlich effektiv ausführen können. Für sie ist eine Reihe konvergent, wenn die Partialsummen einem Grenzwert zustreben, obwohl die ersten Terme sehr langsam abklingen.

Im Gegensatz dazu haben die Astronomen die Angewohnheit zu sagen, dass eine Reihe konvergiert, wenn beispielsweise die ersten zwanzig Terme sehr schnell kleiner werden, gleich wohl die folgenden Terme unbestimmt wachsen sollten.

HENRY POINCARÉ (1854 – 1912)

Vor genau 100 Jahren veröffentlichte ALBERT EINSTEIN die endgültige Fassung der Feldgleichungen einer Theorie der Gravitation [Einstein, 1915a]. Diese bezeichnete er als Allgemeine Relativitätstheorie, da die Feldgleichungen „dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d.h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariablen gegenüber ko-variant sind.“¹ Mit dieser Theorie der Gravitation lassen sich nicht nur alle bis heute beobachtbaren Erscheinungen gravitativen Ursprungs beschreiben, sie besticht zudem durch die Eleganz und Schönheit ihrer mathematischen Formulierung. EINSTEIN urteilt selbst: „Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfaßt hat: sie bedeutet einen wahren Triumph der durch GAUSS, RIEMANN, CHRISTOFFEL, RICCI und LEVI-CIVITER [sic!] begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls.“²

Dieser Zauber entsteht auch und gerade durch die enge Verknüpfung der Gravitation mit der sie erzeugenden Materieverteilung, so dass beide nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden können. Dies bedeutet auch, dass die Bewegungsgleichungen inhärenter Bestandteil der Feldgleichungen sind und nicht, wie in der NEWTON'schen Theorie, zusätzlich gefordert werden müssen. Jedoch ist es auch diesem Umstand geschuldet, dass

¹[Einstein, 1915a]

²[Einstein, 1915c]

sich das Lösen der Feldgleichungen für konkrete physikalische Systeme als sehr herausfordernde Aufgabe erweist. Bis heute sind nur wenige analytische Lösungen bekannt, die das Gravitationsfeld (also die Struktur der Raumzeit), erzeugt durch kompakte Objekte, beschreiben. Für viele interessante Probleme ist man auf numerische Methoden oder Näherungslösungen angewiesen.

Eines dieser Probleme zu Zeiten EINSTEINS war die Periheldrehung des Merkurs. Die beobachtete Drehung übertraf die Vorhersage der NEWTON'schen Theorie³ um $45'' \pm 5''$ pro Jahrhundert. Zugleich mit der Veröffentlichung seiner Feldgleichungen wendet EINSTEIN diese auf das Problem der Periheldrehung des Merkurs an [Einstein, 1915b]. Diese ergaben einen zur NEWTON'schen Theorie zusätzlichen Wert von $43''$ pro Jahrhundert, der sehr gut zu dem Beobachteten passte.⁴

Wie kommt EINSTEIN nun zu diesem Wert? Er erhält ihn nicht, indem er die Bewegungsgleichungen eines Testteilchens im Zentralfeld der Sonne analytisch löst, sondern indem er mittels einer Reihenentwicklung zu einer Näherungslösung kommt. Die nullte Näherung ist die MINKOWSKI-Raumzeit, in erster Näherung ergeben sich die NEWTON'schen Gleichungen.⁵ Den besagten Wert von $43''$ pro Jahrhundert liefern nun die Gleichungen in zweiter Näherung, der ersten Post-NEWTON'schen Korrektur. Der erste Erfolg der Allgemeinen Relativitätstheorie wird also nicht durch eine analytische, sondern durch eine Näherungslösung erzielt, in der sich die volle Information der neuen Theorie noch gar nicht widerspiegelt.

Ein weiteres interessantes, grundlegendes und bis jetzt noch offenes Problem ist die "cosmic censorship"-Hypothese von PENROSE [Penrose, 1969]. Sie besagt, dass sich bei einem Gravitationskollaps von (geladener) Materie keine nackten Singularitäten bilden, sondern immer auch ein Ereignishorizont um diese entsteht. Aufgrund der Eindeutigkeit der KERR-NEWMAN-Lösung⁶, sollte demnach immer ein Schwarzes Loch entstehen. Für einige Beispiele eines dynamischen oder quasistationären Gravitationskollapses konnte die Hypothese von PENROSE analytisch gezeigt werden.⁷ Für viele weitere Beispiele ist man auch hier auf numerische oder Näherungslösungen angewiesen.

Die Periheldrehung des Merkur ist ein recht kleiner relativistischer Effekt, so dass die Anwendung einer Näherungslösung gerechtfertigt ist. In der hier vorliegenden Arbeit werden wieder Ergebnisse aus einer Näherungslösung der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie präsentiert. Hier geht die Post-NEWTON'sche Reihenentwicklung bis zur zehnten Ordnung, zugleich werden aber auch Aussagen über den ultra-relativistischen Grenzfall gemacht, die einen Beitrag zur "cosmic censorship"-Hypothese leisten. Die Frage, ob die Reihen auch in diesem Grenzfall konvergieren, kann im Sinne der 'Astronomen' bejaht, vom Standpunkt der 'Geometer' aus jedoch nicht entschieden werden.

³Die Periheldrehung des Merkurs wird in der NEWTON'schen Theorie durch die Einflüsse der anderen Planeten, vor allem Jupiter, verursacht.

⁴„Das Relativitätspostulat in seiner allgemeinsten Fassung, welches die Raumzeitkoordinaten zu physikalisch bedeutungslosen Parametern macht, führt mit zwingender Notwendigkeit zu einer ganz bestimmten Theorie der Gravitation, welche die Perihelbewegung des Merkur erklärt.“ [Einstein, 1915a]

⁵Für das Zweikörperproblem ergibt sich hier keine Periheldrehung.

⁶Z.B. [Meinel, 2012].

⁷Z.B. der dynamische, kugelsymmetrische Kollaps einer Staubkugel [Oppenheimer and Snyder, 1939] oder der quasistationäre Kollaps einer starr rotierenden Staubscheibe [Neugebauer and Meinel, 1995].

Zusammenfassung

Die Grundlagen dieser Arbeit sind eine ausführliche Beschreibung rotierenden und geladenen Staubs unter Voraussetzung einer stationären und axialsymmetrischen Raumzeit. Der Darstellung der EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen und des Materiemodells folgt eine Herleitung der ERNST-Gleichungen. Nach der Einführung von Multipolmomenten und mitrotierendem Bezugssystem erfolgt eine zweckdienliche Darstellung der KERR-NEWMAN-Lösung in BOYER-LINDQUIST-Koordinaten. Danach werden elliptische Koordinaten als Grundlage für die Untersuchung von Staubscheiben dargestellt. Der letzte Abschnitt der Grundlagen widmet sich der Frage der Konvergenz von Reihenentwicklungen aus physikalischer und mathematischer Sicht. Von Methoden zur Beschleunigung der Konvergenz, wird insbesondere die PADÉ-Approximation dargestellt. Dieser folgt eine Darstellung des Fernfeldverhaltens.

Ein Ergebnis dieser Arbeit ergab sich bei der Untersuchung physikalischer Größen des rotierenden und geladenen Staubs. Hier kann eine wichtige Parameterrelation hergeleitet werden.

Nach der Herleitung einer notwendigen und hinreichenden Bedingung für den Übergang einer geladenen Staubverteilung zu Schwarzen Löchern wird das (globale) Problem für eine starr rotierende, geladene Staubscheibe auf ein Randwertproblem der EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen im Elektrovakuum zurückgeführt. Die Randwerte lassen sich aus den inneren Feldgleichungen herleiten und werden physikalisch interpretiert. Das Randwertproblem ist wesentlich komplizierter als im ungeladenen Fall und lässt sich nicht einfach, z.B. durch eine inverse HARRISON-Transformation, auf diesen zurückführen.

Im folgenden Kapitel wird das Randwertproblem für konstante spezifische Ladung in eine Post-NEWTON'sche Reihe entwickelt und diese Entwicklung mit Hilfe des Computeralgebrasystems MAPLE bis zur zehnten Ordnung analytisch gelöst. Diese hoch-genaue Näherungslösung kann nun weitreichend physikalisch untersucht und interpretiert werden. In dieser Arbeit wurde vor allem der ultra-relativistische Grenzfall eingehend untersucht. Im Rahmen dieser Näherungslösung kann nicht nur gezeigt werden, dass hier vom Standpunkt der Außenwelt der Übergang zu einem extremen, rotierenden, geladenen Schwarzen Loch vorliegt, der die "cosmic censorship"-Hypothese bestätigt. Es können auch Aussagen dazu getroffen werden, wie dieser Grenzfall erreicht wird. Zuletzt erfolgen einige Anmerkungen zu Ergosphären.

Die Post-NEWTON'sche Reihenentwicklung kann gerade aufgrund ihrer hohen Genauigkeit, die bei Verwendung von PADÉ-Approximation selbst im ultra-relativistischen Grenzfall unter einem Prozent liegt, noch auf viele ihrer (physikalischen) Eigenschaften hin untersucht werden.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Die EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen und das Materiemodell

1.1.1 EINSTEIN'sche Feldgleichungen

Die EINSTEIN'schen Feldgleichungen¹

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (1.1)$$

verknüpfen den RICCI-Tensor R_{ab} mit dem Energie-Impuls-Tensor T_{ab} . Die verjüngten BIANCHI-Identitäten gewährleisten beliebige Koordinatentransformationen und eine lokale Energie-Impuls-Erhaltung

$$\left(R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab}\right)_{;b} = 8\pi T^{ab}_{;b} = 0. \quad (1.2)$$

Nur unter diesen Bedingungen sind die Feldgleichungen integrierbar und widerspruchsfrei. Aus der Verjüngung von (1.1) ergibt sich $R = -8\pi T$. Damit lassen sich die Feldgleichungen auch in der Form

$$R_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right) \quad (1.3)$$

schreiben. Die Gleichungen (1.1) beschreiben, wie die Raumzeitstruktur, repräsentiert durch den Ricci-Tensor R_{ab} , mit der Materieverteilung, repräsentiert durch den Energie-Impuls-Tensor T_{ab} , zusammenhängt.

1.1.2 MAXWELL-Gleichungen

Die MAXWELL-Gleichungen müssen zusätzlich gefordert werden, da die Quellen des elektromagnetischen Feldes in den Feldgleichungen (1.1) nicht vorkommen. Aus den homo-

¹Hier werden geometrisierte GAUSS-Einheiten $c = G = 4\pi\epsilon_0 = 1$ verwendet. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, G die NEWTON'sche Gravitationskonstante und ϵ_0 die elektrische Feldkonstante. Siehe dazu Appendix A.2. Die kosmologische Konstante wird Null gesetzt. Die Signatur der Metrik lautet $(+, +, +, -)$.

genen MAXWELL-Gleichungen

$$F_{[ab;c]} = 0 \quad (1.4)$$

folgt, dass sich F_{ab} als Rotation des Viererpotentials A_a darstellen lässt:

$$F_{ab} = A_{b;a} - A_{a;b} = A_{b,a} - A_{a,b}. \quad (1.5)$$

Die inhomogenen MAXWELL-Gleichungen verknüpfen den elektromagnetischen Feldstärketensor F_{ab} und die Viererstromdichte j^a :²

$$F^{ab}{}_{;b} = 4\pi j^a. \quad (1.6)$$

Setzt man die Gleichungen (1.5) in (1.6) ein, ergeben sich die inhomogenen Wellengleichungen

$$A^{b;a}{}_{;b} - A^{a;b}{}_{;b} = A^b{}_{;b}{}^a + R_b{}^a A^b - A^{a;b}{}_{;b} = 4\pi j^a, \quad (1.7)$$

die durch partielle Ableitungen ausgedrückt

$$\left[\sqrt{-g} g^{am} g^{bn} (A_{n,m} - A_{m,n}) \right]_{,b} = 4\pi \sqrt{-g} j^a \quad (1.8)$$

lauten.³ Die Wellengleichungen sind nur dann integrabel wenn die Kontinuitätsgleichung

$$j^a{}_{;a} = 0 \quad (1.9)$$

erfüllt ist. Mit der LORENZ-Eichung

$$A^a{}_{;a} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (A^a \sqrt{-g})_{,a} = 0 \quad (1.10)$$

verschwindet die verallgemeinerte Divergenz des Viererpotentials.

1.1.3 Materiemodell und Energie-Impuls-Tensor

Im Folgenden soll hier als Materie⁴ eine isolierte, geladene und rotierende Staubverteilung angenommen werden, die sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet und damit stationär ist. Ihre Temperatur sei Null. Die Raumzeit soll zudem axialsymmetrisch und im Fernfeld asymptotisch flach sein.⁵

Das Fernfeld einer isolierten Materieverteilung wird als ein Bereich in großem Abstand vom betrachteten System definiert, in dem die Metrik g_{ab} nur wenig von der MINKOWSKI-Metrik η_{ab} abweicht:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \mathcal{O}(r^{-1}).$$

Dieses Fernfeld sei umgeben von einer isotropen Außenwelt, so dass in der Metrik keine steigenden r -Potenzen auftreten. Die nächsten Objekte in der Außenwelt seien so weit entfernt, dass ihr Einfluss im Fernfeld vernachlässigt werden kann.⁶

²Die inhomogenen MAXWELL-Gleichungen lauten $H^{ab}{}_{;b} = 4\pi j^a$. Die Verknüpfung von H_{ab} und F_{ab} geschieht durch Materialgleichungen. Für das hier verwendete Materiemodell und Einheitensystem gilt jedoch $H_{ab} = F_{ab}$.

³Mit g wird die Determinante der Metrik bezeichnet.

⁴Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie wird mit Materie alles bezeichnet, was zum Energie-Impuls-Tensor und somit zur Krümmung der Raumzeit beiträgt. Dies ist insbesondere auch das elektromagnetische Feld. In dieser Arbeit wird das elektromagnetische Feld von dieser Bezeichnung ausgenommen. Der Begriff Materie soll sich hier nur auf (geladene) ideale Flüssigkeiten beziehen.

⁵Für stationäre Raumzeiten erzeugt von idealen Flüssigkeiten gilt, dass diese auch axialsymmetrisch sind [Lindblom, 1976]. Staub ist als ideale Flüssigkeit ohne Druck definiert.

⁶Siehe [Stephani, 1991] und [Meinel et al., 2008].

Die elektrische Ladungsdichte ϱ_{el} sei proportional zur Energiedichte μ :

$$\varrho_{\text{el}} = \epsilon\mu. \quad (1.11)$$

Die spezifische elektrische Ladung ϵ sowie die Winkelgeschwindigkeit Ω , mit der die Staubteilchen rotieren, sind freie Funktion, die durch ein spezifisches physikalisches Modell festgelegt werden.

Elektrovakuum Der Energie-Impuls-Tensor außerhalb der Staubverteilung wird durch das MAXWELL-Feld bestimmt:

$$T_{ab}^{(\text{em})} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd} \right) = \frac{1}{8\pi} \left(F_{ac}F_b{}^c + \tilde{F}_{ac}\tilde{F}_b{}^c \right) = \frac{1}{8\pi} F_a{}^{*c}\bar{F}_{bc}^* \quad (1.12)$$

mit

$$F_{ab}^* \equiv F_{ab} + i\tilde{F}_{ab}, \quad \tilde{F}_{ab} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd}.$$

Dabei ist ϵ_{abcd} der LEVI-CIVITA-Tensor und somit \tilde{F}_{ab} der duale Feldstärketensor. Das Gebiet außerhalb der Staubverteilung wird in dieser Arbeit als Elektrovakuum bezeichnet.

Geladener Staub Für den Energie-Impuls-Tensor innerhalb der Staubverteilung können die beiden Energie-Impuls-Tensoren für Staub und das elektromagnetische Feld einfach addiert werden:⁷

$$T_{ab} = T_{ab}^{(\text{mat})} + T_{ab}^{(\text{em})} = \mu u_a u_b + T_{ab}^{(\text{em})}. \quad (1.13)$$

Hierbei ist u^a die Vierergeschwindigkeit und μ die Energiedichte, die in den hier gewählten Einheiten gleich der Massendichte ist. Da der elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor spurfrei ist, erhält man:

$$T = -\mu.$$

Die Feldgleichungen lassen sich also als

$$R_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} + \frac{1}{2}\mu g_{ab} \right) \quad (1.14)$$

schreiben und werden hier in den weiteren Rechnungen mit $(EF)_{ab}$ bezeichnet.⁸

Der Teilchenstrom sei rein konvektiv, so dass die Viererstromdichte mit der elektrischen Ladungsdichte ϱ_{el} über die Gleichung

$$j^a = \varrho_{\text{el}} u^a \quad (1.15)$$

zusammenhängt. Somit gilt für das Skalarprodukt

$$j^a j_a = \varrho_{\text{el}}^2 u^a u_a = -\varrho_{\text{el}}^2. \quad (1.16)$$

Für die einfache Wahl $\epsilon = \text{konst.}$ variiert dieses in den hier gewählten Einheiten zwischen minus Eins und Eins, wobei für $\epsilon = \pm 1$ die Lösung aus Gründen der Stabilität statisch sein muss und man für $\epsilon = 0$ den ungeladenen Fall erhält.

⁷Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall!

⁸Eine Darstellung in Komponenten bezüglich der Metrik (1.35) findet sich in A.4.2.

1.1.4 Energie-Impuls-Satz

Der lokale Energie-Impuls-Erhaltungssatz lautet

$$T^{ab}{}_{;b} = 0. \quad (1.17)$$

Aus der Divergenz des elektromagnetischen Anteils des Energie-Impuls-Tensors

$$(T^{(\text{em})ab})_{;b} = -F^{ab}j_b$$

ergibt sich die negative LORENTZ-Kraftdichte f^a . Einsetzen des Viererpotentials ergibt

$$f^a = F^{ab}j_b = g^{am}g^{bn}(A_{n,m} - A_{m,n})j_b = g^{am}(A_{n,m} - A_{m,n})j^n. \quad (1.18)$$

Da F^{ab} antisymmetrisch ist, folgt

$$f^a u_a = \varrho_{\text{el}} F^{ab} u_a u_b = 0.$$

Die LORENTZ-Kraftdichte steht also senkrecht auf der Vierergeschwindigkeit. Zusammen mit dem Staubanteil erhält man⁹

$$T^{ab}{}_{;b} = \mu u^b{}_{;b} u^a + \dot{\mu} u^a + \mu \dot{u}^a - f^a = 0. \quad (1.19)$$

Überschieben mit u_a ergibt die baryonische Massenbilanz:

$$(\mu u^a)_{;a} = 0. \quad (1.20)$$

Die Massendichte μ entspricht also der baryonischen Massendichte. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung¹⁰ (1.9) erhält man:

$$(\epsilon \mu u^a)_{;a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu u^a \epsilon_{,a} = \mu \dot{\epsilon} = 0. \quad (1.21)$$

Überschieben von (1.19) mit dem Projektionstensor $h_a^c = g_a^c + u^c u_a$ ergibt die Bewegungsgleichungen

$$\mu \dot{u}^a = \mu \frac{Du^a}{D\tau} = f^a. \quad (1.22)$$

D.h. es gilt lokale Massenerhaltung und die geladenen Staubteilchen bewegen sich unter dem Einfluss der LORENTZ-Kraft.

1.1.5 KILLING-Vektoren

Die Symmetrien dieser Raumzeit werden durch zwei KILLING-Vektoren gekennzeichnet.¹¹ Für Stationarität sei dies ξ und für Axialsymmetrie η . KILLING-Vektoren sind dadurch

⁹Abkürzungen: $\dot{\mu} = \mu_{,n} u^n$ und $\dot{u}^a = u^a{}_{;n} u^n$

¹⁰Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich für konstantes ϵ also sowohl aus den EINSTEIN- als auch, unabhängig davon, aus den MAXWELL-Gleichungen.

¹¹Dieser Abschnitt ist eine Zusammenfassung aus dem Buch [Stephani et al., 2003] der Abschnitte 19.1 bis 19.3.

ausgezeichnet, dass die LIE-Ableitung der Metrik in ihrer Richtung verschwindet. Dies führt auf die KILLING-Gleichungen

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_\eta g_{ab} = \eta_{a;b} + \eta_{b;a} = 0. \quad (1.23)$$

In der Nähe der Rotationsachse muss η raumartig sein und für jeden Punkt auf derselbigen verschwinden.

Für einen infinitesimalen Kreis mit Radius r um die Rotationsachse ist der Umfang in führender Ordnung gleich $2\pi r$. D.h. der Raum ist auf der Achse elementar flach. Dies kann durch die Normierung $\eta^a \eta_a \sim r^2$ erreicht werden. Im Grenzübergang zur Rotationsachse folgt damit die Regularitätsbedingung

$$\frac{(\eta^a \eta_a)_{,b} (\eta^a \eta_a)^{,b}}{4\eta^a \eta_a} \rightarrow 1. \quad (1.24)$$

Ist (1.24) nicht erfüllt, dann ergeben sich konische Singularitäten auf der Achse. Für zusätzlich asymptotisch flache Raumzeiten ist ξ so normiert, dass im Fernfeld

$$\xi^a \xi_a \rightarrow -1 \quad (1.25)$$

gilt. In diesem Fall, der hier im Weiteren untersucht werden soll, bilden ξ und η eine ABEL'sche Gruppe¹² und erfüllen die Gleichung (Kommutatorrelation)

$$\xi^a_{;b} \eta^b - \eta^a_{;b} \xi^b = 0 \quad \text{für} \quad \xi^a \xi_a < 0, \quad \eta^a \eta_a > 0. \quad (1.26)$$

Die KILLING-Trajektorien bilden zweidimensionale Flächen T_2 aufgespannt durch den Bivektor

$$v_{ab} = 2\xi_{[a}\eta_{b]} \quad \text{mit} \quad v_{ab}v^{ab} < 0. \quad (1.27)$$

Ein zweidimensionaler Raum orthogonal zu T_2 ergibt sich nur, wenn der RICCI-Tensor den Gleichungen

$$\xi^d R_{d[a}\xi_b\eta_{c]} = \eta^d R_{d[a}\xi_b\eta_{c]} = 0 \quad (1.28)$$

genügt [Kundt and Trümper, 1966]. In diesem Fall wird die Metrik als orthogonal transitiv bezeichnet. Gleichung (1.28) wird für ideale Flüssigkeiten und EINSTEIN-MAXWELL-Felder erfüllt, wenn für deren Vierergeschwindigkeit bzw. elektromagnetische Viererstromdichte die Zirkularitätsbedingung

$$u_{[a}\xi_b\eta_{c]} = j_{[a}\xi_b\eta_{c]} = 0 \quad (1.29)$$

erfüllt ist. Diese bedeutet, dass u^a und j^a nur Komponenten in Richtung der beiden KILLING-Vektoren haben. Für den Feldstärketensor gilt dann

$$\xi_{[a}\eta_b F_{cd]}^* = F_{ab}^* \xi^a \eta^b = 0. \quad (1.30)$$

Wenn, für EINSTEIN-MAXWELL-Felder außerhalb der Quellen, die KILLING-Vektoren die Gleichungen (1.26), (1.27) und (1.28) erfüllen, dann stimmen die Symmetrien der MAXWELL-Felder mit denen der Raumzeit überein. D.h. die LIE-Ableitungen

$$\mathcal{L}_\xi F_{ab} = F_{ab;i}\xi^i + F_{ai}\xi^i_{;b} - F_{bi}\xi^i_{;a} = 0, \quad (1.31)$$

$$\mathcal{L}_\eta F_{ab} = F_{ab;i}\eta^i + F_{ai}\eta^i_{;b} - F_{bi}\eta^i_{;a} = 0 \quad (1.32)$$

¹²[Carter, 1970]

für den Feldstärketensor verschwinden.

Mit Hilfe der KILLING-Vektoren können einige metrische Komponenten und die Vierergeschwindigkeit einer stationären, rotierenden Materieverteilung auch koordinatenunabhängig charakterisiert werden. Die Vierergeschwindigkeit u^a ist gegeben durch:

$$u^a = \mathcal{S}^{-1/2} (\xi^a + \Omega \eta^a). \quad (1.33)$$

Dabei ist Ω die Winkelgeschwindigkeit und $\mathcal{S}^{-1/2}$ ergibt sich aus

$$\mathcal{S} = - (\xi^b + \Omega \eta^b) (\xi_b + \Omega \eta_b). \quad (1.34)$$

1.1.6 Metrik und Viererpotential

Richtet man das Koordinatensystem an den KILLING-Vektoren $\xi = \partial_t$ und $\eta = \partial_\varphi$ aus und ist die Zirkularitätsbedingung (1.29) erfüllt, dann kann die Metrik in der Form

$$ds^2 = f^{-1} [h (d\varrho^2 + d\zeta^2) + W^2 d\varphi^2] - f (dt + a d\varphi)^2 \quad (1.35)$$

mit den LEWIS-PAPAPETROU-Koordinaten $(\varrho, \zeta, \varphi, t)$ aufgeschrieben werden.¹³ Im Fernfeld ergibt sich hieraus die MINKOWSKI-Metrik in Zylinderkoordinaten. Die vier metrischen Potentiale f, h, W und a hängen nur von ϱ und ζ ab. Für die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ und für $u^t = \mathcal{S}^{-1/2}$ mit

$$\mathcal{S} = f \left[(1 + \Omega a)^2 - \frac{W^2 \Omega^2}{f^2} \right]. \quad (1.36)$$

Die metrischen Komponenten ergeben sich aus den KILLING-Vektoren zu:

$$\xi^a \xi_a = g_{44}, \quad \eta^a \eta_a = g_{33} \quad \text{und} \quad \xi^a \eta_a = g_{34}. \quad (1.37)$$

Später werden hier f und h auch als

$$f = e^{2U} \quad h = e^{2k} \quad (1.38)$$

geschrieben. Das Potential U erhält im NEWTON'schen Grenzfall die Bedeutung des NEWTON'schen Gravitationspotentials. Das Potential a wird in Analogie zur Elektrodynamik auch gravitomagnetisches Potential genannt, da es nur bei bewegten Quellen auftritt.

LORENZ-Eichung

Das Viererpotential A_a ist, da die Symmetrien der Raumzeit auch für das MAXWELL-Feld gelten, nur von ϱ und ζ abhängig. Die nichtverschwindenden Komponenten des antisymmetrischen Feldstärketensors lauten also

$$F_{12} = A_{\zeta, \varrho} - A_{\varrho, \zeta}, \quad F_{13} = A_{\varphi, \varrho}, \quad F_{14} = A_{t, \varrho}, \quad F_{23} = A_{\varphi, \zeta} \quad \text{und} \quad F_{24} = A_{t, \zeta}.$$

¹³[Lewis, 1932], [Papapetrou, 1966]

Für den RICCI-Tensor der Metrik (1.35) gilt

$$R_{13} = R_{14} = R_{23} = R_{24} \equiv 0.$$

Daraus folgt mit den Feldgleichungen (1.14):

$$(A_{\varrho,\zeta} - A_{\zeta,\varrho}) A_{\varphi,\zeta} = (A_{\varrho,\zeta} - A_{\zeta,\varrho}) A_{t,\zeta} = (A_{\zeta,\varrho} - A_{\varrho,\zeta}) A_{\varphi,\varrho} = (A_{\zeta,\varrho} - A_{\varrho,\zeta}) A_{t,\varrho} = 0. \quad (1.39)$$

Unabhängig davon muss A^a die inhomogenen Wellengleichungen (1.8) erfüllen.¹⁴ In Komponenten ausgedrückt ergibt sich

$$0 = \left[\frac{f}{h} W (A_{\zeta,\varrho} - A_{\varrho,\zeta}) \right]_{,\zeta}, \quad (1.40a)$$

$$0 = \left[\frac{f}{h} W (A_{\varrho,\zeta} - A_{\zeta,\varrho}) \right]_{,\varrho}, \quad (1.40b)$$

$$4\pi \frac{h}{f} W j^\varphi = \left[\frac{f}{W} (a A_{t,\varrho} - A_{\varphi,\varrho}) \right]_{,\varrho} + \left[\frac{f}{W} (a A_{t,\zeta} - A_{\varphi,\zeta}) \right]_{,\zeta}, \quad (1.40c)$$

$$4\pi \frac{h}{f} W j^t = \left[\frac{af}{W} A_{\varphi,\varrho} + \frac{W^2 - a^2 f^2}{fW} A_{t,\varrho} \right]_{,\varrho} + \left[\frac{af}{W} A_{\varphi,\zeta} + \frac{W^2 - a^2 f^2}{fW} A_{t,\zeta} \right]_{,\zeta}, \quad (1.40d)$$

da die partiellen Ableitungen nach φ und t verschwinden. Für den Zweivektor $A_N = (A_\varrho, A_\zeta)$ muss also gelten, dass seine Rotation $A_{N,M} - A_{M,N} = 0$ verschwindet.¹⁵ Mit der LORENZ-Eichung

$$\frac{f}{hW} \left(\frac{hW}{f} A^n \right)_{,n} = \frac{f}{hW} \left(\frac{hW}{f} A^N \right)_{,N} = 0, \quad \text{mit } N = 1, 2$$

verschwindet auch die Divergenz von A^N und da er im Fernfeld Null ergeben soll, muss er überall Null sein. Damit ist $A_a = (0, 0, A_\varphi, A_t)$. Die nichtverschwindenden Komponenten des antisymmetrischen Feldstärketensors lauten also

$$F_{13} = A_{\varphi,\varrho}, \quad F_{14} = A_{t,\varrho}, \quad F_{23} = A_{\varphi,\zeta} \quad \text{und} \quad F_{24} = A_{t,\zeta}.$$

Die nichtverschwindenden Komponenten des dualen antisymmetrischen Feldstärketensors lauten damit

$$\tilde{F}^{13} = \frac{f}{Wh} A_{t,\zeta}, \quad \tilde{F}^{14} = -\frac{f}{Wh} A_{\varphi,\zeta}, \quad \tilde{F}^{23} = -\frac{f}{Wh} A_{t,\varrho} \quad \text{und} \quad \tilde{F}^{24} = \frac{f}{Wh} A_{\varphi,\varrho}.$$

¹⁴Der Begriff Wellengleichung wird weiter verwendet. Im stationären Fall kommt es jedoch nicht zur Abstrahlung elektromagnetischer Wellen, da alle Größen und insbesondere die Multipolmomente zeitunabhängig sind. Dies kann man sich so vorstellen, dass die (sowohl elektromagnetischen als auch gravitativen) Wellen, die durch die beschleunigte Bewegung der Staubteilchen abgestrahlt werden, destruktiv interferieren.

¹⁵Der zweite Fall für Gleichung (1.39) wäre $A_{\varphi,\varrho} = A_{\varphi,\zeta} = A_{t,\varrho} = A_{t,\zeta} = 0$. Daraus folgt $j^\varphi = j^t = 0$ und man erhält mit Gleichung (1.15) $\varrho_{\text{el}} = 0$. Da damit die Quellen des Feldes verschwinden, kann diese Möglichkeit ausgeschlossen werden.

WEYL-Koordinaten

Kombiniert man die Feldgleichungen (1.14) zu

$$(EF)_{33} - \frac{W^2 - a^2 f^2}{f^2} (EF)_{44} - 2a(EF)_{34},$$

so heben sich die elektromagnetischen Anteile in den Gleichungen heraus und man erhält

$$\begin{aligned} W_{,\varrho\varrho} + W_{,\zeta\zeta} &= -8\pi\mu \frac{hW}{f} \left(\frac{f}{W^2} u_\varphi^2 - 2\frac{af}{W^2} u_\varphi u_t - \frac{W^2 - a^2 f^2}{W^2 f} u_t^2 + 1 \right) \\ &= -8\pi\mu \frac{hW}{f} (u^a u_a + 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im Fernfeld soll die Metrik (1.35) gegen die MINKOWSKI-Metrik gehen. D.h. für W gilt im Fernfeld $W \rightarrow \varrho$. Da die Feldgleichung $W_{,\varrho\varrho} + W_{,\zeta\zeta} = 0$ im gesamten Raum gilt, folgt aus Sätzen der Potentialtheorie, dass

$$W = \varrho \tag{1.41}$$

die einzige reguläre Lösung im ganzen Raum ist. Man erhält also automatisch die Metrik in WEYL-Koordinaten

$$ds^2 = f^{-1} [h (d\varrho^2 + d\zeta^2) + \varrho^2 d\varphi^2] - f (dt + a d\varphi)^2. \tag{1.42}$$

In den Wellengleichungen (1.40c) und (1.40d) wird W durch ϱ ersetzt.

Viererbeschleunigung und LORENTZ-Kraftdichte

In WEYL-Koordinaten erhält man für die Viererbeschleunigung:

$$\dot{u}^a = u^a_{;n} u^n = (u^a_{,n} + \Gamma^a_{nm} u^m) u^n = \Gamma^a_{nm} u^m u^n = -\frac{1}{2} g^{ab} g_{nm,b} u^m u^n.$$

Nur die ersten beiden Komponenten sind von Null verschieden. Dies gilt auch für die LORENTZ-Kraftdichte und man erhält:

$$\dot{u}^A = -\frac{1}{2} g^{AB} g_{nm,B} u^m u^n, \tag{1.43}$$

$$f^A = \epsilon \mu g^{AB} A_{n,B} u^n. \tag{1.44}$$

Die Bewegungsgleichungen nach Gleichung (1.22) lauten also

$$g_{nm,A} u^m u^n + 2\epsilon A_{n,A} u^n = 0. \tag{1.45}$$

1.1.7 Die Feld- und Wellengleichungen

Die Wellengleichungen können mit Hilfe des Nablaoperators¹⁶ zu

$$4\pi \frac{h}{f} j^\varphi = \nabla \cdot \left[\frac{f}{\varrho^2} (a \nabla A_t - \nabla A_\varphi) \right] \quad (1.46)$$

$$-4\pi \frac{h}{f} j^t = \nabla \cdot \left[\frac{af}{\varrho^2} (a \nabla A_t - \nabla A_\varphi) - \frac{1}{f} \nabla A_t \right] \quad (1.47)$$

zusammengefasst werden.

Die Kombination der Feldgleichungen $(EF)_{34} - a(EF)_{44}$ führt mit den Wellengleichungen und $j^a = \epsilon \mu u^a$ auf:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f^2}{\varrho} a_{,\varrho} \right)_{,\varrho} + \left(\frac{f^2}{\varrho} a_{,\zeta} \right)_{,\zeta} \\ &= -4 \left[\left(\frac{A_t f}{\varrho} (a A_{t,\varrho} - A_{\varphi,\varrho}) \right)_{,\varrho} + \left(\frac{A_t f}{\varrho} (a A_{t,\zeta} - A_{\varphi,\zeta}) \right)_{,\zeta} \right] + 16\pi \mu \varrho \frac{h}{f} u^\varphi (\epsilon A_t + u_t) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\nabla \cdot \left[\frac{f^2}{\varrho^2} \nabla a + 4 \frac{f}{\varrho^2} A_t (a \nabla A_t - \nabla A_\varphi) \right] = 16\pi \mu \varrho \frac{h}{f} u^\varphi (\epsilon A_t + u_t). \quad (1.48)$$

Die Feldgleichung $(EF)_{44}$ lässt sich zu

$$\begin{aligned} f \Delta f - (\nabla f)^2 + \frac{f^4}{\varrho^2} (\nabla a)^2 &= 2f \left[(\nabla A_t)^2 + \frac{f^2}{\varrho^2} (a \nabla A_t - \nabla A_\varphi)^2 \right] \\ &+ 8\pi \mu f h [2u^\varphi (u_\varphi - a u_t) + 1] \end{aligned} \quad (1.49)$$

zusammenfassen. Aus $(EF)_{11} - (EF)_{22}$ und $(EF)_{12}$ erhält man die Ableitungen von $\ln h$.

$$\begin{aligned} (\ln h)_{,\varrho} &= \frac{1}{2} \varrho \left[(\ln f)_{,\varrho}^2 - (\ln f)_{,\zeta}^2 - \frac{f^2}{\varrho^2} \left((a_{,\varrho})^2 - (a_{,\zeta})^2 \right) \right] + 2 \frac{f}{\varrho} \left[(A_{\varphi,\varrho})^2 - (A_{\varphi,\zeta})^2 \right] \\ &- 2 \left[\frac{\varrho^2 - a^2 f^2}{f \varrho} \left((A_{t,\varrho})^2 - (A_{t,\zeta})^2 \right) + 2 \frac{af}{\varrho} (A_{\varphi,\varrho} A_{t,\varrho} - A_{\varphi,\zeta} A_{t,\zeta}) \right] \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} (\ln h)_{,\zeta} &= \varrho \left((\ln f)_{,\varrho} (\ln f)_{,\zeta} - \frac{f^2}{\varrho^2} a_{,\varrho} a_{,\zeta} \right) \\ &+ 4 \left[\frac{f}{\varrho} A_{\varphi,\varrho} A_{\varphi,\zeta} - \frac{\varrho^2 - a^2 f^2}{f \varrho} A_{t,\varrho} A_{t,\zeta} - \frac{af}{\varrho} (A_{\varphi,\zeta} A_{t,\varrho} + A_{\varphi,\varrho} A_{t,\zeta}) \right] \end{aligned} \quad (1.51)$$

Mit Hilfe der anderen Gleichungen lässt sich zeigen, dass die Integrabilitätsbedingung

$$(\ln h)_{,\varrho\zeta} = (\ln h)_{,\zeta\varrho}$$

erfüllt ist.

¹⁶Der Nablaoperator ∇ wird dabei als Abkürzung wie im dreidimensionalen flachen Raum verwendet. Die Koordinaten ϱ , φ und ζ entsprechen dabei Zylinderkoordinaten.

1.1.8 Extremal geladener Staub (ECD)

Für $\epsilon = \pm 1$ erhält man den statischen Grenzfall mit extremal geladenen Staub.¹⁷ Dieser wird im Folgenden oft mit ECD (electrical counterpouised dust) abgekürzt.¹⁸ Lösungen für extremal geladenen Staub liegen vermutlich in der PAPAPETROU-MAJUMDAR-Klasse (siehe [Papapetrou, 1947], [Majumdar, 1947]).¹⁹ Hier interessieren Elektrovakuumlösungen die axialsymmetrisch sind, so dass sie in der WEYL-Klasse liegen werden [Weyl, 1917]. Die PAPAPETROU-MAJUMDAR-Klasse ist in dem Sinne genereller als die WEYL-Klasse, da sie keine räumlichen Symmetrien der Raumzeit voraussetzt. Sie ist jedoch in dem Sinne weniger generell, da hier ein speziellerer funktionaler Zusammenhang zwischen der Metrikkomponente g_{44} und dem elektrostatischen Potential gewählt wird (siehe unten).

Statische axialsymmetrische Elektrovakuuum-Lösungen sind durch die Existenz zweier kommutierender hyperflächen-orthogonaler KILLING-Vektoren ξ und η invariant charakterisiert.²⁰ In diesem Fall verschwindet das Potential a und man erhält die WEYL-Metrik

$$ds^2 = f^{-1} [h (d\varrho^2 + d\zeta^2) + \varrho^2 d\varphi^2] - f dt^2. \quad (1.52)$$

Das Viererpotential hat nur noch eine vierte Komponente

$$A_a = (0, 0, 0, -\alpha). \quad (1.53)$$

Im Elektrovakuuum ist der allgemeinste Zusammenhang zwischen der Metrikkomponente g_{44} und dem elektrostatischen Potential α für asymptotisch flache Lösungen durch

$$g_{44} = -\alpha^2 + 2c\alpha - 1, \quad \text{mit } c = \text{konstant}$$

gegeben [Weyl, 1917]. Betrachtet man g_{44} und α im Fernfeld, ergibt sich:²¹

$$r^2 = \varrho^2 + \zeta^2 : \quad g_{44} = -1 + \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) = -1 + \frac{2cQ}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad \text{mit } \alpha = \frac{Q}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}).$$

Koeffizientenvergleich in r^{-1} und eine spezielle Wahl für c ergibt die Relation

$$c = \frac{M}{Q} \doteq \epsilon^{-1} \quad \text{mit } \epsilon := \pm 1 \quad (1.54)$$

Die spezielle Wahl für c führt hier zu einer axialsymmetrischen Lösung der PAPAPETROU-MAJUMDAR-Klasse und es lässt sich

$$f = (\epsilon^{-1}\alpha - 1)^2 \quad \text{mit } \epsilon := \pm 1 \quad (1.55)$$

schreiben. Aus $g_{44} \neq 0$ außerhalb eines Ereignishorizonts und $\alpha \rightarrow 0$ für $r \rightarrow 0$ erhält man

$$|\epsilon^{-1}\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad e^U = |\epsilon^{-1}\alpha - 1| = 1 - \epsilon^{-1}\alpha. \quad (1.56)$$

¹⁷Eine ausführliche Beschreibung findet man in der Diplomarbeit von HÜTTEN [Hütten, 2011].

¹⁸[Bonnor and Wickramasuriya, 1972]

¹⁹Es ist noch nicht eindeutig bewiesen, dass extremal geladener Staub immer durch die PAPAPETROU-MAJUMDAR-Klasse beschrieben wird. Bis jetzt gibt es jedoch noch kein Gegenbeispiel, so dass hier von dieser Klasse ausgegangen wird. Dies entspricht den Annahmen von MAJUMDAR [Majumdar, 1947].

²⁰Z.B. [Stephani et al., 2003].

²¹Hierbei ist M die gravitative Masse und Q die Ladung. Siehe dazu Abschnitt 1.3.

Multiplikation mit $\epsilon^2 = 1$ ergibt

$$e^U + \epsilon\alpha = 1. \quad (1.57)$$

Für die innere Lösung der extremal geladenen Staubscheibe wird jetzt angenommen, dass die Form der Metrik nach Gleichung (1.52) beibehalten werden kann und der Zusammenhang von f und α nach Gleichung (1.55) bestehen bleibt (siehe Fußnote 19). Man erhält also die bisher verwendeten Feld- und Wellengleichungen mit $u^\varphi = a = A_\varphi = 0$ und $u^t = e^{-U}$. Jetzt sollen außerdem $f = e^{2U}$ und $h = e^{2k}$ gesetzt werden. Aus den beiden Feldgleichungen für k erhält man $k = 0$, da es auf der Rotationsachse verschwinden muss. Für e^{-U} ergibt sich die recht einfache Gleichung

$$\Delta e^{-U} = -4\pi\mu e^{-3U}. \quad (1.58)$$

Jetzt wird das Potential

$$V = 1 - e^{-U} \quad (1.59)$$

eingeführt. Dieses wird im NEWTON'schen Grenzfall zum NEWTON'schen Gravitationspotential. Für die Massendichte kann man die Funktion

$$\mu = \sigma_{\text{st}}(\varrho, \zeta) e^{3U} \quad (1.60)$$

wählen. Die Innere Feldgleichung lautet damit

$$\Delta V = 4\pi\sigma_{\text{st}} \quad (1.61)$$

und man hat für V eine POISSON-Gleichung. Das elektrische Potential α berechnet sich nach Gleichung (1.57) zu

$$\alpha = -\epsilon \frac{V}{1 - V}. \quad (1.62)$$

Die Lösung im Elektrovakuum erfüllt die LAPLACE-Gleichung

$$\Delta V = 0. \quad (1.63)$$

Das in Kapitel 5 formulierte Randwertproblem lässt (im ECD-Fall) noch eine beliebige Vorgabe der Massendichte σ_{st} zu.

1.1.9 Geladener rotierender Staub im strengen thermodynamischen Gleichgewicht

Für geladenen Staub können aus thermodynamischer Sicht dissipative Effekte auftreten. Drei physikalische Eigenschaften der Materie, nämlich von Null verschiedene **Temperatur**, **Reibung** und **elektrische Leitfähigkeit**, sorgen für Abstrahlung von Energie. Ein Materiemodell, im thermodynamischen Gleichgewicht betrachtet, lässt sich dadurch charakterisieren, ob es die beiden zuletzt genannten Eigenschaften hat oder nicht.

Nimmt man einen von Null verschiedenen Reibungskoeffizienten an, so wird sich im thermodynamischen Gleichgewicht eine starre Rotation, d.h. $\Omega = \text{konst.}$, ergeben. Solange dies nicht der Fall ist wird durch Reibung zwischen den Staubteilchen weiter Energie abgestrahlt. Gibt es keine Reibung, ist auch differentielle Rotation möglich.

Tritt eine von Null verschiedene elektrische Leitfähigkeit auf, so wird im thermodynamischen Gleichgewicht die LORENTZ-Kraft verschwinden, d.h. die Staubteilchen bewegen sich geodätisch. Solange sie noch von Null verschieden ist, fließen auch elektrische Ströme und es kommt zur Abstrahlung von OHM'scher Wärme. Man erhält eine bestimmte Funktion für die spezifische elektrische Ladung ϵ , die sich aus der Bedingung verschwindender LORENTZ-Kraft ergibt. Ist keine elektrische Leitfähigkeit vorhanden, kann man ein spezielles Material mit $\epsilon = \text{konst.}$ konstruieren. Dies ist jedoch nicht zwingend.

1.2 Die ERNST-Gleichungen

1.2.1 Die Potentiale \mathcal{E} und Φ

Im Elektrovakuum verschwinden in den Feld- und Wellengleichungen alle Terme mit μ . Um die vier Potentiale A_φ, A_t, f und a zu bestimmen, werden die Wellengleichungen (1.40c) und (1.40d) und die Feldgleichungen (1.49) und (1.48) verwendet. Diese Gleichungen lassen sich zu

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{f}{\varrho^2} (a \nabla A_t - \nabla A_\varphi) \right], \quad (1.64a)$$

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{af}{\varrho^2} (a \nabla A_t - \nabla A_\varphi) - \frac{1}{f} \nabla A_t \right], \quad (1.64b)$$

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{f^2}{\varrho^2} \nabla a + 4 \frac{f}{\varrho^2} A_t (a \nabla A_t - \nabla A_\varphi) \right], \quad (1.64c)$$

$$f \Delta f = (\nabla f)^2 - \frac{f^4}{\varrho^2} (\nabla a)^2 + 2f \left[(\nabla A_t)^2 + \frac{f^2}{\varrho^2} (a \nabla A_t - \nabla A_\varphi)^2 \right] \quad (1.64d)$$

zusammenfassen. Die Gleichungen für h sind entkoppelt und h kann am Ende durch ein wegunabhängiges Linienintegral bestimmt werden.

Sei $P(\varrho, \zeta)$ ein beliebiges Potential, dann gelten für $P(\varrho, \zeta)$ die Gleichungen

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi \times \nabla P \right) = \frac{1}{\varrho} (P_{,\zeta\varrho} - P_{,\varrho\zeta}) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\varphi \times (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla P) = -\nabla P.$$

In Komponenten ergibt sich $\mathbf{e}_\varphi \times \nabla P = \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mathbf{e}_\varrho - \frac{\partial P}{\partial \varrho} \mathbf{e}_\zeta$. Jetzt sollen in drei Teilen die ERNST-Gleichungen im Elektrovakuum hergeleitet werden. Dabei wird die Rechnung aus der Arbeit von ERNST [Ernst, 1968]²² nachvollzogen.

Teil I Die Wellengleichung (1.64a) ist Integrabilitätsbedingung für ein Potential β , für das

$$\mathbf{e}_\varphi \times \nabla \beta = \frac{f}{\varrho} (a \nabla A_t - \nabla A_\varphi) \quad (1.65)$$

gilt. Die Integrationskonstante wird so gewählt, dass β im Fernfeld verschwindet. Umgestellt und multipliziert mit $\mathbf{e}_\varphi \times$ ergibt sich

$$\frac{1}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi \times \nabla A_\varphi = \frac{a}{\varrho} (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla A_t) + \frac{1}{f} \nabla \beta. \quad (1.66)$$

²²Dort wird für den Feldstärketensor eine andere Vorzeichenkonvention verwendet.

Einsetzen von (1.65) in die Wellengleichung (1.64b) und Divergenzbildung von (1.66) ergibt die beiden Gleichungen:

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{a}{\varrho} (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla \beta) - \frac{1}{f} \nabla A_t \right], \quad (1.67)$$

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{a}{\varrho} (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla A_t) + \frac{1}{f} \nabla \beta \right]. \quad (1.68)$$

Führt man das komplexe Potential

$$\Phi = \alpha + i\beta \quad \text{mit} \quad \alpha = -A_t \quad (1.69)$$

ein, dann lassen sich die Gleichungen (1.67) und (1.68) zu

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{1}{f} \nabla \Phi - i \frac{a}{\varrho} (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla \Phi) \right] \quad (1.70)$$

kombinieren. Hieraus ergibt sich in Teil III die zweite ERNST-Gleichung.

Teil II Die Feldgleichung (1.64c) lässt sich als

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \left[\frac{f^2}{\varrho^2} \nabla a - \frac{2}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi \times (2\alpha \nabla \beta) \right] \\ &= \nabla \cdot \left[\frac{f^2}{\varrho^2} \nabla a - \frac{2}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi \times (\alpha \nabla \beta - \beta \nabla \alpha) \right] - \nabla \cdot \left[\frac{2}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi \times \nabla (\alpha \beta) \right] \end{aligned}$$

schreiben. Der hintere Term verschwindet und man erhält

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{f^2}{\varrho^2} \nabla a - \frac{2}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi \times \Im (\bar{\Phi} \nabla \Phi) \right]. \quad (1.71)$$

Die Feldgleichung (1.64c) ist damit Integrabilitätsbedingung für ein Potential b für das

$$\mathbf{e}_\varphi \times \nabla b = \frac{f^2}{\varrho} \nabla a - 2 \mathbf{e}_\varphi \times \Im (\bar{\Phi} \nabla \Phi) \quad (1.72)$$

gilt. Die Integrationskonstante wird so gewählt, dass auch b im Fernfeld verschwindet. Umgestellt und multipliziert mit $\mathbf{e}_\varphi \times$ ergibt sich

$$\frac{1}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi \times \nabla a = -\frac{1}{f^2} [\nabla b + 2 \Im (\bar{\Phi} \nabla \Phi)]. \quad (1.73)$$

Aus der Divergenzbildung erhält man:

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{1}{f^2} (\nabla b + 2 \Im (\bar{\Phi} \nabla \Phi)) \right]. \quad (1.74)$$

$$\Rightarrow f \Delta b = 2 \nabla f \cdot \nabla b + 4 \Im (\bar{\Phi} \nabla \Phi) \cdot \nabla f - 2f [\Im (\nabla \bar{\Phi} \nabla \Phi) + \Im (\bar{\Phi} \Delta \Phi)]. \quad (1.75)$$

Aus den Gleichungen (1.65) und (1.73) folgt, dass

$$(\nabla\beta)^2 = (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla\beta)^2 = \frac{f^2}{\rho^2} (a\nabla A_t - \nabla A_\varphi)^2 \quad \text{und} \quad (1.76)$$

$$(\nabla a)^2 = (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla a)^2 = \frac{\rho^2}{f^4} [\nabla b + 2\Im(\bar{\Phi}\nabla\Phi)]^2 \quad (1.77)$$

gilt und man erhält für (1.64d) den Ausdruck

$$f\Delta f - (\nabla f)^2 + [\nabla b + 2\Im(\bar{\Phi}\nabla\Phi)]^2 = 2f [(\Re\nabla\Phi)^2 + (\Im\nabla\Phi)^2] = 2f\nabla\bar{\Phi} \cdot \nabla\Phi. \quad (1.78)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die erste ERNST-Gleichung, wie in Abschnitt III gezeigt wird.

Teil III Jetzt wird das komplexe Potential \mathcal{E} mit

$$\mathcal{E} = (f - \bar{\Phi}\Phi) + ib, \quad (1.79)$$

eingeführt. Daraus ergeben sich die Gleichungen²³

$$\begin{aligned} \nabla\mathcal{E} &= \nabla f - 2\Re(\bar{\Phi}\nabla\Phi) + i\nabla b, \\ \Delta\mathcal{E} &= \Delta f - 2\Re[\nabla\bar{\Phi} \cdot \nabla\Phi + \bar{\Phi}\Delta\Phi] + i\Delta b, \\ (\nabla\mathcal{E})^2 &= (\nabla f)^2 - (\nabla b)^2 + 4[\Re(\bar{\Phi}\nabla\Phi)]^2 - 4\nabla f \cdot \Re(\bar{\Phi}\nabla\Phi) \\ &\quad + 2i[\nabla f \cdot \nabla b - 2\nabla b \cdot \Re(\bar{\Phi}\nabla\Phi)]. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1.70) ergibt sich

$$\begin{aligned} f\Delta\Phi &= \nabla f \cdot \nabla\Phi + if^2 \left[\frac{1}{\rho} (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla\Phi) \cdot \nabla a + a\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi \times \nabla\Phi \right) \right] \\ &= (\nabla f - 2\Re(\bar{\Phi}\nabla\Phi) + i\nabla b + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi) \cdot \nabla\Phi. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Aus Gleichung (1.78) ergibt sich

$$f\Delta f = (\nabla f)^2 - (\nabla b)^2 - 4\nabla b \cdot \Im(\bar{\Phi}\nabla\Phi) - 4[\Im(\bar{\Phi}\nabla\Phi)]^2 + 2f\nabla\bar{\Phi} \cdot \nabla\Phi.$$

Unter Verwendung von Gleichung (1.75) erhält man

$$\begin{aligned} f\Delta\mathcal{E} &= (\nabla f)^2 - (\nabla b)^2 - 4\nabla b \cdot \Im(\bar{\Phi}\nabla\Phi) - 4[\Im(\bar{\Phi}\nabla\Phi)]^2 \\ &\quad + 2f\nabla\bar{\Phi} \cdot \nabla\Phi - 2f\Re[\nabla\bar{\Phi} \cdot \nabla\Phi + \bar{\Phi}\Delta\Phi] \\ &\quad + 2i[\nabla f \cdot \nabla b + 2\nabla f \cdot \Im(\bar{\Phi}\nabla\Phi) - f[\Im(\nabla\bar{\Phi} \cdot \nabla\Phi) + \Im(\bar{\Phi}\Delta\Phi)]] \\ &= (\nabla\mathcal{E})^2 + 4i\nabla b \cdot \bar{\Phi}\nabla\Phi - 4|\bar{\Phi}\nabla\Phi|^2 + 4\nabla f \cdot \bar{\Phi}\nabla\Phi - 2f\bar{\Phi}\Delta\Phi. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Setzt man jetzt Gleichung (1.70) ein, erhält man

$$\begin{aligned} f\Delta\mathcal{E} &= (\nabla\mathcal{E})^2 + 4i\nabla b \cdot \bar{\Phi}\nabla\Phi - 4|\bar{\Phi}\nabla\Phi|^2 + 4\nabla f \cdot \bar{\Phi}\nabla\Phi \\ &\quad - 2(\nabla f - 2\Re(\bar{\Phi}\nabla\Phi) + i\nabla b + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi) \cdot \bar{\Phi}\nabla\Phi \\ &= (\nabla\mathcal{E})^2 + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi \cdot (\nabla f - 2\Re(\bar{\Phi}\nabla\Phi) + i\nabla b). \end{aligned} \quad (1.82)$$

²³Mit $\Re(\dots)$ bzw. $\Im(\dots)$ wird der Real- bzw. Imaginärteil des Ausdrucks in den Klammern bezeichnet.

Aus den Gleichungen (1.82) und (1.80) erhält man die beiden gekoppelten ERNST-Gleichungen

$$(\Re\mathcal{E} + \bar{\Phi}\Phi) \Delta\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi) \cdot \nabla\mathcal{E}, \quad (1.83)$$

$$(\Re\mathcal{E} + \bar{\Phi}\Phi) \Delta\Phi = (\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi) \cdot \nabla\Phi \quad (1.84)$$

mit $\mathcal{E} = f - \Phi\bar{\Phi} + ib$ und $\Phi = \alpha + i\beta$. In Komponenten ergeben sich

$$b_{,\varrho} = -\frac{f^2}{\varrho} a_{,\zeta} - 2\alpha\beta_{,\varrho} + 2\beta\alpha_{,\varrho}, \quad b_{,\zeta} = \frac{f^2}{\varrho} a_{,\varrho} - 2\alpha\beta_{,\zeta} + 2\beta\alpha_{,\zeta}, \quad (1.85a)$$

$$\beta_{,\varrho} = \frac{f}{\varrho} (a\alpha_{,\zeta} + A_{\varphi,\zeta}), \quad \beta_{,\zeta} = -\frac{f}{\varrho} (a\alpha_{,\varrho} + A_{\varphi,\varrho}). \quad (1.85b)$$

Die Feldgleichungen (1.50) und (1.51) lassen sich mit

$$\begin{aligned} (\ln h)_{,\varrho} &= \frac{\varrho}{2f^2} [(\mathcal{E}_{,\varrho} + 2\bar{\Phi}\Phi_{,\varrho})(\bar{\mathcal{E}}_{,\varrho} + 2\Phi\bar{\Phi}_{,\varrho}) - (\mathcal{E}_{,\zeta} + 2\bar{\Phi}\Phi_{,\zeta})(\bar{\mathcal{E}}_{,\zeta} + 2\Phi\bar{\Phi}_{,\zeta})] \\ &\quad - 2\frac{\varrho}{f} (\Phi_{,\varrho}\bar{\Phi}_{,\varrho} - \Phi_{,\zeta}\bar{\Phi}_{,\zeta}), \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned} (\ln h)_{,\zeta} &= \frac{\varrho}{2f^2} [(\mathcal{E}_{,\varrho} + 2\bar{\Phi}\Phi_{,\varrho})(\bar{\mathcal{E}}_{,\zeta} + 2\Phi\bar{\Phi}_{,\zeta}) + (\mathcal{E}_{,\zeta} + 2\bar{\Phi}\Phi_{,\zeta})(\bar{\mathcal{E}}_{,\varrho} + 2\Phi\bar{\Phi}_{,\varrho})] \\ &\quad - 2\frac{\varrho}{f} (\Phi_{,\varrho}\bar{\Phi}_{,\zeta} + \Phi_{,\zeta}\bar{\Phi}_{,\varrho}) \end{aligned} \quad (1.87)$$

durch die Potentiale \mathcal{E} und Φ ausdrücken.

1.2.2 Die Potentiale ξ und q

Führt man mit

$$\mathcal{E} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{q}{1 + \xi} \quad (1.88)$$

zwei neue Potentiale ein, dann ergeben sich die Feldgleichungen (1.83) und (1.84) zu

$$(\xi\bar{\xi} - q\bar{q} - 1) \Delta\xi = 2(\bar{\xi}\nabla\xi - \bar{q}\nabla q) \cdot \nabla\xi, \quad (1.89)$$

$$(\xi\bar{\xi} - q\bar{q} - 1) \Delta q = 2(\bar{\xi}\nabla\xi - \bar{q}\nabla q) \cdot \nabla q. \quad (1.90)$$

Aus dem Verhalten dieser Potentiale auf der ζ -Achse lässt sich ein Zusammenhang zu den Multipolmomenten herstellen (siehe Abschnitt 1.3).

1.2.3 Äquatorsymmetrie

Jetzt soll dargestellt werden, wann eine stationäre und axialsymmetrische Raumzeit auch äquatorsymmetrisch ist (siehe [Ernst et al., 2006]).²⁴ Die Massendichte μ muss eine gerade Funktion in ζ sein. Für die Metrik (1.42) einer äquatorsymmetrischen Lösung der EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen gilt:

$$g_{ab}(\varrho, -\zeta) = g_{ab}(\varrho, \zeta). \quad (1.91)$$

²⁴Hier wird davon ausgegangen, dass für stationäre und axialsymmetrische Raumzeiten auch Äquatorsymmetrie gilt. Dies kann im NEWTON'schen Grenzfall gezeigt werden [Lichtenstein, 1933] und in der Allgemeinen Relativitätstheorie deuten alle Indizien in diese Richtung [Lindblom, 1992].

D.h. die metrischen Potentiale sind gerade Funktionen in ζ mit

$$f(\varrho, -\zeta) = f(\varrho, \zeta), \quad a(\varrho, -\zeta) = a(\varrho, \zeta) \quad \text{und} \quad h(\varrho, -\zeta) = h(\varrho, \zeta). \quad (1.92)$$

Wenn die Massendichte μ eine gerade Funktion ist, so ergibt sich aus den inhomogenen MAXWELL-Gleichungen, dass dies auch für das Viererpotential gelten muss:

$$A_\varphi(\varrho, -\zeta) = A_\varphi(\varrho, \zeta) \quad \text{und} \quad A_t(\varrho, -\zeta) = A_t(\varrho, \zeta). \quad (1.93)$$

Die Potentiale β und b sind ungerade Funktionen in ζ mit

$$b(\varrho, -\zeta) = -b(\varrho, \zeta) \quad \text{und} \quad \beta(\varrho, -\zeta) = -\beta(\varrho, \zeta). \quad (1.94)$$

Die ERNST-Potentiale \mathcal{E} und Φ sind dann äquatorsymmetrisch für²⁵

$$\mathcal{E}(\rho, -\zeta) = \overline{\mathcal{E}(\rho, \zeta)} \quad \text{und} \quad \Phi(\rho, -\zeta) = \overline{\Phi(\rho, \zeta)}. \quad (1.95)$$

Für die ERNST-Potentiale ξ und q gilt im äquatorsymmetrischen Fall

$$\xi(\rho, -\zeta) = \overline{\xi(\rho, \zeta)} \quad \text{und} \quad q(\rho, -\zeta) = \overline{q(\rho, \zeta)}. \quad (1.96)$$

Die positive bzw. negative Symmetrieachse wird hier mit \mathcal{A}^\pm bezeichnet. Für die ERNST-Potentiale auf \mathcal{A}^+ gelten die Beziehungen

$$\mathcal{E}_+(\zeta)\overline{\mathcal{E}_+(-\zeta)} = 1 \quad \text{und} \quad \Phi_+(\zeta) = -\mathcal{E}_+(\zeta)\overline{\Phi_+(-\zeta)}. \quad (1.97)$$

1.2.4 Invarianztransformationen

Eine gegebene (Elektro-)Vakuumlösung (\mathcal{E}, Φ) der ERNST-Gleichungen mit einem nicht-verschwindenden KILLING-Feld kann durch eine Invarianztransformation in eine neue Lösung (\mathcal{E}^t, Φ^t) überführt werden, die nicht durch Koordinatentransformationen zu erreichen ist. Dieser neuen Lösung liegt im Allgemeinen ein anderes erzeugendes Materiemodell zugrunde als der Ausgangslösung. Für dieses neue Materiemodell lässt sich meist keine physikalisch sinnvolle Interpretation finden. Es gibt eine Reihe von Invarianztransformationen, in die insgesamt acht reellen Parameter eingehen und die hintereinander ausgeführt werden können [Neugebauer and Kramer, 1969]. Es ergeben sich fünf Gleichungspaare

$$\mathcal{E}^t = c_1 \bar{c}_1 \mathcal{E}, \quad \Phi^t = c_1 \Phi, \quad (1.98a)$$

$$\mathcal{E}^t = \mathcal{E} + ik_1, \quad \Phi^t = \Phi, \quad (1.98b)$$

$$\mathcal{E}^t = \frac{\mathcal{E}}{1 + ik_2 \mathcal{E}}, \quad \Phi^t = \frac{\Phi}{1 + ik_2 \mathcal{E}}, \quad (1.98c)$$

$$\mathcal{E}^t = \mathcal{E} - 2\bar{c}_2 \Phi - c_2 \bar{c}_2, \quad \Phi^t = \Phi + c_2, \quad (1.98d)$$

$$\mathcal{E}^t = \frac{\mathcal{E}}{1 - 2\bar{c}_3 \Phi - c_3 \bar{c}_3 \mathcal{E}}, \quad \Phi^t = \frac{\Phi + c_3 \mathcal{E}}{1 - 2\bar{c}_3 \Phi - c_3 \bar{c}_3 \mathcal{E}}, \quad (1.98e)$$

²⁵Im Allgemeinen muss eine „duale Rotation“ $\Phi \rightarrow e^{2i\delta} \Phi$ mit der reellen Konstanten δ berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 1.2.4). Dabei erhält man ein magnetisches Monopolmoment, das hier ausgeschlossen werden soll.

mit drei komplexen Konstanten c_1, c_2, c_3 und zwei reellen Konstanten k_1 und k_2 , die zusammen die acht reellen Parameter der isometrischen Gruppe G_8 ergeben.²⁶ Gleichung (1.98a) stellt eine „duale Rotation“ nach Fußnote 25 dar. Gleichungen (1.98b) und (1.98d) sind reine Eichtransformationen, die weder die Raumzeit noch das MAXWELL-Feld verändern.

Setzt man das Gleichungspaar (1.98b) in (1.98c) und dies wieder in (1.98a) ein und wählt die Parameter als $k_2 = 1/k_1$ und $c_1 = i/k_1$, erhält man

$$\mathcal{E}^t = \frac{c_1 \bar{c}_1 (\mathcal{E} + ik_1)}{1 + ik_2 (\mathcal{E} + ik_1)} = \frac{\mathcal{E} + ik_1}{ik_1 \mathcal{E}}, \quad \Phi^t = \frac{c_1 \Phi}{1 + ik_2 (\mathcal{E} + ik_1)} = -ic_1 k_1 \frac{\Phi}{\mathcal{E}} = \frac{\Phi}{\mathcal{E}}.$$

Im Limes $k_1 \rightarrow \infty$ ergeben sich die Inversionsrelationen

$$\mathcal{E}^t = \frac{1}{\mathcal{E}}, \quad \Phi^t = \frac{\Phi}{\mathcal{E}}. \quad (1.99)$$

Auch diese erfüllen die ERNST-Gleichungen. Zudem lassen sich durch Hintereinanderausführung von (1.99)→(1.98b)→(1.99) das Gleichungspaar (1.98c) und analog durch (1.99)→(1.98d)→(1.99) das Gleichungspaar (1.98e) gewinnen.

Gleichung (1.98e) ist eine verallgemeinerte Form der HARRISON-Transformation

$$\mathcal{E}_{ev} = \frac{\mathcal{E}_v}{1 - c_3 \bar{c}_3 \mathcal{E}_v} \quad \text{und} \quad \Phi_{ev} = c_3 \frac{\mathcal{E}_v}{1 - c_3 \bar{c}_3 \mathcal{E}_v} \quad \text{mit} \quad c_3 = \text{konstant} \in \mathbb{C}, \quad (1.100)$$

mit der sich aus reinen Vakuumlösungen der ERNST-Potentiale \mathcal{E}_v und $\Phi_v = 0$, Elektrovakuumlösungen \mathcal{E}_{ev} und Φ_{ev} erzeugen lassen [Harrison, 1968].

1.3 Multipolmomente

Die Potentiale ξ und q lassen sich im Fernfeld auf \mathcal{A}^+ jeweils in eine Reihe in $1/\zeta$ entwickeln:

$$\xi_+ = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{\zeta^n}, \quad q_+ = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{\zeta^n}. \quad (1.101)$$

Die gravitativen und die elektromagnetischen Multipolmomente P_n und Q_n nach SIMON²⁷ lassen sich aus den TAYLOR-Koeffizienten m_n und e_n dieser beiden Reihen berechnen. Im Falle von Äquatorsymmetrie kann man mit Gleichung (1.97) zeigen, dass die m_n für gerades n reell und für ungerades n rein imaginär sind. Ohne „duale Rotation“ gilt das auch für die e_n und damit auch für alle Multipolmomente. Die ersten gravitativen Multipolmomente P_n und elektromagnetischen Multipolmomente Q_n berechnen sich zu

$$\begin{aligned} P_0 &= m_0 = M, & Q_0 &= e_0 = Q, \\ P_1 &= m_1 = iJ, & Q_1 &= e_1 = iD, \\ P_2 &= m_2, & Q_2 &= e_2, \\ P_3 &= m_3, & Q_3 &= e_3, \\ P_4 &= m_4 - \frac{1}{7}m_0 M_{20} + \frac{1}{7}e_0 S_{20} + \frac{3}{70}e_1 S_{10}, & Q_4 &= e_4 + \frac{1}{7}e_0 Q_{20} - \frac{1}{7}m_0 H_{20} - \frac{3}{70}m_1 H_{10}, \end{aligned} \quad (1.102)$$

²⁶Das metrische Potential h bleibt von den Transformationen unberührt: $h^t = h$.

²⁷Die Multipolmomente nach SIMON [Simon, 1984] stellen eine Verallgemeinerung der Momente nach GERCH und HANSEN auf Elektrovakuum-Raumzeiten dar.

mit

$$\begin{aligned} M_{ij} &= m_i m_j - m_{i-1} m_{j+1}, & Q_{ij} &= e_i e_j - e_{i-1} e_{j+1}, \\ S_{ij} &= m_i e_j - m_{i-1} e_{j+1}, & H_{ij} &= e_i m_j - e_{i-1} m_{j+1}. \end{aligned}$$

Für die höheren Momente wird der Zusammenhang zwischen den Multipolmomenten und den m_n sowie e_n immer komplizierter, kann aber prinzipiell durch einen Algorithmus berechnet werden.²⁸ Die Multipolmomente M , J , Q und D sind gravitative Masse, Drehimpuls (ζ -Komponente), elektrische Ladung und magnetisches Dipolmoment (ζ -Komponente).

1.4 Das mitrotierende Bezugssystem

Ein mitbewegtes Koordinatensystem, in dem für die Vierergeschwindigkeit

$$u^{\alpha'} = 0 \tag{1.103}$$

gilt, kann lokal²⁹ immer eingeführt werden (siehe z.B. [Stephani, 1991]). Hier kann man dies durch die Koordinatentransformation

$$\varrho' = \varrho, \quad \zeta' = \zeta, \quad \varphi' = \varphi - \Omega t, \quad t' = t \tag{1.104}$$

erreichen. Für die Koordinatendifferentiale ergeben sich

$$d\varrho' = d\varrho, \quad d\zeta' = d\zeta, \quad d\varphi' = d\varphi - \Omega dt, \quad dt' = dt. \tag{1.105}$$

Das allgemeine Transformationsverhalten für Tensoren beliebiger Stufe lautet

$$T^{a' b' c' d' \dots} = T^{a b c d \dots} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} \frac{\partial x^{c'}}{\partial x^c} \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^d} \dots \tag{1.106}$$

Hier ändern sich dabei nur Komponenten mit einem dritten oder vierten Index.

1.4.1 Transformation der Potentiale und Tensoren

Anwendung von Gleichung (1.106) auf die Metrik ergibt

$$g_{a'b'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} g_{ab} \quad \text{bzw.} \quad g^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} g^{ab}.$$

Dabei ändern sich nur die Komponenten.

$$\begin{aligned} g_{3'4'} &= g_{34} + \Omega g_{33}, & g_{4'4'} &= g_{44} + 2\Omega g_{34} + \Omega^2 g_{33}, \\ g^{3'4'} &= g^{34} - \Omega g^{44}, & g^{3'3'} &= g^{33} - 2\Omega g^{34} + \Omega^2 g^{44}. \end{aligned}$$

²⁸Dieser wurde von HOENSELAERS und PERJES dargestellt [Hoenselaers and Perjes, 1990] und von SOTIRIOU und APOSTOLATOS korrigiert [Sotiriou and Apostolatos, 2004].

²⁹Für konstante Winkelgeschwindigkeit Ω kann dies sogar global eingeführt werden.

Die Metrik (1.42) behält ihre Form bei, damit erhält man zweimal die Ausdrücke

$$f'a' = fa - \Omega \frac{\varrho^2 - a^2 f^2}{f}, \quad \text{und} \quad f' = f + 2\Omega a f - \Omega^2 \frac{\varrho^2 - a^2 f^2}{f}.$$

Es ergeben sich die Gleichungen:

$$f = f' \left[(1 - \Omega a')^2 - \frac{\Omega^2 \varrho^2}{f'^2} \right], \quad (1.107a)$$

$$f' = f \left[(1 + \Omega a)^2 - \frac{\Omega^2 \varrho^2}{f^2} \right], \quad (1.107b)$$

$$(1 + \Omega a) f = (1 - \Omega a') f', \quad (1.107c)$$

$$\frac{h}{f} = \frac{h'}{f'}. \quad (1.107d)$$

Für die Vierergeschwindigkeit ergibt sich aus $g_{a'b'} u^{a'} u^{b'} = g_{4'4'} (u^{t'})^2 = -1$, dass

$$u^{n'} = (0, 0, 0, e^{-U'}) \quad \text{und} \quad u_{n'} = (0, 0, -a' e^{U'}, -e^{U'}) \quad (1.108)$$

sind.³⁰ Die Komponenten des mitrotierenden Vektorpotentials transformieren sich zu:

$$\begin{aligned} A'_{\varphi'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} A_{\varphi} + \frac{\partial t}{\partial \varphi'} A_t = A_{\varphi} \quad \text{und} \quad A'_{t'} = \frac{\partial \varphi}{\partial t'} A_{\varphi} + \frac{\partial t}{\partial t'} A_t = A_t + \Omega A_{\varphi}. \\ A^{t'} &= \frac{\partial t'}{\partial \varphi} A^{\varphi} + \frac{\partial t'}{\partial t} A^t = A^t \quad \text{und} \quad A'^{\varphi'} = \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} A^{\varphi} + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} A^t = A^{\varphi} - \Omega A^t. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Für den RICCI-Tensor und den Energie-Impuls-Tensor ergibt sich das gleiche Verhalten, wie für die Metrik. Für gemischte Indizes erhält man am Beispiel des Energie-Impuls-Tensors:

$$T^{a' b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} T^a_b, \quad T_{a' b'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} T_a^b.$$

Dabei ändern sich nur die Komponenten:

$$T^{3'}_{3'} = T^4_3 - \Omega T^3_4, \quad T^{3'}_{4'} = T^3_4 - \Omega^2 T^4_3 + \Omega (T^3_3 - T^4_4), \quad T^{4'}_{4'} = T^4_4 + \Omega T^4_3, \quad (1.110)$$

$$T_{3'}^{3'} = T_3^3 - \Omega T_3^4, \quad T_{4'}^{3'} = T_4^3 - \Omega^2 T_3^4 + \Omega (T_3^3 - T_4^4), \quad T_{4'}^{4'} = T_4^4 + \Omega T_3^4. \quad (1.111)$$

Da Viererbeschleunigung und LORENTZ-Kraftdichte nur ϱ - und ζ -Komponenten haben, ändern sie sich nicht.

$$f^{A'} = f^A \quad \text{und} \quad \dot{u}^{A'} = \dot{u}^A.$$

³⁰Aus Gleichung (1.36) ergibt sich $\mathcal{S} = f'$

1.4.2 Bewegungsgleichungen

Für die nicht verschwindenden Komponenten von Viererbeschleunigung und LORENTZ-Kraftdichte erhält man aus den Gleichungen (1.43) und (1.18) im mitrotierenden System³¹

$$\begin{aligned} \dot{u}'^{\varrho} &= \frac{1}{2h'} f'_{,\varrho} \quad \text{und} \quad f'^{\varrho} = \mu\epsilon \frac{e^{U'}}{h'} A'_{t',\varrho}, \\ \dot{u}'^{\zeta} &= \frac{1}{2h'} f'_{,\zeta} \quad \text{und} \quad f'^{\zeta} = \mu\epsilon \frac{e^{U'}}{h'} A'_{t',\zeta}. \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung lautet also

$$\nabla e^{U'} + \epsilon \nabla \alpha' = 0. \quad (1.112)$$

Für konstantes ϵ erhält man daraus³²

$$e^{U'} + \epsilon \alpha' = \mathcal{D} = \text{konstant}. \quad (1.113)$$

Aus verschwindender LORENTZ-Kraftdichte folgt

$$\alpha' = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad e^{U'} = \text{konstant}. \quad (1.114)$$

1.4.3 Die Quasi-ERNST-Gleichungen

Die Feld- und Wellengleichungen für geladenen Staub haben im mitrotierenden System genau die gleiche Struktur wie im ruhenden System. Es ist jedoch $u^{\varphi'} = 0$ und $u^{t'} = e^{-U'}$. Damit lauten sie:

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{f'}{\varrho^2} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'}) \right], \quad (1.115a)$$

$$-4\pi\mu\epsilon e^{2k' - 3U'} = \nabla \cdot \left[\frac{a' f'}{\varrho^2} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'}) - \frac{1}{f'} \nabla A'_{t'} \right], \quad (1.115b)$$

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{f'^2}{\varrho^2} \nabla a' + 4 \frac{f'}{\varrho^2} A'_{t'} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'}) \right], \quad (1.115c)$$

$$8\pi\mu e^{2k' + 2U'} = f' \Delta f' - (\nabla f')^2 + \frac{f'^4}{\varrho^2} (\nabla a')^2 - 2f' \left[(\nabla A'_{t'})^2 + \frac{f'^2}{\varrho^2} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'})^2 \right]. \quad (1.115d)$$

Für diese Gleichungen lassen sich analog zu Abschnitt 1.2 Quasi-ERNST-Gleichungen herleiten. Die Gleichungen (1.115a) und (1.115c) erlauben wieder die Einführung der Potentiale β' und b' .

Mit Gleichung (1.115b) folgt in analoger Weise die Gleichung für $\Delta\Phi'$ und in analoger Weise erhält man auch die Gleichung für $\Delta\mathcal{E}'$. Da man zur Herleitung dieser (siehe

³¹Für ϱ' und ζ' wird der Übersichtlichkeit halber weiter ϱ und ζ geschrieben.

³²Aus dem Vergleich mit (1.57) ergibt sich im ECD-Fall $\mathcal{D} = 1$.

Gleichung (1.82)) die Gleichung für $\Delta\Phi'$ einsetzen muss, ergeben sich Quasi-ERNST-Gleichungen:

$$e^{2U'} \Delta\mathcal{E}' = (\nabla\mathcal{E}' + 2\bar{\Phi}'\nabla\Phi') \cdot \nabla\mathcal{E}' + 8\pi\mu \left(e^{U'} + \epsilon\bar{\Phi}' \right) e^{U'+2k'}, \quad (1.116)$$

$$e^{2U'} \Delta\Phi' = (\nabla\mathcal{E}' + 2\bar{\Phi}'\nabla\Phi') \cdot \nabla\Phi' - 4\pi\mu\epsilon e^{U'+2k'}. \quad (1.117)$$

Die Feldgleichungen für h' bzw. k' lauten wie die in Abschnitt 1.2 und müssen hier zusätzlich erfüllt werden.

1.5 KERR-NEWMAN-Lösung und BOYER-LINDQUIST-Koordinaten

Die KERR-NEWMAN-Lösung [Newman et al., 1965] wird oft in BOYER-LINDQUIST-Koordinaten angegeben [Boyer and Lindquist, 1967]. Diese hängen mit den WEYL-Koordinaten über

$$\varrho = \sqrt{\tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + J^2/M^2 + Q^2} \sin\tilde{\theta} \quad \text{und} \quad \zeta = (\tilde{r} - M) \cos\tilde{\theta} \quad (1.118)$$

zusammen und stimmen somit asymptotisch mit den weiter vorne eingeführten asymptotischen Kugelkoordinaten überein.

Der Horizont \mathcal{H} ist in WEYL-Koordinaten ein Abschnitt der ζ -Achse zwischen $\zeta = \pm l$. Dieser gehört nicht mehr zur Symmetrieachse. Er liegt also in WEYL-Koordinaten bei $\varrho = 0$. Man erhält $\varrho = 0$ nach Gleichung (1.118) für

$$\tilde{r}_{\pm} = M \left(1 \pm \sqrt{1 - J^2/M^4 - Q^2/M^2} \right) = M \pm l. \quad (1.119)$$

Dabei ist \tilde{r}_+ der Ereignishorizont³³ und bei \tilde{r}_- liegt der so genannte CAUCHY-Horizont und es gilt die Parameterrelation

$$1 = \frac{l^2}{M^2} + \frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4}. \quad (1.120)$$

Es lässt sich also auch

$$\varrho = \sqrt{(\tilde{r} - \tilde{r}_+)(\tilde{r} - \tilde{r}_-)} \sin\tilde{\theta} = \sqrt{(\tilde{r} - M - l)(\tilde{r} - M + l)} \sin\tilde{\theta} = \sqrt{(\tilde{r} - M)^2 - l^2} \sin\tilde{\theta}$$

schreiben. Für die partiellen Ableitungen ergeben sich dann nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} &= \frac{\partial\varrho}{\partial\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\partial\zeta}{\partial\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{\tilde{r} - M}{\sqrt{(\tilde{r} - M)^2 - l^2}} \sin\tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial\varrho} + \cos\tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial\zeta}, \\ \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} &= \frac{\partial\varrho}{\partial\tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\partial\zeta}{\partial\tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial\zeta} = \sqrt{(\tilde{r} - M)^2 - l^2} \cos\tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial\varrho} - (\tilde{r} - M) \sin\tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial\zeta}. \end{aligned}$$

³³Mit \mathcal{H} wird ab jetzt immer der Ereignishorizont bezeichnet.

Durch Inversion der Koeffizientenmatrix erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varrho} &= \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} = \frac{(\tilde{r} - M) \sqrt{(\tilde{r} - M)^2 - l^2}}{(\tilde{r} - M)^2 - l^2 \cos^2 \tilde{\theta}} \sin \tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\sqrt{(\tilde{r} - M)^2 - l^2}}{(\tilde{r} - M)^2 - l^2 \cos^2 \tilde{\theta}} \cos \tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} = \frac{(\tilde{r} - M)^2 - l^2}{(\tilde{r} - M)^2 - l^2 \cos^2 \tilde{\theta}} \cos \tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} - \frac{(\tilde{r} - M)}{(\tilde{r} - M)^2 - l^2 \cos^2 \tilde{\theta}} \sin \tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}.\end{aligned}$$

Für die Basisvektoren gilt die gleiche Transformation. Damit lässt sich der Nablaoperator angewendet auf ein beliebiges Potential als

$$\nabla P = \frac{1}{(\tilde{r} - M)^2 - l^2 \cos^2 \tilde{\theta}} \left(\sqrt{(\tilde{r} - M)^2 - l^2} \frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \frac{\partial P}{\partial \tilde{\theta}} \mathbf{e}_{\tilde{\theta}} \right) \quad (1.121)$$

aufschreiben. Der LAPLACE-Operator ergibt sich zu

$$\Delta P = \frac{1}{\left[(\tilde{r} - M)^2 - l^2 \cos^2 \tilde{\theta} \right]^2} \left[\left[(\tilde{r} - M)^2 - l^2 \right] \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{r}^2} + 2(\tilde{r} - M) \frac{\partial P}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{\theta}^2} + \cot \tilde{\theta} \frac{\partial P}{\partial \tilde{\theta}} \right]. \quad (1.122)$$

Damit lassen sich die ERNST-Gleichungen (1.83) und (1.84) aufschreiben:

$$\begin{aligned}(\Re \mathcal{E} + \bar{\Phi} \Phi) &\left[\left((\tilde{r} - M)^2 - l^2 \right) \mathcal{E}_{,\tilde{r}\tilde{r}} + 2(\tilde{r} - M) \mathcal{E}_{,\tilde{r}} + \mathcal{E}_{,\tilde{\theta}\tilde{\theta}} + \cot \tilde{\theta} \mathcal{E}_{,\tilde{\theta}} \right] \\ &= \left((\tilde{r} - M)^2 - l^2 \right) (\mathcal{E}_{,\tilde{r}} + 2\bar{\Phi} \Phi_{,\tilde{r}}) \mathcal{E}_{,\tilde{r}} + (\mathcal{E}_{,\tilde{\theta}} + 2\bar{\Phi} \Phi_{,\tilde{\theta}}) \mathcal{E}_{,\tilde{\theta}}.\end{aligned} \quad (1.123)$$

$$\begin{aligned}(\Re \mathcal{E} + \bar{\Phi} \Phi) &\left[\left((\tilde{r} - M)^2 - l^2 \right) \Phi_{,\tilde{r}\tilde{r}} + 2(\tilde{r} - M) \Phi_{,\tilde{r}} + \Phi_{,\tilde{\theta}\tilde{\theta}} + \cot \tilde{\theta} \Phi_{,\tilde{\theta}} \right] \\ &= \left((\tilde{r} - M)^2 - l^2 \right) (\mathcal{E}_{,\tilde{r}} + 2\bar{\Phi} \Phi_{,\tilde{r}}) \Phi_{,\tilde{r}} + (\mathcal{E}_{,\tilde{\theta}} + 2\bar{\Phi} \Phi_{,\tilde{\theta}}) \Phi_{,\tilde{\theta}}.\end{aligned} \quad (1.124)$$

Mit den Gleichungen (1.85) lassen sich die partiellen Ableitungen von a und A_φ auch in BOYER-LINDQUIST-Koordinaten angeben. Es ergibt sich für

$$\begin{aligned}A_{\varphi,\tilde{r}} &= \frac{(\tilde{r} - M) \sin \tilde{\theta}}{\sqrt{(\tilde{r} - M)^2 - l^2}} A_{\varphi,\varrho} + \cos \tilde{\theta} A_{\varphi,\zeta} \\ &= \frac{1}{f} \left(\sqrt{(\tilde{r} - M)^2 - l^2} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} \beta_{,\varrho} - (\tilde{r} - M) \sin^2 \tilde{\theta} \beta_{,\zeta} \right) - a \alpha_{,\tilde{r}} \\ &= \frac{\sin \tilde{\theta}}{f} \beta_{,\tilde{\theta}} - a \alpha_{,\tilde{r}}.\end{aligned}$$

Analog erhält man die anderen Ausdrücke zu

$$A_{\varphi,\tilde{r}} = \frac{\sin \tilde{\theta}}{f} \beta_{,\tilde{\theta}} - a \alpha_{,\tilde{r}}, \quad A_{\varphi,\tilde{\theta}} = -\frac{\sin \tilde{\theta}}{f} \left[(\tilde{r} - M)^2 - l^2 \right] \beta_{,\tilde{r}} - a \alpha_{,\tilde{\theta}}, \quad (1.125a)$$

$$a_{,\tilde{r}} = -\frac{\sin \tilde{\theta}}{f^2} (b_{,\tilde{\theta}} + 2\alpha \beta_{,\tilde{\theta}} - 2\beta \alpha_{,\tilde{\theta}}), \quad a_{,\tilde{\theta}} = \frac{\sin \tilde{\theta}}{f^2} \left[(\tilde{r} - M)^2 - l^2 \right] (b_{,\tilde{r}} + 2\alpha \beta_{,\tilde{r}} - 2\beta \alpha_{,\tilde{r}}). \quad (1.125b)$$

1.5.1 Die KERR-NEWMAN-Lösung

Die KERR-NEWMAN-Lösung lautet in BOYER-LINDQUIST-Koordinaten

$$\mathcal{E} = 1 - \frac{2M}{\tilde{r} - iA \cos \tilde{\theta}}, \quad \Phi = \frac{Q}{\tilde{r} - iA \cos \tilde{\theta}}, \quad (1.126)$$

mit dem KERR-Parameter $A = J/M$ und der weiteren Parameterrelation für die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{A}{(M+l)^2 + A^2}. \quad (1.127)$$

Zwischen den beiden Potentialen gilt die Relation

$$\Phi = \frac{Q}{2M} (1 - \mathcal{E}). \quad (1.128)$$

D.h. die KERR-NEWMAN-Lösung lässt sich durch eine HARRISON-Transformation (siehe Abschnitt 1.2.4) aus der KERR-Lösung gewinnen. Durch Trennung von Real- und Imaginärteil ergeben sich:

$$f = 1 + \frac{Q^2 - 2M\tilde{r}}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}}, \quad b = -\frac{2MA \cos \tilde{\theta}}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}}, \quad \Phi \bar{\Phi} = \frac{Q^2}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}}, \quad (1.129)$$

$$\alpha = \frac{Q\tilde{r}}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{QA \cos \tilde{\theta}}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}}. \quad (1.130)$$

Es lassen sich damit auch f und α als

$$f = 1 + \Phi \bar{\Phi} + \frac{\tilde{r}}{A \cos \tilde{\theta}} b \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\tilde{r}}{A \cos \tilde{\theta}} \beta \quad (1.131)$$

schreiben.

Um a und A_φ zu erhalten, kann man entlang einer Radialrichtung vom Fernfeld bis zu r_0 integrieren. Mit den Gleichungen (1.125) erhält man für a

$$a(\tilde{r}_0, \tilde{\theta}_0) = \int_{\infty}^{\tilde{r}_0} \frac{\partial a}{\partial \tilde{r}} d\tilde{r} = -2J \sin^2 \tilde{\theta}_0 \int_{\infty}^{\tilde{r}_0} \frac{\tilde{r}^2 - (Q/M)^2 M\tilde{r} - A^2 \cos^2 \tilde{\theta}_0}{\left(\tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + Q^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}_0\right)^2} d\tilde{r}$$

und damit

$$a = -\frac{(Q^2 - 2M\tilde{r})A \sin^2 \tilde{\theta}}{\tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + Q^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}} = -\frac{[(\tilde{r} - M)^2 - l^2 - A^2 - \tilde{r}^2] A \sin^2 \tilde{\theta}}{(\tilde{r} - M)^2 - l^2 - A^2 \sin^2 \tilde{\theta}} = A \sin^2 \tilde{\theta} \frac{1 - f}{f}. \quad (1.132)$$

Für A_φ erhält man mit den Gleichungen (1.125) und diesem Ergebnis

$$A_\varphi(\tilde{R}_0, \tilde{\theta}_0) = \int_{\infty}^{\tilde{R}_0} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \tilde{R}} d\tilde{R} = -QA \sin^2 \tilde{\theta}_0 \int_{\infty}^{\tilde{R}_0} \frac{\tilde{r}^2 - A^2 \cos^2 \tilde{\theta}_0}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}_0} d\tilde{R}$$

und damit

$$A_\varphi = \frac{QA\tilde{r} \sin^2 \tilde{\theta}}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}} = A \sin^2 \tilde{\theta} \alpha = \tilde{r} \sin \tilde{\theta} \tan \tilde{\theta} \beta. \quad (1.133)$$

Prinzipiell lässt sich noch h bestimmen. Damit hat man alle metrischen und elektromagnetischen Potentiale bestimmt.

1.5.2 Die KERR-NEWMAN-Lösung im mitrotierenden System

Mit diesen Gleichungen lässt sich jetzt die KERR-NEWMAN-Lösung ins mitrotierende System übersetzen. Es war $A'_{\varphi'} = A_{\varphi}$. Für α' ergibt sich mit der Parameterrelation (1.127) für Ω der Ausdruck

$$\alpha' = \alpha - \Omega A_{\varphi} = \frac{Q\tilde{r} \left(1 - \Omega A \sin^2 \tilde{\theta}\right)}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}} = \frac{Q\tilde{r} \left(1 - \Omega A \left(1 - \cos^2 \tilde{\theta}\right)\right)}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}}. \quad (1.134)$$

Damit lässt sich schreiben:

$$\alpha' = [1 - \Omega A] \alpha + \Omega \beta \tilde{r} \cos \tilde{\theta}. \quad (1.135)$$

Die Ausdrücke für f' und a' ergeben sich nach den Gleichungen (1.107). Für f' erhält man

$$\begin{aligned} f' &= f + 2\Omega f a + \Omega^2 \left(f a^2 - \frac{\varrho^2}{f} \right) \\ &= f - \frac{\Omega \sin^2 \tilde{\theta}}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}} \left(2A (Q^2 - 2M\tilde{r}) + \Omega A^2 \cos^2 \tilde{\theta} (\tilde{r}^2 + Q^2 - 2M\tilde{r}) \right. \\ &\quad \left. + \Omega \left[A^2 (\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta} - Q^2 + 2M\tilde{r}) + \tilde{r}^4 \right] \right). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (1.125) für die Ableitungen von β' , die auch im mitrotierenden System gelten (siehe Abschnitt 1.4.3), lassen sich durch die Größen im ruhenden System ausdrücken:

$$\beta'_{,\tilde{r}} = - \frac{f' \sin \tilde{\theta}}{\varrho^2} \left[A'_{\varphi',\tilde{\theta}} + a' \alpha'_{,\tilde{\theta}} \right] = (1 + \Omega a) \beta_{,\tilde{r}} + \frac{\Omega \sin \tilde{\theta}}{f} \alpha_{,\tilde{\theta}} \quad (1.136)$$

$$\beta'_{,\tilde{\theta}} = \frac{f'}{\sin \tilde{\theta}} \left[A'_{\varphi',\tilde{r}} + a' \alpha'_{,\tilde{r}} \right] = (1 + \Omega a) \beta_{,\tilde{\theta}} - \frac{\Omega \sin \tilde{\theta}}{f} \left[(\tilde{r} - M)^2 - l^2 \right] \alpha_{,\tilde{r}}. \quad (1.137)$$

Als Integrationsweg für β' kann man für ein beliebiges festes \tilde{r}_0 auf der ϱ -Achse starten und bis zu einem Wert $\tilde{\theta}_0$ integrieren. Die Berechnung von $\beta'_{,\tilde{\theta}}$ ergibt sich durch

$$\beta'_{,\tilde{\theta}} = \frac{1}{\sin \tilde{\theta}} \left[f' A'_{\varphi',\tilde{r}} + f' a' \alpha'_{,\tilde{r}} \right], = (1 + \Omega a) \beta_{,\tilde{\theta}} - \frac{\Omega \sin \tilde{\theta}}{f} (\tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + Q^2 + A^2) \alpha_{,\tilde{r}}.$$

Mit $\beta'_{,\tilde{\theta}} = A \sin \tilde{\theta} \alpha'_{,\tilde{r}}$ lässt sich

$$\begin{aligned} \beta'_{,\tilde{\theta}} &= \beta_{,\tilde{\theta}} + \Omega \sin \tilde{\theta} \alpha_{,\tilde{r}} \left[A a - \frac{\tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + Q^2 + A^2}{f} \right], \\ &= \beta_{,\tilde{\theta}} + \Omega Q \sin \tilde{\theta} \frac{(\tilde{r}^2 - A^2 \cos^2 \tilde{\theta})}{(\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta})^2} \left[\tilde{r}^2 + A^2 \right], \end{aligned}$$

schreiben. Diesen Ausdruck kann man durch Substitution von $\cos \tilde{\theta}$ integrieren und man erhält:

$$\beta' = \beta + \Omega Q \frac{(\tilde{r}^2 - A^2) \cos \tilde{\theta}}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}} = \frac{Q \cos \tilde{\theta} [A(1 - \Omega A) - \Omega \tilde{r}^2]}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}}. \quad (1.138)$$

Damit lässt sich auch

$$\beta' = [1 - \Omega A] \beta - \Omega \alpha \tilde{r} \cos \tilde{\theta} \quad (1.139)$$

schreiben.

Zusammengefasst ergeben sich damit

$$\Phi' = [1 - \Omega A - i \Omega \tilde{r} \cos \tilde{\theta}] \Phi = \frac{Q [1 - \Omega(A + i \tilde{r} \cos \tilde{\theta})]}{\tilde{r} - i A \cos \tilde{\theta}} \quad (1.140)$$

und

$$\Phi' \bar{\Phi}' = [(1 - \Omega A)^2 + \Omega^2 \tilde{r}^2 \cos^2 \tilde{\theta}] \Phi \bar{\Phi}. \quad (1.141)$$

Es lässt sich also Φ' durch Φ ausdrücken.

Um b' zu erhalten kann man den Ausdruck

$$b'_{,\tilde{\theta}} = -\frac{f'^2}{\sin \tilde{\theta}} a'_{,\tilde{r}} + 2 \left(\beta' \alpha'_{,\tilde{\theta}} - \alpha' \beta'_{,\tilde{\theta}} \right)$$

verwenden und den Integrationsweg wie für β' wählen. Für b' ergibt sich, nach Zusammenfassung der Terme in $b'_{,\tilde{\theta}}$ und Integration, der Ausdruck

$$b' = \frac{-2 \cos \tilde{\theta}}{\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta}} \left[AM + \Omega \left((\tilde{r} - M) \left(\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta} \right) - 2M \left(\tilde{r}^2 + A^2 \right) + Q^2 \tilde{r} \right) \right. \\ \left. + \Omega^2 A \left(M \left(\tilde{r}^2 + A^2 \cos^2 \tilde{\theta} \right) + M \left(\tilde{r}^2 + A^2 \right) - \tilde{r} \left(Q^2 - M \tilde{r} \right) \sin^2 \tilde{\theta} \right) \right]. \quad (1.142)$$

Damit ergibt sich für \mathcal{E}' die Gleichung

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \frac{2\Omega}{\tilde{r} - i A \cos \tilde{\theta}} \left[2MA + (M - \tilde{r}) A \cos^2 \tilde{\theta} - i \cos \tilde{\theta} (Q^2 - 3M\tilde{r} + \tilde{r}^2) \right] \\ - \frac{\Omega^2}{\tilde{r} - i A \cos \tilde{\theta}} \left[(A^2 + \tilde{r}^2) \tilde{r} \sin^2 \tilde{\theta} + 2M(\cos^2 \tilde{\theta} + 1) + Q^2 \tilde{r} \cos^2 \tilde{\theta} \right. \\ \left. + i A \cos \tilde{\theta} \left(4M\tilde{r} + 2M\tilde{r} \cos^2 \tilde{\theta} - (Q^2 + A^2) - (\tilde{r}^2 + Q^2) \sin^2 \tilde{\theta} \right) \right]. \quad (1.143)$$

Die Ausdrücke für \mathcal{E}' und Φ' erfüllen die ERNST-Gleichungen für das mitrotierende System im Elektrovakuum.

1.5.3 Das Verhalten der Potentiale auf dem Ereignishorizont

Das Verhalten der Potentiale auf dem Ereignishorizont kann man bestimmen, indem man die Potentiale bei $\tilde{r} = M + l$ auswertet. Folgende Potentiale sind dort entweder Null oder konstant.

Mit Gleichung (1.132) ergibt sich

$$a_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{\Omega} \quad (1.144)$$

und mit (1.135) erhält man

$$\alpha'_{\mathcal{H}} = \frac{Q(l+M)}{(l+M)^2 + A^2} = \Omega \frac{Q(l+M)}{A}. \quad (1.145)$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich insbesondere eine Formel für die Masse mit

$$M = 2\Omega J + Q\alpha'_{\mathcal{H}} + l \quad (1.146)$$

angeben. Die spezielle Form dieser Gleichung lässt sich gut mit einer Gleichung aus Abschnitt 3.3.1 vergleichen. Mit Gleichung (1.144) und der Eigenschaft, dass auf dem Horizont $\varrho = 0$ gilt, ergibt sich

$$f'_{\mathcal{H}} = 0. \quad (1.147)$$

Der Term in den eckigen Klammern von Gleichung (1.139) für β' ergibt mit der Parameterrelation (1.127) für Ω auf dem Ereignishorizont Null. Gleiches gilt auch für b' . Damit ergeben sich

$$\beta'_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{und} \quad b'_{\mathcal{H}} = 0. \quad (1.148)$$

Dies bedeutet insbesondere, dass

$$\mathcal{E}'_{\mathcal{H}} = \Phi'^2_{\mathcal{H}} = \alpha'^2_{\mathcal{H}} = \left(\frac{Q(l+M)}{(l+M)^2 + A^2} \right)^2 \quad (1.149)$$

ist.

1.5.4 Die Multipolmomente der KERR-NEWMAN-Lösung

Um die Multipolmomente zu bestimmen, berechnet man zuerst

$$\xi = \frac{1 - \mathcal{E}}{1 + \mathcal{E}} = \frac{M}{(\tilde{r} - M) - iA \cos \tilde{\theta}} \quad \text{und} \quad q = \frac{2\Phi}{1 + \mathcal{E}} = \frac{Q}{(\tilde{r} - M) - iA \cos \tilde{\theta}}. \quad (1.150)$$

Auf \mathcal{A}_+ ist $\cos \tilde{\theta} = 1$ und $\zeta = \tilde{r} - M$. Damit ergeben sich

$$\xi_+ = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{\zeta^n} = \frac{M}{\zeta - iA} \quad \text{und} \quad q_+ = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{\zeta^n} = \frac{Q}{\zeta - iA}. \quad (1.151)$$

Diese Ausdrücke entsprechen der Summe der geometrischen Reihe und man erhält durch die Entwicklung nach $1/\zeta$ die TAYLOR-Koeffizienten zu

$$m_n = M (iA)^n \quad \text{und} \quad e_n = Q (iA)^n .$$

Damit gilt, dass die Ausdrücke $M_{ij} = Q_{ij} = S_{ij} = H_{ij} = 0$ sind und somit die Multipolmomente den m_n und q_n entsprechen. Die gravitativen bzw. elektromagnetischen Multipolmomente lauten damit

$$P_n = M (iA)^n \quad \text{und} \quad Q_n = Q (iA)^n . \quad (1.152)$$

1.5.5 Schwarze Löcher und die extreme KERR-NEWMAN-Lösung

Um die KERR-NEWMAN-Lösung zu charakterisieren, kann man die Parameterrelation (1.120) hernehmen. Rotierende, geladene Schwarze Löcher werden durch die KERR-NEWMAN-Lösung beschrieben, wenn

$$\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4} \leq 1 \quad (1.153)$$

gilt.³⁴ Im Falle der Gleichheit erhält man ein so genanntes extremes KERR-NEWMAN-Schwarzes Loch und es ergibt sich $l = 0$. D.h. CAUCHY- und Ereignishorizont sind in BOYER-LINDQUIST-Koordinaten gleich und im WEYL-Koordinaten ein (räumlicher) Punkt bei $\varrho = \zeta = 0$.

1.6 Elliptische Koordinaten

Staubscheiben sind wahrscheinlich die einzig stabilen Konfigurationen von rotierenden (geladenen) Staubverteilungen.³⁵ Diese lassen sich gut in elliptischen Koordinaten³⁶ darstellen. Die Definition, die hier verwendet wird, ergibt sich aus³⁷

$$\varrho = \varrho_0 \sqrt{(1 - \eta^2)(1 + \nu^2)} \quad \text{und} \quad \zeta = \varrho_0 \eta \nu, \quad (1.154)$$

mit $\nu \in [0, \infty]$ und $\eta \in [-1, 1]$. Für die partiellen Ableitungen nach ν und η ergeben sich dann nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} &= \frac{\partial \varrho}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \varrho_0 \nu \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)(1 + \nu^2)}} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \varrho_0 \eta \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial \varrho}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \zeta} = -\varrho_0 \eta \frac{1 + \nu^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)(1 + \nu^2)}} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \varrho_0 \nu \frac{\partial}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

³⁴Für $\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4} \geq 1$ erhält man die überextreme KERR-NEWMAN-Lösung. Es muss l imaginär sein, damit wird \tilde{r}_{\pm} imaginär und es ergeben sich so genannte „nackte Singularitäten“. Nach der „cosmic censorship“-Hypothese von PENROSE [Penrose, 1969] sollte sich bei einem Gravitationskollaps immer die extreme oder unterextreme KERR-NEWMAN-Lösung ergeben.

³⁵In der NEWTON'schen Theorie ist dies klar, da bei fehlendem Druck kein Kräftegleichgewicht für Staubteilchen außerhalb der Scheibenebene $\zeta = 0$ realisiert werden kann. Im allgemein relativistischen Fall ergeben sich jedoch gravito-magnetisch und magnetisch abstoßende Kräfte zwischen den Staubteilchen, so dass sich im Prinzip eine stabile, über die Scheibenebene hinaus ausgedehnte Staubverteilung ergeben kann. Jedoch sind diese abstoßenden Kräfte im Vergleich zu den anderen Kräften klein.

³⁶Aus räumlich dreidimensionaler Sicht sind dies oblate spheroidale Koordinaten.

³⁷Der Parameter ϱ_0 wird im Kapitel 5 mit dem Koordinatenradius der Staubscheibe identifiziert.

Durch Inversion der Koeffizientenmatrix erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varrho} &= \frac{\partial \nu}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\partial \eta}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\nu \sqrt{(1-\eta^2)(1+\nu^2)}}{\varrho_0(\nu^2+\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{\eta \sqrt{(1-\eta^2)(1+\nu^2)}}{\varrho_0(\nu^2+\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \nu}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\eta(1+\nu^2)}{\varrho_0(\nu^2+\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\nu(1-\eta^2)}{\varrho_0(\nu^2+\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta}.\end{aligned}$$

Der Nablaoperator angewendet auf ein beliebiges Potential lässt sich als

$$\nabla P = \frac{1}{\varrho_0} \sqrt{\frac{1+\nu^2}{\nu^2+\eta^2}} \frac{\partial P}{\partial \nu} \mathbf{e}_\nu + \frac{1}{\varrho_0} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\nu^2+\eta^2}} \frac{\partial P}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta \quad (1.155)$$

aufschreiben. Der LAPLACE-Operator ergibt sich zu

$$\Delta P = \frac{1}{\varrho_0^2(\nu^2+\eta^2)} \left[(1+\nu^2) \frac{\partial^2 P}{\partial \nu^2} + 2\nu \frac{\partial P}{\partial \nu} + (1-\eta^2) \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\partial P}{\partial \eta} \right]. \quad (1.156)$$

Damit lassen sich die ERNST-Gleichungen (1.83) und (1.84) als

$$\begin{aligned}(\Re \mathcal{E} + \bar{\Phi} \Phi) &\left[(1+\nu^2)^2 \mathcal{E}_{,\nu\nu} + 2\nu \mathcal{E}_{,\nu} + (1-\eta^2)^2 \mathcal{E}_{,\eta\eta} - 2\eta \mathcal{E}_{,\eta} \right] \\ &= (1+\nu^2) (\mathcal{E}_{,\nu} + 2\bar{\Phi} \Phi_{,\nu}) \mathcal{E}_{,\nu} + (1-\eta^2) (\mathcal{E}_{,\eta} + 2\bar{\Phi} \Phi_{,\eta}) \mathcal{E}_{,\eta},\end{aligned} \quad (1.157)$$

$$\begin{aligned}(\Re \mathcal{E} + \bar{\Phi} \Phi) &\left[(1+\nu^2)^2 \Phi_{,\nu\nu} + 2\nu \Phi_{,\nu} + (1-\eta^2)^2 \Phi_{,\eta\eta} - 2\eta \Phi_{,\eta} \right] \\ &= (1+\nu^2) (\mathcal{E}_{,\nu} + 2\bar{\Phi} \Phi_{,\nu}) \Phi_{,\nu} + (1-\eta^2) (\mathcal{E}_{,\eta} + 2\bar{\Phi} \Phi_{,\eta}) \Phi_{,\eta}\end{aligned} \quad (1.158)$$

aufschreiben. Die Gleichungen für den Zusammenhang der Potentiale a und A_φ mit b und β lauten:

$$(1+\nu^2) b_{,\nu} = -f^2 a_{,\eta} - 2(1+\nu^2)(\alpha\beta_{,\nu} - \beta\alpha_{,\nu}), \quad (1.159a)$$

$$(1-\eta^2) b_{,\eta} = +f^2 a_{,\nu} - 2(1-\eta^2)(\alpha\beta_{,\eta} - \beta\alpha_{,\eta}), \quad (1.159b)$$

$$(1+\nu^2) \beta_{,\nu} = +f(a\alpha_{,\eta} + A_{\varphi,\eta}), \quad (1.159c)$$

$$(1-\eta^2) \beta_{,\eta} = -f(a\alpha_{,\nu} + A_{\varphi,\nu}). \quad (1.159d)$$

1.6.1 Lösung der LAPLACE-Gleichung mit LEGENDRE-Polynomen

Jetzt soll die Gleichung

$$\Delta X = 0 \quad (1.160)$$

in elliptischen Koordinaten untersucht werden. Für X kann der Separationsansatz

$$X = \psi(\nu) \chi(\eta) \quad (1.161)$$

gemacht werden. Dies führt zur Separation im LAPLACE-Operator. Nach Separationsschluss und der Substitution $s = i\nu$ ergibt sich:

$$\frac{1}{\psi} \left[(1-s^2) \psi_{,ss} - 2s \psi_{,s} \right] = -\frac{1}{\chi} \left[(1-\eta^2) \chi_{,\eta\eta} - 2\eta \chi_{,\eta} \right] = \text{const} = -n(n+1), \quad n \in \mathbb{R} \quad (1.162)$$

Für χ ergibt sich eine LEGENDRE'sche Differentialgleichung, die für beliebiges $n \in \mathbb{R}$ mit einem Potenzreihenansatz

$$\begin{aligned} \chi(\eta) = & c_1 \left(1 - \frac{n(n+1)}{2!} \eta^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} \eta^4 \mp \dots \right) \\ & + c_2 \left(\eta - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} \eta^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} \eta^5 \mp \dots \right) \end{aligned} \quad (1.163)$$

gelöst werden kann [Madelung, 1964]. Für ganzzahlige n bricht die Reihe ab. Wenn χ auf der ζ -Achse (also bei $\eta = \pm 1$) regulär bleiben soll, muss $n \geq 0$ sein. In diesem Fall erhält man als Lösung die LEGENDRE-Polynome $P_n(\eta)$.

Für die LEGENDRE'sche Differentialgleichung zu ψ soll sich eine Lösung ergeben, die für $\nu \rightarrow \infty$ verschwindet. Für ganzzahliges n kann diese durch die außerhalb der Strecke $-1 < x < 1$, $x \in \mathbb{R}$ definierte komplexe Kugelfunktionen $Q_n(s)$ angegeben werden [Madelung, 1964]. Nach Rücksubstitution zu ν erhält man eine reelle Lösung durch

$$S_n(\nu) = i^{1-n} Q_n(i\nu) = i^{-n} (\operatorname{arccot} \nu) P_n(i\nu) - R_n(\nu). \quad (1.164)$$

Dabei ist $R_n(\nu)$ ein Polynom, dass das richtige asymptotische Verhalten $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_n(\nu) = 0$ sichert.

Es ergibt sich durch Superposition der Lösungen für verschiedenes n die allgemeine Lösung:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\eta) S_n(\nu). \quad (1.165)$$

Dabei sind die C_n Integrationskonstanten.

Darstellung des Polynoms $R_n(\nu)$ Die LEGENDRE-Polynome lassen sich als Potenzreihe darstellen. Für gerade n ergibt sich:

$$P_{2n}(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \frac{(2n+2m)!}{2^{2n}(n+m)!(n-m)!(2m)!} x^{2m}, \quad (1.166)$$

$$i^{-2n} P_{2n}(ix) = \sum_{m=0}^n \frac{(2n+2m)!}{2^{2n}(n+m)!(n-m)!(2m)!} x^{2m}. \quad (1.167)$$

Für ungerade n ergibt sich:

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \frac{(2n+2m+2)!}{2^{2n+1}(n+m+1)!(n-m)!(2m+1)!} x^{2m+1}, \quad (1.168)$$

$$i^{-2n-1} P_{2n+1}(ix) = \sum_{m=0}^n \frac{(2n+2m+2)!}{2^{2n+1}(n+m+1)!(n-m)!(2m+1)!} x^{2m+1}. \quad (1.169)$$

Das Polynom $R_n(\nu)$ bestimmt sich aus dem ersten Teil von $S_n(\nu)$. Die Entwicklung von $\operatorname{arccot} \nu$ im Unendlichen lässt sich als

$$\operatorname{arccot} \nu = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu^{-2k+1}}{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu^{-2k-1}}{2k+1}$$

angeben. Für gerades n erhält man damit:

$$\begin{aligned}
 R_{2n}(\nu) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[i^{-2n} (\operatorname{arccot} \nu) P_{2n}(i\nu) \right] = - \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[i^{-2n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \nu^{-2k+1}}{2k-1} \right) P_{2n}(i\nu) \right], \\
 &= - \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \nu^{-2k+1}}{2k-1} \right) \left(\sum_{m=0}^n \frac{(2n+2m)!}{2^{2n}(n+m)!(n-m)!(2m)!} \nu^{2m} \right), \\
 &= - \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{(2n+2m)!}{2^{2n}(2k-1)(n+m)!(n-m)!(2m)!} \nu^{2m-2k+1}. \quad (1.170)
 \end{aligned}$$

Für ungerades n ergibt sich analog:

$$R_{2n+1}(\nu) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(2n+2m+2)!}{2^{2n+1}(2k+1)(n+m+1)!(n-m)!(2m+1)!} \nu^{2m-2k}. \quad (1.171)$$

1.7 Reihenentwicklung: Optimierung und Konvergenz

Analytische Lösungen von rotierenden geladenen Staubverteilungen wurden noch nicht gefunden.³⁸ Eine Möglichkeit Näherungslösungen zu finden, besteht in der Anwendung von Reihenentwicklungen nach kleinen Parametern. Dabei werden die Differentialgleichungen nach einem geeigneten Parameter entwickelt und sukzessive Ordnung für Ordnung gelöst.

Hier sind prinzipiell drei Herangehensweisen möglich. Die einfachste ist die Post-NEWTON'sche Entwicklung nach einem relativistischen Parameter. Weiterhin kann man langsam rotierende Staubverteilungen vom ECD-Fall ausgehend entwickeln. Als dritte Möglichkeit kann man schwach geladene rotierende Staubverteilungen betrachten. In den letzten beiden Fällen hat man in jeder Entwicklungsordnung vollständig relativistische Lösungen. Beide Fälle sind aber auch ungleich schwerer zu lösen, als die Post-NEWTON'sche Entwicklung.

Ist eine Reihenentwicklung bis zu einer Ordnung N erfolgreich gelöst, stellt sich zuerst die Frage nach der Konvergenz dieser Reihen. Die vollständige Lösung ergibt sich für $N \rightarrow \infty$, wenn die Reihe konvergiert. Praktisch ist N jedoch klein und man interessiert sich oft für den Fall, bei dem der Wert des Entwicklungsparameters weit weg vom Entwicklungspunkt ist.³⁹

Es gibt viele Kriterien, um Aussagen zur Konvergenz von Reihen zu treffen. Ein hinreichendes und sehr scharfes Kriterium ist jenes nach RAABE-DUHAMEL [Raabe, 1832]. Dieses wird hier verwendet.

Um die Konvergenz von Reihen zu beschleunigen, gibt es verschiedene Methoden. Darstellungen dieser Methoden finden sich in dem Buch [Bender and Orszag, 1978]. Hier

³⁸Damit sind Lösungen mit stationären, nicht statischen Raumzeiten gemeint. Es gibt Lösungen mit gegenrotierenden Staubkomponenten (siehe z.B. [García-Reyes and González, 2004]), die jedoch eine statische Raumzeit ergeben.

³⁹Bei der Post-NEWTON'schen Entwicklung in dieser Arbeit ist gerade der ultra-relativistische Grenzfall interessant.

wird die PADÉ-Approximation verwendet, mit der bei den hier untersuchten Reihen gute Ergebnisse erzielt werden. Es sei aber auch noch auf weitere Methoden hingewiesen. Dies sind u.a. SHANKS-Transformation und die Darstellung durch Kettenfunktionen, insbesondere Kettenbrüche. Es bleibt ein Experimentierfeld, welche Methoden am effektivsten sind, um die Konvergenz der entsprechenden Reihen zu beschleunigen.

Da vollständige analytische Lösungen fehlen, bleibt sonst nur der Vergleich mit numerischen Lösungen.

1.7.1 Konvergenz aus physikalischer Sicht

Man kann und sollte sich der Frage nach dem Konvergenzradius einer Reihenentwicklung zuerst anhand des physikalischen Systems überlegen, welches man beschreiben will.

Für positive **und** negative Werte des Entwicklungsparameters, welche betragsmäßig kleiner sind als der Konvergenzradius, sollte das physikalische System im Rahmen der verwendeten Gleichungen beschrieben werden können. Insbesondere sollte klar sein, wie sich das System beim Übergang von positiven zu negativen Werten des Entwicklungsparameters verhält.⁴⁰

Hier bedeutet dies, dass sich die Materie im gesamten Parameterraum im (thermodynamischen) Gleichgewicht befinden sollte. Daher kann eine wie auch immer geartete Reihenentwicklung einer geladenen Staubverteilung für $|\epsilon| > 1$ aus physikalischer Sicht nicht konvergieren. In diesem Fall kann die elektrische Abstoßung der Staubteilchen voneinander nicht mehr kompensiert werden und somit die Annahme der Stationarität nicht mehr aufrecht erhalten werden.⁴¹

Aus physikalischer Sicht stellen diese Überlegungen eine notwendige (aber natürlich keine hinreichende) Bedingung an die Konvergenz der Reihenentwicklung dar.

1.7.2 Das Konvergenzkriterium nach RAABE-DUHAMEL

Ist für eine Reihenentwicklung

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (1.172)$$

für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\mathbb{K}_n = n \left(1 - x_r \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right) > 1 \quad (1.173)$$

erfüllt, dann ist dies ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe im Intervall $x \in [0, x_r]$.⁴² Durch Reihenentwicklung bei $x_0 = 0$ sind hier nur die ersten Koeffizienten von

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^N c_n x^n + R(x) \quad (1.174)$$

⁴⁰In der Störungstheorie gibt es oftmals Entwicklungen bei denen der Konvergenzradius Null ist, da das physikalische System nur für positive Werte des Entwicklungsparameters definiert ist (siehe [Dyson, 1952] zur Quantenelektrodynamik). Man erhält asymptotische Reihen.

⁴¹Auch die relative Bindungsenergie E_b nach Gleichung (3.14) verschwindet im ECD-Fall.

⁴²Siehe auch [Knopp, 1956].

bis $n = N$ bekannt. Die Funktion $R(x)$ ist nicht bekannt.

$$F(x; N) = \sum_{n=0}^N c_n x^n. \quad (1.175)$$

Das Konvergenzkriterium (1.173) kann also nur bis $n = N$ untersucht werden. Um eine strenge Aussage zur Konvergenz tätigen zu können, muss es jedoch für alle $n \geq n_0$ erfüllt sein. In dem Sinne kann das Kriterium als starkes Indiz herangezogen werden, wenn es für die n mit $n_{0N} \leq n \leq N$ erfüllt ist.⁴³

1.7.3 Generalisierte PADÉ-Approximation

Die PADÉ-Approximation der endlichen Reihe $F(x; N)$ ist gegeben durch das Verhältnis zweier Polynome

$$P[M, N - M]\{F(x; N)\} = \frac{\sum_{n=0}^{N-M} a_n x^n}{\sum_{n=0}^M b_n x^n} \quad (1.176)$$

gegeben. Durch Reihenentwicklung dieses Ausdrucks bei $x_0 = 0$ bis zur N -ten Ordnung ergibt sich durch Koeffizientenvergleich mit $F(x; N)$ in x ein Gleichungssystem. Aus diesen $N + 1$ Gleichungen lassen sich die Koeffizienten a_n und b_n durch die c_n festlegen. Mit einer Normierung, beispielsweise $b_0 = 1$, wird das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Kennt man die Funktion $F(x)$ nun an mehreren Entwicklungspunkten x_j als Reihe bis zur K_j -ten Ordnung

$$F(x; x_j, K_j) = \sum_{n=0}^{K_j} C_{jn} (x - x_j)^n, \quad (1.177)$$

dann kann man diese Reihen in der generalisierten PADÉ-Approximation oder auch 'Mehrpunkt'-PADÉ-Approximation zusammenfassen. Dabei erhöht man die Anzahl der a_n und b_n in ihrer Summe bis zur Anzahl aller C_{jn} . Der Ausdruck für die generalisierte PADÉ-Approximation wird nach den x_j bis zur jeweils K_j -ten Ordnung entwickelt und es ergibt sich durch Koeffizientenvergleich in den $(x_j - x)$ ein eindeutiges Gleichungssystem, um die a_n und b_n durch die C_{jn} auszudrücken.

Das Problem der Konvergenz von PADÉ-Approximationen ist noch nicht gelöst und kann bisher nur für Spezialfälle untersucht werden (siehe [Bender and Orszag, 1978]). Dies gilt auch für die Frage warum ihre Konvergenz oft besser ist, als die der Reihenentwicklungen.

⁴³Siehe dazu auch das Zitat von POINCARÉ in der Einleitung.

Kapitel 2

Fernfeldverhalten in asymptotischen Kugelkoordinaten

Das Verhalten der Raumzeit im Fernfeld lässt sich gut in Koordinaten untersuchen, für die sich asymptotisch bzw. im NEWTON'schen Grenzfall, die MINKOWSKI-Metrik in Kugelkoordinaten ergibt. Diese Koordinaten r und ϑ lassen sich durch

$$\varrho = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \zeta = r \cos \vartheta \quad (2.1)$$

eingeführen. Hierbei können die obigen Gleichungen weiter verwendet werden, indem man den Nablaoperator in Kugelkoordinaten verwendet.

Im Falle asymptotisch flacher Lösungen lassen sich die Potentiale im Fernfeld durch die Koeffizienten m_n und e_n ausdrücken und damit im Prinzip auch durch die Multipolmomente. Man kann die Potentiale ξ und q im Fernfeld in eine TAYLOR-Reihe nach $1/r$ entwickeln. Damit ergeben sich formal die Darstellungen

$$\xi(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_n(\vartheta)}{r^n} \quad \text{und} \quad q(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(\vartheta)}{r^n}. \quad (2.2)$$

Um das asymptotische Verhalten von ξ und q in Abhängigkeit von m_n und e_n im Raum zu erhalten, kann man mit diesen Gleichungen in die ERNST-Gleichungen (1.89) und (1.90) eingehen. Die r -Ableitungen können berechnet und die entstehenden Gleichungen nach Potenzen in $1/r$ geordnet werden. In jeder $1/r$ -Ordnung erhält man dann *gewöhnliche* Differentialgleichungen für die Funktionen $\xi_n(\vartheta)$ und $q_n(\vartheta)$. Diese können sukzessive, beginnend bei der niedrigsten $1/r$ -Potenz, mit den Randbedingungen

$$\xi_n(\vartheta = 0) = m_{n-1} \quad \text{und} \quad q_n(\vartheta = 0) = e_{n-1}$$

und der Forderung, dass die Lösungen für alle ϑ regulär sein sollen, prinzipiell gelöst werden.¹

¹Eine ausführliche Darstellung für den ungeladen Fall findet man in der Diplomarbeit des Autors [Breithaupt, 2011]. Alle Überlegungen und Ergebnisse lassen sich ohne weiteres auf den geladenen Fall verallgemeinern.

Praktisch kann man, indem man die Potenzreihen für ξ und q bei $n = N$ abbricht, Näherungslösungen der ERNST-Gleichungen gewinnen. Diese werden umso genauer, je weiter man von der Materieverteilung entfernt ist.²

Bis zur vierten $1/r$ -Ordnung ergeben sich, bei Berücksichtigung der Äquatorsymmetrie, für ξ und q die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{m_0}{r} + \frac{m_1 \cos \vartheta}{r^2} + \frac{\frac{1}{2}m_2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \frac{1}{2}m_0 (m_0^2 - e_0^2) (\cos^2 \vartheta - 1)}{r^3} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}m_3 (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta) + \frac{1}{2} [m_1 (3m_0^2 - 2e_0^2) - e_1 m_0 e_0] (\cos^3 \vartheta - \cos \vartheta)}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-5}), \\ q &= \frac{e_0}{r} + \frac{e_1 \cos \vartheta}{r^2} + \frac{\frac{1}{2}e_2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \frac{1}{2}e_0 (m_0^2 - e_0^2) (\cos^2 \vartheta - 1)}{r^3} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}e_3 (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta) + \frac{1}{2} [e_1 (2m_0^2 - 3e_0^2) + m_1 e_0 m_0] (\cos^3 \vartheta - \cos \vartheta)}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-5}).\end{aligned}$$

Die ERNST-Potentiale \mathcal{E} und Φ ergeben sich nach den Gleichungen (1.88) und durch Bildung der Real- und Imaginärteile erhält man³

$$\begin{aligned}f &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2 + Q^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad \Phi \bar{\Phi} = \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2MQ^2}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \\ b &= -\frac{2J \cos \vartheta}{r^2} + \frac{4MJ \cos \vartheta}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \\ \alpha &= \frac{Q}{r} - \frac{MQ}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \\ \beta &= \frac{D \cos \vartheta}{r^2} - \frac{(QJ + MD) \cos \vartheta}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}).\end{aligned}$$

Um die Potentiale a und A_φ zu erhalten, kann man den Integrationsweg wie in Abschnitt 1.5.1 wählen. Mit den Gleichungen (1.72) und (1.65) ergeben sich

$$\begin{aligned}a(r_0, \vartheta_0) &= \int_{\infty}^{r_0} \frac{\partial a}{\partial r} dr = - \int_{\infty}^{r_0} \frac{\sin \vartheta_0}{f^2} \left(\frac{\partial b}{\partial \vartheta} - i \left[\bar{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \Phi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \vartheta} \right] \right) dr, \\ A_\varphi(r_0, \vartheta_0) &= \int_{\infty}^{r_0} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} dr = \int_{\infty}^{r_0} \left(\frac{\sin \vartheta_0}{f} \frac{\partial \beta}{\partial \vartheta} - a \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) dr\end{aligned}$$

und man erhält für die Potentiale a und A_φ folgendes asymptotische Verhalten:

$$\begin{aligned}a &= \frac{2J \sin^2 \vartheta}{r} + \frac{(2MJ - QD) \sin^2 \vartheta}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \\ A_\varphi &= \frac{D \sin^2 \vartheta}{r} + \frac{\frac{1}{2}(MD - 3QJ) \sin^2 \vartheta}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}).\end{aligned}$$

Mit einem Linienintegral kann auch k berechnet werden. Somit kann man das asymptotische Verhalten aller auftretenden Potentiale bestimmen.

²Welchen Konvergenzradius diese Reihen haben ist nicht offensichtlich. Prinzipiell ist diese Betrachtung im Fernfeld sinnvoll.

³Für höhere Ordnungen in $1/r$ siehe Appendix.

Kapitel 3

Physikalische Größen

Bei verschwindender Divergenz von Tensoren, lassen sich mit Hilfe des GAUSS'schen Satzes Erhaltungsgrößen berechnen. Der GAUSS'sche Satz ist jedoch nicht auf Tensoren zweiter oder noch höherer Stufe anwendbar und lautet:

$$\int_G T^a{}_{;a} d\mathcal{G} = \int_V T^a n_a d\mathcal{V}. \quad (3.1)$$

Dabei ist G das vierdimensionale Volumen mit dem vierdimensionalen Volumenelement $d\mathcal{G}$, V die (räumliche) dreidimensionale Hyperfläche, als Berandung von G , mit dem dreidimensionalen Hyperflächenelement $d\mathcal{V}$ und n^a ein in die Zukunft gerichteter Einheitsvektor, der senkrecht auf dem Hyperflächenelement steht. Man kann V so wählen, dass man für konstante Zeit über ein räumliches Volumen integriert. Ist $T^a{}_{;a} = 0$ und T^a nur innerhalb dieses räumlichen Volumens von Null verschieden, dann erhält man aus dem GAUSS'schen Satz bei Integration für $x^4 = \text{konstant}$

$$\int_V T^a n_a d\mathcal{V} = \int_V T_a n^a d\mathcal{V} = \text{konstant}$$

und damit eine Erhaltungsgröße.¹ Es sind

$$n_a = -\frac{\tilde{n}_a}{\sqrt{-\tilde{n}_b \tilde{n}^b}} \quad \text{mit} \quad \tilde{n}_a = \delta_a^4 \quad (3.2)$$

und $d\mathcal{V} = \sqrt{g} g^{44} dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{g} g^{44} d^3\vec{x}$. Es bleibt also

$$\int_V T^a n_a d\mathcal{V} = - \int_V T^4 \sqrt{-g} d^3\vec{x} = \int_V T_a n^a d\mathcal{V} = - \int_V g^{4b} T_b \sqrt{-g} d^3\vec{x} = \text{konstant}. \quad (3.3)$$

Für stationäre Raumzeiten sind natürlich alle Größen zeitunabhängig und somit Erhaltungsgrößen. Gleichung (3.3) kann jedoch ausgewertet werden, um physikalische Größen zu bestimmen, die das Gesamtsystem charakterisieren. In WEYL-Koordinaten ist $\sqrt{-g} d^3\vec{x} = h f^{-1} \varrho d\varrho d\zeta d\varphi$ und $T^4 = T^t$ hängt nur von ϱ und ζ ab.

¹Siehe z.B. [Stephani, 1991].

3.1 Ladung und baryonische Masse

Aus der lokalen Massenerhaltung (1.20) erhält man die baryonische Masse M_0 , dabei reicht es aus, über das Volumen der Staubverteilung zu integrieren.

$$M_0 = \int_{V_{\text{mat}}} dM_0 = - \int_{V_{\text{mat}}} \mu u^a n_a dV = \int_{V_{\text{mat}}} \mu u^4 \sqrt{-g} d^3 \vec{x}. \quad (3.4)$$

Analog erhält man die Ladung aus der Kontinuitätsgleichung und damit

$$Q = \int_{V_{\text{mat}}} dQ = \int_{V_{\text{mat}}} \epsilon dM_0 = \int_{V_{\text{mat}}} j^4 \sqrt{-g} d^3 \vec{x}. \quad (3.5)$$

3.2 Energie und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

Die KILLING-Vektoren stehen senkrecht auf der LORENTZ-Kraftdichte, da diese nur ϱ - und ζ -Komponenten hat. D.h. ihr Skalarprodukt verschwindet und man erhält aufgrund der KILLING-Gleichungen (1.23) mit

$$-\xi_a f^a = (\xi_a T^{(\text{em})ab})_{;b} = 0 \quad \text{und} \quad -\eta_a f^a = (\eta_a T^{(\text{em})ab})_{;b} = 0 \quad (3.6)$$

die lokalen Erhaltungssätze für Energie und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes. Da skalare Größen sich bei Koordinatentransformationen nicht ändern, gilt diese Aussage auch koordinatenunabhängig. Man kann also die elektromagnetische Feldenergie M_{em} und den elektromagnetischen Felddrehimpuls J_{em} als

$$M_{\text{em}} = \int_V T_{ab}^{(\text{em})} \xi^a n^b dV = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \left(F_{c4} F^{c4} - \frac{1}{4} F_{cd} F^{cd} \right) \sqrt{-g} d^3 \vec{x},$$

$$J_{\text{em}} = - \int_V T_{ab}^{(\text{em})} \eta^a n^b dV = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} F_{c3} F^{c4} \sqrt{-g} d^3 \vec{x}$$

definieren. Diese Definition ist so eingerichtet, dass sie mit Energie und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes in der klassischen Elektrodynamik übereinstimmt.

Alternativ kann man das Skalarprodukt von KILLING-Vektoren und LORENTZ-Kraftdichte mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und der KILLING-Gleichung auswerten.

$$\begin{aligned} -\xi_a f^a &= (A^a_{;b} - A_b^{;a}) \xi_a j^b = \xi_a (A^a j^b)_{;b} - \xi_a g^{ac} A_{b;c} j^b = \xi_a (A^a j^b)_{;b} - \xi^a \delta^c_a A_{b;c} j^b \\ &= \xi_a (A^a j^b)_{;b} - A_{b;t} j^b. \end{aligned}$$

Da die CHRISTOFFEL-Symbole im letzten Term verschwinden, erhält man

$$(\xi_a A^a j^b)_{;b} = 0 \quad \text{und} \quad (\eta_a A^a j^b)_{;b} = 0. \quad (3.7)$$

Die Integrale für M_{em} und J_{em} sollten mit diesen Gleichungen ausgedrückt werden können.

Für den Drehimpuls erhält man in WEYL-Koordinaten mit partieller Integration²

$$\begin{aligned}
 J_{\text{em}} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F_{c3} F^{c4} \sqrt{-g} \, d\varrho \, d\zeta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} A_{\varphi,c} F^{c4} \sqrt{-g} \, d\varrho \, d\zeta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left[A_{\varphi} F^{14} \sqrt{-g} \right] \Big|_{\varrho=0}^{\varrho \rightarrow \infty} - \int_0^{\infty} A_{\varphi} (F^{14} \sqrt{-g})_{,\varrho} \, d\varrho \right) d\zeta \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\left[A_{\varphi} F^{24} \sqrt{-g} \right] \Big|_{\zeta \rightarrow -\infty}^{\zeta \rightarrow \infty} - \int_{-\infty}^{\infty} A_{\varphi} (F^{24} \sqrt{-g})_{,\zeta} \, d\zeta \right) d\varrho.
 \end{aligned}$$

Die Randterme verschwinden³ und man erhält mit den inhomogenen MAXWELL-Gleichungen

$$J_{\text{em}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} A_{\varphi} \frac{1}{\sqrt{-g}} (F^{4c} \sqrt{-g})_{,c} \sqrt{-g} \, d\varrho \, d\zeta = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} A_{\varphi} j^t \sqrt{-g} \, d\varrho \, d\zeta$$

Es reicht aus über das Volumen der Staubverteilung zu integrieren, da j^a im Elektrovakuum verschwindet. Der Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes lässt sich also als

$$J_{\text{em}} = - \int_{V_{\text{mat}}} A_{aJb} \eta^a n^b \, dV = \int_{V_{\text{mat}}} A_{\varphi} j^t \sqrt{-g} \, d^3 \vec{x} \quad (3.8)$$

schreiben.

Für die Energie erhält man

$$\begin{aligned}
 M_{\text{em}} &= - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(F_{c4} F^{c4} - \frac{1}{4} F_{cd} F^{cd} \right) \sqrt{-g} \, d\varrho \, d\zeta, \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (A_{\varphi,c} F^{c3} - A_{t,c} F^{c4}) \sqrt{-g} \, d\varrho \, d\zeta, \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{-g} \left[A_{\varphi} F^{13} - A_t F^{14} \right] \Big|_{\varrho=0}^{\varrho \rightarrow \infty} \right) d\zeta + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{-g} \left[A_{\varphi} F^{23} - A_t F^{24} \right] \Big|_{\zeta \rightarrow -\infty}^{\zeta \rightarrow \infty} \right) d\varrho \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[A_t \frac{1}{\sqrt{-g}} (F^{c4} \sqrt{-g})_{,c} - A_{\varphi} \frac{1}{\sqrt{-g}} (F^{c3} \sqrt{-g})_{,c} \right] \sqrt{-g} \, d\varrho \, d\zeta,
 \end{aligned}$$

²Die Integration über φ ergibt einfach 2π , da die Größen von φ nicht abhängen.

³Für die Terme im Unendlichen kann man die Formeln aus Kapitel 2 heranziehen. Für $\varrho = 0$ können die Potentiale auf der ζ -Achse in eine TAYLOR-Reihe nach ϱ entwickelt werden. Aus den Linienintegralen zur Berechnung von A_{φ} und a aus den ERNST-Potentiale, sieht man, dass diese mit ϱ^2 beginnen. Innerhalb der Staubverteilung, kann man dazu die Linienintegrale zur Berechnung von A'_{φ} und a' aus den Quasi-ERNST-Potentiale (im mitrotierenden System) hernehmen. Aus $\sqrt{-g}$ erhält man einen weiteren Faktor ϱ . Die Randterme können ins mitrotierende System transformiert werden und verschwinden bei $\varrho = 0$.

Die Randterme verschwinden auch hier und es reicht aus, über das Volumen der Staubverteilung zu integrieren. Mit $j^\varphi = \Omega j^t$ (siehe Gleichung (1.33)) erhält man

$$M_{\text{em}} = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{mat}}} A_a j_b (\xi^a - \Omega \eta^a) n^b dV = -\frac{1}{2} \int_{V_{\text{mat}}} (A_t - \Omega A_\varphi) j^t \sqrt{-g} d^3 \vec{x} \quad (3.9)$$

zur Berechnung der Energie des elektromagnetischen Feldes.

3.3 Gravitative Masse und Drehimpuls

Aus der lokalen Energie-Impuls-Erhaltung $T^{ab}{}_{;b} = 0$ lassen sich mit Hilfe der KILLING-Vektoren für Stationarität und Axialsymmetrie zwei weitere physikalische Größen gewinnen. Mit den KILLING-Gleichungen erhält man

$$(\xi_a T^{ab})_{;b} = 0 \quad \text{und} \quad (\eta_a T^{ab})_{;b} = 0.$$

Diese sind äquivalent zu den Ausdrücken⁴

$$(\xi_a R^{ab})_{;b} = \left[\left(T^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} T \right) \xi_a \right]_{;b} = 0 \quad \text{und} \quad \left[\left(T^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} T \right) \eta_a \right]_{;b} = 0.$$

Mit diesen Gleichungen lassen sich gravitative Masse und Drehimpuls für stationäre, axialsymmetrische und asymptotisch flache Raumzeiten mit $T = -\mu$ als

$$M = 2 \int_{V_\infty} \left(T_{ab} + \frac{1}{2} \mu g_{ab} \right) \xi^a n^b dV$$

und

$$J = - \int_{V_\infty} T_{ab} \eta^a n^b dV$$

angeben.⁵ Diese Gleichungen sind so eingerichtet, dass sie mit Masse und Drehimpuls im Fernfeld übereinstimmen.⁶

Da das Integrationsgebiet für den Materieanteil im Energie-Impuls-Tensor auch auf das Volumen der Staubverteilung reduziert werden kann, erhält man⁷

$$M = 2M_{\text{em}} - \int_{V_{\text{mat}}} \mu (2u^t u_t + 1) \sqrt{-g} d^3 \vec{x} = 2M_{\text{em}} + \int_{V_{\text{mat}}} \mu (1 - 2\Omega a') \sqrt{-g} d^3 \vec{x}, \quad (3.10)$$

$$J = J_{\text{em}} + \int_{V_{\text{mat}}} \mu u^t u_\varphi \sqrt{-g} d^3 \vec{x} = J_{\text{em}} - \int_{V_{\text{mat}}} a' \mu \sqrt{-g} d^3 \vec{x} \quad (3.11)$$

⁴Z.B. [Stephani, 1991].

⁵Z.B. [Wald, 1984].

⁶Die gravitative Masse lässt sich auf zwei verschiedene Weisen definieren. Die erste ist die KOMAR-Masse, die im stationären Fall definiert werden kann. Die zweite ist die ADM-Masse, die für jede asymptotisch flache raumartige Hyperfläche definiert werden kann (siehe z.B. [Gourgoulhon, 2010]). In den hier diskutierten Fällen stimmen beide überein. Das bedeutet auch, dass das gravitative Monopolmoment mit der gravitativen Masse übereinstimmt, die durch Integration über die Oberfläche der Staubverteilung berechnet werden kann.

⁷Dabei werden die Gleichungen $u^{t'} u_{\varphi'} = u^t u_\varphi = -a'$, $u_t = u_{t'} - \Omega u_{\varphi'}$, $u^{t'} u_{t'} = -1$ und $u^t = u^{t'} = e^{-U'}$ verwendet.

für die gravitative Masse und den Drehimpuls der Raumzeit.

3.3.1 Formel für die gravitative Masse

Aus den Gleichungen (3.8) und (3.9) erhält man

$$2M_{\text{em}} - 2\Omega J_{\text{em}} = - \int_{V_{\text{mat}}} (A_t + \Omega A_\varphi) j^t \sqrt{-g} d^3\vec{x} = \int_{V_{\text{mat}}} \alpha' dQ.$$

Aus gravitativer Masse und Drehimpuls ergibt sich:

$$M - 2\Omega J = 2M_{\text{em}} - 2\Omega J_{\text{em}} + \int_{V_{\text{mat}}} \mu \sqrt{-g} d^3\vec{x} = \int_{V_{\text{mat}}} \alpha' dQ + \int_{V_{\text{mat}}} e^{U'} dM_0.$$

Schlussendlich erhält man mit Gleichung (1.112) für die gravitative Masse

$$M = 2\Omega J + \mathcal{D}M_0 \quad (3.12)$$

bei konstantem ϵ (siehe auch [Breithaupt et al., 2015]).

3.3.2 Relative Bindungsenergie

Die relative Bindungsenergie ist definiert als

$$E_b := \frac{M_0 - M}{M_0} \quad (3.13)$$

und ergibt sich zu:

$$E_b = -2\Omega J/M_0 + 1 - \mathcal{D}. \quad (3.14)$$

Diese Energie muss aufgebracht werden um alle Baryonen (Staubteilchen) ins räumlich Unendliche zu bringen. Für $E_b < 0$ erhält man eine gebundene Staubverteilung. Für $E_b \geq 0$ ist die Staubverteilung instabil bzw. würde auseinanderfliegen und dabei die Energie E_b freisetzen.

Kapitel 4

Der ultra-relativistische Grenzfall

4.1 Trennung der Raumzeiten

Für einige Fälle von entweder rotierenden oder geladenen Materieverteilungen, die durch verschiedene Materiemodelle beschrieben werden, tritt im ultra-relativistischen Grenzfall eine Trennung der Raumzeiten auf. Man erhält entweder eine so genannte „innere“ Lösung, die nicht asymptotisch flach ist oder eine so genannte „äußere“ Lösung, die, der „cosmic censorship“-Hypothese entsprechend, durch die Raumzeit eines extremen Schwarzen Loches beschrieben werden kann.¹ Letztere ist entweder die extreme KERR- oder die extreme REISNER-NORDSTRÖM-Lösung. Solange der ultra-relativistische Grenzfall noch nicht erreicht wurde, hat man eine zusammenhängende Raumzeit. Beispiele für diese entweder rotierenden oder geladenen Materieverteilungen sind folgende:

- Starr rotierende Staubscheiben, die zuerst von BARDEEN und WAGONOR untersucht [Bardeen and Wagoner, 1971]² und für die später von NEUGEBAUER und MEINEL eine analytische Lösung gefunden wurde [Neugebauer and Meinel, 1995].
- Differentiell rotierende Staubscheiben [Ansorg and Meinel, 2000].
- Rotierende toroidale (ungeladene) Flüssigkeitskörper (siehe [Labranche et al., 2007] und [Kleinwächter et al., 2011]).³
- ECD-Konfigurationen [Meinel and Hütten, 2011].

Bisher ist es nicht gelungen, eine sowohl rotierende als auch geladene Materieverteilung zu finden und zu beschreiben, bei der im ultra-relativistischen Grenzfall eine Trennung der Raumzeiten auftritt. Die starr rotierende Staubscheibe mit konstanter spezifischer Ladung (siehe Kapitel 5) ist der erste Fall, für den ein solches Verhalten mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit auftritt.

¹Normalerweise sind mit innerer bzw. äußerer Lösung diejenigen innerhalb und außerhalb einer Materieverteilung gemeint. Die Anführungszeichen werden hier durchgehend verwendet, um „innere“ und „äußere“ Lösung im Sinne der Trennung der Raumzeiten zu bezeichnen.

²In dieser Arbeit findet man auch Erläuterungen zu „innerer“ und „äußerer“ Lösung.

³Siehe auch [Meinel et al., 2008].

Wie kann man sich nun die Trennung der Raumzeiten vorstellen?⁴ Ob der Grenzübergang zur „Außen“- oder „Innenlösung“ führt, hängt davon ab, wie die Koordinaten vorher skaliert worden. Nimmt man als Skalenparameter den Radius r_0 einer Kugel, die die Materieverteilung vollständig umschließt, also die Koordinaten $(\varrho/r_0, \zeta/r_0)$, so führt dies zur „Innenlösung“. Verwendet man die baryonische bzw. gravitative Masse mit $(\varrho/M_0, \zeta/M_0)$ bzw. $(\varrho/M, \zeta/M)$, so führt dies zur „Außenlösung“. In den so skalierten WEYL-Koordinaten geht der Scheibenradius im ultra-relativistischen Grenzfall gegen Null ($\varrho_0/M_0 = \varrho_0/M = 0$). Die gesamte Materieverteilung verschwindet im Koordinatenursprung. Die Raumzeit entspricht der eines extremen Schwarzen Loches (vgl. Abschnitt 1.5).

In den mit r_0 skalierten WEYL-Koordinaten hat man im ultra-relativistischen Grenzfall eine endlich ausgedehnte Materieverteilung mit regulärer Metrik und gegebenenfalls elektromagnetischem Feld. Die (Elektro-)Vakuumlösung ist jedoch nicht asymptotisch flach. Das räumlich Unendliche kann durch eine Metrik beschrieben werden, deren Verhalten der Metrik nahe des Horizonts eines Schwarzen Loches entspricht. Man spricht daher dort von einer “near horizon geometry”.

Alle Punkte der „Außenlösung“, die in WEYL-Koordinaten einen von Null verschiedenen Abstand vom Koordinatenursprung haben, sind also unendlich weit entfernt von der (regulären) Materieverteilung im Zentrum der „Innenlösung“. Das gesamte „Universum“ der „Innenlösung“ sitzt in WEYL-Koordinaten in einem Punkt im Zentrum der „Außenlösung“, für die genau genommen noch kein Ereignishorizont existiert. Solche Konfigurationen werden als “quasi black holes” bezeichnet (zuerst in [Lue and Weinberg, 2000]). Sie sind jedoch instabil, so dass eine kleine Störung dazu führt, dass ein normales leicht unterextremes Schwarzes Loch entsteht.⁵ Der ultra-relativistische Grenzfall lässt sich somit als Phasenübergang von normaler Materie zum Zustand eines Schwarzen Loches interpretieren [Neugebauer and Meinel, 1993].

4.2 Bedingung für den Übergang zu Schwarzen Löchern

Ein Hauptaugenmerk in Abschnitt 6.2 liegt bei der „Außenlösung“ und dem Übergang zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung. Hier soll es nun um eine notwendige und hinreichende Bedingung für so einen Übergang gehen (siehe auch [Breithaupt et al., 2015]).

Zu diesem Zweck wird zuerst als Linearkombination der KILLING-Vektor

$$\chi = \xi + \Omega\eta \tag{4.1}$$

eingeführt. Damit lassen sich die beiden Potentiale f' und α' durch

$$f' \equiv -\chi^a \chi_a \quad \text{und} \quad \alpha' \equiv -\chi^a A_a \tag{4.2}$$

⁴Eine anschauliche Darstellung für den ECD Fall findet man in der Diplomarbeit von HÜTTEN [Hütten, 2011].

⁵Dies kann zum Beispiel eine kleine Zugabe von Materie sein.

koordinatenunabhängig charakterisieren. Ein stationäres und axialsymmetrisches Schwarzes Loch lässt sich dadurch definieren, dass auf seinem Ereignishorizont

$$\mathcal{H} : \quad \chi^a \chi_a = 0 \quad (4.3)$$

gilt. Dabei ist der Ereignishorizont eine Null-Hyperfläche mit dem (lichtartigen) Normalenvektor χ^a und $\Omega = \Omega_{\mathcal{H}}$ ist die Winkelgeschwindigkeit des Horizonts. Aus den Bewegungsgleichungen nach Gleichung (1.112) ergab sich für konstantes ϵ innerhalb der Staubverteilung $\sqrt{f'} + \epsilon\alpha' = \mathcal{D} = \text{konstant}$. Daraus erhält man

$$\chi^a \chi_a = -(\epsilon\chi^a A_a + \mathcal{D})^2. \quad (4.4)$$

Damit ergibt sich als *notwendige* Bedingung für den Übergang zu einem Schwarzen Loch, dass auf der Oberfläche der Staubverteilung \mathcal{B} der Ausdruck $\alpha' = \chi^a A_a$ für $|\epsilon| > 0$ konstant sein muss:⁶

$$\mathcal{B} : \quad \chi^a A_a = -\mathcal{D}/\epsilon. \quad (4.5)$$

Wenn \mathcal{B} in diesem Grenzfall auch eine Null-Hyperfläche ist, die der Definition eines Ereignishorizonts entspricht, dann ist Bedingung (4.5) auch *hinreichend*. Dazu lässt sich genau wie im ungeladenen Fall argumentieren [Meinel, 2006]. Die Hyperfläche \mathcal{B} ist durch die zeitartigen Weltlinien der Staubteilchen der Oberfläche der Staubverteilung gegeben. Nach Gleichung (1.33) kann deren Vierergeschwindigkeit durch

$$u^a = \frac{\chi^a}{\sqrt{-\chi^b \chi_b}} = e^{-U'} \chi^a \quad (4.6)$$

ausgedrückt werden. Unter der Annahme, dass ein Staubteilchen auf \mathcal{B} wenigstens minimal gebunden ist, ergibt sich:⁷

$$0 \leq -\xi^a u_a = \frac{-\xi^a \chi_a}{\sqrt{-\chi^b \chi_b}} \leq 1. \quad (4.7)$$

Damit steht im Grenzfall $\chi^a \chi_a \rightarrow 0$ der KILLING-Vektor χ^a senkrecht auf ξ^a und damit auch auf η^a :

$$\xi^a \chi_a \rightarrow 0, \quad \eta^a \chi_a \rightarrow 0. \quad (4.8)$$

Da die Zirkularitätsbedingung (1.29) erfüllt und somit die Raumzeit orthogonal transitiv ist, steht χ^a zudem senkrecht auf einem Tangentenvektor von \mathcal{B} , der keine Komponenten in Richtung von ξ^a und η^a hat. Damit ist χ^a orthogonal zu drei linear unabhängigen Tangentenvektoren an jedem Punkt von \mathcal{B} . Das heißt, dass χ^a der Normalenvektor von \mathcal{B} ist. Da er zudem nach Gleichung (4.5) lichtartig ist, bedeutet dies, dass \mathcal{B} der Definition des Ereignishorizonts eines stationären und axialsymmetrischen Schwarzen Loches entspricht. Zusammen mit der Eindeutigkeit der KERR-NEWMAN-Lösung [Meinel, 2012], die auch den Extremfall mit einschließt, ergibt sich außerhalb des Ereignishorizonts die

⁶Der ungeladene Fall $\epsilon = 0$ lässt sich gesondert angehen. Dabei reduziert sich die Bedingung für den Übergang zu einem Schwarzen Loch auf $\mathcal{D} = 0$. Siehe dazu die Arbeiten von MEINEL [Meinel, 2004] und [Meinel, 2006].

⁷Es ist $-\xi^a u_a = -(\chi^a - \Omega\eta^a) u_a = e^{U'} + \Omega\eta^a u_a \geq 0$, da Ω und $\eta^a u_a$ immer das gleiche Vorzeichen haben.

KERR-NEWMAN-Lösung mit $Q^2 M^2 + J^2 \leq M^4$. Die gravitative Masse für eine Staubverteilung lässt sich als $M = 2\Omega J + \mathcal{D}M_0$ schreiben (siehe Abschnitt 3.3.1). Mit Gleichung (4.5) ergibt sich daraus

$$M = 2\Omega J - \chi^a A_a Q, \quad \text{mit} \quad \chi^a A_a = \alpha'_B = \text{konstant.} \quad (4.9)$$

Dieser Ausdruck stimmt nun nach der Arbeit von SMARR [Smarr, 1973] sowie Gleichung (1.146) genau mit der gravitativen Masse des extremen KERR-NEWMAN Schwarzen Loches überein.

Dies bedeutet, dass die Bedingung (4.5) *notwendig* und *hinreichend* für den Übergang zu einem extremen Schwarzen Loch ist. Zudem kann ein solcher Übergang nur zum extremen Fall führen.

Es sei noch angemerkt, dass Gleichung (4.5) sich auf eine reguläre, endlich ausge dehnte Staubverteilung bezieht. Für einen konkreten Fall muss sie also in Koordinaten ausgewertet werden, die bei der Trennung der Raumzeiten auf die „Innenlösung“ führen. In WEYL-Koordinaten wären dies $(\varrho/r_0, \zeta/r_0)$.

Kapitel 5

Das Randwertproblem der starr rotierenden geladenen Staubscheibe

Bisher wurde immer von einer geladenen Staubverteilung ausgegangen, wobei an die Gestalt nur die Bedingung der Axialsymmetrie gestellt wurde. Im Allgemeinen ergibt sich die genaue Gestalt der Materieverteilung erst mit der globalen Lösung der Feldgleichungen. Für einen isolierten Rotationskörper¹ geht es, unter der Annahme von Stationarität und Axialsymmetrie, um die Lösung eines freien Randwertproblems. Bei diesem ist die Oberfläche des Rotationskörpers Σ , die im Prinzip in WEYL-Koordinaten im ersten Quadranten als Funktion $\zeta(\varrho)$ dargestellt werden kann, nicht a priori gegeben.

Um eine globale Lösung der EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen für eine spezielle geladene Staubverteilung zu gewinnen, wird jetzt als erster Schritt eine Forderung an die Oberflächengestalt Σ gestellt. Es wird angenommen, dass die geladene Staubverteilung als eine rotierende, infinitesimal dünne Scheibe, deren Mittelpunkt bei $\varrho = \zeta = 0$ liegt und die einem endlichen Koordinatenradius ϱ_0 hat, gegeben ist. Das Gebiet kann als ein Weltzylinder der zweidimensionalen Fläche Σ_2 mit

$$\Sigma_2 : \quad \zeta = 0 \quad (0 \leq \varrho \leq \varrho_0), \quad t = \text{konstant} \quad (5.1)$$

beschrieben werden. Damit ist die Oberfläche des Rotationskörpers bis auf den (skalierenden) Parameter ϱ_0 festgelegt.

Als nächstes gilt es unter dieser Festlegung die Feld- und Wellengleichungen im Inneren der Staubscheibe und im Elektrovakuum zu lösen. Dieses (globale) Problem lässt sich auf ein Randwertproblem der Feld- und Wellengleichungen im Elektrovakuum zurückführen. Durch Integration der inneren Feld- und Wellengleichungen erhält man Randwerte, die das Verhalten der Potentiale auf der Scheibenoberfläche beschreiben. Aus der Lösung des Randwertproblems ergeben sich auch die Raumzeitstruktur und das elektromagnetische Feld innerhalb der Staubscheibe, sowie Flächenmassen- und Flächenladungsdichte. Zusätzlich zu den Randwerten auf der Scheibe muss man ein reguläres Verhalten der Potentiale im räumlich Unendlichen fordern.

¹Z.B. einen Neutronenstern.

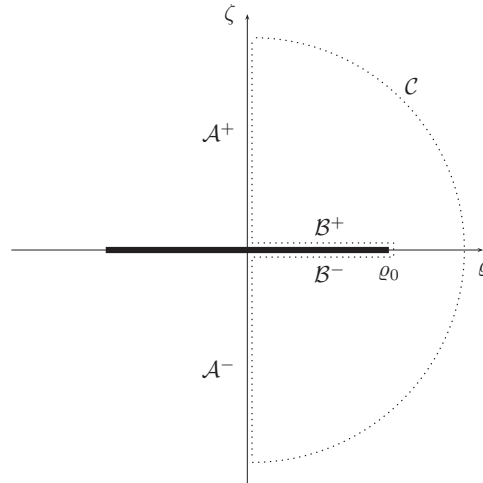


Abbildung 5.1. Die rotierende geladene Staubscheibe mit den Bereichen der Symmetrieachse A^+ und A^- , oberhalb und unterhalb der Scheibe B^+ und B^- und im räumlich Unendlichen C .

5.1 Die Regularitätsbedingungen im räumlich Unendlichen

Im ruhenden System erhält man für $\varrho^2 + \zeta^2 \rightarrow \infty$:

$$C: \quad \alpha \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow 0, \quad f \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad b \rightarrow 0 \quad (5.2)$$

und damit

$$C: \quad \Phi \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{E} \rightarrow 1. \quad (5.3)$$

Diese Gleichungen können als Regularitätsbedingung im räumlich Unendlichen hergenommen werden.

5.2 Die Randwerte auf der Scheibenoberfläche

Um die Randwerte zu erhalten, wird zunächst die Massendichte μ mit der DIRAC'schen Delta-Distribution $\delta(\zeta)$ und der (koordinatenabhängigen) Flächenmassendichte $\sigma(\varrho)$ als

$$\mu = \sigma(\varrho) e^{2U-2k} \delta(\zeta) \quad (5.4)$$

eingeführt.² Aus

$$\sigma_p = e^{U-k} \sigma \quad (5.5)$$

erhält man eine invariante Flächenmassendichte.

5.2.1 Berechnung im mitrotierenden System

Die Herleitung der Randbedingungen auf der Scheibe ist am einfachsten im mitrotierenden System. Um dieses global verwenden zu können, wird das Materiemodell auf starre

²Zu Flächenbelegungen des Energie-Impuls-Tensors siehe z.B. [Israel, 1966].

Rotation ($\Omega = \text{konstant}$) spezifiziert. Mit Gleichung (5.4) lauten die Feld- und Wellengleichungen (1.115) aus Abschnitt 1.4.3:

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{f'}{\varrho^2} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'}) \right], \quad (5.6a)$$

$$-4\pi\sigma\epsilon e^{-U'} \delta(\zeta) = \nabla \cdot \left[\frac{a' f'}{\varrho^2} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'}) - \frac{1}{f'} \nabla A'_{t'} \right], \quad (5.6b)$$

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{f'^2}{\varrho^2} \nabla a' + 4 \frac{f'}{\varrho^2} A'_{t'} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'}) \right], \quad (5.6c)$$

$$8\pi\sigma f'^2 \delta(\zeta) = f' \Delta f' - (\nabla f')^2 + \frac{f'^4}{\varrho^2} (\nabla a')^2 - 2f' (\nabla A'_{t'})^2 + 2 \frac{f'^3}{\varrho^2} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'})^2, \quad (5.6d)$$

$$k'_{,\zeta} = \frac{\varrho}{2} \left(4U'_{,\varrho} U'_{,\zeta} - \frac{f'^2}{\varrho^2} a'_{,\varrho} a'_{,\zeta} \right) + 2 \left[\frac{f'}{\varrho} (A'_{\varphi',\varrho} - a' A'_{t',\varrho}) (A'_{\varphi',\zeta} - a' A'_{t',\zeta}) - \frac{\varrho}{f'} A'_{t',\varrho} A'_{t',\zeta} \right]. \quad (5.6e)$$

Aus diesen Gleichungen und der Beziehung $R = 8\pi\mu$ lassen sich Randbedingungen für die Potentiale f' , a' , h' , $A'_{\varphi'}$ und $A'_{t'}$ gewinnen.

Die Aussagen zur Äquatorsymmetrie aus Abschnitt 1.2.3 gelten auch im mitrotierenden System. Für die fünf äquatorsymmetrischen Potentiale gilt also bei Annäherung an die Scheibe von unten ($\zeta = 0^-$) bzw. von oben ($\zeta = 0^+$) die Relation

$$\{U', a', k', A'_{\varphi'}, A'_{t'}\}_{|\zeta=0^+} = \{U', a', k', A'_{\varphi'}, A'_{t'}\}_{|\zeta=0^-}, \quad (5.7)$$

während die Normalenableitungen

$$\{U'_{,\zeta}, a'_{,\zeta}, k'_{,\zeta}, A'_{\varphi',\zeta}, A'_{t',\zeta}\}_{|\zeta=0^+} = -\{U'_{,\zeta}, a'_{,\zeta}, k'_{,\zeta}, A'_{\varphi',\zeta}, A'_{t',\zeta}\}_{|\zeta=0^-} \quad (5.8)$$

einen Sprung auf der Scheibe haben.

Die Randwerte kann man nun erhalten, indem man über einen kleinen (räumlichen) Zylinder um die Staubscheibe herum die Feld- und Wellengleichungen integriert. Im Grenzwert, bei dem dieser Zylinder nur noch die Staubscheibe einschließt, liefert nur die Integration in Normalen- also ζ -Richtung einen Anteil. Folglich integriert man nur über ζ und lässt das Integrationsintervall gegen Null gehen. Da nur die Normalenableitungen der Potentiale eine Sprung aufweisen, verschwinden bei dieser Integration alle Größen bis auf die, in denen zweite ζ -Ableitungen vorkommen.³ Durch die Produktregel erhält man

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} u v_{,\zeta\zeta} d\zeta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left[(u v_{,\zeta})_{,\zeta} - u_{,\zeta} v_{,\zeta} \right] d\zeta = u v_{,\zeta} \Big|_{\zeta=0^+} - u v_{,\zeta} \Big|_{\zeta=0^-}$$

für beliebige Funktionen u und v .

³Die Delta-Distribution ist die verallgemeinerte Ableitung der HEAVISIDE-Sprungfunktion. Somit hat man auf beiden Seiten der Gleichungen (5.6) δ -artige Ausdrücke.

Aus Gleichung (5.6a) bleibt bei dieser Integration mit den Gleichungen (5.8) der Ausdruck

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{f'}{\varrho^2} (a' A'_{t',\zeta\zeta} - A'_{\varphi',\zeta\zeta}) \, d\zeta = \frac{f'}{\varrho^2} (a' A'_{t',\zeta} - A'_{\varphi',\zeta}) \Big|_{\zeta=0^+} - \frac{f'}{\varrho^2} (a' A'_{t',\zeta} - A'_{\varphi',\zeta}) \Big|_{\zeta=0^-} \\ &= \frac{2f'}{\varrho^2} (a' A'_{t',\zeta} - A'_{\varphi',\zeta}) \Big|_{\zeta=0^+} \end{aligned}$$

bestehen und man erhält als **erste** Randbedingung

$$\mathcal{B}: \quad A'_{\varphi',\zeta} = a' A'_{t',\zeta}. \quad (5.9)$$

Aus Gleichung (5.6b) bleibt bei dieser Integration der Ausdruck

$$\begin{aligned} -4\pi\sigma\epsilon e^{-U'} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left[\frac{a' f'}{\varrho^2} (a' A'_{t',\zeta\zeta} - A'_{\varphi',\zeta\zeta}) - \frac{1}{f'} A'_{t',\zeta\zeta} \right] d\zeta \\ &= 2 \left[\frac{a' f'}{\varrho^2} (a' A'_{t',\zeta} - A'_{\varphi',\zeta}) - \frac{1}{f'} A'_{t',\zeta} \right] \Big|_{\zeta=0^+} \end{aligned}$$

bestehen und man erhält nach Einsetzen der ersten Randbedingung (5.9) die Gleichung

$$\mathcal{B}: \quad \frac{1}{a'} A'_{\varphi',\zeta} = A'_{t',\zeta} = 2\pi\sigma\epsilon e^{U'}. \quad (5.10)$$

Der Feldgleichung (5.6c) sieht man jetzt sofort an, dass sich mit Gleichung (5.9) nach Integration von

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left[\frac{f'^2}{\varrho^2} a'_{,\zeta\zeta} + 4 \frac{f'}{\varrho^2} A'_{t'} (a' A'_{t',\zeta\zeta} - A'_{\varphi',\zeta\zeta}) \right] d\zeta$$

der elektromagnetische Anteil weghebt und man als **zweite** Randbedingung einfach

$$\mathcal{B}: \quad a'_{,\zeta} = 0 \quad (5.11)$$

erhält. Aus der Feldgleichung (5.6d) erhält man

$$8\pi\sigma e^{4U'} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f' f'_{,\zeta\zeta} d\zeta = 2e^{2U'} \left(e^{2U'} \right)_{,\zeta} \Big|_{\zeta=0^+} = 4e^{4U'} U'_{,\zeta} \Big|_{\zeta=0^+}$$

und damit die Gleichung

$$\mathcal{B}: \quad U'_{,\zeta} = 2\pi\sigma. \quad (5.12)$$

Dies eingesetzt in (5.10) ergibt die **dritte** Randbedingung

$$\mathcal{B}: \quad A'_{t',\zeta} = \epsilon \left(e^{U'} \right)_{,\zeta}. \quad (5.13)$$

Integration über die Beziehung $R = 8\pi\mu$ ergibt

$$8\pi\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(\frac{1}{f'} f'_{,\zeta\zeta} - \frac{1}{h'} h'_{,\zeta\zeta} \right) d\zeta = 4 (U'_{,\zeta} - k'_{,\zeta}) \Big|_{\zeta=0^+}$$

und es ergibt sich mit Gleichung (5.12) die **vierte** Randbedingung

$$\mathcal{B}: \quad k'_{,\zeta} = 0. \quad (5.14)$$

Setzt man diese Ergebnisse jetzt in die Gleichung (5.6e) für $k'_{,\zeta}$ ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{B}: \quad 2\rho U'_{,\varrho} U'_{,\zeta} &= 2\rho e^{-2U'} A'_{\varrho} A'_{\zeta}, \\ e^{U'} U'_{,\varrho} U'_{,\zeta} &= \epsilon A'_{\varrho} U'_{,\zeta} \end{aligned}$$

und damit die **fünfte** Randbedingung

$$\mathcal{B}: \quad \left(e^{U'} \right)_{,\varrho} = \epsilon A'_{\varrho}. \quad (5.15)$$

Damit hat man die Randbedingungen:

$$\mathcal{B}: \quad A'_{\varphi',\zeta} = a' A'_{\zeta}, \quad a'_{,\zeta} = 0, \quad A'_{\zeta} = \epsilon \left(e^{U'} \right)_{,\zeta}, \quad \left(e^{U'} \right)_{,\varrho} = \epsilon A'_{\varrho} \quad \text{und} \quad k'_{,\zeta} = 0. \quad (5.16)$$

Jetzt sollen die Randwerte für die ERNST-Potentiale berechnet werden. Das Potential β' wurde so eingeführt, dass für seine ϱ -Ableitung

$$\beta'_{,\varrho} = -\frac{f'}{\varrho} (a' A'_{\zeta} - A'_{\varphi',\zeta})$$

gilt. Aus der ersten Randbedingung folgt damit, dass $\beta'_{,\varrho}$ auf der Scheibe verschwindet. Integration nach ϱ ergibt

$$\mathcal{B}: \quad \beta' = 0$$

als Randbedingung für β' . Aus Stetigkeitsgründen am Scheibenrand muss die Integrationskonstante verschwinden, da β' eine ungerade Funktion in ζ ist (siehe Abschnitt 1.2.3). Das Potential b' wurde so eingeführt, dass für seine ϱ -Ableitung

$$-b'_{,\varrho} = \frac{f'^2}{\varrho} a'_{,\zeta} + 2\Im(\bar{\Phi}' \Phi'_{,\varrho})$$

gilt. Mit der zweiten Randbedingung und der Randbedingung für β' muss diese Gleichung auf der Scheibe Null ergeben. Die Integration nach ϱ ergibt als Randbedingung für b'

$$\mathcal{B}: \quad b' = 0,$$

da auch b' eine ungerade Funktion in ζ ist.

Für die ERNST-Gleichungen sind die vier Randbedingungen

$$\mathcal{B}: \quad \beta' = 0, \quad b' = 0, \quad \left(e^{U'} \right)_{,\varrho} + \epsilon a'_{,\varrho} = 0 \quad \text{und} \quad a'_{,\zeta} + \epsilon \left(e^{U'} \right)_{,\zeta} = 0 \quad (5.17)$$

entscheidend. Es wurde das Materiemodell bereits auf $\Omega = \text{konstant}$ spezifiziert. Offen ist noch die freie Funktion $\epsilon(\varrho)$, die in Abschnitt 1.1.9 auf zweierlei Weise spezifiziert wurde.

Auswertung für konstante spezifische Ladung

Für konstante spezifische Ladung ϵ kann man die dritte Gleichung entlang der Scheibe nach ϱ integrieren und erhält:

$$\mathcal{B} : \quad e^{U'} + \epsilon\alpha' = \mathcal{D}, \quad \text{mit } \mathcal{D} = \text{konstant} \quad (5.18)$$

Damit ergeben sich als Randbedingungen für \mathcal{E}' und Φ'

$$\mathcal{B} : \quad \Phi' = \alpha' \quad \text{und} \quad \mathcal{E}' = f' - \alpha'^2 = (\epsilon^2 - 1)\Phi'^2 - 2\epsilon\mathcal{D}\Phi' + \mathcal{D}^2. \quad (5.19)$$

Dies entspricht auch den Bewegungsgleichungen im mitrotierenden System.⁴

Die vierte Randbedingung lässt sich jetzt aufschreiben als

$$\mathcal{B} : \quad \epsilon f'_{,\zeta} = 2e^{U'} \epsilon \left(e^{U'} \right)_{,\zeta} = -2(\epsilon\alpha' - \mathcal{D}) \epsilon \left(e^{U'} \right)_{,\zeta} = 2(\epsilon\alpha' - \mathcal{D}) \alpha'_{,\zeta}. \quad (5.20)$$

Für die ERNST-Potentiale ergibt sich somit

$$\mathcal{B} : \quad \epsilon (\Re \mathcal{E}')_{,\zeta} = -2\mathcal{D} (\Re \Phi')_{,\zeta}. \quad (5.21)$$

Die Randbedingungen sind im ECD-Fall automatisch erfüllt. Die Flächenmassendichte $\sigma_{\text{st}}(\varrho)$ wird in diesem Fall durch die Randwerte nicht eindeutig festgelegt, sondern muss sich aus dem statischem Grenzfall der relativistischen rotierenden geladenen Staubscheibe ergeben.

Auswertung für verschwindende LORENTZ-Kraftdichte innerhalb der Staubverteilung

Für verschwindende LORENTZ-Kraftdichte ergibt sich nach Gleichung (1.114), dass α' entlang der Scheibenoberfläche konstant ist. Damit erhält man aus den Randbedingungen die vier Relationen

$$\mathcal{B} : \quad \beta' = 0, \quad b' = 0, \quad e^{2U'} = e^{2V_0} = f_0 = \text{const.} \quad \text{und} \quad \alpha' = \alpha_0 = \text{const.} \quad (5.22)$$

Für die ERNST-Potentiale ergeben sich die einfachen Ausdrücke

$$\mathcal{B} : \quad \mathcal{E}' = f_0 - \alpha_0^2 \quad \text{und} \quad \Phi' = \alpha_0. \quad (5.23)$$

Hat man dieses Randwertproblem gelöst, kann die Randbedingung, in der die ζ -Ableitungen vorkommen, verwendet werden, um die freie Funktion $\epsilon(\varrho)$ zu bestimmen. Es ist jedoch sehr zu vermuten, dass sich aus der Forderung einer regulären Massendichte am Rand der Scheibe ($\varrho = \varrho_0$) ein nicht-regulärer (unendlicher) Wert für die Ladungsdichte ergibt.⁵ Deshalb wird sich hier auf das Modell mit konstanter spezifischer Ladung beschränkt.

⁴Die ζ -Ableitungen der Potentiale sind innerhalb der Scheibe unstetig und somit nicht definiert. Dies kann man sich am Grenzprozess, der von einer ausgedehnten Staubverteilung zu einer Scheibe geht, überlegen. Die ζ -Ableitungen aus der letzten Randbedingung beschreiben das Verhalten der Potentiale *außerhalb* der Scheibe am Scheibenrand.

⁵Einige Rechnungen legen dies nahe. Vergleiche zudem die Ladungsverteilung bei einer geladenen, leitenden (Metall-) Scheibe in der klassischen Elektrodynamik.

5.2.2 Übersetzung ins ruhende System

Die Randbedingungen sind im mitrotierenden System recht einfach. Sie lassen sich aber auch ins ruhende System übersetzen:

Erste Randbedingung Es ergibt sich:

$$A'_{\varphi',\zeta} = a' A'_{t',\zeta}$$

$$\Rightarrow A_{\varphi,\zeta} = a' (A_t + \Omega A_\varphi)_{,\zeta} = \frac{a' A_{t,\zeta}}{1 - a'\Omega} = \frac{1 - (1 + \Omega a) \frac{f}{f'}}{\Omega (1 + \Omega a) \frac{f}{f'}} A_{t,\zeta} = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{f'}{(1 + \Omega a) f} - 1 \right) A_{t,\zeta}$$

und damit

$$A_{\varphi,\zeta} = \left(\frac{\Omega \varrho^2}{f^2 (1 + \Omega a)} - a \right) \alpha_{,\zeta} \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{\varrho} (a \alpha_{,\zeta} + A_{\varphi,\zeta}) = \beta_{,\varrho} = \frac{\Omega \varrho}{f (1 + \Omega a)} \alpha_{,\zeta}$$

Zweite Randbedingung Es ergibt sich:

$$0 = a'_{,\zeta} = \frac{1}{\Omega} \left(1 - (1 + \Omega a) \frac{f}{f'} \right)_{,\zeta} = -\frac{1}{\Omega} \left(\frac{1 + \Omega a}{(1 + \Omega a)^2 - \Omega^2 \varrho^2 f^{-2}} \right)_{,\zeta}.$$

Multipliziert mit $[(1 + \Omega a)^2 - \Omega^2 \varrho^2 f^{-2}]^2$ erhält man

$$0 = \left[(1 + \Omega a)^2 + \frac{\Omega^2 \varrho^2}{f^2} \right] a_{,\zeta} + \frac{2\Omega \varrho^2 (1 + \Omega a)}{f^3} f_{,\zeta},$$

$$= \frac{(1 + \Omega a)^2}{\varrho} \left[\frac{f^2}{\varrho} a_{,\zeta} + \frac{\Omega^2 \varrho}{(1 + \Omega a)^2} a_{,\zeta} + \frac{2\Omega \varrho}{f (1 + \Omega a)} f_{,\zeta} \right].$$

$$\Rightarrow b_{,\varrho} = -\frac{f^2}{\varrho} a_{,\zeta} + 2(\beta \alpha_{,\varrho} - \alpha \beta_{,\varrho}) = \frac{\Omega^2 \varrho}{(1 + \Omega a)^2} a_{,\zeta} + \frac{2\Omega \varrho}{f (1 + \Omega a)} f_{,\zeta} + 2(\beta \alpha_{,\varrho} - \alpha \beta_{,\varrho}).$$

Dritte Randbedingung Es ergibt sich:

$$\left(\sqrt{(1 + \Omega a)^2 f - \Omega^2 \varrho^2 f^{-1}} \right)_{,\varrho} = \epsilon (\Omega A_\varphi - \alpha)_{,\varrho}.$$

Beginnt man mit $f' = (\epsilon \alpha' - \mathcal{D})^2$, erhält man

$$(1 + \Omega a)^2 f - \Omega^2 \varrho^2 f^{-1} = (\epsilon \alpha - \epsilon \Omega A_\varphi - \mathcal{D})^2.$$

Vierte Randbedingung Es ergibt sich:

$$\epsilon \left(\sqrt{(1 + \Omega a)^2 f - \Omega^2 \varrho^2 f^{-1}} \right)_{,\zeta} = (\Omega A_\varphi - \alpha)_{,\zeta}.$$

Beginnt man mit $\epsilon^2 f'_{,\zeta} = [(\epsilon \alpha' - \mathcal{D})^2]_{,\zeta}$, erhält man

$$\epsilon^2 [(1 + \Omega a)^2 f - \Omega^2 \varrho^2 f^{-1}]_{,\zeta} = [(\epsilon \alpha - \epsilon \Omega A_\varphi - \mathcal{D})^2]_{,\zeta}.$$

Ergebnis

Damit ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\Omega \varrho}{(1 + \Omega a)} f^{\alpha, \zeta} = \beta_{, \varrho}. \quad (5.24a)$$

$$\frac{\Omega^2 \varrho}{(1 + \Omega a)^2} a_{, \zeta} + \frac{2\Omega \varrho}{f(1 + \Omega a)} f_{, \zeta} = b_{, \varrho} - 2(\beta \alpha_{, \varrho} - \alpha \beta_{, \varrho}). \quad (5.24b)$$

$$\left(\sqrt{(1 + \Omega a)^2 f - \Omega^2 \varrho^2 f^{-1}} \right)_{, \varrho} = \epsilon (\Omega A_\varphi - \alpha)_{, \varrho}. \quad (5.24c)$$

$$\epsilon \left(\sqrt{(1 + \Omega a)^2 f - \Omega^2 \varrho^2 f^{-1}} \right)_{, \zeta} = (\Omega A_\varphi - \alpha)_{, \zeta}. \quad (5.24d)$$

5.2.3 Physikalische Interpretation

Die ersten beiden Randbedingungen lassen sich so deuten, dass im mitrotierenden Bezugssystem lokal keine Flächenladungs- und Flächenmassenströme fließen. Man kann in einem beliebigen Punkt in der Scheibe ein mitbewegtes lokales kartesisches Intertialsystem einführen, in dem z - und φ' -Richtung übereinstimmen. In diesem geht die Gleichung (5.6a) in

$$F^{\beta a}_{; a} = F^{\beta a}_{, a} = \nabla \times \vec{H} = 0 \quad (5.25)$$

über, da im mitrotierenden System $\vec{j} = 0$ ist. Man erhält aus dieser Gleichung, dass die Tangentialkomponente (also x - bzw. ϱ -Komponente) des magnetischen \vec{H} -Feldes auf der Scheibe stetig ist. D.h. es fließt kein (Ober)-Flächenladungsstrom.

Eine analoge Überlegung ergibt sich für das gravito-*magnetische* Potential a .

Die dritte Randbedingung ist die relativistische Verallgemeinerung dafür, dass sich im NEWTON'schen Grenzfall für jedes Teilchen in der Scheibe Gravitations-, Zentrifugal- und elektrische Kraft aufheben. Betrachtet man den NEWTON'schen Grenzfall von Gleichung (5.24c), dann geht das Potential U ins NEWTON'sche Gravitationspotential U^G und α in das elektrische Potential U^E über. Magnetfeld und gravitomagnetisches Potential sind klein gegenüber elektrischem Feld und NEWTON'schem Gravitationspotential und können somit vernachlässigt werden. Da im NEWTON'schen Grenzfall alle Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sein sollten, muss für die Teilchengeschwindigkeit (innerhalb der Scheibe)

$$v_\varphi = \Omega \varrho \ll 1$$

gelten. In den hier gewählten Einheiten ist U^G eine kleine Größe, so dass das Produkt $U^G \Omega^2 \varrho^2$ vernachlässigt werden kann. Entwickelt man noch die Wurzel nach $\Omega^2 \varrho^2$ erhält man im NEWTON'schen Grenzfall:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} U^E &\approx - \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[(1 + U^G) \sqrt{1 - \Omega^2 \varrho^2 (1 - 4U^G)} \right] \approx - \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[(1 + U^G) \left(1 - \frac{1}{2} \Omega^2 \varrho^2 \right) \right] \\ &\approx - \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[U^G - \frac{1}{2} \Omega^2 \varrho^2 \right]. \end{aligned}$$

Diese Interpretation ist in der Weise konsistent, da man diese Randbedingung nach Abschnitt 1.4.2 auch aus den Bewegungsgleichungen (1.22) herleiten kann.

Die vierte Randbedingungen gibt den Zusammenhang zwischen der Flächenmassendichte und der Flächenladungsdichte an.

5.3 Untersuchung von Invarianz-Transformationen

Im Prinzip können Invarianztransformationen nach Abschnitt 1.2.4 verwendet werden, um die Randwerte zu vereinfachen. Es stellt sich insbesondere die Frage, ob das Randwertproblem durch eine inverse HARRISON-Transformation auf ein Randwertproblem für eine ungeladene Materieverteilung zurückgeführt werden kann. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, ist dies nicht der Fall.

5.3.1 HARRISON-Transformation

Die durch eine HARRISON-Transformation (1.100) erzeugten ERNST-Potentiale sind proportional zueinander:

$$\Phi_{\text{ev}} = c_3 \mathcal{E}_{\text{ev}}.$$

Sie haben aber nicht das richtige asymptotische Verhalten. Um dieses zu erhalten kann man mit Gleichung (1.98d)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{ev}} - 2\bar{c}_2 \Phi_{\text{ev}} - c_2 \bar{c}_2 \quad \text{und} \quad \Phi = \Phi_{\text{ev}} + c_2 \quad \text{mit} \quad c_2 = \text{konstant} \in \mathbb{C} \quad (5.26)$$

eine weitere Invarianztransformation der Potentiale durchführen. Jetzt kann man den Zusammenhang zwischen den neuen ERNST-Potentiale \mathcal{E} und Φ ausrechnen. Es ergibt sich

$$\mathcal{E}_{\text{ev}} = \frac{\mathcal{E} + \bar{c}_2 c_2}{1 - 2\bar{c}_2 c_3},$$

und damit

$$\Phi = c_3 \mathcal{E}_{\text{ev}} + c_2 = \frac{c_3}{1 - 2\bar{c}_2 c_3} \left(\mathcal{E} + \frac{c_2}{c_3} - \bar{c}_2 c_2 \right).$$

Aus dem Verhalten der Potentiale im Fernfeld ergibt sich

$$\bar{c}_2 c_2 - \frac{c_2}{c_3} = 1 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -\frac{c_2}{1 - \bar{c}_2 c_2}.$$

Damit lässt sich c_3 eliminieren und man erhält durch Erweitern mit $1/c_3$ und c_2 den Ausdruck

$$\Phi = \frac{c_2}{\frac{c_2}{c_3} - 2\bar{c}_2 c_2} (\mathcal{E} - 1) = -\frac{c_2}{1 + \bar{c}_2 c_2} (\mathcal{E} - 1).$$

Mit der Konstanten

$$c := \frac{2c_2}{1 + \bar{c}_2 c_2} = \text{konstant} \in \mathbb{C}$$

erhält man

$$\Phi = \frac{c}{2} (1 - \mathcal{E}). \quad (5.27)$$

Für die ERST-Potentiale ξ und q erhält man den Zusammenhang

$$q = \frac{2\Phi}{1 + \mathcal{E}} = c \frac{1 - \mathcal{E}}{1 + \mathcal{E}} = c \xi.$$

Im Fernfeld ergibt sich damit

$$e_n = c m_n$$

für die Koeffizienten der Potentiale. Soll Äquatorsymmetrie erhalten bleiben, bedeutet dies, dass die Konstante c und damit auch die Konstanten c_3 und c_2 reell sein müssen.

Sollte die gesuchte Lösung zum Randwertproblem der rotierenden geladenen Staubscheibe durch eine HARRISON-Transformation aus einer Vakuumlösung zu gewinnen sein, so muss die Lösung die Gleichung (5.27) erfüllen. Diese Gleichung wird im ECD- und im NEWTON'schen Grenzfall, sowie von der KERR-NEWMAN-Lösung erfüllt. Die Post-NEWTON'sche Entwicklung aus Kapitel 6 zeigt jedoch, dass dieser Zusammenhang zwischen \mathcal{E} und Φ im Allgemeinen nicht besteht. Das Randwertproblem lässt sich also nicht durch eine einfache HARRISON-Transformation auf das einer ungeladenen Materieverteilung zurückführen.

5.3.2 Vereinfachung der Randbedingungen im mitrotierenden System

Durch die Hintereinanderausführung der Gleichungen (1.98a) und (1.98d) mit $c_1 = \epsilon$ und $c_2 = -\mathcal{D}$ erhält man⁶

$$\mathcal{E}'_t = \epsilon^2 \mathcal{E}' + 2\epsilon \mathcal{D} \Phi' - \mathcal{D}^2, \quad \Phi'_t = \epsilon \Phi' - \mathcal{D}. \quad (5.28)$$

Die Rücktransformation ergibt

$$\epsilon^2 \mathcal{E}' = \mathcal{E}'_t - 2\mathcal{D} \Phi'_t - \mathcal{D}^2, \quad \epsilon \Phi' = \Phi'_t + \mathcal{D}. \quad (5.29)$$

Multipliziert man jetzt Randbedingung (5.21) mit ϵ , dann erhält man die einfache NEUMANN'sche Randbedingung $(\Re \mathcal{E}'_t)_{,\zeta} = 0$. Da die Konstanten c_1 und c_2 reell sind, erhält man die Randbedingungen $\Im \mathcal{E}'_t = 0$ und $\Im \Phi'_t = 0$. Nach Multiplikation der Randbedingung (5.19) mit ϵ^2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{B}: \quad \Re \mathcal{E}'_t - 2\mathcal{D} \Re \Phi'_t - \mathcal{D}^2 &= (\epsilon^2 - 1) (\Re \Phi'_t + \mathcal{D})^2 - 2\epsilon^2 \mathcal{D} (\Re \Phi'_t + \mathcal{D}) + \epsilon^2 \mathcal{D}^2, \\ \Re \mathcal{E}'_t &= (\epsilon^2 - 1) \left[(\Re \Phi'_t + \mathcal{D})^2 - 2\mathcal{D} (\Re \Phi'_t + \mathcal{D}) + \mathcal{D}^2 \right], \\ \Re \mathcal{E}'_t &= (\epsilon^2 - 1) \Re \Phi'^2_t. \end{aligned}$$

Zusammen erhält man die vier Randbedingungen für die ERNST-Potentiale

$$\mathcal{B}: \quad \Im \mathcal{E}'_t = 0, \quad \Im \Phi'_t = 0, \quad \Re \mathcal{E}'_t = (\epsilon^2 - 1) \Re \Phi'^2_t \quad \text{und} \quad (\Re \mathcal{E}'_t)_{,\zeta} = 0. \quad (5.30)$$

Die wesentliche Vereinfachung der Randbedingungen besteht darin, dass in die NEUMANN'schen Randbedingung jetzt nur noch ein Potential eingeht. Der nichtlineare Zusammenhang der Potentiale \mathcal{E}'_t und Φ'_t lässt sich durch ausprobieren weiterer Invarianztransformationen nicht vereinfachen. Könnte man ihn auf einen linearen Zusammenhang transformieren, dann wäre es durch eine weitere Eichtransformation (1.98d) möglich die Realteile der ERNST-Potentiale in der DIRICHLET'schen Randbedingung zu entkoppeln.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass das Randwertproblem der starr rotierenden Staubscheibe mit konstanter spezifischer Ladung wesentlich komplizierter ist, als der ungeladene Fall.

⁶Es ergibt sich $f'_t = \epsilon^2 f'$.

Kapitel 6

Untersuchungen zur Post-NEWTON'schen Entwicklung der starr rotierenden Staubscheibe mit konstanter spezifischer Ladung

6.1 Mathematische Problemstellung und Lösung¹

Die mathematische Lösung des Randwertproblems der rotierenden Staubscheibe mit konstanter spezifischer Ladung wird von drei Parametern abhängen. Einer dieser Parameter dient zur Skalierung, wodurch man eine dimensionslose Lösung erhält. Bei festgehaltenem Skalenparameter² müssen sich die zwei übrigen Parameter unabhängig voneinander in ihrem Bereich variieren lassen und dabei den gesamten regulären Lösungsraum abdecken. Einer dieser Parameter p_r beschreibt dabei, wie 'relativistisch' die Staubscheibe ist. Der andere p_q beschreibt, wie stark sie geladen ist.

Eine gegebene dreiparametrische Lösungsfamilie $\mathbb{L}(p_s, p_r, p_q)$ kann mit Hilfe von Parameterrelationen

$$p'_s(p_s, p_r, p_q), \quad p'_r(p_s, p_q, p_q) \quad \text{und} \quad p'_q(p_s, p_r, p_q) \quad (6.1)$$

durch drei andere Parameter angegeben werden.

$$\mathbb{L}(p_s, p_r, p_q) \rightarrow \mathbb{L}'(p'_s, p'_r, p'_q). \quad (6.2)$$

Bei der Wahl der neuen Parameter p'_r und p'_q muss darauf geachtet werden, dass diese unabhängig voneinander in ihrem Bereich variiert werden können. Dies ist dann gegeben, wenn die Parameterrelationen im regulären Parameterraum bijektive Abbildungen sind und damit eindeutige inverse Relationen

$$p_s(p'_s, p'_r, p'_q), \quad p_r(p'_s, p'_r, p'_q) \quad \text{und} \quad p_q(p'_s, p'_r, p'_q) \quad (6.3)$$

existieren.

¹In den Arbeiten von PALENTA und MEINEL ([Palenta, 2012], [Palenta and Meinel, 2013]) werden einige Aspekte dieses Abschnitts ausführlicher betrachtet.

²Eine sinnvolle Normierung ist $p_s = 1$.

6.1.1 Parameterraum

Für eine Post-NEWTON'sche Entwicklung braucht man einen relativistischen Entwicklungsparameter der unabhängig von der spezifischen Ladung sein soll. Es stellt sich heraus, dass die Entwicklung nach der Größe

$$\gamma = 1 - e^{U_c} = 1 - \sqrt{f_c}, \quad \gamma \in [0, 1] \quad (6.4)$$

gelingt.³ Die Annahme, dass der Zentralwert des metrischen Potentials f unabhängig von der spezifischen Ladung der Staubscheibe ist, führt auf eine eindeutige Lösung für alle hier berechneten Ordnungen. Der Parameter γ variiert für reguläre Lösungen zwischen Null (MINKOWSKI-Raumzeit) und Eins (ultra-relativistischer Grenzfall).

Als Parameter, der die Ladung der Staubscheibe repräsentiert, bietet sich die spezifische Ladung ϵ an, die auch in den Randwerten vorkommt.

Um eine dimensionslose Formulierung zu erhalten, werden alle einheitenbehafteten Größen auf den Scheibenradius ϱ_0 bezogen. Man erhält somit:

$$a^* = a/\varrho_0, \quad A_\varphi^* = A_\varphi/\varrho_0, \quad \Omega^* = \varrho_0\Omega, \quad \sigma^* = \varrho_0\sigma. \quad (6.5)$$

Es ergibt sich also eine dreiparametrische bzw. zweiparametrische einheitenlose Lösungsfamilie $\mathbb{L}(\varrho_0, \gamma, \epsilon)$.

6.1.2 Entwicklung der Potentiale

Zuerst gilt es einen Ansatz für das Entwicklungsverhalten der Potentiale zu finden. Dazu kann man sich von der führenden Ordnung leiten lassen. Die nullte Ordnung ist (trivialerweise) die global leere⁴ MINKOWSKI-Raumzeit $g_{ab} = \eta_{ab}$ mit $A_a = 0$. Die führende Ordnung ist der NEWTON'sche Grenzfall. In Abschnitt 5.2.3 wurde dieser kurz anhand der dritten Randbedingung dargestellt. Hier ist jetzt wichtig, dass sich aus diesem Grenzfall die Parameterrelation $\Omega_{\text{New}}^{*2} = (1 - \epsilon^2)\gamma$ ergibt [Palenta, 2012]. Aus dieser folgt die Entwicklung

$$\Omega^{*2} = (1 - \epsilon^2)\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (6.6)$$

Daraus ergibt sich, dass Ω^* eine ungerade Funktion in $\sqrt{\gamma}$ ist:

$$\Omega^* = \sqrt{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^* \gamma^{n-1} \quad \text{mit} \quad \Omega_1^* = \sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (6.7)$$

Entwickelt man die Potentiale zuerst nach Ω^* und untersucht das Symmetrieverhalten der Potentiale bei Änderung der Rotationsrichtung $\Omega^* \rightarrow -\Omega^*$, bzw. des Winkelsinnes $\varphi \rightarrow -\varphi$, dann folgt für die Entwicklung der ERNST-Potentiale \mathcal{E} und Φ , dass deren Realteile gerade und deren Imaginärteile ungerade Funktionen in $\sqrt{\gamma}$ sind:

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \gamma^n, \quad \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma^n, \quad b = \sqrt{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \gamma^n, \quad \beta = \sqrt{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \gamma^n. \quad (6.8)$$

³Mit dem Index c wird der Wert des Potentials im Mittelpunkt der Scheibe bezeichnet.

⁴Leer bedeutet hier insbesondere, dass auch kein elektromagnetisches Feld vorhanden ist. Vergleiche dazu den Begriff Elektrovakuum, der im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie keine leere Raumzeit beschreibt.

Für die übrigen Funktionen ergeben sich

$$a^* = \sqrt{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \gamma^n, \quad A_\varphi^* = \sqrt{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \gamma^n, \quad h = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} h_n \gamma^n \quad \text{und} \quad \sigma^* = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{n+1}^* \gamma^n. \quad (6.9)$$

Mit der Definition von γ erhält man

$$(1 - \gamma)^2 = f_c = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_{nc} \gamma^n = 1 - 2\gamma + \gamma^2. \quad (6.10)$$

Der Koeffizientenvergleich in γ ergibt:

$$f_{1c} = -2, \quad f_{2c} = 1 \quad \text{und} \quad f_{nc} = 0 \quad \text{für} \quad n > 2. \quad (6.11)$$

Abschließend sei angemerkt, dass der eigentliche Entwicklungsparameter $\sqrt{\gamma}$ ist. Diese Feststellung ist wichtig bei der Diskussion der Konvergenz der Reihenentwicklung aus physikalischer Sicht. Ob der hier gewählte Ansatz zur Entwicklung der Potentiale gerechtfertigt ist, ist noch davon abhängig, ob Ω^{*2} konvergiert. Dies ist im ungeladenen Grenzfall der Fall. Für den geladenen Fall sei auf Abschnitt 6.2.1 verwiesen. Zur n -ten Ordnung der Entwicklung werden die Koeffizientenfunktionen gezählt, die in $(2n)$ -ter bzw. $(2n+1)$ -ter Potenz in $\sqrt{\gamma}$ auftreten.

6.1.3 Entwicklung des Randwertproblems

Mit der obigen Entwicklung der Potentiale kann man nun in die Gleichungen des Randwertproblems eingehen. Diese lassen sich gut in den angepassten elliptischen Koordinaten nach Abschnitt 1.6 behandeln.

Die gekoppelten ERNST-Gleichungen

$$(\Re \mathcal{E} + \bar{\Phi} \Phi) \Delta \mathcal{E} = (\nabla \mathcal{E} + 2\bar{\Phi} \nabla \Phi) \cdot \nabla \mathcal{E}, \quad (6.12a)$$

$$(\Re \mathcal{E} + \bar{\Phi} \Phi) \Delta \Phi = (\nabla \mathcal{E} + 2\bar{\Phi} \nabla \Phi) \cdot \nabla \Phi \quad (6.12b)$$

zerfallen in vier Gleichungen, wobei die Realanteile in gerader und die Imaginärteile in ungerader Ordnung von $\sqrt{\gamma}$ auftreten. Es ergeben sich in gerader Ordnung für f_n und α_n und in ungerader Ordnung für b_n und β_n inhomogene LAPLACE-Gleichungen. Dabei bestimmen sich die Inhomogenitäten aus (bekannten) niedrigeren Ordnungen.

Die Transformationen der Ableitungsoperatoren entkoppeln auf der Scheibenoberfläche $\nu = 0$ bzw. ($\zeta = 0, \varrho \leq \varrho_0$). Somit erhält man

$$\mathcal{B}: \quad \partial_\varrho = -\frac{1}{\varrho_0 \eta} \sqrt{1 - \eta^2} \partial_\eta \quad \text{und} \quad \partial_\zeta = \frac{1}{\varrho_0 \eta} \partial_\nu. \quad (6.13)$$

Damit ergeben sich die Randbedingungen im ruhenden System nach den Gleichungen

(5.24) in elliptischen Koordinaten zu:

$$\left(\sqrt{(1 + \Omega^* a^*)^2 f - \Omega^{*2} (1 - \eta^2) f^{-1}} \right)_{,\nu} = \epsilon^{-1} (\Omega^* A_\varphi^* - \alpha)_{,\nu}, \quad (6.14a)$$

$$\left(\sqrt{(1 + \Omega^* a^*)^2 f - \Omega^{*2} (1 - \eta^2) f^{-1}} \right)_{,\eta} = \epsilon (\Omega^* A_\varphi^* - \alpha)_{,\eta}, \quad (6.14b)$$

$$- \left(\frac{\Omega^*}{1 + \Omega^* a^*} \right)^2 a_{,\nu}^* - \frac{2\Omega^*}{f(1 + \Omega^* a^*)} f_{,\nu} = b_{,\eta} - 2(\beta\alpha_{,\eta} - \alpha\beta_{,\eta}), \quad (6.14c)$$

$$- \frac{\Omega^*}{f(1 + \Omega^* a^*)} \alpha_{,\nu} = \beta_{,\eta}. \quad (6.14d)$$

In den ersten beiden Gleichungen treten nur gerade Terme und in den letzten beiden Gleichungen nur ungerade Terme in $\sqrt{\gamma}$ auf.

Am Rand der Scheibe ($\eta = \nu = 0$) soll die Flächenmassendichte σ^* regulär sein.

$$4\pi f' \sigma^* \Big|_{\eta=\nu=0} = \frac{1}{\eta} f'_{,\nu} \Big|_{\eta=\nu=0} < \infty. \quad \Rightarrow \quad [(1 + \Omega^* a^*)^2 f - \Omega^{*2} f^{-1}]_{,\nu} \Big|_{\eta=\nu=0} = 0. \quad (6.15)$$

Aus dieser als Regularitätsbedingung bezeichneten Gleichung lassen sich die Koeffizienten von Ω^* als Funktion von ϵ bestimmen. Zudem sichert diese Gleichung, dass der Scheibenradius ϱ_0 endlich bleibt.

Dann braucht man noch die Gleichungen zur Bestimmung von a^* , A_φ^* und k in elliptischen Koordinaten. Da diese Potentiale auf der ζ -Achse verschwinden, reichen für a^* und A_φ^* die Gleichungen

$$f^2 a_{,\eta}^* = - (1 + \nu^2) b_{,\nu} - 2(1 + \nu^2) (\alpha\beta_{,\nu} - \beta\alpha_{,\nu}), \quad (6.16a)$$

$$f A_{\varphi,\eta}^* = + (1 + \nu^2) \beta_{,\nu} - f a_{,\eta}^* \alpha_{,\eta} \quad (6.16b)$$

aus. Das metrische Potential $h = e^{2k}$ berechnet sich in elliptischen Koordinaten aus

$$\begin{aligned} k_{,\eta} = & \frac{1}{4f(1 - \eta^2)(\eta^2 + \nu^2)} \\ & \times \left\{ (1 - \eta^2)(1 + \nu^2) [(f_{,\nu})^2 \eta(1 + \nu^2) - (1 - \eta^2)(\eta(f_{,\eta})^2 - 2\nu f_{,\nu} f_{,\eta})] / f \right. \\ & - f^3 \left[(1 + \nu^2) \eta (a_{,\nu}^*)^2 - (1 - \eta^2) \left(\eta (a_{,\eta}^*)^2 - 2\nu a_{,\nu}^* a_{,\eta}^* \right) \right] \\ & + 4(a^{*2} f^2 - (1 - \eta^2)(1 + \nu^2)) \left[(1 + \nu^2) \eta (\alpha_{,\nu})^2 + (1 - \eta^2) \left(2\nu \alpha_{,\nu} \alpha_{,\eta} - \eta (\alpha_{,\eta})^2 \right) \right] \\ & + 8f^2 a \left[(1 + \nu^2) \eta A_{\varphi,\nu}^* \alpha_{,\nu} + (1 - \eta^2) (\nu (A_{\varphi,\nu}^* \alpha_{,\eta} + \alpha_{,\nu} A_{\varphi,\eta}^*) - \eta A_{\varphi,\eta}^* \alpha_{,\eta}) \right] \\ & \left. + 4f^2 \left[(1 + \nu^2) \eta (A_{\varphi,\nu}^*)^2 + (1 - \eta^2) \left(2\nu A_{\varphi,\nu}^* A_{\varphi,\eta}^* - \eta (A_{\varphi,\eta}^*)^2 \right) \right] \right\}. \quad (6.17) \end{aligned}$$

Damit lässt sich dann auch die koordinatenunabhängige Flächenmassendichte

$$\sigma_p^* = \frac{1}{4\pi\eta} \left[\ln \left((1 + \Omega^* a^*)^2 f - \Omega^{*2} (1 - \eta^2) f^{-1} \right) \right]_{,\nu} \sqrt{f/h} \Big|_{\nu=0} \quad (6.18)$$

bestimmen.

Führt man das Potential

$$F = \frac{\epsilon}{2}f + \alpha \quad (6.19)$$

ein, so lässt sich das Randwertproblem in n -ter Ordnung wie folgt aufschreiben:

- Die Gleichung für h lautet:

$$(\ln h_n)_{,n} = T [\mathcal{O}(n-1)]. \quad (6.20)$$

- Aus den ERNST-Gleichungen erhält man:

$$\Delta F_n = T [\mathcal{O}(n-1)], \quad (6.21a)$$

$$\Delta f_n = T [\mathcal{O}(n-1)], \quad (6.21b)$$

$$\Delta b_n = T [\mathcal{O}(n-1)], \quad (6.21c)$$

$$\Delta \beta_n = T [\mathcal{O}(n-1)]. \quad (6.21d)$$

- Die Randbedingungen lauten:

$$\mathcal{B}: \quad F_{n,\nu} = T [\mathcal{O}(n-1)], \quad (6.22a)$$

$$f_{n,\eta} = -\frac{2\epsilon}{1-\epsilon^2}F_{n,\eta} - \frac{4\eta}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\Omega_n^* + T [\mathcal{O}(n-1)], \quad (6.22b)$$

$$b_{n,\eta} = -2\sqrt{1-\epsilon^2}f_{n,\nu} + T [\mathcal{O}(n-1)], \quad (6.22c)$$

$$\beta_{n,\eta} = \sqrt{1-\epsilon^2} \left(F_{n,\nu} - \frac{\epsilon}{2}f_{n,\nu} \right) + T [\mathcal{O}(n-1)]. \quad (6.22d)$$

- Der Zentralwert von f lautet:

$$f_c = 1 - 2\gamma + \gamma^2. \quad (6.23)$$

- Die Regularitätsbedingung lautet:

$$f_{n,\nu}(\eta = 0, \nu = 0) + T [\mathcal{O}(n-1)] = 0. \quad (6.24)$$

- Die Gleichung für die Flächenmassendichte lautet:

$$\sigma_{pn}^* = \frac{f_{n,\nu}}{4\pi\eta} + T [\mathcal{O}(n-1)]. \quad (6.25)$$

- Die Gleichungen für a_n^* und A_n^* lauten:

$$a_{n,\eta}^* = -(1 + \nu^2) b_{n,\nu} + T [\mathcal{O}(n-1)] \quad \text{und} \quad A_{n,\eta}^* = (1 + \nu^2) \beta_{n,\nu} + T [\mathcal{O}(n-1)]. \quad (6.26)$$

- Alle Koeffizientenfunktionen sollen für $\nu \rightarrow \infty$ verschwinden, d.h. asymptotisch flach sein.

Der Ausdruck $T [\mathcal{O}(n-1)]$ ist ein Platzhalter für die restlichen Terme, die sich aus Koeffizientenfunktionen niedrigerer Ordnungen zusammensetzen. Für $n = 1$, der in f und α den NEWTON'schen Grenzfall beschreibt, treten diese Terme nicht auf. Man hat also in erster Ordnung relativ einfache Randwertprobleme für (homogene) LAPLACE-Gleichungen zu lösen.

6.1.4 Lösungsalgorithmus

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen LAPLACE-Gleichung ergibt sich aus der Summe einer speziellen Funktion, aus der sich durch Anwendung des LAPLACE-Operators die Inhomogenität ergibt und einer homogenen Lösung. Der allgemeine Lösungsansatz mit Gleichung (1.165) lautet also:

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\eta) S_k(\nu) + X_n^{(S)}. \quad (6.27)$$

Mit diesem Ansatz ist das richtige asymptotische Verhalten gesichert. Der Lösungsalgorithmus der n -ten Ordnung lässt sich wie folgt angeben:

1. Mit dem Linienintegral (6.20) das Potential h_n bestimmen.

2. Die inhomogenen Lösungen der Gleichungen (6.21) bestimmen.

Dazu kann man einen Algorithmus aus den Arbeiten von PALENTA und MEINEL [Palenta and Meinel, 2013] oder [Palenta, 2012] verwenden. Bis zu der hier untersuchten Ordnung ergaben sich die Lösungen immer als Polynome in η , ν und $\operatorname{arccot}(\nu)$.

3. Das NEUMANN'sche Randwertproblem für F_n lösen.

Die rechte Seite von Gleichung (6.22a) ist durch ein Polynom $(2n)$ -ten Grades in η gegeben. Mit dem bereits bestimmten Ausdruck $F_n^{(S)}$ kann der Ansatz (6.27) für F_n in (6.22a) eingesetzt werden. Durch einen Koeffizientenvergleich in η lassen sich die Konstanten C_k bestimmen.

4. Das DIRICHLET'sche Randwertproblem für f_n lösen.

Mit gegebenen F_n kann Gleichung (6.22b) im Intervall $[1, \eta]$ integriert werden. Die Integrationskonstante lässt sich mit den bekannten Zentralwerten f_{nc} aus Gleichung (6.23) bestimmen. Mit dem Ansatz (6.27) für f_n und Koeffizientenvergleich in η in (6.22b) kann man die C_k bestimmen.

5. Die Funktion $\Omega_n^*(\epsilon)$ durch die Regularitätsbedingung bestimmen.

6. Die Flächenmassendichte σ_{pn}^* aus (6.25) bestimmen.

7. Die DIRICHLET'schen Randwertprobleme für b_n und β_n lösen.

Mit gegebenen F_n und f_n können die Gleichungen (6.22c) und (6.22d) im Intervall $[0, \eta]$ integriert werden. Am Rand der Scheibe verschwinden b und β . Damit lassen sich die Integrationskonstanten bestimmen. Wie bisher kann man mit dem Ansatz (6.27) für b_n bzw. β_n und Koeffizientenvergleich in η in (6.22c) bzw. (6.22d) die jeweiligen C_k bestimmen.

8. Aus den Linienintegralen (6.26) die Potentiale a_n^* und A_n^* bestimmen.

6.1.5 Lösungsstruktur

Die hier dargelegte Lösungsstruktur hat sich bis in die untersuchte Ordnung $N = 10$ ergeben. Da ab der fünften Ordnung alle Terme in den ERNST-Gleichungen und den Randbedingungen berücksichtigt sind und sich diese Lösungsstruktur darüber hinaus ergibt, liegt es nahe zu vermuten, dass diese in beliebig hoher Ordnung so gegeben ist. Zudem gilt sie im ungeladenen Grenzfall $\epsilon = 0$. Kern eines Beweises wäre die Frage, ob die spezielle Lösung der Inhomogenität immer durch eine Polynomstruktur in η , ν und $\operatorname{arccot}(\nu)$ dargestellt werden kann.

Globale Vorfaktoren

Die globalen Vorfaktoren

$$\Omega_n^* \propto \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (6.28a)$$

$$\alpha_n \propto \epsilon, \quad \beta_n \propto \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} \eta, \quad b_n \propto \sqrt{1 - \epsilon^2} \eta, \quad (6.28b)$$

$$A_n^* \propto \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} (1 - \eta^2), \quad a_n^* \propto \sqrt{1 - \epsilon^2} (1 - \eta^2) \quad (6.28c)$$

bestätigen Vorüberlegungen. Alle elektromagnetischen Größen verschwinden im ungeladenen Grenzfall ($\epsilon = 0$). Alle Drehgrößen verschwinden im ECD-Fall ($\epsilon = 1$). Die Potentiale b und β verschwinden in der ϱ -Ebene außerhalb der Scheibe $\eta = 0$. Die Potentiale A_φ^* und a^* verschwinden auf der ζ -Achse ($\eta = \pm 1$).

Polynomstruktur

Lässt man die globalen Vorfaktoren weg, so ist der Rest der Funktionen durch eine Polynomstruktur in ϵ , η , ν und $\operatorname{arccot}(\nu)$ darstellbar. Alle Funktionen sind in n -ter Ordnung durch ein gerades Polynom in ϵ vom Grad $2(n-1)$ gegeben. Zudem sind sie in n -ter Ordnung durch ein gerades Polynom in η vom Grad $2n$ oder durch ein Polynom in $\arctan(\nu)$ vom Grad n darstellbar. Die Darstellung durch ein Polynom in ν ist für f_n und α_n vom Grad $2n$, für b_n und β_n vom Grad $2n+1$ und für a_n und A_n vom Grad $2(n+1)$.

Gesamtstruktur

Die Potentiale können also durch eine Fünffachsumme angegeben werden:

$$\Omega^* = \sqrt{\gamma(1 - \epsilon^2)} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} \Omega_{ni}^* \gamma^{n-1} \epsilon^{2i}, \quad (6.29a)$$

$$f = 1 + \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{2n} f_{nijkl} \gamma^n \epsilon^{2i} \eta^{2j} [\operatorname{arccot}(\nu)]^k \nu^l, \quad (6.29b)$$

$$\alpha = \epsilon \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{2n} \alpha_{nijkl} \gamma^n \epsilon^{2i} \eta^{2j} [\operatorname{arccot}(\nu)]^k \nu^l, \quad (6.29c)$$

$$b = \sqrt{\gamma(1 - \epsilon^2)} \eta \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{2n+1} b_{nijkl} \gamma^n \epsilon^{2i} \eta^{2j} [\operatorname{arccot}(\nu)]^k \nu^l, \quad (6.29d)$$

$$\beta = \epsilon \sqrt{\gamma(1-\epsilon^2)} \eta \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{2n+1} \beta_{nijkl} \gamma^n \epsilon^{2i} \eta^{2j} [\operatorname{arccot}(\nu)]^k \nu^l, \quad (6.29e)$$

$$a^* = \sqrt{\gamma(1-\epsilon^2)} (1-\eta^2) \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{2n+2} a_{nijkl} \gamma^n \epsilon^{2i} \eta^{2j} [\operatorname{arccot}(\nu)]^k \nu^l, \quad (6.29f)$$

$$A_\varphi^* = \epsilon \sqrt{\gamma(1-\epsilon^2)} (1-\eta^2) \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{2n+2} A_{nijkl} \gamma^n \epsilon^{2i} \eta^{2j} [\operatorname{arccot}(\nu)]^k \nu^l. \quad (6.29g)$$

Die Koeffizienten f_{nijkl} usw. sind nur noch Zahlen, jedoch sind nicht alle verschieden von Null.⁵ Die Gesamtlösung lässt sich also durch Zahlenkoeffizienten angeben. Die Anzahl der Zahlenkoeffizienten b_{nijkl} für festes n beträgt $2(n+1)^4$.

Die Gleichungen (6.29) können auch als Ansatz gelesen werden, um eine Rekursionsvorschrift für die Koeffizienten f_{nijkl} usw. zu ermitteln. Die hauptsächliche Schwierigkeit besteht dabei, die inhomogene Lösung zu den Differentialgleichungen zu bestimmen. Dafür müsste man zuerst eine Struktur finden, aus der hervorgeht, welche der Koeffizienten f_{nijkl} usw. Null sind.

6.1.6 Physikalische Parameter

Multipolmomente

Die ersten Multipolmomente sind am einfachsten durch die Potentiale ξ und q zu bestimmen. Nach Gleichung (1.101) erhält man auf der \mathcal{A}^+ -Achse im Fernfeld:

$$\xi_+ = \frac{1}{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{\nu^n} = \frac{1}{\zeta^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{\zeta^{*n}} = \frac{M^*}{\zeta} + \frac{iJ^*}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{m_n^*}{\zeta^n}, \quad (6.30)$$

$$q_+ = \frac{1}{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{\nu^n} = \frac{1}{\zeta^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{\zeta^{*n}} = \frac{Q^*}{\zeta} + \frac{iD^*}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e_n^*}{\zeta^n}. \quad (6.31)$$

Dabei sind:

$$m_n^* = \frac{m_n}{\varrho_0^{n+1}}, \quad e_n^* = \frac{e_n}{\varrho_0^{n+1}}, \quad \text{und} \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{\varrho_0}. \quad (6.32)$$

Im ECD-Fall gilt die Beziehung $m_n = e_n$. In den ersten drei Ordnungen ergeben sich folgende Gleichungen. Für Masse und Drehimpuls erhält man:

$$M^* = \frac{4}{3\pi} \gamma \left[1 + \frac{27-2\epsilon^2}{30} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right], \quad J^* = \frac{8\sqrt{1-\epsilon^2}}{15\pi} \gamma^{3/2} \left[1 + \frac{147-34\epsilon^2}{84} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right]. \quad (6.33)$$

Ladung und magnetisches Dipolmoment lauten:

$$Q^* = \frac{4\epsilon}{3\pi} \gamma \left[1 + \frac{33-8\epsilon^2}{30} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right], \quad D^* = \frac{4\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}}{15\pi} \gamma^{3/2} \left[1 + \frac{255-34\epsilon^2}{84} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right]. \quad (6.34)$$

⁵Diese Zahlen sind exakt durch Polynome in $1/\pi$ darstellbar.

Weitere Parameter

Ein wichtiger Parameter ist die baryonische Masse, die sich im Falle konstanter spezifischer Ladung aus dem Fernfeld über die Ladung bestimmen lässt:

$$M_0 = Q/\epsilon. \quad (6.35)$$

Damit lässt sich auch die dimensionslose relative Bindungsenergie bestimmen:

$$E_b = \frac{M_0^* - M^*}{M_0^*} = 1 - \frac{\epsilon M}{Q} = \frac{(1 - \epsilon^2)}{5} \gamma \left[1 + \frac{14 - 4\epsilon^2}{35} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right]. \quad (6.36)$$

Zwei weitere grundlegende Parameter sind die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega^* = \sqrt{\gamma(1 - \epsilon^2)} \left[1 - \frac{9 - 2\epsilon^2}{12} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right] \quad (6.37)$$

und die Konstante aus der Randbedingung (5.18)

$$D = 1 - (1 - \epsilon^2) \left[\gamma + \frac{\epsilon^2 [4096 - 345\pi^2 - (1024 - 98\pi^2) \epsilon^2]}{1152\pi^2} \gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4) \right]. \quad (6.38)$$

Beim letzten Ausdruck fällt auf, dass der Koeffizient von γ^2 gleich Null ist. Dies gilt insbesondere für den Zentralwert α_c .

6.1.7 Praktische Umsetzung in MAPLE

Der in Abschnitt 6.1.4 beschriebene Algorithmus wurde mit dem Computeralgebra-System MAPLE umgesetzt. Die Hauptprobleme bei der praktischen Umsetzung auf einem handelsüblichen PC liegen bei der Rechenzeit t und dem Arbeitsspeicher. Der hier verwendete Code brauchte zur Berechnung der ersten zehn Ordnungen ca. 30 Tage. Dabei entfallen knapp 20 Tage auf die zehnte, sieben Tage auf die neunte und rund 51 Stunden auf die achte Ordnung. Der größte Aufwand entstand bei der Berechnung der inhomogenen Lösung und bei der Bestimmung der Potentiale a und A_φ durch Linienintegrale. In Abbildung 6.1 sind die Rechenzeiten graphisch dargestellt. Anhand der rechten Graphik lässt sich ungefähr abschätzen, wie lange die Berechnungen höherer Ordnungen dauern würden. Das wären ungefähr zwei Monate für die elfte und sechs Monate für die zwölfte Ordnung.

Die Lösung, die man am Ende erhält, muss dann noch ausgewertet werden. Die Rechenzeit für die Auswertung steigt natürlich auch mit jeder weiteren Ordnung. Eine Reihenentwicklung bis zur zehnten Ordnung, wie sie hier vorliegt, kann noch praktikabel gehandhabt werden. Die Lösung erhält man nach relativ kurzer Zeit. Die Rechenzeit zur Auswertung liegt in vielen Fällen zwischen fünf Minuten und zwei Stunden. Es lassen sich mit ihr bereits Aussagen über den ultra-relativistischen Grenzfall machen. Die zu erwartende Steigerung der Genauigkeit durch ein bis zwei weitere Ordnungen liegt meist bei einer halben bis zu einer Größenordnung, so dass sie kaum den Aufwand an Rechenzeit und Arbeitsspeicher rechtfertigt.

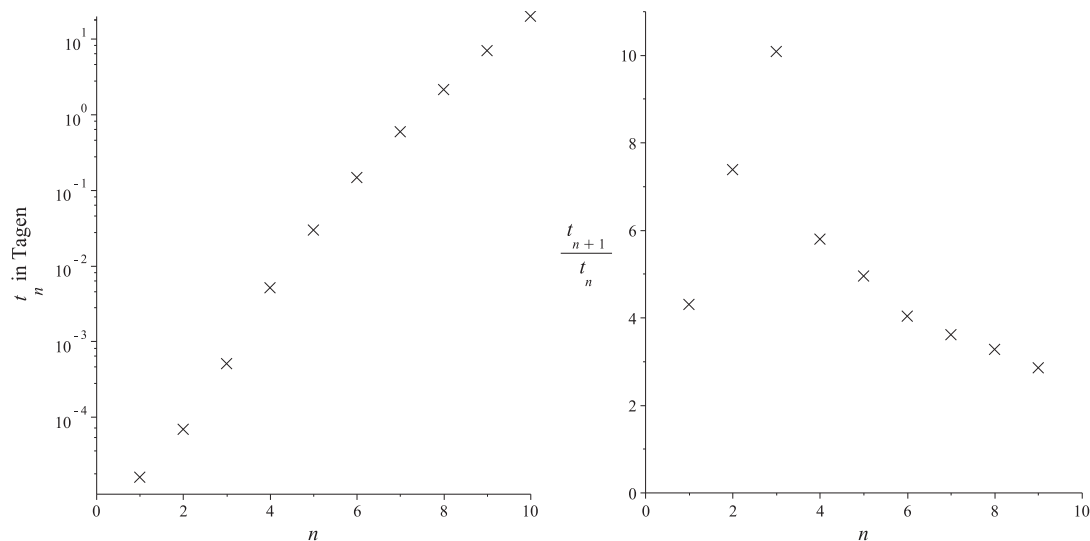


Abbildung 6.1. Absolute und relative Rechenzeit von MAPLE bei der Umsetzung des Algorithmus' aus Abschnitt 6.1.4.

Links: Rechenzeit t_n in Tagen für die (n)-te Ordnung in logarithmischer Darstellung. Rechts: Änderung der Rechenzeit der ($n+1$)-ten Ordnung bezüglich der (n)-ten Ordnung.

6.2 Auswertung

Die Auswertung orientiert sich teilweise an der Arbeit von BARDEEN und WAGONOR [Bardeen and Wagoner, 1971] und stellt dabei eine Verallgemeinerung auf den geladenen Fall dar. Die Ergebnisse zum ultra-relativistischen Grenzfall wurden in der Arbeit [Breithaupt et al., 2015] veröffentlicht. Schlussfolgerungen und Ergebnisse dieser Arbeiten werden unter anderem durch die Verwendung von PADÉ-Approximation erhärtet.

6.2.1 Zur Konvergenz der Reihenentwicklung

Das Zitat von POINCARÉ in der Einleitung bringt die Problematik für den hier vorliegenden Fall auf den Punkt. Alle Argumente die für eine Konvergenz sogar im ultra-relativistischen Fall ($\gamma = 1$) sprechen, sind die der 'Astronomen'. Im Sinne der 'Geometer' kann sich mit den hier verwendeten Mitteln kein rigoroses Argument für die Konvergenz der untersuchten Größen und Funktionen ergeben. Somit muss und wird hier, die grundlegenden Darstellungen aus Abschnitt (1.7) auswertend, weiter im Sinne der 'Astronomen' argumentiert.⁶ Das erste Argument betrifft das physikalische System.

Konvergenz aus physikalischer Sicht

Der eigentliche Entwicklungsparameter ist, wie bereits gesagt, $\sqrt{\gamma}$. Es stellt sich also die Frage, ob sich die Staubscheibe im Parameterbereich $\sqrt{\gamma} \in [-1, 1]$ und $\epsilon \in [-1, 1]$ im (thermodynamischen) Gleichgewicht befindet.⁷

⁶Dies ist entscheidend, da viele Aussagen und Ergebnisse der nächsten Abschnitte nur davon abhängen, ob ein bestimmter Ausdruck konvergiert.

⁷Dies muss nicht unbedingt ein stabiles Gleichgewicht sein.

Um dies zu zeigen, werden charakteristische Eigenschaften der beschreibenden Funktionen erläutert. Alle Funktionen, die auf die Rotation der Scheibe bezogen sind, sind ungerade in $\sqrt{\gamma}$. Alle übrigen sind gerade in $\sqrt{\gamma}$. Eine Änderung des Vorzeichens von $\sqrt{\gamma}$ beschreibt damit eine Staubscheibe, die in die entgegengesetzte Richtung rotiert.⁸ Dabei ändern sich auch die Vorzeichen der Potentiale b und β und man erhält komplex konjugierte ERNST-Potentiale, die genauso die ERNST-Gleichungen erfüllen. Für $\sqrt{\gamma} \rightarrow \pm 1$ wird der ultra-relativistische Grenzfall erreicht.

Es lässt sich auch der parametrische Übergang von negativen zu positiven $\sqrt{\gamma}$ physikalisch beschreiben. Für kleine positive Werte von $\sqrt{\gamma}$ wird der NEWTON'sche Grenzfall erreicht. Für $\sqrt{\gamma} \rightarrow 0$ verschwinden die Winkelgeschwindigkeit Ω und die Massendichte μ . Man erhält die (leere) MINKOWSKI-Raumzeit als globale Lösung. Geht man jetzt zu kleinen negativen Werten von $\sqrt{\gamma}$, so erhält man wieder den NEWTON'schen Grenzfall einer entgegengesetzt rotierenden Staubscheibe. Man hat also einen glatten parametrischen Übergang von positiven zu negativen Werten von $\sqrt{\gamma}$.

Für das Verhalten bezüglich ϵ wird davon ausgegangen, dass die globalen Vorfaktoren aus Abschnitt 6.1.5 für die gesamte Lösung gelten. Alle elektromagnetischen Funktionen sind ungerade in ϵ und alle anderen gerade in ϵ . Während also die Rotationsrichtung durch das Vorzeichen von $\sqrt{\gamma}$ bestimmt wird, wird das Vorzeichen der Ladung durch das Vorzeichen von ϵ bestimmt. Somit hat man auch bezüglich ϵ einen glatten parametrischen Übergang von positiven zu negativen Werten, mit der ungeladenen Staubscheibe für $\epsilon = 0$.

Alle Funktionen, die auf die Rotation bezogen sind, haben zudem den globalen Vorfaktor $\sqrt{1 - \epsilon^2}$. Dies bedeutet, dass man für $\epsilon = \pm 1$ den statischen Grenzfall erreicht und somit eine spezielle ECD-Lösung erhält. Für Werte $|\epsilon| > 1$ ist, wie in Abschnitt 1.7.1 bereits geschildert, das physikalische System nicht mehr stationär und somit nicht mehr durch die ERNST-Gleichungen zu beschreiben. Das (thermodynamische) Gleichgewicht ist im ECD-Fall instabil. Es fällt auf, dass viele Größen im ECD-Fall am langsamsten konvergieren.

Insgesamt ist es also so, dass sich im Parameterbereich $\sqrt{\gamma} \in [-1, 1]$ und $\epsilon \in [-1, 1]$ die geladene Staubscheibe im (thermodynamischen) Gleichgewicht befindet. Damit ist eine wichtige notwendige Bedingung für die Konvergenz der Post-NEWTON'schen Reihenentwicklung um $\gamma = 0$ erfüllt. In der weiteren Auswertung ist es ausreichend sich auf positive Werte von $\sqrt{\gamma}$ und ϵ zu beschränken. Nach der obigen Diskussion ist auch klar, warum es so wichtig ist, dass $\sqrt{\gamma}$ der eigentliche Entwicklungsparameter ist. Würde man γ betrachten, dann wären alle Größen, die sich auf die Rotation der Scheibe beziehen, für negative γ rein imaginär und physikalisch nicht mehr zu interpretieren. Trotzdem wird, folgend in Diskussion und Darstellung der Ergebnisse, auch γ verwendet, da es sich um eine anschaulichere Größe als $\sqrt{\gamma}$ handelt.

Konvergenz aus mathematischer Sicht

Zur Untersuchung der Konvergenz der Reihenentwicklung einer Größe $F(\gamma, \epsilon)$ wird diese zuerst auf die Form

$$F(\gamma, \epsilon) = F_{\text{New}}(\gamma, \epsilon) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\epsilon) \gamma^n \right] \quad (6.39)$$

⁸Dies war genau der Entwicklungsansatz in Abschnitt 6.1.2.

gebracht.⁹ Dabei beschreibt $F_{\text{New}}(\gamma, \epsilon)$ den NEWTON'schen Grenzfall. Da konkrete Berechnungen nur bis zu einem endlichen Wert von n erfolgen können, wird die endliche Reihe durch

$$F(\gamma, \epsilon, N) = F_{\text{New}}(\gamma, \epsilon) \left[1 + \sum_{n=1}^N c_n(\epsilon) \gamma^n \right] \quad (6.40)$$

angegeben. Die Funktion $F_{\text{New}}(\gamma, \epsilon)$ ist bezüglich ihrer Abhängigkeit von γ durch einen Ausdruck der Form $c_0(\epsilon) \gamma^{k/2}$, $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. Sie spielt bei der Frage der Konvergenz keine Rolle. Für das Konvergenzkriterium (1.173) nach RAABE-DUHAMEL ergibt sich für $\sqrt{\gamma} \in [0, 1]$ der Ausdruck:

$$\mathbb{K}_n = n \left(1 - \frac{c_{n+1}(\epsilon)}{c_n(\epsilon)} \right) > 1, \quad \epsilon \in [0, 1]. \quad (6.41)$$

Ist diese Ungleichung für alle $n > n_0$ erfüllt, so ist dies hinreichend für die Konvergenz der Reihe im Intervall $\sqrt{\gamma} \in [0, 1]$. Für die hier vorliegenden Reihenentwicklung kann Gleichung (6.41) meist nur bis $n = 8$ untersucht werden.¹⁰ Gilt für $\epsilon \in [0, 1]$, dass $\mathbb{K}_8 > 1$ ist, verbleibt die Annahme, dass $n = 8 > n_0$ ist. Diese Annahme wird dadurch gestützt, dass ab $N = 4$ alle Terme der ERNST-Gleichungen und Randbedingungen zum Ergebnis beitragen. Eine qualitative Änderung ist dem nach für höhere Ordnungen nicht mehr zu erwarten. Für viele Größen wachsen die \mathbb{K}_n mit zunehmenden n . Auch vom physikalischem Standpunkt her steht der Konvergenz nichts im Wege.

Das Konvergenzkriterium (6.41) wurde von von BARDEEN und WAGONOR bei der Untersuchung der ungeladenen Staubscheibe verwendet [Bardeen and Wagoner, 1971]. Dort waren die c_n jedoch keine Funktionen eines weiteren Parameters. Hier sind die $c_n(\epsilon)$ gerade Polynome in ϵ , deren Grad für größere n zunimmt. Damit steigt auch die Anzahl der Nullstellen. Für viele interessante Größen $F(\gamma, \epsilon, N)$ haben die c_n Nullstellen im regulären Parameterbereich $\epsilon \in [0, 1]$. Dadurch wird das Konvergenzkriterium (6.41) in einem Bereich um die Nullstellen nicht erfüllt. Dies bedeutet jedoch nicht zwingend, dass die Größe nicht konvergiert (siehe dazu Abbildung 6.4).

Konvergenz der quadrierten Winkelgeschwindigkeit

Bei der Entwicklung der Potentiale in Abschnitt 6.1.2 stellte sich die Frage, ob

$$\Omega^{*2} = (1 - \epsilon^2) \gamma \left[1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \epsilon^2 \right) \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right] \quad (6.42)$$

im regulären Parameterbereich konvergiert. In Abbildung 6.2 sind rechts die Werte des Konvergenzkriteriums für n von drei bis acht aufgetragen. Für größere n wird dieses immer besser erfüllt. Der kritische Wert Eins ist durch eine rote gestrichelte Linie markiert. Links ist Ω^{*2} durch eine PADÉ-Approximation in $\sqrt{\gamma}$ dargestellt. Für $\epsilon = 1$ und $\gamma = 1$ geht der Ausdruck gegen Null. Für $\gamma = 1$ ist dies der Fall, weil der Scheibenradius ϱ_0 hier gegen Null geht (siehe dazu Abbildung 6.9 mit Diskussion).

⁹Die Größe F kann natürlich genau wie die Koeffizienten c_n auch von den Koordinaten η und ν bzw. ϱ und ζ abhängen.

¹⁰Ausnahmen sind Größen für die $F_{\text{New}} = 1$ ist. Hier kann (6.41) bis $n = 9$ untersucht werden.

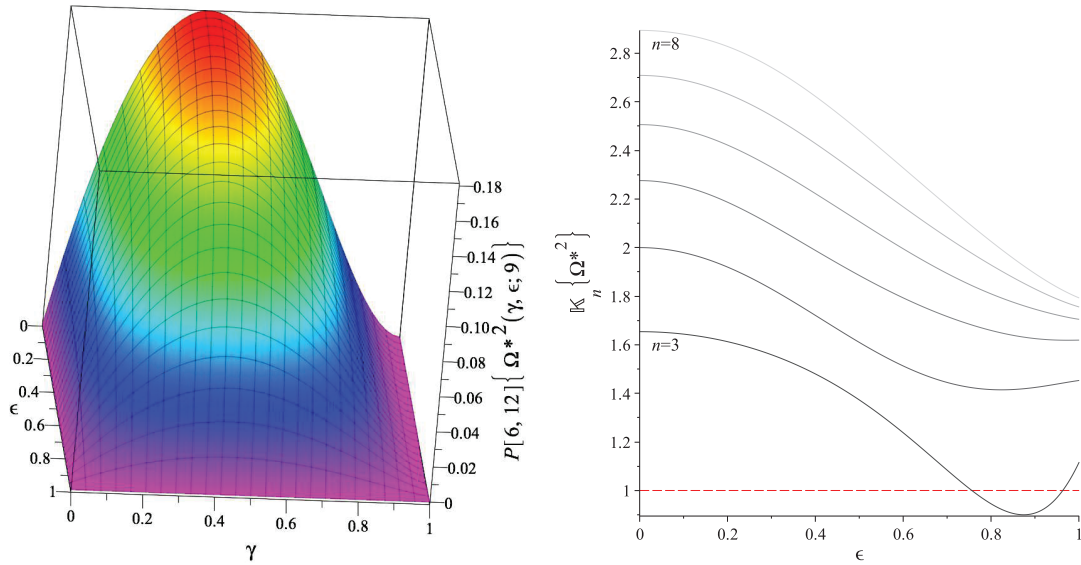


Abbildung 6.2. Quadrierte Winkelgeschwindigkeit Ω^{*2} : Links ist die Darstellung der $[6,12]$ -PADÉ-Approximation in $\sqrt{\gamma}$ dargestellt. Rechts ist das Konvergenzverhalten mit höherer Ordnung n und die Eins-Funktion (rot,gestrichelt) aufgetragen.

6.2.2 Zur Optimierung der Reihenentwicklung

Wie bereits gesagt wurde, ist die Post-NEWTON'sche Entwicklung eine dreiparametrische Lösung. In den Formeln erkennt man zwei Parameter. Diese sind γ und ϵ . Während die endliche Reihe in γ eine Näherung darstellt, ergibt sich in jeder Ordnung eine exakte Darstellung in ϵ durch den globalen Vorfaktor und einem endlichen Polynom, dessen Grad von der Ordnung in γ abhängt. In Abschnitt 1.7 wurden mehrere Methoden vorgestellt, um die Näherungslösungen in γ zu optimieren. Das Hauptproblem bei der Anwendung dieser Methoden liegt darin, dass man im regulären Parameterbereich oft für $\gamma \gtrsim 0.8$ im Ergebnis Null- bzw. Polstellen in ϵ und γ erhält. Bei der PADÉ-Approximation lassen sich solche Nullstellen im Nennerpolynom oft durch Variieren seines Grades vermeiden.

PADÉ-Approximation

Die einfache PADÉ-Approximation für Gleichung (6.40) kann als

$$P[L, 2N - L] \{F(\gamma, \epsilon; N)\} = F_{\text{New}}(\gamma, \epsilon) \left[\frac{1 + \sum_{n=1}^{2N-L} p_n(\epsilon) \sqrt{\gamma}^n}{1 + \sum_{n=1}^L s_n(\epsilon) \sqrt{\gamma}^n} \right] \quad (6.43)$$

angegeben werden. Für die PADÉ-Approximation ist der eigentliche Entwicklungsparameter $\sqrt{\gamma}$ besser eignet als γ , da mehr mögliche Werte für L existieren und eher ein konkreter Wert gefunden werden kann, für den im regulären Parameterraum weniger Nullstellen im Nennerpolynom auftreten bzw. diese völlig vermieden werden können.

6.2.3 Quasistationäre Übergänge

Welche physikalische Bedeutung hat nun eine Änderung der Parameter, von denen eine Lösung abhängt? Die konkrete Konfiguration (p_s, p_r, p_q) einer Staubscheibe ist durch konkrete Werte für p_s, p_r und p_q gegeben. Eine Änderung der Konfiguration der Staubscheibe kann dadurch geschehen, dass ein Parameter leicht variiert und die zwei anderen festgehalten werden. Dadurch ergibt sich eine eindeutige Trajektorie im Parameterraum. Will man andere Parameter wie z.B. die baryonische Masse, die Winkelgeschwindigkeit oder das magnetische Dipolmoment ändern, dann kann man die Lösung im entsprechenden Parameter ausdrücken.¹¹ Dazu muss man sich überlegen, welche zwei Parameter man festhalten will.

Jede Änderung eines Parameters stört das thermodynamische Gleichgewicht. Damit diese Störung klein bleibt und schnell wieder abklingt, darf die Änderung eines Parameters nur sehr klein sein. Danach muss man warten, bis sich das thermodynamische Gleichgewicht wieder eingestellt hat. Für infinitesimal kleine Änderungen redet man von quasistationären Übergängen.

6.2.4 Weitere (Skalen-) Parameter

Scheibenradius als Skalenparameter

Im Falle der erstmaligen Post-NEWTON'schen Berechnung bot sich als Skalenparameter der Scheibenradius an. Die so skalierten Größen wurden mit * gekennzeichnet. Da der Scheibenradius im Grenzfall $\gamma \rightarrow 1$ gegen Null geht, ist er in diesem Grenzfall nicht immer als Skalenparameter geeignet. Bestimmte Größen, wie die Multipolmomente divergieren. Wie in Abschnitt 6.1.1 beschrieben, werden jetzt neue Parameter eingeführt.

Baryonische Masse als Skalenparameter

Die baryonische Masse, also die Teilchenanzahl, ist ein weiterer anschaulicher Skalenparameter. Ein quasistationärer Übergang erfolgt, ohne dass weitere Massenelemente dazukommen. Die so skalierten Größen werden hier mit • bezeichnet. Insbesondere ist $Q^\bullet = \epsilon$.

Um die erstmalig erhaltene Lösung mit der baryonische Masse zu skalieren, werden die entsprechenden Größen mit

$$\varrho_0^\bullet = \varrho_0/M_0 = 1/M_0^* = \frac{3\pi}{4}\gamma^{-1} \left[1 - \left(\frac{11}{10} - \frac{4}{15}\epsilon^2 \right) \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right] \quad (6.44)$$

multipliziert bzw. dividiert. Diese Ausdrücke werden dann wieder bis zur jeweiligen Ordnung nach $\sqrt{\gamma}$ entwickelt. Interessant ist der Term $(3\pi/4)\gamma^{-1}$, der dafür sorgt, dass ϱ_0^\bullet für $\gamma \rightarrow 0$ gegen Unendlich geht. Dies ist zwingend, da der Fall $\gamma = 0$ der leere MINKOWSKI-Raum ist und somit M_0 gegen Null geht.

¹¹Die Parameteränderung sollte in einem Bereich liegen, in dem der neue Parameter eine eindeutige Funktion der alten Parameter ist. Z.B. ist die Winkelgeschwindigkeit Ω^* keine eindeutige Funktion im gesamten regulären Parameterbereich.

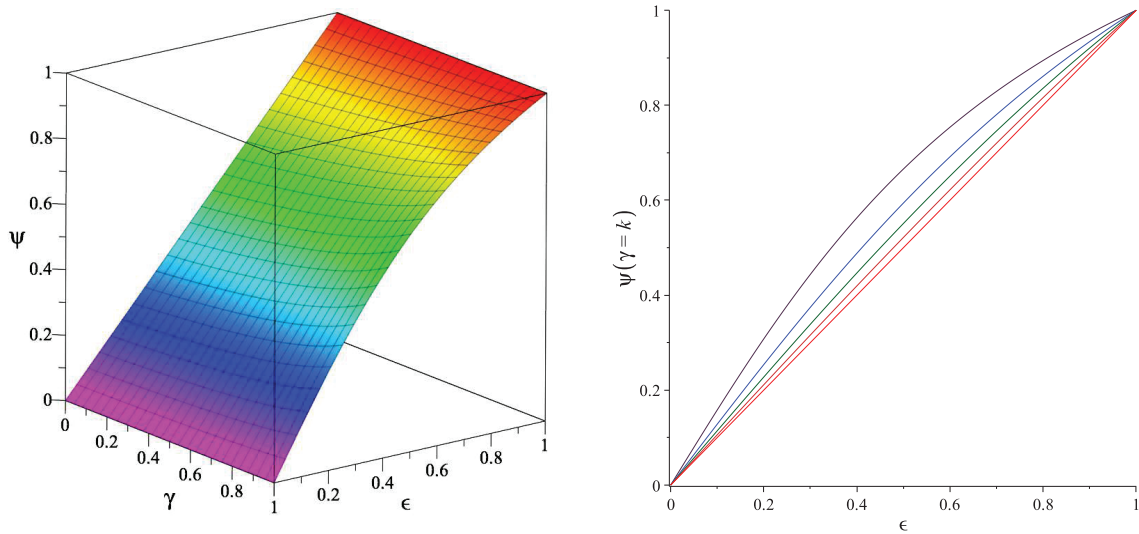


Abbildung 6.3. Der Parameter $\psi = Q/M$ in Abhängigkeit von γ und ϵ . Man erkennt $\psi(\gamma = 0) = \epsilon$ und die Grenzen des regulären Parameterraums mit $\psi(\epsilon = 0) = 0$ und $\psi(\epsilon = 1) = 1$. In der rechten Abbildung nimmt $\gamma = k$ die Werte $[0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$ mit den Farben [rot, orange, grün, blau, violett] an. Die Abweichung von $\psi = \epsilon$ wird für zunehmendes γ größer mit einer maximalen Abweichung bei $\gamma = 1$.

Gravitative Masse als Skalenparameter und die Darstellung der Lösung in den Parametern γ und $\psi = Q/M$

Die Reskalierung der Lösung mit der gravitativen Masse geschieht analog zum Fall der Reskalierung mit der baryonischen Masse. Die so skalierten Größen werden hier mit $^\circ$ bezeichnet. Physikalisch ist ein quasistationärer Übergang nicht so anschaulich, jedoch ist ein Vergleich mit der KERR-NEWMAN-Lösung einfacher als bei der Skalierung mit M_0 . Die so skalierte extreme KERR-NEWMAN-Lösung kann allein durch den Parameter Q° beschrieben werden, da im extremen Fall $J^\circ = \sqrt{1 - Q^{\circ 2}}$ ist. Es ist

$$\varrho_0^\circ = \varrho_0/M = 1/M^* = \frac{3\pi}{4}\gamma^{-1} \left[1 - \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{15}\epsilon^2 \right) \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right]. \quad (6.45)$$

Der Parameter $\epsilon = Q/M_0$ bezieht sich auf die Teilchenzahl. Er ist ein Maß der spezifischen Ladung eines Massenteilchens. Für bestimmte Fragestellungen, insbesondere in den Abschnitten 6.2.5 und 6.2.6, ist es nahe liegender den Parameter

$$\psi = Q/M = Q^\circ \quad (6.46)$$

zu verwenden. Er ist ein Maß für die spezifische Ladung des Gesamtsystems. Man erhält:

$$\psi(\gamma, \epsilon) = \epsilon + \epsilon(1 - \epsilon^2) \left[\frac{1}{5}\gamma + \frac{1}{175}(21 - 11\epsilon^2)\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3) \right]. \quad (6.47)$$

Diese Parameterrelation ist im regulären Parameterraum bijektiv. Es lässt sich, durch eine Reiheninversion in ϵ und anschließender Entwicklung nach γ bis zur N -ten Ordnung, die inverse Relation

$$\epsilon(\gamma, \psi) = \psi - \psi(1 - \psi^2) \left[\frac{1}{5}\gamma + \frac{2}{175}(7 + 5\psi^2)\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3) \right] \quad (6.48)$$

angeben. Mit diesem Ausdruck kann ϵ in der vorhandenen Lösung ersetzt werden. Durch erneute Entwicklung nach γ bis zur N -te Ordnung, erhält man die Post-NEWTON'sche Lösung in den neuen Parametern γ und ψ .

Es ist wichtig, die Grenzen des neuen regulären Parameterraums zu kennen. Da für $\epsilon \rightarrow 0$ die Ladung verschwindet und die Masse natürlich endlich bleibt, ergibt sich $\psi(\epsilon = 0) = 0$. Im ECD-Fall gilt $M = M_0$ und damit $\psi = \epsilon = \pm 1$. Dieses Verhalten spiegelt sich auch in dem Vorfaktor $(1 - \epsilon^2)$ in Gleichung (6.47) wider.¹² Man hat also wieder den kompakten regulären Parameterraum: $\gamma \in [0, 1]$ und $\psi \in [-1, 1]$.

Bei vielen Größen spielt der globale Vorfaktor $\sqrt{1 - \epsilon^2}$ eine wichtige Rolle. Entwickelt man diesen, ergibt sich

$$\sqrt{1 - \epsilon^2} = \sqrt{1 - \psi^2} \left[1 + \frac{1}{5} \psi^2 \gamma + \frac{1}{350} \psi^2 (21 + 20\psi^2) \gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3) \right]. \quad (6.49)$$

Ein globaler Vorfaktor ergibt sich für diese Größen also auch in der Darstellung im Parameter ψ .

6.2.5 Grenzübergang zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung

Hier soll nun im Falle starrer Rotation und konstanter spezifischer Ladung untersucht werden, ob im ultra-relativistischen Grenzfall $\gamma = 1$ die „Außenlösung“ entsteht, die durch die extreme KERR-NEWMAN-Lösung beschrieben werden kann. Im Prinzip würde es dazu ausreichen, die Bedingung (4.5) zu untersuchen. Da die Post-NEWTON'sche Entwicklung jedoch nur eine Näherungslösung darstellt, die gerade bei $\gamma = 1$ am ungenauesten ist, kann hier kein strenger Beweis erfolgen, aber durch Untersuchung der Lösung kann die Vermutung eines Übergangs zum Schwarzen Loch erhärtet werden. Es werden weitere (notwendige) Bedingungen untersucht und gezeigt, dass diese im Rahmen der Genauigkeit erfüllt sind. Um die Genauigkeit der Näherung zu erhöhen, wird die PADÉ-Approximation verwendet. Im Rahmen dieser Genauigkeit sprechen alle nun folgenden Betrachtung für einen parametrischen Übergang zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung. Bis jetzt wurde auch kein Ausdruck gefunden, der einen solchen Übergang widerlegt.

Vorbetrachtungen

Die KERR-NEWMAN-Lösung ist kompatibel mit dem Randwertproblem für die geladene Staubscheibe, wenn als Rand der Ereignishorizont hergenommen wird.¹³ In den WEYL-Koordinaten $(\varrho^\circ, \zeta^\circ)$ ist der äußere Ereignishorizont ein Intervall auf der ζ° -Achse unter Einschluss des Koordinatenursprungs. Die Formel (1.146) für die KERR-NEWMAN-Lösung

$$M = 2\Omega J + Q\alpha'_{\mathcal{H}} + l \quad (6.50)$$

lässt sich mit der Formel (3.12)

$$M = 2\Omega J + Q\alpha_c + (1 - \gamma) M_0 \quad (6.51)$$

¹²Vergleiche dazu den globalen Vorfaktor $(1 - \epsilon)^2$ für die relative Bindungsenergie E_b .

¹³Vgl. [Meinel et al., 2015].

für die Staubscheibe vergleichen. Die beiden Gleichungen (6.50) und (6.51) stimmen für $\gamma = 1$, $l = 0$ und $\alpha'_H = \alpha_c$ überein. Für $l = 0$ liegt der (äußere) Ereignishorizont im Koordinatenursprung. Da die Scheibe in der ϱ° -Ebene liegt, kann eine Übereinstimmung von Scheibenlösung und KERR-NEWMAN-Lösung in WEYL-Koordinaten nur in deren Ursprung erfolgen. Von daher müsste für $\gamma \rightarrow 1$ der Radius der Staubscheibe ϱ_0° gegen Null gehen. Diese notwendige Bedingung für den Grenzübergang zur KERR-NEWMAN-Lösung ist im ungeladenen und im ECD-Fall sogar hinreichend.

Wenn es also einen parametrischen Übergang zur KERR-NEWMAN-Lösung gibt, dann muss er zur extremen Lösung hin erfolgen. Dies passt zu den Darstellungen aus Abschnitt 4.2. Vollzieht man den Grenzübergang $\gamma \rightarrow 1$ in den WEYL-Koordinaten $(\varrho^\circ, \zeta^\circ)$, normiert durch die gravitative Masse, würde man dann die „Außenlösung“, gegeben durch die extreme KERR-NEWMAN-Lösung, erhalten. Vollzieht man den Grenzübergang $\gamma \rightarrow 1$ in den WEYL-Koordinaten (ϱ^*, ζ^*) , die durch den Scheibenradius ϱ_0 normiert werden, würde man die „Innenlösung“ mit einer regulären endlich ausgedehnten Staubscheibe erhalten.

Weitere Vorgehensweise

Man kann den Grenzfall $\gamma \rightarrow 1$ auch in den WEYL-Koordinaten $(\varrho^\bullet, \zeta^\bullet)$, normiert durch die baryonische Masse, ausführen. Auch so würde man die „Außenlösung“, gegeben durch die extreme KERR-NEWMAN-Lösung, erhalten. Zusammen mit einer Betrachtung im Parameter $\epsilon = Q/M_0$ ist dies der physikalisch anschaulichste Weg. Die baryonische Masse ist jedoch für die (extreme) KERR-NEWMAN-Lösung nicht definiert.¹⁴ In den mit der gravitativen Masse normierten Koordinaten $(\varrho^\circ, \zeta^\circ)$ lässt sich die extreme KERR-NEWMAN-Lösung aber durch den Parameter $\psi = Q/M$ darstellen. Die ERNST-Potentiale auf der Symmetrieachse sind durch

$$\mathcal{E}_{\text{eKN}} = \frac{\zeta^\circ - 1 - i\sqrt{1 - \psi^2}}{\zeta^\circ + 1 - i\sqrt{1 - \psi^2}} \quad \text{und} \quad \Phi_{\text{eKN}} = \frac{\psi}{\zeta^\circ + 1 - i\sqrt{1 - \psi^2}} \quad (6.52)$$

gegeben.¹⁵ Um den Grenzübergang zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung zu untersuchen, ist es demnach naheliegender, die Scheibenlösung im Parameter ψ zu betrachten. Interessanterweise ist die Konvergenz bei $\gamma = 1$ für die ersten neun Koeffizienten der für den Übergang relevanten Größen in ψ besser als im Parameter ϵ .

Wenn ein Übergang zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung vorliegt, so müssen gewisse Ausdrücke $R(\gamma, \psi)$ im Grenzfall $\gamma \rightarrow 1$ für $\psi \in [0, 1]$ gegen Null gehen. Dies ist mit einer Näherungslösung schwer zu zeigen. Leichter ist es zu untersuchen, ob diese Ausdrücke, geteilt durch eine Funktion $v(\gamma)$, für die gilt

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} v(\gamma) = 0, \quad (6.53)$$

für $\gamma \rightarrow 1$ gegen einen endlichen Wert konvergieren, also

$$\left| \lim_{\gamma \rightarrow 1} S(\gamma, \psi) \right| = \left| \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{R(\gamma, \psi)}{v(\gamma)} \right| < \infty, \quad \psi \in [0, 1]. \quad (6.54)$$

¹⁴Siehe dazu auch den Kommentar aus Abschnitt 4.1 zum Phasenübergang von normaler Materie zum Schwarzen Loch im ultra-relativistischen Grenzfall.

¹⁵Dies folgt aus Gleichung (1.126) mit $\Theta = 0$, $\tilde{r}/M = \zeta^\circ + 1$ und $A/M = J^\circ = \sqrt{1 - \psi^2}$.

Man kann auch das Inverse von $S(\gamma, \psi)$ untersuchen. Dann muss gelten

$$\left| \lim_{\gamma \rightarrow 1} S^{-1}(\gamma, \psi) \right| = \left| \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{v(\gamma)}{R(\gamma, \psi)} \right| > 0, \quad \psi \in [0, 1]. \quad (6.55)$$

Dazu wird das Konvergenzkriterium (6.41)

$$\mathbb{K}_n = n \left(1 - \frac{c_{n+1}}{c_n} \right) > 1 \quad (6.56)$$

herangezogen und auf die Reihenentwicklung

$$S(\gamma, \psi) = S_{\text{New}}(\gamma, \psi) \left[1 + \sum_{n=1}^N c_n(\psi) \gamma^n \right] \quad (6.57)$$

von $S(\gamma, \psi)$ (bzw. $S^{-1}(\gamma, \psi)$) angewandt. Ist das Konvergenzkriterium für die höheren Koeffizienten erfüllt, so kann mit hoher Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, dass

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} R(\gamma, \psi) = 0, \quad \psi \in [-1, 1] \quad (6.58)$$

gilt. Dieses Verfahren ist kein strenger Beweis, jedoch eine sehr effektive Methode, um die Informationen einer Näherungslösung auszuwerten.

Das hier vorgestellte Verfahren kann bei der Wahl von $v(\gamma) = (\gamma - 1)$ verwendet werden, um die erste Entwicklungsordnung des ursprünglichen Ausdrucks bei $\gamma = 1$ darzustellen. Ist sogar diese bekannt, kann bei nochmaliger Anwendung gegebenenfalls (siehe Gleichung (6.82)) sogar die zweite Entwicklungsordnung dargestellt werden. Die $S(\gamma, \psi)$ werden bei $\gamma = 1$ jedoch sehr langsam konvergieren. In manchen Fällen reichen die ersten zehn Ordnungen noch nicht ganz aus, damit die Werte von \mathbb{K}_n im gesamten Parameterbereich über Eins liegen (siehe Abbildung 6.7 oder 6.12).

Jetzt soll die Post-NEWTON'sche Entwicklung herangezogen werden, um Belege für einen Übergang zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung zu liefern. In den meisten Fällen werden die Ergebnisse graphisch durch zwei Bilder dargestellt (vgl. z.B. Abbildung 6.6). Links ist der Wert einer Größe für steigende Entwicklungsordnung N dargestellt. Oft wird dazu die PADÉ-Approximation in $\sqrt{\gamma}$ in der Annahme einer höheren Genauigkeit hinzugenommen. Rechts in der Graphik sind die Werte von \mathbb{K}_n aus dem Konvergenzkriterium für größer werdende n dargestellt. Der kritische Wert Eins ist durch eine rote gestrichelte Linie markiert.

Sorgsam müssen die Ausdrücke untersucht und diskutiert werden, bei denen die Entwicklungskoeffizienten c_n Nulldurchgänge in $\psi \in [0, 1]$ haben (siehe Abschnitt 6.2.1). Dazu werden in diesen Fällen auch die c_n graphisch dargestellt.

Parameterrelationen der extremen KERR-NEWMAN-Lösung

Zuerst werden Parameterrelationen untersucht, die für die extreme KERR-NEWMAN-Lösung gelten.¹⁶ Mit diesen wird begonnen, da hier die Methodik und die Schwierigkeiten beim Auftreten von Nulldurchgängen der Entwicklungskoeffizienten c_n anschaulich werden.

¹⁶Die Gültigkeit dieser Relationen ist notwendig für den Übergang der Scheibenlösung zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung.

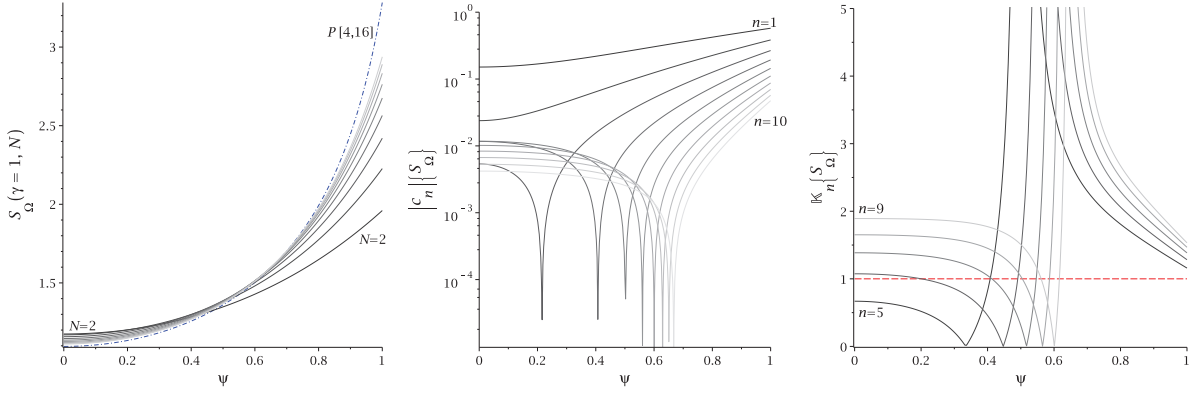


Abbildung 6.4. Die Größe $S_\Omega = \left[1 - [M\Omega(2 - \psi^2)] \left[\sqrt{\gamma(1 - \psi^2)} \right]^{-1} \right] (1 - \gamma)^{-1}$: Links sind die Werte bei $\gamma = 1$ für wachsende N mit PADÉ-Approximation $P[4, 16]$ in $\sqrt{\gamma}$ (blau, gestrichelt) aufgetragen. In der Mitte sind die Koeffizientenfunktionen c_n und rechts das Konvergenzverhalten für wachsende n dargestellt.

Aus Gleichung (1.120) ergibt sich im extremen Fall

$$\frac{J^2}{M^4} = 1 - \frac{Q^2}{M^2} = 1 - \psi^2. \quad (6.59)$$

Diese Gleichung ist für $\epsilon = \psi = 1$ aufgrund des globalen Vorfaktors von J in trivialer Weise erfüllt. Die Gleichung kann auch als Grenzwert für den mit der gravitativen Masse normierten Drehimpuls J° gelesen werden:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} J^\circ = \sqrt{1 - \psi^2}. \quad (6.60)$$

Für J° kann jedoch auch eine Aussage zur ersten Entwicklungsordnung bei $\gamma = 1$ gemacht werden. Dazu und zur Gleichung (6.60) sei auf den Abschnitt 6.2.6 verwiesen.

Die andere Parameterrelation bezüglich Ω lautet nach Gleichung (1.127) im Extremfall

$$M\Omega = \frac{J}{M^2 + (J/M)^2} = \frac{J^\circ}{1 + J^{\circ 2}} = \Omega^\circ. \quad (6.61)$$

Mit Hilfe der Gleichung (6.60) kann man den Ausdruck

$$R_\Omega = 1 - \frac{M\Omega(2 - \psi^2)}{\sqrt{\gamma(1 - \psi^2)}} \quad (6.62)$$

konstruieren.¹⁷ In dieser Form kürzt sich der globale Vorfaktor von Ω heraus. Für die Scheibenlösung gilt es zu prüfen ob

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} R_\Omega = 0 \quad (6.63)$$

gilt. In Abbildung 6.4 links erkennt man ein Verhalten, bei dem für $\gamma \rightarrow 1$ der Ausdruck

$$S_\Omega = \left[1 - \frac{M\Omega(2 - \psi^2)}{\sqrt{\gamma(1 - \psi^2)}} \right] (1 - \gamma)^{-1} = 1 - \frac{8 - 3\pi - 4\psi^2}{3\pi} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \quad (6.64)$$

¹⁷Der Faktor $1/\sqrt{\gamma}$ wurde bei R_Ω hinzugenommen, um eine gerade Funktion in $\sqrt{\gamma}$ zu erhalten.

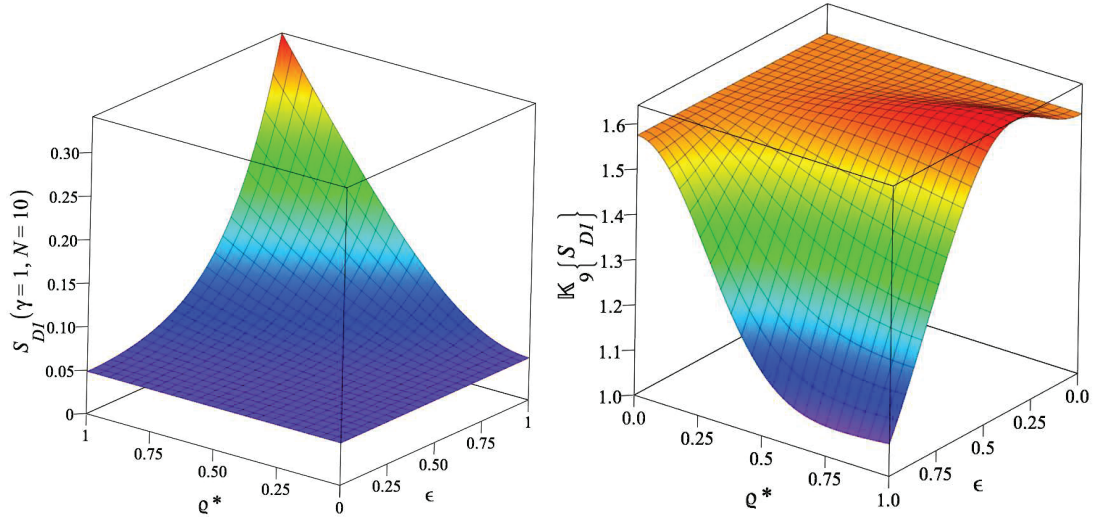


Abbildung 6.5. Links ist der Wert von $S_{Dl} = [f'(\varrho^* \leq 1, \zeta^* = 0)]^{1/2} (1 - \gamma)^{-1/4}$ bis zur zehnten Entwicklungsordnung bei $\gamma = 1$ dargestellt. Rechts sieht man das Konvergenzverhalten für $n = 9$.

endlich bleibt. In der Mitte sind die Koeffizientenfunktionen c_n betragsmäßig im logarithmischen Maßstab aufgetragen. Die nach unten gerichteten Spitzen sind Nullstellen, die für größere n zu größeren ψ -Werten wandern. Die c_n haben negative Werte bei $\psi = 0$ und positive Werte bei $\psi = 1$. Die Darstellung des Konvergenzkriteriums (6.41) rechts in Abbildung 6.4 zeigt Intervalle in ψ auf, in denen das Kriterium nicht erfüllt ist. Diese Intervalle liegen bei ψ -Werten, die etwas kleiner sind, als die entsprechenden Nullstellen der c_n . Dies liegt daran, dass im Bereich dieser Intervalle $|c_{n+1}| > |c_n|$ ist. Trotzdem ist die Konvergenz der ersten Koeffizienten von S_Ω gerade in diesen Intervallen sehr gut, was man auch an der Darstellung von $S_\Omega(\gamma = 1, N)$ in Abbildung 6.4 erkennt.

Aus der Gültigkeit von (6.60) und (6.61) folgt mit Gleichung (6.51):

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \alpha_c = \frac{\psi}{2 - \psi^2}. \quad (6.65)$$

Untersuchung der Potentiale $\sqrt{f'}$ und α' in der Scheibe

Jetzt soll der Übergang zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung anhand der notwendigen und hinreichenden Bedingung (4.5) aus Abschnitt 4.2 geprüft werden. Für die extreme KERR-NEWMAN-Lösung gilt auf dem Horizont:

$$\alpha'_H = \frac{\psi}{2 - \psi^2}. \quad (6.66)$$

Für den Scheibenfall ergibt sich mit Gleichung (6.65) aus der Bedingung (4.5) der Ausdruck:¹⁸

$$\gamma = 1 : \quad \alpha'(\zeta^*=0, 0 \leq \varrho^* \leq 1) = \frac{\psi}{2 - \psi^2}. \quad (6.67)$$

¹⁸Vgl. [Breithaupt et al., 2015]

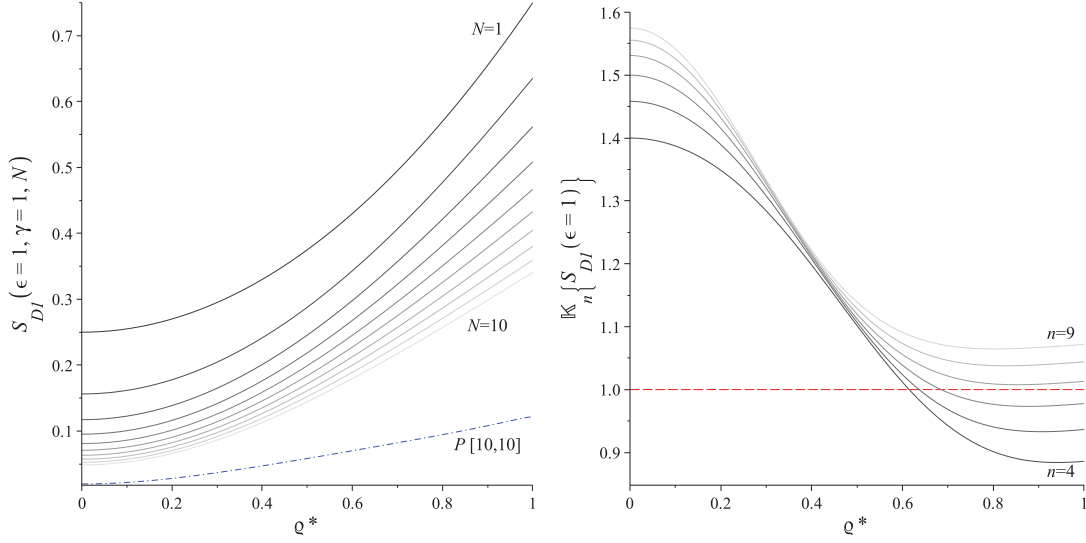


Abbildung 6.6. Links ist der Wert von $S_{D1} = [f'(\varrho^* \leq 1, \zeta^* = 0)]^{1/2} (1 - \gamma)^{-1/4}$ bis zur zehnten Entwicklungsordnung bei $\gamma = 1$ im ECD-Fall dargestellt. Rechts sieht man das Konvergenzverhalten für $n = 9$.

Wegen der Randbedingungen ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\gamma = 1 : \quad f'(\zeta^* = 0, 0 \leq \varrho^* \leq 1) = 0. \quad (6.68)$$

Am besten lässt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned} S_{D1} &= \frac{e^{U'}}{(1 - \gamma)^{1/4}} \Big|_{\zeta^* = 0, \varrho^* \leq 1} \\ &= 1 - \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \varrho^{*2} \epsilon^2 \right] \gamma - \left[\frac{3}{32} - \frac{1}{8} \left(\varrho^{*2} - \frac{1}{2} \varrho^{*4} \right) \epsilon^2 + \left(\frac{1}{6} \varrho^{*2} - \frac{1}{8} \varrho^{*4} \right) \epsilon^4 \right] \gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3) \end{aligned} \quad (6.69)$$

bei $\gamma = 1$ untersuchen, da er ein ausreichend gutes Konvergenzverhalten zeigt. Hier wird der Ausdruck in Abhängigkeit von ϵ untersucht. In der Arbeit [Breithaupt et al., 2015] ist er in Abhängigkeit von ψ dargestellt. Rechts in Abbildung 6.5 ist $\mathbb{K}_9\{S_{D1}\}$ aufgetragen, das seinen Minimalwert bei $\epsilon = 1$ und $\varrho^* \simeq 0.8$ erreicht.¹⁹ Dieser beträgt $\mathbb{K}_9\{S_{D1}\}(\varrho^* = 0.8, \epsilon = 1) = 1.0646... > 1$. In einem gewissen Bereich geht S_{D1} im Grenzfall $\gamma \rightarrow 1$ sogar gegen Null.²⁰ Der analytische Wert von S_{D1} bei $\varrho^* = 0$ bzw. $\epsilon = 0$ beträgt

$$S_{D1}(\varrho^* = 0) = S_{D1}(\epsilon = 0) = (1 - \gamma)^{3/4}. \quad (6.70)$$

Da S_{D1} polynomial in ϵ und ϱ^* ist, kann es nach diesen beiden Größen entwickeln werden. Für den nullten Entwicklungsterm ergibt sich ein Polynom in γ , welches mit der TAYLOR-Entwicklung von $(1 - \gamma)^{3/4}$ bei $\gamma = 0$ übereinstimmt. Der Wert von S_{D1} ($\gamma = 1, N = 10$) an den Stellen $\epsilon = 0$ bzw. $\varrho^* = 0$ in Abbildung 6.5 beträgt 0.048586... und weicht in einem

¹⁹Der Übersichtlichkeit halber wurden die anderen $\mathbb{K}_n\{S_{D1}\}$ weggelassen. $\mathbb{K}_5\{S_{D1}\}$ bis $\mathbb{K}_8\{S_{D1}\}$ zeigen ein ähnliches Verhalten wie $\mathbb{K}_9\{S_{D1}\}$. $\mathbb{K}_7\{S_{D1}\}$ und $\mathbb{K}_8\{S_{D1}\}$ sind im gesamten Bereich größer als Eins.

²⁰Es reicht aus zu zeigen, dass S_{D1} bei $\gamma = 1$ endlich bleibt.

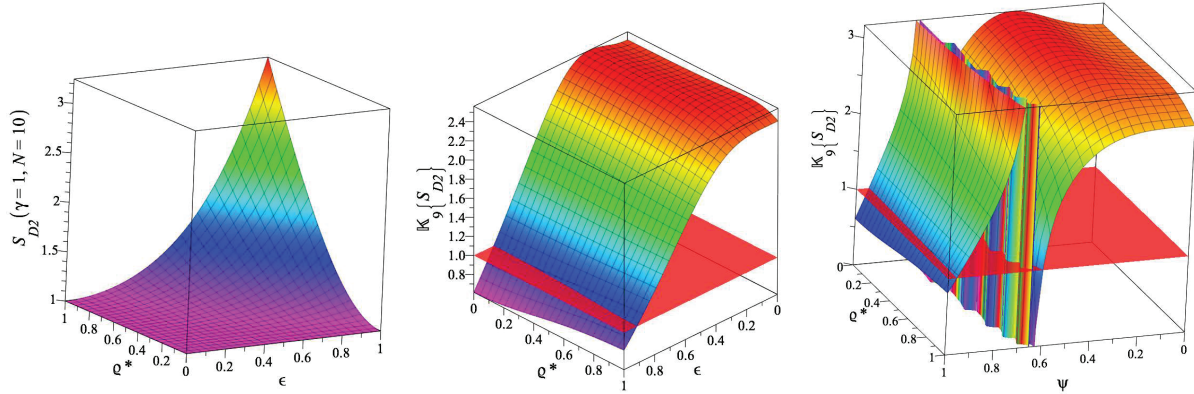


Abbildung 6.7. Links ist der Wert von $S_{D2} = [f'(\varrho^* \leq 1, \zeta^* = 0)]^{1/2} (1 - \gamma)^{-1}$ bis zur zehnten Entwicklungsordnung bei $\gamma = 1$ dargestellt. In der Mitte und rechts sieht man das Konvergenzverhalten für $n = 9$ in Abhängigkeit von ϵ bzw. ψ . Die rote Fläche markiert den Wert Eins.

recht großen Bereich kaum von diesem Wert ab. Dies ist genau der Wert der besagten TAYLOR-Entwicklung bis zur zehnten Ordnung, ausgewertet bei $\gamma = 1$.

In Abbildung 6.6 ist zusätzlich der ECD-Fall graphisch dargestellt, bei dem S_{D1} bei $\gamma = 1$ am langsamsten konvergiert. Der Wert von $S_{D1}(\gamma=1, N=10)$ fällt mit wachsender Ordnung. Die PADÉ-Approximation ergibt noch mal einen weitaus kleineren Wert.²¹ Insgesamt kann also davon ausgegangen werden, dass S_{D1} , bei $\gamma = 1$, gegen einen endlich Wert konvergiert und damit $\sqrt{f'}$ auf der Scheibenebene für $\gamma = 1$ und $\epsilon \in [0, 1]$ gegen Null geht. Dies bedeutet, dass die Bedingung (4.5) für den Übergang der Staubscheibe zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung bei $\gamma = 1$ erfüllt ist. Diese Bedingung wird jetzt noch weiter, bezüglich ihrer ersten Entwicklungsordnung bei $\gamma = 1$, untersucht.

Nach Abschnitt 6.2.6 und der Abbildung 6.7 wird S_{D1} sogar gegen Null gehen. Der Ausdruck

$$S_{D2} = \frac{e^{U'}}{1 - \gamma} \Big|_{\zeta^*=0, \varrho^* \leq 1} = 1 + \varrho^{*2} \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{48} (12 + 3\varrho^{*2} + (8 - 6\varrho^{*2}) \epsilon^2) \gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^3) \right], \quad (6.71)$$

der im Grenzfall $\gamma \rightarrow 1$ den ersten Koeffizienten einer Entwicklung bei $\gamma = 1$ ergibt, liefert dort einen endlichen Wert. Er konvergiert jedoch so langsam, dass das Konvergenzkriterium nicht im gesamten regulären Parameterbereich erfüllt ist. Der Bereich, in dem der Wert für \mathbb{K}_n kleiner als Eins ist, ist jedoch sehr klein. In Abbildung 6.7 ist zusätzlich noch der Wert für \mathbb{K}_n aus dem Konvergenzkriterium in Abhängigkeit von ψ dargestellt. Hier erkennt man wieder eine Polstelle, die wie für S_Ω diskutiert werden kann. Die Konvergenz von $S_{D2}(\psi)$ ist insgesamt besser als für $S_{D2}(\epsilon)$. Auch der Bereich, in dem das Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist, ist kleiner. Wie bei S_{D1} wachsen die Werte für \mathbb{K}_n für größer werdende n . Der Wert von S_{D2} bei $\varrho^* = 0$ bzw. $\epsilon = \psi = 0$ ergibt den Wert Eins, wie man auch an Gleichung (6.71) sieht.

Jetzt soll auch noch die Bedingung (6.67) direkt untersucht werden. Dazu wird der

²¹Im ECD-Fall ist bereits die Bedingung, dass ϱ_0^0 bei $\gamma = 1$ gegen Null geht, hinreichend.

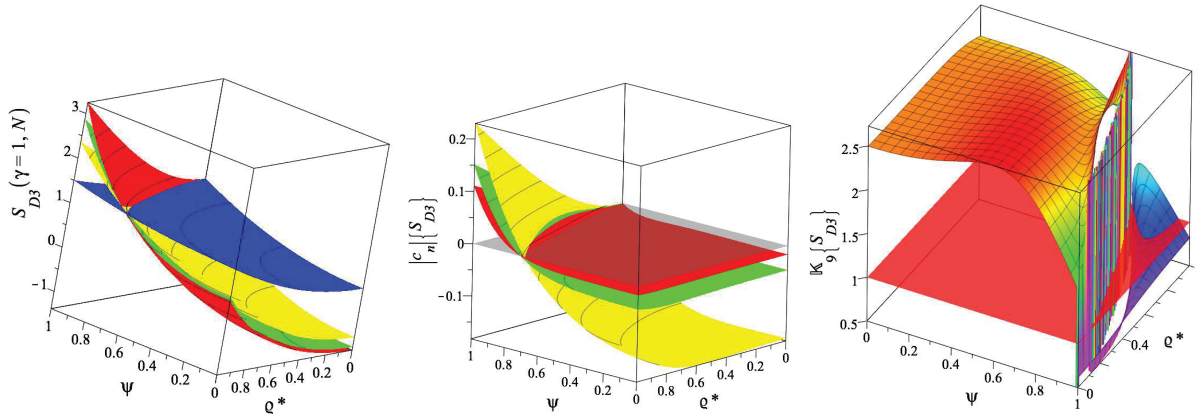


Abbildung 6.8. Links ist der Wert von $S_{D3} = [1 - \alpha'(\varrho^* \leq 1, \zeta^* = 0) (2 - \psi^2) \psi^{-1}] (1 - \gamma)^{-1}$ bis zur N -ten Entwicklungsordnung mit $N = 1$ (blau), $N = 4$ (gelb), $N = 7$ (grün) und $N = 10$ (rot) bei $\gamma = 1$ dargestellt. In der Mitte sind die Entwicklungskoeffizienten c_n mit $n = 2$ (gelb), $n = 7$ (grün) und $n = 10$ (rot) dargestellt. Die graue Fläche ist die Null-Funktion. Rechts sieht man das Konvergenzverhalten für $n = 9$. Die rote Fläche markiert den Wert Eins.

Ausdruck

$$S_{D3} = \frac{1 - \alpha' (2 - \psi^2) \psi^{-1}}{1 - \gamma} \Big|_{\zeta^*=0, \rho^* \leq 1} = 1 - \left[1 - \varrho^{*2} - \left(1 - \frac{1}{2} \varrho^{*2} \right) \psi^2 \right] \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \quad (6.72)$$

hergenommen. Dieser Ausdruck ist schwieriger als S_{D1} und S_{D2} zu diskutieren. Zu den Nullstellen der Koeffizientenfunktionen c_n kommt der Umstand, dass das Konvergenzkriterium nicht im gesamten Parameterbereich erfüllt ist. Zudem wachsen die Beträge der Werte für S_{D3} mit größerer Ordnung an (siehe Abbildung 6.8). Die Koeffizientenfunktionen c_n ergeben bei $\psi = 1$ und $\varrho^* = 0$ für alle (untersuchten) $n \geq 1$ den Wert Null. Die Nulldurchgänge der c_n liegen für verschiedene n sehr eng beieinander, sodass der Wert von S_{D3} in diesem Bereich sehr nahe bei Eins liegt. In diesem Bereich liegen auch die Polstellen der \mathbb{K}_n . Für S_{D3} wachsen die Werte von \mathbb{K}_n für größer werdende n im regulären Parameterbereich. Mit Abbildung 6.8 kann Gleichung (6.65) geprüft werden. Das Konvergenzkriterium ist für $\varrho^* = 0$ erfüllt.

Damit ist die notwendige und hinreichende Bedingung (4.5) für den Übergang der Staubscheibe zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung bei $\gamma = 1$ ausführlich untersucht worden. Unter den gegebenen Voraussetzungen dieser Untersuchungen, ist mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit davon auszugehen, dass die Bedingung (4.5) erfüllt ist.

Untersuchung des Scheibenradius

Eine notwendige Bedingung für den parametrischen Übergang zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung ist das Verschwinden des Scheibenradius bei $\gamma \rightarrow 1$. Um dies zu zeigen, wird der Ausdruck

$$\mu_M^{-1} = \frac{M}{\varrho_0} (1 - \gamma) = \frac{4}{3\pi} \gamma \left[1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15} \psi^2 \right) \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right]. \quad (6.73)$$

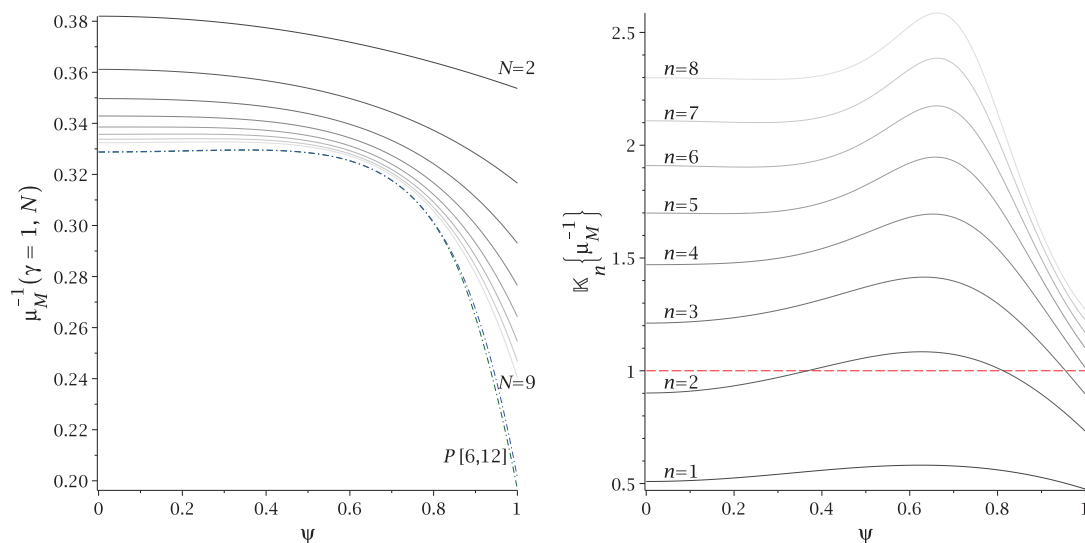


Abbildung 6.9. Der Ausdruck $\mu_M^{-1} = M^*(1 - \gamma)$ bei $\gamma = 1$: Links ist die Auswertung der ersten N Ordnungen und zweier [6, 12]-PADÉ-Approximation in $\sqrt{\gamma}$ (blau/grün, gestrichelt). Rechts ist das Konvergenzverhalten mit höherer Ordnung n und die Eins-Funktion (rot) dargestellt.

bei $\gamma = 1$ untersucht. Links in Abbildung 6.9 erkennt man, dass die Ungleichung (6.55)

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \mu_M^{-1} > 0, \quad \psi \in [0, 1] \quad (6.74)$$

erfüllt ist. Rechts in Abbildung 6.9 zeigt sich, dass das Konvergenzkriterium (6.41) erfüllt ist. Im ungeladen Fall beträgt der analytische Wert

$$\mu_M^{-1}(\gamma=1, \psi=0) = 0.32863\dots,$$

während die PADÉ-Approximation $P[6, 12]\{\mu_M^{-1}(\gamma=1, N=9)\}$ (blaue gestrichelte Linie in Abbildung 6.9)

$$P[6, 12]\{\mu_M^{-1}(\gamma=1, \psi=0; N=9)\} = 0.32885\dots$$

ergibt. Da die Werte von μ_M^{-1} für größere n kleiner werden, kann zusätzlich die inverse PADÉ-Approximation $(P[6, 12]\{\mu_M(\gamma=1; N=9)\})^{-1}$ von μ_M hinzugenommen werden.²² Die grüne gestrichelte Linie in Abbildung 6.9 kennzeichnet deren Verlauf. Die größte Abweichung von $(P[6, 12]\{\mu_M^{-1}(\gamma=1; N=9)\})$ zu $(P[6, 12]\{\mu_M(\gamma=1; N=9)\})^{-1}$ ist bei $\psi = 1$. Die Werte sind:

$$\begin{aligned} (P[6, 12]\{\mu_M(\gamma = 1, \psi = 0; N=9)\})^{-1} &= 0.32872\dots, \\ (P[6, 12]\{\mu_M(\gamma = 1, \psi = 1; N=9)\})^{-1} &= 0.19675\dots, \\ P[6, 12]\{\mu_M^{-1}(\gamma = 1, \psi = 1; N=9)\} &= 0.20117\dots \end{aligned}$$

Wichtigste Schlussfolgerung ist, dass der Ausdruck ϱ_0/M bei $\gamma = 1$ verschwindet. Da $(M/\varrho_0)(1 - \gamma)$ hier einen Wert annimmt, der verschieden von Null ist, muss der Radius ϱ_0 gegen Null gehen. Im ECD-Grenzfall reicht diese Aussage schon aus, um den Übergang zur extremen REISNER-NORDSTRÖM-Lösung zu zeigen.

²²Das Konvergenzkriterium \mathbb{K}_n von μ_M ist für $n = 8$ nur für $|\psi| \lesssim 0.959$ erfüllt.

6.2.6 Das Verhalten nahe am Grenzfall zum Schwarzen Loch²³

Eine weitere Methode um den möglichen parametrischen Übergang zur extremen KERR-NEWMAN-Lösung zu beschreiben, ist die Untersuchung der Multipolmomente der Lösung, die im Grenzfall auf die „Außenlösung“ führt. Bei dieser Untersuchung ergibt sich sogar das Verhalten der Multipolmomente nahe zu diesem Grenzfall. Es zeigt sich, dass deren erste Ableitungen nach γ bei $\gamma = 1$ verschwinden.

Die gravitativen und elektromagnetischen Multipolmomente der KERR-NEWMAN-Lösung lauten

$$m_n = M \left(\frac{iJ}{M} \right)^n \quad \text{und} \quad e_n = Q \left(\frac{iJ}{M} \right)^n. \quad (6.75)$$

Für die extreme KERR-NEWMAN-Lösung kann man Gleichung (6.60) verwenden und erhält

$$m_n = i^n M^{n+1} (1 - \psi^2)^{n/2} \quad \text{und} \quad e_n = i^n M^{n+1} \psi (1 - \psi^2)^{n/2}. \quad (6.76)$$

Im Grenzfall $\gamma \rightarrow 1$ lässt sich untersuchen, ob sich die Multipolmomente der Staubscheibe, wie im Falle der extremen KERR-NEWMAN-Lösung, allein durch gravitative Masse und Ladung ausdrücken lassen. In der Parameterdarstellung in ψ braucht man nur die mit der gravitativen Masse skalierten Koeffizienten m_n° und e_n° untersuchen:

$$\gamma \rightarrow 1: \quad m_n^\circ = i^n (1 - \psi^2)^{n/2} \quad \text{und} \quad e_n^\circ = i^n \psi (1 - \psi^2)^{n/2}. \quad (6.77)$$

Die Gleichungen (6.77) geben die nullte Ordnung einer Reihenentwicklung der Koeffizienten m_n° und e_n° bei $\gamma = 1$ wieder. Interessanterweise lässt sich auch die erste Ordnung einer solchen Entwicklung mit der bisher verwendeten Methode raten und dann überprüfen. Dazu führen wir Momente ein, die mit den Multipolmomenten einer KERR-NEWMAN-Lösung gleicher Masse M , Ladung Q und Drehimpuls J , normiert sind:²⁴

$$m_n^* = \frac{m_n}{k_n} (1 - \psi^2)^{n/2} \quad \text{und} \quad e_n^* = \frac{e_n}{\psi k_n} (1 - \psi^2)^{n/2} \quad \text{mit} \quad k_n = m_0^{n+1} m_1^{\circ n}. \quad (6.78)$$

Für die erste Entwicklungsordnung bei $\gamma = 1$ sind hier die Gleichungen

$$\left. \frac{dm_n^\circ}{d\gamma} \right|_{\gamma=1} = \left. \frac{de_n^\circ}{d\gamma} \right|_{\gamma=1} = 0, \quad \left. \frac{dm_n^*}{d\gamma} \right|_{\gamma=1} = \left. \frac{de_n^*}{d\gamma} \right|_{\gamma=1} = 0 \quad (6.79)$$

bis $n = 11$ überprüft worden.²⁵ Die zweiten Ableitungen von m_n^* bei $\gamma = 1$ sind nur im ungeladenen Fall Null [Kleinwächter et al., 2011]. Wenn Gleichung (6.79) für m_1° gilt, lässt sich durch Entwicklung der Ausdrücke bei $\gamma = 1$ zeigen, dass

$$\left. \frac{dm_n^\circ}{d\gamma} \right|_{\gamma=1} = 0 \Leftrightarrow \left. \frac{dm_n^*}{d\gamma} \right|_{\gamma=1} = 0, \quad \left. \frac{de_n^\circ}{d\gamma} \right|_{\gamma=1} = 0 \Leftrightarrow \left. \frac{de_n^*}{d\gamma} \right|_{\gamma=1} = 0 \quad (6.80)$$

²³Dieser Abschnitt orientiert sich an der Arbeit von KLEINWÄCHTER, LABRANCHE und MEINEL [Kleinwächter et al., 2011] und stellt für die Staubscheibe eine Verallgemeinerung auf den geladenen Fall dar.

²⁴Die Faktoren $(1 - \psi^2)^{n/2}$ werden hinzugenommen, um die globalen Vorfaktoren der k_n zu kompensieren. Dadurch werden Polstellen bei $|\psi| = 1$ vermieden.

²⁵Aufgrund der Struktur, nach der die Multipolmomente von den m_n und e_n abhängen (siehe Abschnitt 1.3), folgt aus den (6.79) die gleiche Aussage für die Multipolmomente.

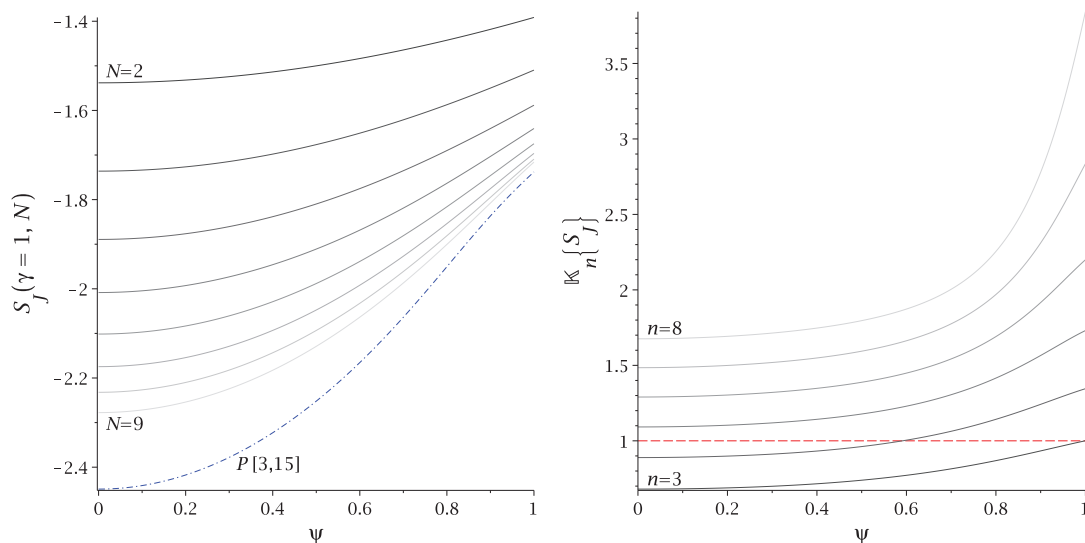


Abbildung 6.10. Der Ausdruck $S_J = \left[1/2 + \left[1 - J^\circ/\sqrt{\gamma(1-\psi^2)}\right] (1-\gamma)^{-1}\right] (1-\gamma)^{-1}$ im Grenzfall $\gamma \rightarrow 1$: Links ist die Auswertung der ersten N Ordnungen und der [3,15]-PADÉ-Approximation (blau) in $\sqrt{\gamma}$. Rechts ist das Konvergenzverhalten mit höherer Ordnung n und die Eins-Funktion (rot) dargestellt.

für jedes fixierte n gilt. Dies ist wichtig, da bestimmte Größen schneller als andere konvergieren.

Gravitatives Dipolmoment

Es stellt sich heraus, dass die Größe²⁶

$$S_J = \left[\frac{1}{2} + \frac{1 - J^\circ/\sqrt{\gamma(1-\psi^2)}}{1-\gamma} \right] (1-\gamma)^{-1} = -\frac{3\pi}{10\gamma} \left[1 - \frac{10\pi\psi^2 - 273\pi + 700}{140\pi} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right]$$

für $\gamma \rightarrow 1$ gegen einen endlichen Wert konvergiert (siehe Abbildung 6.10). Dies ist auch ein Überprüfung von Gleichung (6.60). Mit $\lim_{\gamma \rightarrow 1} S_J = -c$ ergibt sich zudem:

$$J^\circ = \sqrt{\gamma(1-\psi^2)} \left[1 + \frac{1}{2}(1-\gamma) + c(1-\gamma)^2 + \mathcal{O}(1-\gamma)^3 \right]. \quad (6.81)$$

Entwickelt man diesen Ausdruck bei $\gamma = 1$, erhält man:

$$J^\circ = \sqrt{1-\psi^2} \left[1 + \left(c - \frac{3}{8} \right) (1-\gamma)^2 + \mathcal{O}(1-\gamma)^3 \right]. \quad (6.82)$$

Es stellt sich also heraus, dass der erste Entwicklungskoeffizient der Entwicklung von J° bei $\gamma = 1$ verschwindet. Die Gleichung (6.79) ist also für m_1° erfüllt und damit kann von der Gültigkeit der Gleichungen (6.80) ausgegangen werden.

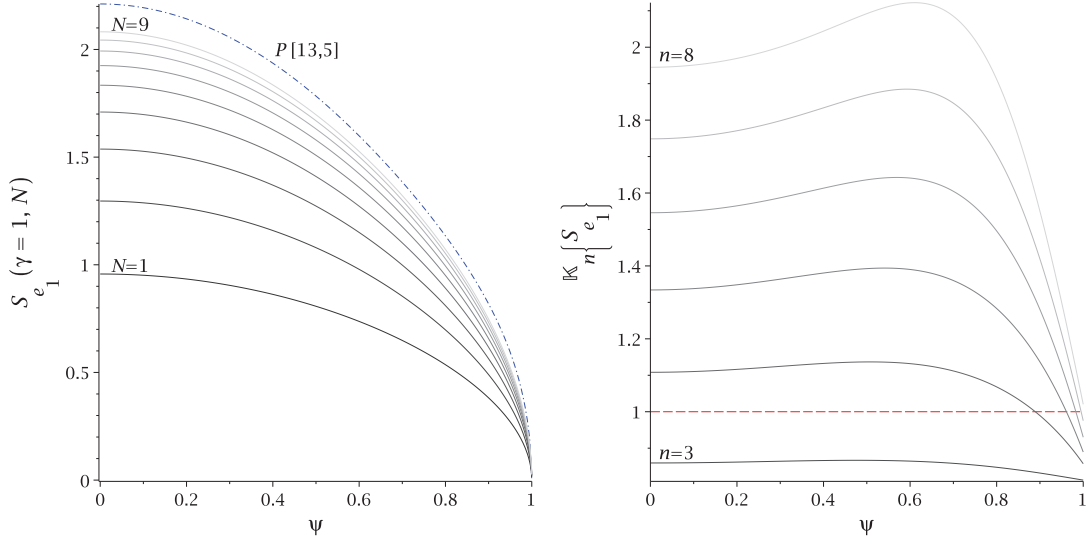


Abbildung 6.11. Der Ausdruck $S_D = \left[\sqrt{1 - \psi^2} - e_1^* \right] (1 - \gamma)^{-2}$ im Grenzfall $\gamma \rightarrow 1$: Links ist die Auswertung der ersten N Ordnungen und der [13, 5]-PADÉ-Approximation (blau) in $\sqrt{\gamma}$. Rechts ist das Konvergenzverhalten mit höherer Ordnung n und die Eins-Funktion (rot) dargestellt.

Magnetisches Dipolmoment

Um das Verhalten des magnetischen Dipolmoments nahe am Grenzfall zum Schwarzen Loch zu untersuchen, ist es einfacher e_1^* statt e_1° zu verwenden, da der entsprechende Ausdruck

$$S_{e_1} = \frac{\sqrt{1 - \psi^2} - e_1^*}{(1 - \gamma)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \psi^2} \left[1 + \left(\frac{32}{35} - \frac{1}{5} \psi^2 \right) \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right] \quad (6.83)$$

schneller konvergiert.²⁷ In Abbildung 6.11 erkennt man, dass S_{e_1} endlich bleibt und das Konvergenzkriterium erfüllt ist. Folglich verschwindet auch für e_1^* die erste Entwicklungsordnung bei $\gamma = 1$.

Die Quadrupolmomente

Für das gravitative Quadrupolmoment ist es nun wieder einfacher m_2° zu untersuchen:

$$S_{m_2} = \frac{i^2 (1 - \psi^2) - m_2^{\circ}}{(1 - \gamma)^2} = \frac{9\pi^2}{80\gamma^2} \left[1 + \left(\frac{23}{35} - \frac{18}{35} \psi^2 \right) \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \right]. \quad (6.84)$$

Nach Abbildung 6.12 bleibt der Ausdruck bei $\gamma = 1$ endlich und das Konvergenzkriterium ist für $n = 8$ für $|\psi| \lesssim 0.99$ erfüllt.

Auch für das elektrische Quadrupolmoment konvergiert der entsprechende Ausdruck S_{e_2} für e_2° besser als für e_2^* . Das Konvergenzkriterium ist für $n = 8$ ebenfalls für $|\psi| \lesssim 0.99$ erfüllt.

²⁶Der Faktor $1/\sqrt{\gamma}$ wird wiederum verwendet, um eine gerade Funktion in $\sqrt{\gamma}$ zu erhalten. Der Summand $1/2$ ist die 'geratene' erste Ordnung bei $\gamma = 1$.

²⁷Für den Ausdruck $\left[1/2 + \left(1 - D^{\circ}/\sqrt{\gamma(1 - \psi^2)} \right) (1 - \gamma)^{-1} \right] (1 - \gamma)^{-1}$ ist \mathbb{K}_8 nur für $|\psi| \lesssim 0.86$ größer als Eins.

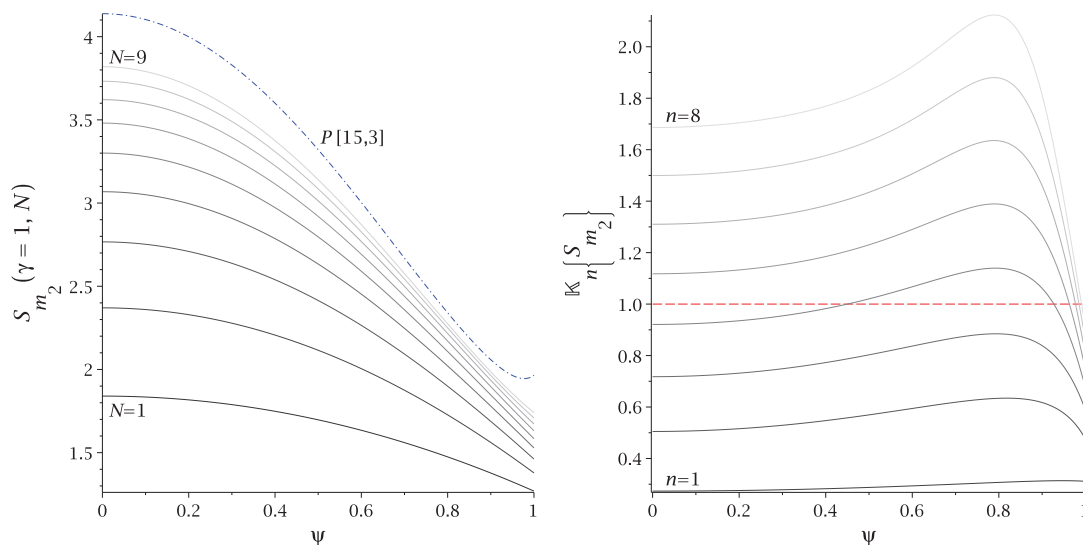


Abbildung 6.12. Der Ausdruck $S_{m_2} = [i^2(1-\psi^2) - m_2^\circ] (1-\gamma)^{-2}$ im Grenzfalle $\gamma \rightarrow 1$: Links ist die Auswertung der ersten N Ordnungen und der [15, 3]-PADE-Approximation (blau) in $\sqrt{\gamma}$. Rechts ist das Konvergenzverhalten mit höherer Ordnung n und die Einsfunktion (rot) dargestellt.

Höhere Momente

Für alle höheren Momente bis $n = 11$ ist das Konvergenzkriterium für die S_{m_n} und S_{e_n} bezüglich m_n° bzw. e_n° erfüllt. Für gerades n ergibt sich

$$S_{m_{2n}} = \frac{i^{2n}(1-\psi^2)^n - m_{2n}^\circ}{(1-\gamma)^2} \quad \text{und} \quad S_{e_{2n}} = \frac{i^{2n}(1-\psi^2)^n - e_{2n}^\circ}{(1-\gamma)^2}. \quad (6.85)$$

Für ungerades n erhält man

$$S_{m_{2n+1}} = \left[\frac{1}{2}(1-\psi^2)^n + \left((1-\psi^2)^n - \frac{m_{2n+1}^\circ}{i^{2n+1}\sqrt{\gamma}(1-\psi^2)} \right) (1-\gamma)^{-1} \right] (1-\gamma)^{-1}, \quad (6.86)$$

$$S_{e_{2n+1}} = \left[\frac{1}{2}(1-\psi^2)^n + \left((1-\psi^2)^n - \frac{e_{2n+1}^\circ}{i^{2n+1}\psi\sqrt{\gamma}(1-\psi^2)} \right) (1-\gamma)^{-1} \right] (1-\gamma)^{-1}. \quad (6.87)$$

Wie für den Drehimpuls ergibt sich mit $\lim_{\gamma \rightarrow 1} S_{m_{2n+1}} = -c_{2n+1}$ durch Umstellen

$$m_{2n+1}^\circ = \sqrt{\gamma(1-\psi^2)} \left[(1-\psi^2)^n + \frac{1}{2}(1-\psi^2)^n(1-\gamma) + c_{2n+1}(1-\gamma)^2 + \mathcal{O}(1-\gamma)^3 \right].$$

Entwickelt man diesen Ausdruck bei $\gamma = 1$ erhält man

$$m_{2n+1}^\circ = \sqrt{1-\psi^2} \left[(1-\psi^2)^n + \left[c_{2n+1} - \frac{3}{8}(1-\psi^2)^n \right] (1-\gamma)^2 + \mathcal{O}(1-\gamma)^3 \right]. \quad (6.88)$$

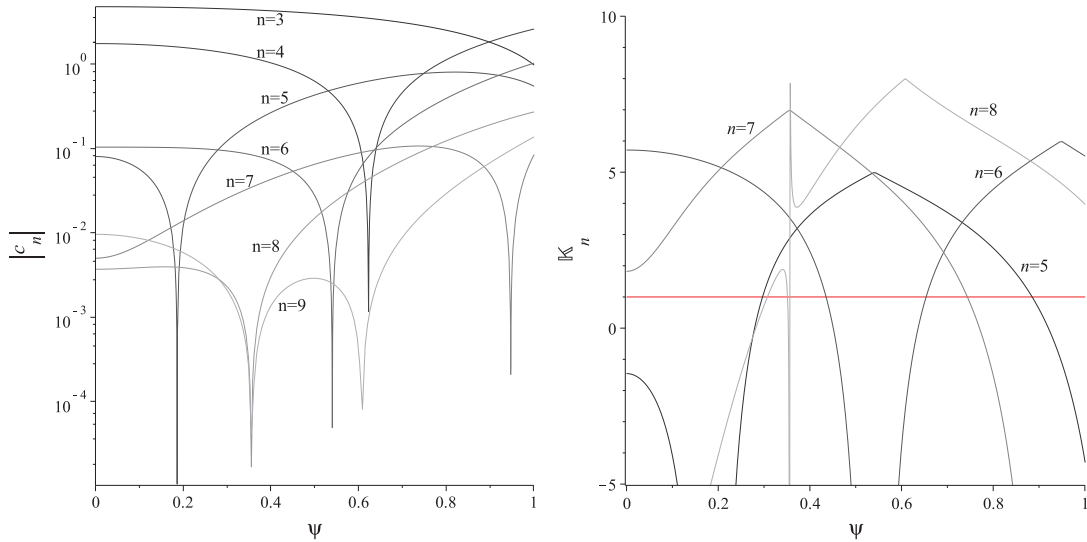


Abbildung 6.13. Der Ausdruck $\left[(1 - \psi^2)^4 - m_8^*\right] (1 - \gamma)^{-2}$ im Grenzfall $\gamma \rightarrow 1$: Links sind die Koeffizienten $|c_n|$ aufgetragen. Rechts ist das Konvergenzverhalten mit höherer Ordnung n und die Eins-Funktion (rot) dargestellt.

Somit gilt auch hier, dass der erste Entwicklungskoeffizient für die Entwicklung der m_{2n+1}° bei $\gamma = 1$ verschwindet. Analog ergibt sich die Aussage für e_{2n+1}° .

Nach (6.80) gilt somit auch für die m_n^* und e_n^* , dass deren erster Entwicklungskoeffizient für die Entwicklung bei $\gamma = 1$ verschwindet. Bei der Untersuchung der entsprechenden Ausdrücke $\left[(1 - \psi^2)^{n/2} - m_n^*\right] (1 - \gamma)^{-2}$ bzw. $\left[(1 - \psi^2)^{n/2} - e_n^*\right] (1 - \gamma)^{-2}$ lässt sich jedoch keine ausreichend gute Aussage zu deren Konvergenz treffen. Zwar erkennt man, dass die Beträge der Koeffizienten $|c_n|$ fallen. Jedoch treten für höhere n immer mehr Nullstellen der c_n in ψ im regulären Parameterbereich auf, welche eine Auswertung über das Konvergenzkriterium nicht mehr ermöglichen. In Abbildung 6.13 sind die Koeffizienten für $\left[(1 - \psi^2)^4 - m_8^*\right] (1 - \gamma)^{-2}$ aufgetragen.

Die ERNST-Potentiale

Durch die Untersuchungen aus dem letzten Abschnitt kann mit hoher Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, dass die Gleichungen (6.79) bis $n = 11$ erfüllt sind. Sind sie für alle n erfüllt, so lassen sich Aussagen zum Verhalten der ERNST-Potentiale nahe am Grenzfall zum Schwarzen Loch ableiten.

Die Achsenpotentiale auf \mathcal{A}^+ ließen sich nach Gleichung (1.101) in eine Reihe nach $1/\zeta$ entwickeln:

$$\xi_+ = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{\zeta^n} = \frac{1}{\zeta^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n^*}{\zeta^{*n}}, \quad q_+ = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{\zeta^n} = \frac{1}{\zeta^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n^*}{\zeta^{*n}}. \quad (6.89)$$

Entwickelt man also die Achsenpotentiale \mathcal{E} und Φ bei $\gamma = 1$, so ergibt sich auch hier, dass der erste Entwicklungsterm verschwindet. Die Reihe beginnt mit den ERNST-Potentiale

\mathcal{E}_{KN} und Φ_{KN} der KERR-NEWMAN-Lösung mit Masse M , Ladung Q und Drehimpuls J :

$$\mathcal{E}(M, J, Q; \zeta) = \mathcal{E}_{\text{KN}}(M, J; \zeta) + \mathcal{O}[(1 - \gamma)^2], \quad (6.90)$$

$$\mathcal{E}_{\text{KN}}(M, J; \zeta) = \frac{M(\zeta - M) - iJ}{M(\zeta + M) - iJ}, \quad (6.91)$$

$$\Phi(M, J, Q; \zeta) = \Phi_{\text{KN}}(M, J, Q; \zeta) + \mathcal{O}[(1 - \gamma)^2], \quad (6.92)$$

$$\Phi_{\text{KN}}(M, J, Q; \zeta) = \frac{QM}{M(\zeta + M) - iJ}. \quad (6.93)$$

Aus dem Vergleich von (6.82) mit der Reihenentwicklung von J° bei $\gamma = 0$ ergibt sich, dass

$$\frac{Q^2}{M^2} + \frac{J^2}{M^4} \geq 1, \quad \gamma \in [0, 1], \quad \epsilon \in [-1, 1] \quad (6.94)$$

gilt. Gleichheit gilt, wenn $\gamma = 1$ oder $\psi = \pm 1$ ist. Dies wiederum bedeutet, dass \mathcal{E}_{KN} und Φ_{KN} durch die Achsenpotentiale der überextremen KERR-NEWMAN-Lösung für $\gamma < 1$ und $|\psi| < 1$ gegeben sind. Da die KERR-NEWMAN-Lösung bereits die ersten Multipolmomente M, J und Q enthält, beginnt im Fernfeld der zweite Entwicklungsterm nach $(1 - \gamma)$ für \mathcal{E} mit der Ordnung ζ^{-3} , während Φ mit der Ordnung ζ^{-2} beginnt.

Als Ergebnis dieses Abschnitts lässt sich Folgendes festhalten: Durch die Untersuchungen kann mit hoher Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, dass die Lösung der Staubscheibe in der Nähe des ultra-relativistischen Grenzfalls und nicht zu nah an der Scheibe selbst²⁸ sehr gut durch eine überextreme KERR-NEWMAN-Lösung mit derselben gravitativen Masse, Drehimpuls und Ladung approximiert werden kann. Vollzieht man den Grenzübergang zu $\gamma = 1$, dann erhält man in Übereinstimmung mit der ‘cosmic censorship’-Hypothese die ‘Außenlösung’, dargestellt durch die extreme KERR-NEWMAN-Lösung.

6.2.7 Ergosphären

Hier folgen ein paar Anmerkungen zum Thema Ergosphären für geladene und rotierende Staubscheiben.²⁹

Ergosphären sind Bereiche der Raumzeit, in welcher der KILLING-Vektor ξ , der normalerweise zeitartig ist ($\xi^a \xi_a < 0$), raumartig wird ($\xi^a \xi_a > 0$). Dies hat zur Folge, dass $d\varphi/dt > 0$ ist und somit nichts in diesem Bereich, vom (räumlich) Unendlichen aus betrachtet, ruhen kann. Alles wird von der Rotation mitgezogen. Die Oberfläche von Ergosphären ist durch $\xi^a \xi_a = 0$ gekennzeichnet. Sie wird manchmal als ‘Grenzfläche der Stationarität’ bezeichnet. Es lässt sich jedoch aus der Linearkombination $\chi = \xi + \Omega \eta$ lokal ein KILLING-Vektor einführen³⁰, der überall zeitartig ist, sodass die Stationarität (lokal)

²⁸Der Konvergenzradius der Reihenentwicklung (6.89) wird selbst für $n \rightarrow \infty$ nicht bis an die Staubscheibe heran reichen.

²⁹Genauere Erläuterungen zum Thema Ergosphären finden man in dem Buch [Meinel et al., 2008]. Zu den mathematischen Aspekten sei auf die zwei Arbeiten [Chrusciel et al., 2006] (Vakuum) und [Chrusciel and Szybka, 2008] (Elektrovakuum) verwiesen.

³⁰Für konstantes Ω auch global. Vgl. Fußnote 29, Abschnitt 1.4.

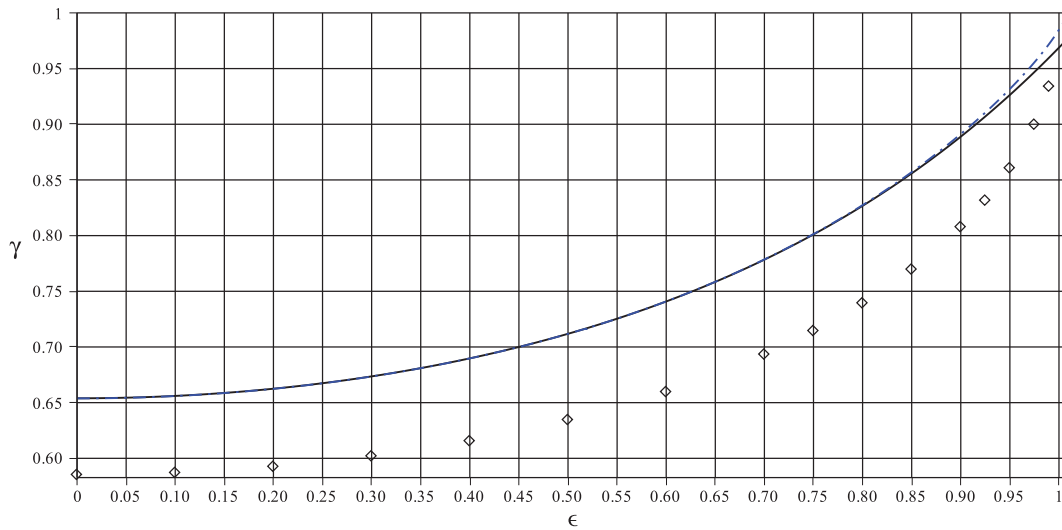


Abbildung 6.14. *Parameterbereiche für charakteristische Figuren von Ergosphären. Die Rauten kennzeichnen die Entstehung von Ergosphären. Bei den Linien erreichen sie den Scheibenrand. Die Rauten und die schwarze Linie wurden aus der Reihenentwicklung berechnet und die blaue, gestrichelte Linie aus der (7, 13)-PADÉ-Approximation in $\sqrt{\gamma}$.*

gesichert ist. Ergosphären entstehen in rotierenden Raumzeiten, die sehr relativistisch sind und haben für rotierende Flüssigkeitskörper toroidale Gestalt.

Um die Oberfläche von Ergosphären zu bestimmen, wird das metrische Potential $f = -\xi^a \xi_a$ auf Nullstellen untersucht. Für die starr rotierende Staubscheibe ergeben sich im ungeladenen Fall fünf charakteristische Figuren (siehe [Meinel and Kleinwächter, 1995] oder [Meinel et al., 2008]). Bei $\gamma = 0.5850\dots$ entsteht erstmals eine Ergosphäre entlang einer Kreislinie auf der Scheibe. Für größere γ ergibt sich eine wachsende toroidale Gestalt, welche bei $\gamma = 0.6538\dots$ den Rand der Scheibe ϱ_0 erreicht. Für noch größere γ wächst sie über den Rand der Scheibe hinaus, bis sie im ultra-relativistischen Grenzfall $\gamma \rightarrow 1$ die Gestalt der Ergosphäre der extremen KERR-Lösung erreicht.³¹

Für den geladenen Fall wurde hier untersucht, wann eine Ergosphäre (auf der Scheibe) entsteht und wann sie den Rand der Scheibe erreicht. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.14 dargestellt. Die Rauten geben an, ab welchem γ (für festgehaltenes ϵ) sich eine Ergosphäre ergibt. Die schwarze und blaue Linie kennzeichnen, wann die Oberfläche der Ergosphäre den Scheibenrand erreicht. Rauten und die schwarze Linie wurden aus der Reihenentwicklung bestimmt. Die blaue Linie ergibt sich aus der (7, 13)-PADÉ-Approximation in $\sqrt{\gamma}$. Damit sind in Abbildung 6.14 die Parameterbereiche in γ und ϵ gekennzeichnet, in denen sich die charakteristischen Figuren von Ergosphären ergeben.³² Nach Abschnitt 6.2.5 ergibt sich mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit für $\gamma \rightarrow 1$ die „Außenlösung“ als extreme KERR-NEWMAN-Lösung. Damit sollte sich bei $\gamma = 1$ auch die Ergosphären-Sequenz der

³¹In der Arbeit von MEINEL und KLEINWÄCHTER [Meinel and Kleinwächter, 1995] erfolgt die Diskussion natürlich in dem Parameter μ aus der analytischen Lösung. Die charakteristischen Werte sind $\mu(\gamma = 0.5850\dots) = \mu_e = 1.68849\dots$ und $\mu(\gamma = 0.6538\dots) = 2$.

³²In der Arbeit von MEINEL und KLEINWÄCHTER [Meinel and Kleinwächter, 1995] sind die Figuren der Ergosphären in Koordinaten normiert durch Ω dargestellt. Eine solche Normierung ist hier nicht sinnvoll, da Ω im ECD-Fall verschwindet.

extremen KERR-NEWMAN-Lösung ergeben.

Ergosphären treten in Raumzeiten auf, deren erzeugende Quellen rotieren. Untersucht man die Winkelgeschwindigkeit Ω° , dann stellt man fest, dass diese für festgehaltenes γ im Parameterbereich $\psi \in [0, 1]$ monoton fällt. Dies liegt vor allem an dem globalen Vorfaktor $\sqrt{1 - \epsilon^2}$. In Abbildung 6.14 erkennt man, dass für größere spezifische Ladung ϵ Ergosphären erst bei größeren γ -Werten entstehen. Im ECD-Fall ist $\Omega = 0$ und somit $\chi = \xi$. Hier können also keine Ergosphären auftreten. Nur im ultra-relativistischen Grenzfall ergibt sich $f = f' = 0$ auf dem 'Horizont' des Quasi Schwarzen Lochs. Die Kurven in Abbildung 6.14 sollten also alle in den Punkt $|\epsilon| = \gamma = 1$ münden, da der Radius ϱ° bei $\gamma = 1$ verschwindet. Die PADÉ-Approximation konvergiert hier besser als die Reihenentwicklung.

Für eine weitergehende Untersuchung von Ergosphären mit Hilfe der Reihenentwicklung bietet es sich an, die Ergebnisse aus Abschnitt 6.2.6 zu verwenden. Dazu können die Reihenentwicklungen des metrischen Potentials f bei $\gamma = 0$ und $\gamma = 1$ durch eine Zwei-Punkt-PADÉ-Approximation zusammengefasst werden. Bei einer Normierung der Koordinaten mit der gravitativen Masse lässt sich auch verwenden, dass der erste Entwicklungskoeffizient der Entwicklung von f bei $\gamma = 1$ verschwindet, da die Scheibe bei γ -Werten nahe Eins schon in der „Innenwelt“ verschwindet. Somit konvergiert die Reihenentwicklung von (6.89) an der Oberfläche der Ergosphäre. Eine Darstellung der nullten Entwicklungsordnung bei $\gamma = 1$ ist im Parameter ψ einfacher. Somit bietet es sich auch für die Untersuchung von Ergosphären an, diesen Parameter anstelle von ϵ zu verwenden.

Kapitel 7

Ausblick

Das Problem der rotierenden Staubscheibe mit konstanter spezifischer Ladung bietet zahlreiche Möglichkeiten für weitere Untersuchungen. An erster Stelle steht natürlich der Versuch, mit Hilfe des linearen Problems für die ERNST-Gleichungen¹ eine analytische Lösung zu erhalten. Damit könnten die Ergebnisse aus der Untersuchung der Post-NEWTON'schen Entwicklung überprüft werden.

Aber auch die Post-NEWTON'sche Entwicklung kann hergenommen werden, um weitere Eigenschaften der Staubscheibe zu untersuchen. Die umfassende Arbeit von BARDEEN und WAGONOR [Bardeen and Wagoner, 1971] zur ungeladenen Staubscheibe bietet eine Menge Themen, die für den geladenen Fall untersucht werden können. Diese wären z.B. Eigenschaften verschiedener Parameter, eine eingehende Untersuchung von Ergosphären, die Struktur der Staubscheibe, Beschreibung der „Schlund-Geometrie“², Bahnen von Testteilchen und Fragen zur Stabilität.

Darüber hinaus ergeben sich neue Themen im geladenen Fall. Diese wären u.a. eine Untersuchung der elektromagnetischen Feldenergie, des magnetischen Dipolmoments oder des Verhältnisses von elektromagnetischen und gravitativen Multipolmomenten. Interessant wäre es auch, die Bedeutung des globalen Vorfaktors $\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}$ vor den elektromagnetischen Größen, die mit der Rotation der Scheibe zusammenhängen, zu untersuchen. Dieser hat bei $\epsilon = \sqrt{2}/2 = 0.7071\dots$ ein Maximum. Gibt es bestimmte elektromagnetische Effekte, die in der Umgebung dieses ϵ -Wertes maximale Ausprägung haben? Diese wären analog zu Ergosphären, die bei Rotation auftreten und (bei festgehaltenen relativistischen Parameter) ihre maximale Ausprägung im ungeladenen Fall haben.

Weitere Themen ergeben sich aus möglichen Entwicklungen des Randwertproblems für schwach geladene oder langsam rotierende Staubscheiben. Im ersten Fall würde sich eine Entwicklung nach dem Parameter ϵ anbieten. Die nullte Ordnung ist die ungeladene Staubscheibe. Für langsam rotierende Staubscheiben um den ECD-Fall ist der Entwicklungsparameter $\omega = \sqrt{1-\epsilon^2}$ geeignet. Der Entwicklungsansatz kann analog zur Post-NEWTON'schen Entwicklung gewählt werden. Drehgrößen sind ungerade und die übrigen geraden Funktionen in ω . Die Rotationsrichtung der Staubscheibe spiegelt sich im Vorzeichen von ω wider.³ Die nullte Ordnung (ECD-Lösung) ergibt sich im Prinzip

¹[Neugebauer and Kramer, 1983]

²Siehe z.B. [Meinel et al., 2008].

³Damit ergibt sich eine sinnvolle Beschreibung der Konvergenz aus physikalischer Sicht analog zur

bei gleichzeitiger Lösung der ersten Ordnung und einer Kombination der Potentiale f und α in zweiter Ordnung. Die vollständige zweite Ordnung erhält man prinzipiell aus der gleichzeitigen Lösung der dritten und einer Kombination der Potentiale f und α in vierter Ordnung. Diese Struktur setzt sich für die höheren Ordnungen fort.

Appendix

A.1 Originalzitat von HENRY POINCARÉ

«Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot *convergence*.

Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement.

Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment.»⁴

HENRY POINCARÉ

⁴[Poincaré, 1893], Kapitel VIII. Deutsche Übersetzung in der Einleitung vom Author dieser Arbeit.

A.2 Einheiten

Es werden geometrische Einheiten mit $G = c = 1$ verwendet. Dabei ist G die NEWTON'sche Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit. Zudem wird im GAUSS System für die elektromagnetischen Größen gearbeitet. Dieses wird durch $4\pi\epsilon_0 = 1$ fixiert. Dabei ist ϵ_0 die (einheitenlose) elektrische Feldkonstante.

Da vom astrophysikalischen Standpunkt aus gesehen, die Sonnenmasse M_\odot eine charakteristische Größe ist, kann man mit $M_\odot = 1$ alle Größen auf Sonnenmassen beziehen.⁵ Im cgs-System erhält man

$$G = 6,674 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{s}^2},$$

$$c \equiv 299\,792\,458\,00 \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

$$M_\odot = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ g}.$$

Die Umrechnungsfaktoren, für die physikalischen Größen, sind durch folgende Tabelle gegeben. Die Zahlenwerte entsprechen dem Wert Eins im einheitenlosem System:

Größen	GAUSS'sches cgs-System	SI-System
Länge	$\frac{GM_\odot}{c^2} = 147\,678 \text{ cm}$	$= 1476,78\text{m}$
Zeit	$\frac{GM_\odot}{c^3} = 4,926 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	$= 4,926 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
Baryonische Masse	$M_\odot = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ g}$	$= 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Elektrische Ladung	$\sqrt{4\pi\epsilon_0 G} M_\odot = 5,138 \cdot 10^{29} \frac{\text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2}}{\text{s}}$	$= 1,714 \cdot 10^{20} \text{ A} \cdot \text{s}$
Gravitative Masse (Energie)	$M_\odot c^2 = 1,79 \cdot 10^{54} \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}^2}$	$= 1,79 \cdot 10^{47} \text{ J}$
Winkelgeschwindigkeit	$\frac{c^3}{GM_\odot} = 2,030 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{s}}$	$= 1,163 \cdot 10^7 \frac{\text{Grad}}{\text{s}}$
Drehimpuls	$\frac{GM_\odot^2}{c} = 8,81 \cdot 10^{48} \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}}$	$= 8,81 \cdot 10^{41} \text{ J} \cdot \text{s}$
Magnetisches Dipolmoment	$\sqrt{4\pi\epsilon_0 G} \frac{GM_\odot^2}{c^2} = 7,58 \cdot 10^{34} \frac{\text{cm}^{5/2} \cdot \text{g}^{1/2}}{\text{s}}$	$= 7,58 \cdot 10^{31} \text{ A} \cdot \text{m}^2$
Ladungs- pro Massendichte	$\sqrt{4\pi\epsilon_0 G} = 2,583 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}^{3/2}}{\text{s} \cdot \text{g}^{1/2}}$	$= 8,617 \cdot 10^{-11} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}}$
Elektrische Stromstärke	$\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0}{G}} c^3 = 1,043 \cdot 10^{35} \frac{\text{cm}^{3/2} \cdot \text{g}^{1/2}}{\text{s}^2}$	$= 3,479 \cdot 10^{25} \text{ A}$
Elektromagnetische Feldstärke	$\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0}{G^3} \frac{c^4}{M_\odot}} = 2,356 \cdot 10^{23} \frac{\text{g}^{1/2}}{\text{s} \cdot \text{cm}^{1/2}}$	

⁵Alternativ ist es bei rotierenden Scheiben sinnvoll alle Größen auf den Scheibenradius zu beziehen.

A.3 Notation

- Metrik g_{ab} : Signatur $(+, +, +, -)$
- Indizes: EINSTEIN'sche Summenkonvention
 - kleine lateinische Buchstaben (a, b, \dots) laufen von 1 bis 4
 - kleine griechische Buchstaben (α, β, \dots) laufen von 1 bis 3
 - große lateinische Buchstaben (A, B, \dots) laufen von 1 bis 2
- Komplexe Konjugation: $\overline{a + ib} = a - ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
- Realteil: $\Re(\dots)$, Imaginärteil: $\Im(\dots)$
- RICCI-Tensor: $R_{ab} = R^m{}_{amb} = -R^m{}_{abm}$ und $R^m{}_{m} = R$
- Feldgleichungen: $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}$ bezeichnet mit $(EF)_{ab}$
- Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes:

$$T_{ab}^{(\text{em})} = \frac{1}{4\pi} (F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd})$$
- Energie-Impuls-Tensor für geladenen Staub: $T_{ab} = \mu u_a u_b + T_{ab}^{(\text{em})}$
- inhomogenen MAXWELL-Gleichungen: $H^{ab}{}_{;b} = F^{ab}{}_{;b} = 4\pi j^a$
- homogenen MAXWELL-Gleichungen: $F_{[ab;c]} = 0$
- Feldstärketensor: $F_{ab} = A_{b;a} - A_{a;b} = A_{b,a} - A_{a,b}$
- Viererpotential: $A^a = (0, 0, A^\varphi, A^t)$
- LORENZ-Eichung: $A^a{}_{;a} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (A^a \sqrt{-g})_{,a} = 0$
- Massendichte: μ
- invariante Flächenmassendichte: σ_p
- Vierergeschwindigkeit: $u^a = (0, 0, u^\varphi, u^t)$
- Viererstromdichte: $j^a = \varrho_{\text{el}} u^a$
- Ladungsdichte: $\varrho_{\text{el}} = \epsilon \mu$
- spezifische elektrische Ladung (Ladung pro Massenelement): $\epsilon \in [-1, 1]$
- spezifische elektrische Gesamtladung: $\psi = Q/M, \quad \psi \in [-1, 1]$
- LORENTZ-Kraftdichte: $f^a = \mu \epsilon F^{ab} u_b$
- Bewegungsgleichungen: $\mu \dot{u}^a = \mu \frac{Du^a}{D\tau} = f^a$
- MINKOWSKI-Raumzeit: $ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b$

- Metrik axialsymmetrisch, stationärer Raumzeiten in LEWIS-PAPAPETROU-WEYL-Koordinaten:

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^{-1}[h(d\rho^2 + d\zeta^2) + \rho^2 d\varphi^2] - f(dt + a d\varphi)^2 \\ ds^2 &= f^{-1}[h(dz d\bar{z}) + \rho^2 d\varphi^2] - f(dt + a d\varphi)^2 \quad \text{mit } z = \rho + i\zeta \end{aligned}$$

- zugehörige KILLING-Vektoren: $\xi = \partial_t$ und $\eta = \partial_\varphi$ bzw. $\xi^a = \delta_t^a$ und $\eta^a = \delta_\varphi^a$
- Linearkombination der KILLING-Vektoren: $\chi = \xi + \Omega\eta$
- Ereignishorizont: $\mathcal{H} : \chi^a \chi_a = 0$
- Oberfläche einer Materieverteilung: \mathcal{B}
- positive bzw. negative Symmetrieachse: \mathcal{A}_\pm
- räumlich Unendlich: \mathcal{C}
- Vierergeschwindigkeit: $u^a = \mathcal{S}^{-1/2} (\xi^a + \Omega\eta^a)$ mit $\mathcal{S} = -(\xi^a + \Omega\eta^a)(\xi_a + \Omega\eta_a)$
- Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$
- ERNST-Potentiale:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= f - \bar{\Phi}\Phi + ib, \quad \Phi = \alpha + i\beta \\ \text{mit } \alpha &= -A_t, \quad \mathbf{e}_\varphi \times \nabla\beta = \frac{f}{\rho} (a\nabla A_t - \nabla A_\varphi) \\ \text{und } \mathbf{e}_\varphi \times \nabla b &= \frac{f^2}{\rho} \nabla a - 2\mathbf{e}_\varphi \times \mathfrak{I}(\bar{\Phi}\nabla\Phi), \\ \text{bzw. } b_{,\rho} &= -\frac{f^2}{\rho} a_{,\zeta} - 2\alpha\beta_{,\rho} + 2\beta\alpha_{,\rho}, \quad b_{,\zeta} = \frac{f^2}{\rho} a_{,\rho} - 2\alpha\beta_{,\zeta} + 2\beta\alpha_{,\zeta}, \\ \beta_{,\rho} &= \frac{f}{\rho} (a\alpha_{,\zeta} + A_{\varphi,\zeta}), \quad \beta_{,\zeta} = -\frac{f}{\rho} (a\alpha_{,\rho} + A_{\varphi,\rho}) \\ \xi &= \frac{1 - \mathcal{E}}{1 + \mathcal{E}}, \quad q = \frac{2\Phi}{1 + \mathcal{E}} \end{aligned}$$

- Nablaoperator und LAPLACE-Operator in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \nabla P &= \frac{\partial P}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mathbf{e}_\zeta \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\zeta}{\partial \zeta} \\ \Delta P &= \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} \end{aligned}$$

- BOYER-LINDQUIST-Koordinaten:

$$\rho = \sqrt{\tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + J^2/M^2 + Q^2} \sin \tilde{\theta}, \quad \zeta = (\tilde{r} - M) \cos \tilde{\theta}$$

- KERR-Parameter: $\mathbf{A} = J/M$
- elliptische Koordinaten: $\varrho = \varrho_0 \sqrt{(1 - \eta^2)(1 + \nu^2)}$, $\zeta = \varrho_0 \eta \nu$
- Koordinatenradius der Staubscheibe: ϱ_0
- Nablaoperator und LAPLACE-Operator in elliptischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}\nabla P &= \frac{1}{\varrho_0} \sqrt{\frac{1 + \nu^2}{\nu^2 + \eta^2}} \frac{\partial P}{\partial \nu} \mathbf{e}_\nu + \frac{1}{\varrho_0} \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\nu^2 + \eta^2}} \frac{\partial P}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\varrho_0 (\nu^2 + \eta^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sqrt{1 + \nu^2} \sqrt{\nu^2 + \eta^2} A_\nu \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{\nu^2 + \eta^2} A_\eta \right) \right] \\ \Delta P &= \frac{1}{\varrho_0^2 (\nu^2 + \eta^2)} \left[(1 + \nu^2) \frac{\partial^2 P}{\partial \nu^2} + 2\nu \frac{\partial P}{\partial \nu} + (1 - \eta^2) \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\partial P}{\partial \eta} \right]\end{aligned}$$

- mitrotierendes Bezugssystem: $\varrho' = \varrho$, $\zeta' = \zeta$, $\varphi' = \varphi - \Omega t$, $t' = t$
- asymptotische Kugelkoordinaten: $\varrho = r \sin \vartheta$, $\zeta = r \cos \vartheta$
- Nablaoperator und LAPLACE-Operator in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\nabla P &= \frac{\partial P}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varrho} (r^2 A_\varrho) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) \\ \Delta P &= \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \vartheta}\end{aligned}$$

- physikalische Größen

- spezielle Multipolmomente: gravitative Masse M , Drehimpuls J , elektrische Ladung Q , magnetisches Dipolmoment D
- gravitative bzw. elektromagnetische Multipolmomente: P_n bzw. Q_n
- baryonische Masse: M_0
- Energie und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes: M_{em} und J_{em}
- relative Bindungsenergie: E_b

- Reihenentwicklung einer Funktion $F(x)$ nach x bei $x = 0$ bis zur Ordnung N :

$$F(x; N) = \sum_{n=0}^N c_n x^n$$

- Wert für das Konvergenzkriterium nach RAABE-DUHAMEL: $\mathbb{K}_n = n \left(1 - x_r \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right)$
- PADÉ-Approximation: $P[M, N - M]\{F(x; N)\}$
- dreiparametrische Lösungsfamilie: $\mathbb{L}(p_s, p_r, p_q)$
- relativistischer Entwicklungsparameter: $\gamma = 1 - e^{U_c} = 1 - \sqrt{f_c}$, $\gamma \in [0, 1]$

A.4 Formeln

- Determinante der Metrik: $g = -\frac{h^2 \varrho^2}{f^2}$

- Nichtverschwindende Komponenten der kontravarianten Metrik:

$$g^{11} = g^{22} = \frac{f}{h}, \quad g^{33} = \frac{f}{\varrho^2}, \quad g^{34} = -\frac{fa}{\varrho^2} \quad \text{und} \quad g^{44} = -\frac{\varrho^2 - a^2 f^2}{f \varrho^2}$$

- ko- und kontravariante Komponenten der Vierergeschwindigkeit:

$$u^\varphi = \frac{f}{\varrho^2} (u_\varphi - a u_t), \quad u^t = -\frac{1}{f \varrho^2} [a f^2 u_\varphi + (\varrho^2 - a^2 f^2) u_t],$$

$$u_t = -f (a u^\varphi + u^t), \quad u_\varphi = \frac{1}{f} [(\varrho^2 - a^2 f^2) u^\varphi - a f^2 u^t],$$

- Wellengleichungen für geladenen Staub:

$$4\pi\epsilon\mu\frac{h}{f}u^\varphi = \nabla \cdot \left[\frac{f}{\varrho^2} (a\nabla A_t - \nabla A_\varphi) \right]$$

$$-4\pi\epsilon\mu\frac{h}{f}u^t = \nabla \cdot \left[\frac{af}{\varrho^2} (a\nabla A_t - \nabla A_\varphi) - \frac{1}{f} \nabla A_t \right]$$

- Feldgleichungen für geladenen Staub:

$$16\pi\mu\varrho\frac{h}{f}u^\varphi (\epsilon A_t + u_t) = \nabla \cdot \left[\frac{f^2}{\varrho^2} \nabla a + 4 \frac{f}{\varrho^2} A_t (a\nabla A_t - \nabla A_\varphi) \right]$$

$$8\pi\mu f h [2u^\varphi (a u_t - u_\varphi) + 1] = f \Delta f - (\nabla f)^2 + \frac{f^4}{\varrho^2} (\nabla a)^2$$

$$- 2f \left[(\nabla A_t)^2 + \frac{f^2}{\varrho^2} (a\nabla A_t - \nabla A_\varphi)^2 \right]$$

$$(\ln h)_{,\varrho} = \frac{1}{2} \varrho \left[(\ln f)_{,\varrho}^2 - (\ln f)_{,\zeta}^2 - \frac{f^2}{\varrho^2} \left((a_{,\varrho})^2 - (a_{,\zeta})^2 \right) \right] + 2 \frac{f}{\varrho} \left[(A_{\varphi,\varrho})^2 - (A_{\varphi,\zeta})^2 \right]$$

$$- 2 \left[\frac{\varrho^2 - a^2 f^2}{f \varrho} \left((A_{t,\varrho})^2 - (A_{t,\zeta})^2 \right) + 2 \frac{af}{\varrho} (A_{\varphi,\varrho} A_{t,\varrho} - A_{\varphi,\zeta} A_{t,\zeta}) \right]$$

$$(\ln h)_{,\zeta} = \varrho \left((\ln f)_{,\varrho} (\ln f)_{,\zeta} - \frac{f^2}{\varrho^2} a_{,\varrho} a_{,\zeta} \right)$$

$$+ 4 \left[\frac{f}{\varrho} A_{\varphi,\varrho} A_{\varphi,\zeta} - \frac{\varrho^2 - a^2 f^2}{f \varrho} A_{t,\varrho} A_{t,\zeta} - \frac{af}{\varrho} (A_{\varphi,\zeta} A_{t,\varrho} + A_{\varphi,\varrho} A_{t,\zeta}) \right]$$

- ERNST-Gleichungen:

$$(\Re \mathcal{E} + \bar{\Phi} \Phi) \Delta \mathcal{E} = (\nabla \mathcal{E} + 2\bar{\Phi} \nabla \Phi) \cdot \nabla \mathcal{E}$$

$$(\Re \mathcal{E} + \bar{\Phi} \Phi) \Delta \Phi = (\nabla \mathcal{E} + 2\bar{\Phi} \nabla \Phi) \cdot \nabla \Phi$$

$$(\xi \bar{\xi} - q \bar{q} - 1) \Delta \xi = 2 (\bar{\xi} \nabla \xi - \bar{q} \nabla q) \cdot \nabla \xi$$

$$(\xi \bar{\xi} - q \bar{q} - 1) \Delta q = 2 (\bar{\xi} \nabla \xi - \bar{q} \nabla q) \cdot \nabla q$$

- mitrotierendes Bezugssystem:

– Transformationsgleichungen der Potentiale:

$$f' = f \left[(1 + \Omega a)^2 - \frac{\Omega^2 \varrho^2}{f^2} \right], \quad (1 - \Omega a') f' = (1 + \Omega a) f, \quad \frac{h'}{f'} = \frac{h}{f},$$

$$A'_{\varphi'} = A_{\varphi}, \quad A'_{t'} = A_t + \Omega A_{\varphi}, \quad A^{t'} = A^t, \quad A^{\varphi'} = A^{\varphi} - \Omega A^t$$

– Vierergeschwindigkeit: $u^{n'} = (0, 0, 0, e^{-U'})$, $u_{n'} = (0, 0, -a' e^{U'}, -e^{U'})$

– Feld- und Wellengleichungen:

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{f'}{\varrho^2} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'}) \right],$$

$$-4\pi\mu\epsilon e^{2k' - 3U'} = \nabla \cdot \left[\frac{a' f'}{\varrho^2} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'}) - \frac{1}{f'} \nabla A'_{t'} \right],$$

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{f'^2}{\varrho^2} \nabla a' + 4 \frac{f'}{\varrho^2} A'_{t'} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'}) \right],$$

$$8\pi\mu e^{2k' + 2U'} = f' \Delta f' - (\nabla f')^2 + \frac{f'^4}{\varrho^2} (\nabla a')^2$$

$$- 2f' \left[(\nabla A'_{t'})^2 + \frac{f'^2}{\varrho^2} (a' \nabla A'_{t'} - \nabla A'_{\varphi'})^2 \right]$$

– Quasi-ERNST-Gleichungen:

$$e^{2U'} \Delta \mathcal{E}' = (\nabla \mathcal{E}' + 2\bar{\Phi}' \nabla \Phi') \cdot \nabla \mathcal{E}' + 8\pi\mu \left(e^{U'} + \epsilon \bar{\Phi}' \right) e^{U' + 2k'}$$

$$e^{2U'} \Delta \Phi' = (\nabla \mathcal{E}' + 2\bar{\Phi}' \nabla \Phi') \cdot \nabla \Phi' - 4\pi\mu \epsilon e^{U' + 2k'}$$

- baryonische Masse: $M_0 = - \int_{V_{\text{mat}}} \mu u^a n_a d\mathcal{V} = \int_{V_{\text{mat}}} \mu u^4 \sqrt{-g} d^3 \vec{x}$

- Ladung: $Q = - \int_{V_{\text{mat}}} \epsilon \mu u^a n_a d\mathcal{V} = \int_{V_{\text{mat}}} j^4 \sqrt{-g} d^3 \vec{x}$

- Energie des elektromagnetischen Feldes:

$$M_{\text{em}} = \int_V T_{ab}^{(\text{em})} \xi^a n^b d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{mat}}} (A_t - \Omega A_{\varphi}) j^4 \sqrt{-g} d^3 \vec{x}$$

- Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes:

$$J_{\text{em}} = - \int_V T_{ab}^{(\text{em})} \eta^a n^b d\mathcal{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_{\infty}} F_{c3} F^{c4} \sqrt{-g} d^3 \vec{x} = \int_{V_{\text{mat}}} A_{\varphi} j^4 \sqrt{-g} d^3 \vec{x}$$

- Drehimpuls: $J = - \int_{V_{\infty}} T_{ab} \eta^a n^b d\mathcal{V} = J_{\text{em}} - \int_{V_{\text{mat}}} a' \mu \sqrt{-g} d^3 \vec{x}$

- gravitative Masse:

$$M = 2 \int_{V_\infty} \left(T_{ab} + \frac{1}{2} \mu g_{ab} \right) \xi^a n^b dV = 2M_{\text{em}} + \int_{V_{\text{mat}}} \mu (1 - 2\Omega a') \sqrt{-g} d^3\vec{x} = 2\Omega J + \mathcal{D}M_0$$

mit $\mathcal{D} = \text{konstant}$

- relative Bindungsenergie: $E_b = \frac{M_0 - M}{M_0} = -\frac{2\Omega J}{M_0} + 1 - \mathcal{D}$

A.4.1 Fernfeldverhalten der Potentiale bis zur dritten bzw. vierten Ordnung in $1/r$

$$f_1 = -2M.$$

$$f_2 = 2M^2 + Q^2.$$

$$f_3 = m_2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + M^3 (\cos^2 \vartheta + 1) - MQ^2 (\cos^2 \vartheta + 3).$$

$$\Phi \bar{\Phi}_2 = Q^2.$$

$$\Phi \bar{\Phi}_3 = -2MQ^2.$$

$$\Phi \bar{\Phi}_4 = e_2 Q (3 \cos^2 \vartheta - 1) - Q^4 (\cos^2 \vartheta - 1) + M^2 Q^2 (\cos^2 \vartheta + 2) + D^2 \cos^2 \vartheta.$$

$$b_2 = -2J \cos \vartheta.$$

$$b_3 = 4MJ \cos \vartheta.$$

$$b_4 = [im_3 (5 \cos^2 \vartheta - 3) - 3M^2 J (\cos^2 \vartheta + 1) + (2Q^2 J + MQD) (\cos^2 \vartheta - 1)] \cos \vartheta.$$

$$\alpha_1 = Q.$$

$$\alpha_2 = -MQ.$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} [e_2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + M^2 Q (\cos^2 \vartheta + 1) - Q^3 (\cos^2 \vartheta - 1)].$$

$$\beta_2 = D \cos \vartheta.$$

$$\beta_3 = (QJ + MD) \cos \vartheta.$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{2} [ie_3 (5 \cos^2 \vartheta - 3) - MQJ (\cos^2 \vartheta + 3) + 3Q^2 D (\cos^2 \vartheta - 1) - M^2 D \cos^2 \vartheta] \cos \vartheta.$$

$$a_1 = 2J \sin^2 \vartheta.$$

$$a_2 = (2MJ - QD) \sin^2 \vartheta.$$

$$a_3 = - [im_3 (5 \cos^2 \vartheta - 1) - M^2 J (3 \cos^2 \vartheta + 1) + MQD (\cos^2 \vartheta + 1) + 2Q^2 J \cos^2 \vartheta] \sin^2 \vartheta.$$

$$A_{\varphi 1} = -D \sin \vartheta.$$

$$A_{\varphi 2} = \frac{1}{2} (MD - 3QJ) \sin^2 \vartheta.$$

$$A_{\varphi 3} = \frac{3}{2} [ie_3 (5 \cos^2 \vartheta - 1) - MQJ (\cos^2 \vartheta + 1) + Q^2 D (3 \cos^2 \vartheta - 1) - 2M^2 D \cos^2 \vartheta] \sin^2 \vartheta.$$

A.4.2 Terme der EINSTEIN'schen Feldgleichungen

Die nicht-verschwindenden Komponenten des Energie-Impuls-Tensors (1.13) bezüglich des Viererpotentials $A_a = (0, 0, A_\varphi, A_t)$ und der Metrik (1.42) lauten:

$$8\pi T_{11} = \frac{1}{f\varrho^2} \left[f^2 (A_{\varphi,\varrho}^2 - A_{\varphi,\zeta}^2) - (\varrho^2 - f^2 a^2) (A_{t,\varrho}^2 - A_{t,\zeta}^2) - 2af^2 (A_{\varphi,\varrho} A_{t,\varrho} - A_{\varphi,\zeta} A_{t,\zeta}) \right].$$

$$8\pi T_{22} = -8\pi T_{11}.$$

$$8\pi T_{12} = \frac{2}{f\varrho^2} \left[f^2 A_{\varphi,\varrho} A_{\varphi,\zeta} - (\varrho^2 - f^2 a^2) A_{t,\varrho} A_{t,\zeta} - af^2 (A_{\varphi,\zeta} A_{t,\varrho} + A_{\varphi,\varrho} A_{t,\zeta}) \right].$$

$$8\pi T_{33} = \frac{1}{hf\varrho^2} \left[f^2 (\varrho^2 + f^2 a^2) (A_{\varphi,\varrho}^2 + A_{\varphi,\zeta}^2) + (\varrho^2 - f^2 a^2)^2 (A_{t,\varrho}^2 + A_{t,\zeta}^2) \right. \\ \left. + 2f^2 a (\varrho^2 - f^2 a^2) (A_{\varphi,\varrho} A_{t,\varrho} + A_{\varphi,\zeta} A_{t,\zeta}) \right] + 8\pi\mu u_\varphi^2.$$

$$8\pi T_{34} = \frac{1}{h\varrho^2} \left[f^3 a (A_{\varphi,\varrho}^2 + A_{\varphi,\zeta}^2) - fa (\varrho^2 - f^2 a^2) (A_{t,\varrho}^2 + A_{t,\zeta}^2) \right. \\ \left. + 2f (\varrho^2 - f^2 a^2) (A_{\varphi,\varrho} A_{t,\varrho} + A_{\varphi,\zeta} A_{t,\zeta}) \right] + 8\pi\mu u_\varphi u_t.$$

$$8\pi T_{44} = \frac{1}{h\varrho^2} \left[f^3 (A_{\varphi,\varrho}^2 + A_{\varphi,\zeta}^2) + f (\varrho^2 + f^2 a^2) (A_{t,\varrho}^2 + A_{t,\zeta}^2) \right. \\ \left. - 2f^3 a (A_{\varphi,\varrho} A_{t,\varrho} + A_{\varphi,\zeta} A_{t,\zeta}) \right] + 8\pi\mu u_t^2.$$

Da im Energie-Impuls-Tensor bezüglich dem Viererpotential $A_a = (0, 0, A_\varphi, A_t)$ und der Metrik (1.35) keine Ableitungen nach W auftreten, muss für dessen Komponenten in den obigen Gleichungen nur ϱ durch W ersetzt werden.

Für das Produkt der Spur des Energie-Impuls-Tensors mit der Metrik ergeben sich die nichtverschwindenden Komponenten zu:

$$-4\pi T g_{11} = -4\pi T g_{22} = 4\pi\mu \frac{h}{f}.$$

$$-4\pi T g_{33} = 4\pi\mu \frac{1}{f} (\varrho^2 - a^2 f^2).$$

$$-4\pi T g_{34} = -4\pi T g_{44} a = -4\pi\mu f a.$$

Die nichtverschwindenden Komponenten des symmetrischen RICCI-Tensors bezüglich der Metrik (1.42) lauten:

$$R_{11} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{f} \left(f_{,\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} f_{,\varrho} + f_{,\zeta\zeta} \right) - \frac{1}{h} \left(h_{,\varrho\varrho} - \frac{1}{\varrho} h_{,\varrho} + h_{,\zeta\zeta} \right) + \frac{1}{h^2} (h_{,\varrho}^2 + h_{,\zeta}^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{f^2} (2f_{,\varrho}^2 + f_{,\zeta}^2) + \frac{f^2}{\varrho^2} a_{,\varrho}^2 \right].$$

$$R_{22} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{f} \left(f_{,\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} f_{,\varrho} + f_{,\zeta\zeta} \right) - \frac{1}{h} \left(h_{,\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} h_{,\varrho} + h_{,\zeta\zeta} \right) + \frac{1}{h^2} (h_{,\varrho}^2 + h_{,\zeta}^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{f^2} (f_{,\varrho}^2 + 2f_{,\zeta}^2) + \frac{f^2}{\varrho^2} a_{,\zeta}^2 \right].$$

$$R_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varrho h} h_{,\zeta} - \frac{1}{f^2} f_{,\varrho} f_{,\zeta} + \frac{f^2}{\varrho^2} a_{,\varrho} a_{,\zeta} \right].$$

$$R_{33} = \frac{1}{2h} \left[\frac{\varrho^2 + a^2 f^2}{f} \left(f_{,e\varrho} + \frac{1}{\varrho} f_{,e} + f_{,\zeta\zeta} \right) + 2a f^2 \left(a_{,e\varrho} - \frac{1}{\varrho} a_{,e} + a_{,\zeta\zeta} \right) - \frac{\varrho^2 + a^2 f^2}{f^2} (f_{,e}^2 + f_{,\zeta}^2) + \frac{f^2}{\varrho^2} (\varrho^2 + a^2 f^2) (a_{,e}^2 + a_{,\zeta}^2) + 4af (a_{,e} f_{,e} + a_{,\zeta} f_{,\zeta}) \right].$$

$$R_{34} = \frac{1}{2h} \left[af \left(f_{,e\varrho} + \frac{1}{\varrho} f_{,e} + f_{,\zeta\zeta} \right) - a (f_{,e}^2 + f_{,\zeta}^2) + f^2 \left(a_{,e\varrho} - \frac{1}{\varrho} a_{,e} + a_{,\zeta\zeta} \right) + \frac{af^4}{\varrho^2} (a_{,e}^2 + a_{,\zeta}^2) + 2f (f_{,e} a_{,e} + a_{,\zeta} f_{,\zeta}) \right].$$

$$R_{44} = \frac{1}{2h} \left[f \left(f_{,e\varrho} + \frac{1}{\varrho} f_{,e} + f_{,\zeta\zeta} \right) - (f_{,e}^2 + f_{,\zeta}^2) + \frac{f^4}{\varrho^2} (a_{,e}^2 + a_{,\zeta}^2) \right].$$

Der RICCI-Skalar bezüglich der Metrik (1.42) lautet:

$$R = \frac{1}{hf} \left[f \left(f_{,e\varrho} + \frac{1}{\varrho} f_{,e} + f_{,\zeta\zeta} \right) - \frac{3}{2} (f_{,e}^2 + f_{,\zeta}^2) + \frac{f^4}{2\varrho^2} (a_{,e}^2 + a_{,\zeta}^2) - f^2 \left((\ln h)_{,e\varrho} + (\ln h)_{,\zeta\zeta} \right) \right].$$

$$= \frac{f}{h} \left[\frac{1}{f} \Delta f - \frac{3}{2} \frac{1}{f^2} (\nabla f)^2 + \frac{f^2}{2\varrho^2} (\nabla a)^2 - \frac{1}{h} \Delta h - \frac{1}{h^2} (\nabla h)^2 + \frac{1}{\varrho} (\ln h)_{,e} \right].$$

Die nichtverschwindenden Komponenten des symmetrischen RICCI-Tensors bezüglich der Metrik (1.35) lauten:

$$R_{11} = \frac{1}{2W^2 h^2 f^2} \left[fhW^2 (hf_{,e\varrho} + hf_{,\zeta\zeta} - fh_{,e\varrho} - fh_{,\zeta\zeta}) + h^2 fW (f_{,e} W_{,e} + f_{,\zeta} W_{,\zeta}) + f^2 W^2 (h_{,e}^2 + h_{,\zeta}^2) + hW f^2 (W_{,e} h_{,e} - W_{,\zeta} h_{,\zeta}) - W^2 h^2 (2f_{,e}^2 + f_{,\zeta}^2) - 2h^2 W f^2 W_{,e\varrho} + f^4 h^2 a_{,e}^2 \right].$$

$$R_{22} = \frac{1}{2W^2 h^2 f^2} \left[fhW^2 (hf_{,e\varrho} + hf_{,\zeta\zeta} - fh_{,e\varrho} - fh_{,\zeta\zeta}) + h^2 fW (f_{,e} W_{,e} + f_{,\zeta} W_{,\zeta}) + f^2 W^2 (h_{,e}^2 + h_{,\zeta}^2) - hW f^2 (W_{,e} h_{,e} - W_{,\zeta} h_{,\zeta}) - W^2 h^2 (f_{,e}^2 + 2f_{,\zeta}^2) - 2h^2 W f^2 W_{,\zeta\zeta} + f^4 h^2 a_{,\zeta}^2 \right].$$

$$R_{12} = \frac{1}{2W^2 f^2 h} \left[f^4 h a_{,e} a_{,\zeta} - 2W f^2 h W_{,e\zeta} - W^2 h f_{,e} f_{,\zeta} + W f^2 (W_{,e} h_{,\zeta} + W_{,\zeta} h_{,e}) \right].$$

$$R_{33} = \frac{1}{2hW^2 f^2} \left[W^2 f (W^2 + a^2 f^2) (f_{,e\varrho} + f_{,\zeta\zeta}) + 2W^2 a f^4 (a_{,e\varrho} + a_{,\zeta\zeta}) - 2W^3 f^2 (W_{,e\varrho} + W_{,\zeta\zeta}) - W^2 (W^2 + a^2 f^2) (f_{,e}^2 + f_{,\zeta}^2) + f^4 (W^2 + a^2 f^2) (a_{,e}^2 + a_{,\zeta}^2) + 4W^2 a f^3 (a_{,e} f_{,e} + a_{,\zeta} f_{,\zeta}) + fW (W^2 + a^2 f^2) (f_{,e} W_{,e} + f_{,\zeta} W_{,\zeta}) - 2W a f^4 (W_{,e} a_{,e} + W_{,\zeta} a_{,\zeta}) \right].$$

$$R_{34} = \frac{1}{2hW^2} \left[W^2 a f (f_{,e\varrho} + f_{,\zeta\zeta}) + f^2 W^2 (a_{,e\varrho} + a_{,\zeta\zeta}) - W^2 a (f_{,e}^2 + f_{,\zeta}^2) + a f^4 (a_{,e}^2 + a_{,\zeta}^2) + 2W^2 f (f_{,e} a_{,e} + a_{,\zeta} f_{,\zeta}) - W f^2 (W_{,e} a_{,e} + W_{,\zeta} a_{,\zeta}) + fW a (f_{,e} W_{,e} + f_{,\zeta} W_{,\zeta}) \right].$$

$$R_{44} = \frac{1}{2hW^2} \left[fW^2 (f_{,e\varrho} + f_{,\zeta\zeta}) - W^2 (f_{,e}^2 + f_{,\zeta}^2) + f^4 (a_{,e}^2 + a_{,\zeta}^2) + fW (f_{,e} W_{,e} + f_{,\zeta} W_{,\zeta}) \right].$$

Literaturverzeichnis

- [Ansorg and Meinel, 2000] Ansorg, M. and Meinel, R. (2000). Differentially Rotating Disks of Dust. *General Relativity and Gravitation*, 32:1365–1380.
- [Bardeen and Wagoner, 1971] Bardeen, J. M. and Wagoner, R. V. (1971). Relativistic Disks. I. Uniform Rotation. *Astrophysical Journal*, 167:359.
- [Bender and Orszag, 1978] Bender, C. M. and Orszag, S. A. (1978). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, New York.
- [Bonnor and Wickramasuriya, 1972] Bonnor, W. B. and Wickramasuriya, S. B. P. (1972). A Static Body of Arbitrarily Large Density. *International Journal of Theoretical Physics*, 5:371–375.
- [Boyer and Lindquist, 1967] Boyer, R. H. and Lindquist, R. W. (1967). Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric. *Journal of Mathematical Physics*, 8:265–281.
- [Breithaupt, 2011] Breithaupt, M. (2011). *Untersuchungen zum Fernfeld rotierender Neutronensterne und die Multipolvermutung*. Diplomarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- [Breithaupt et al., 2015] Breithaupt, M., Liu, Y.-C., Meinel, R., and Palenta, S. (2015). On the black hole limit of rotating discs of charged dust. *Classical and Quantum Gravity*, 32(13):135022.
- [Carter, 1970] Carter, B. (1970). The commutation property of a stationary, axisymmetric system. *Communications in Mathematical Physics*, 17:233–238.
- [Chrusciel et al., 2006] Chrusciel, P. T., Greuel, G.-M., Meinel, R., and Szybka, S. J. (2006). The Ernst equation and ergosurfaces. *Classical and Quantum Gravity*, 23:4399–4414.
- [Chrusciel and Szybka, 2008] Chrusciel, P. T. and Szybka, S. J. (2008). On the Ernst Electro-Vacuum Equations and Ergosurfaces. *Acta Physica Polonica B*, 39:59.
- [Dyson, 1952] Dyson, F. J. (1952). Divergence of Perturbation Theory in Quantum Electrodynamics. *Physical Review*, 85:631–632.
- [Einstein, 1915a] Einstein, A. (1915a). Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 844–847.

- [Einstein, 1915b] Einstein, A. (1915b). Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 831–839.
- [Einstein, 1915c] Einstein, A. (1915c). Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 778–786.
- [Ernst, 1968] Ernst, F. J. (1968). New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. II. *Physical Review*, 168:1415–1417.
- [Ernst et al., 2006] Ernst, F. J., Manko, V. S., and Ruiz, E. (2006). Equatorial symmetry/antisymmetry of stationary axisymmetric electrovac spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 23:4945–4952.
- [García-Reyes and González, 2004] García-Reyes, G. and González, G. A. (2004). Counterrotating perfect fluid discs as sources of electrovacuum static spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 21:4845–4864.
- [Gourgoulhon, 2010] Gourgoulhon, E. (2010). An introduction to the theory of rotating relativistic stars. *ArXiv e-prints*.
- [Harrison, 1968] Harrison, B. K. (1968). New Solutions of the Einstein-Maxwell Equations from Old. *Journal of Mathematical Physics*, 9:1744–1752.
- [Hoenselaers and Perjes, 1990] Hoenselaers, C. and Perjes, Z. (1990). Multipole moments of axisymmetric electrovacuum spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 7:1819–1825.
- [Hütten, 2011] Hütten, M. (2011). *Lösungen der Einstein-Maxwell-Gleichungen mit quasistatischen Übergängen zu schwarzen Löchern*. Diplomarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- [Israel, 1966] Israel, W. (1966). Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento B Serie*, 44:1–14.
- [Kleinwächter et al., 2011] Kleinwächter, A., Labranche, H., and Meinel, R. (2011). On the black hole limit of rotating discs and rings. *Gen.Rel.Grav.*, 43:1469–1486.
- [Knopp, 1956] Knopp, K. (1956). *Infinite sequences and series*. New York: Dover Publications.
- [Kundt and Trümper, 1966] Kundt, W. and Trümper, M. (1966). Orthogonal decomposition of axi-symmetric stationary spacetimes. *Zeitschrift für Physik*, 192:419–422.
- [Labranche et al., 2007] Labranche, H., Petroff, D., and Ansorg, M. (2007). The parametric transition of strange matter rings to a black hole. *Gen.Rel.Grav.*, 39:129–143.
- [Lewis, 1932] Lewis, T. (1932). Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 136:176–192.

- [Lichtenstein, 1933] Lichtenstein, L. (1933). *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*. Springer, Berlin.
- [Lindblom, 1976] Lindblom, L. (1976). Stationary stars are axisymmetric. *Astrophysical Journal*, 208:873–880.
- [Lindblom, 1992] Lindblom, L. (1992). On the Symmetries of Equilibrium Stellar Models. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 340:353–364.
- [Lue and Weinberg, 2000] Lue, A. and Weinberg, E. J. (2000). Gravitational properties of monopole spacetimes near the black hole threshold. *Physical Review D*, 61(12):124003.
- [Madelung, 1964] Madelung, E. (1964). *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Springer, Berlin.
- [Majumdar, 1947] Majumdar, S. D. (1947). A Class of Exact Solutions of Einstein’s Field Equations. *Physical Review*, 72:390–398.
- [Meinel, 2004] Meinel, R. (2004). Quasistationary collapse to the extreme Kerr black hole. *Annalen der Physik*, 516:600–603.
- [Meinel, 2006] Meinel, R. (2006). On the black hole limit of rotating fluid bodies in equilibrium. *Classical and Quantum Gravity*, 23:1359–1363.
- [Meinel, 2012] Meinel, R. (2012). Constructive proof of the Kerr-Newman black hole uniqueness including the extreme case. *Classical and Quantum Gravity*, 29(3):035004.
- [Meinel et al., 2008] Meinel, R., Ansorg, M., Kleinwächter, A., Neugebauer, G., and Petroff, D. (2008). *Relativistic Figures of Equilibrium*. Cambridge University Press.
- [Meinel et al., 2015] Meinel, R., Breithaupt, M., and Liu, Y.-C. (2015). Black Holes and Quasiblack Holes in Einstein-Maxwell Theory. In Rosquist, K., editor, *Thirteenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories*, pages 1186–1188.
- [Meinel and Hütten, 2011] Meinel, R. and Hütten, M. (2011). On the black hole limit of electrically counterpoised dust configurations. *Classical and Quantum Gravity*, 28(22):225010.
- [Meinel and Kleinwächter, 1995] Meinel, R. and Kleinwächter, A. (1995). Dragging Effects near a Rigidly Rotating Disk of Dust. In Barbour, J. B. and Pfister, H., editors, *Mach’s Principle: From Newton’s Bucket to Quantum Gravity*, page 339.
- [Neugebauer and Kramer, 1969] Neugebauer, G. and Kramer, D. (1969). Eine Methode zur Konstruktion stationärer EINSTEIN-MAXWELL-Felder. *Annalen der Physik*, 479:62–71.
- [Neugebauer and Kramer, 1983] Neugebauer, G. and Kramer, D. (1983). Einstein-Maxwell solitons. *Journal of Physics A Mathematical General*, 16:1927–1936.

- [Neugebauer and Meinel, 1993] Neugebauer, G. and Meinel, R. (1993). The Einsteinian gravitational field of the rigidly rotating disk of dust. *Astrophysical Journal*, 414:L97–L99.
- [Neugebauer and Meinel, 1995] Neugebauer, G. and Meinel, R. (1995). General Relativistic Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust: Solution in Terms of Ultraelliptic Functions. *Physical Review Letters*, 75:3046–3047.
- [Newman et al., 1965] Newman, E. T., Couch, E., Chinnapared, K., Exton, A., Prakash, A., and Torrence, R. (1965). Metric of a Rotating, Charged Mass. *Journal of Mathematical Physics*, 6:918–919.
- [Oppenheimer and Snyder, 1939] Oppenheimer, J. R. and Snyder, H. (1939). On Continued Gravitational Contraction. *Physical Review*, 56:455–459.
- [Palenta, 2012] Palenta, S. (2012). *Postnewtonsche Entwicklung einer starr rotierenden Staubscheibe mit konstanter spezifischer Ladung*. Masterarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- [Palenta and Meinel, 2013] Palenta, S. and Meinel, R. (2013). Post-Newtonian expansion of a rigidly rotating disc of dust with a constant specific charge. *Classical and Quantum Gravity*, 30(8):085010.
- [Papapetrou, 1947] Papapetrou, A. (1947). A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge-distribution. *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, 51:191–204.
- [Papapetrou, 1966] Papapetrou, A. (1966). Champs gravitationnels stationnaires à symétrie axiale. *Ann. Inst. H. Poincaré (A) Phys. théor.*, 4:83–105.
- [Penrose, 1969] Penrose, R. (1969). Gravitational Collapse: the Role of General Relativity. *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 1:252.
- [Poincaré, 1893] Poincaré, H. (1893). *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. Tome II*. Gauthier-Villars et fils, Paris.
- [Raabe, 1832] Raabe, J. (1832). Untersuchungen über Convergenz und Divergenz der Reihen. *Zeitschrift für Physik und Mathematik von Baumgarten u. Ettinghausen*, 10:63.
- [Simon, 1984] Simon, W. (1984). The multipole expansion of stationary Einstein-Maxwell fields. *Journal of Mathematical Physics*, 25:1035–1038.
- [Smarr, 1973] Smarr, L. (1973). Mass Formula for Kerr Black Holes. *Physical Review Letters*, 30:71–73.
- [Sotiriou and Apostolatos, 2004] Sotiriou, T. P. and Apostolatos, T. A. (2004). Corrections and comments on the multipole moments of axisymmetric electrovacuum spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 21:5727–5733.

- [Stephani, 1991] Stephani, H. (1991). *Allgemeine Relativitätstheorie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [Stephani et al., 2003] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., and Herlt, E. (2003). *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge University Press.
- [Wald, 1984] Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. University Of Chicago Press.
- [Weyl, 1917] Weyl, H. (1917). Zur Gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 359:117–145.

Eigene Publikationen und Vorträge

Publikationen

- Breithaupt, M., Liu, Y.-C., Meinel, R., and Palenta, S. (2015). On the black hole limit of rotating discs of charged dust. *Classical and Quantum Gravity*, 32(13):135022
- Meinel, R., Breithaupt, M., and Liu, Y.-C. (2015). Black Holes and Quasiblack Holes in Einstein-Maxwell Theory. In Rosquist, K., editor, *Thirteenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories*, pages 1186-1188

Vortrag

- The boundary value problem for a rigidly rotating disc of charged dust, *Jahrestreffen 2012 des Graduiertenkollegs 1523/1*, Oppurg, 24.03.2012

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die geltende Promotionsordnung der Physikalisch-Astronomischen Fakultät ist mir bekannt.

Ich versichere ehrenwörtlich, dass ich nach besten Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Jena, 13. Oktober 2015

Martin Breithaupt

Danksagung

Vor allem möchte ich mich bei meinem Doktorvater Prof. REINHARD MEINEL bedanken. Er hat ein sehr interessantes Thema bereitgestellt und mich bei meiner wissenschaftlichen Arbeit hervorragend betreut. Dazu gab er mir einerseits klare Vorgaben und Hilfestellungen. Andererseits hat er mir immer Spielräume gelassen, um meinen eigenen Ideen nachgehen zu können. Bei auftretenden Problemen und Schwierigkeiten war er jederzeit ansprechbar, offen zur Diskussion und gab mir wichtige Impulse.

Weiterhin möchte ich mich bei der Arbeitsgruppe für die schöne, kollegiale und unterstützende Atmosphäre bedanken. Dieser Dank gilt insbesondere YU-CHUN LIU und STEFAN PALENTA. Gemeinsam haben wir uns mit dem Thema der rotierenden, geladenen Staubscheiben auseinandergesetzt und viele fruchtbare Gespräche und Diskussionen geführt, die zur Vertiefung und Ergebnissen geführt haben.

STEFAN PALENTA, meiner Frau NICOLE BREITHAUPT und BODO DITTMAR danke ich für das Korrekturlesen der Arbeit. Für die Unterstützung beim Übersetzen des Zitats von POINCARÉ, möchte ich mich bei meiner Schwester HANNAH BREITHAUPT bedanken.

Meine Dank gilt Prof. KLAUS LÄMMERZahl, Dr. habil. DAVID PETROFF und Prof. THOMAS WOLF für die Bereitschaft zur Begutachtung dieser Arbeit.

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name: Martin Breithaupt
Geburtsdatum: 02. Juli 1983

Ausbildungsdaten

1994 – 2003 Geschwister-Scholl-Gymnasium Sangerhausen
28.06.2003 Abitur (2.3)
2004 – 2011 Physikstudium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
12.09.2006 Diplom-Vorprüfung (gut)
02.05.2011 Physik-Diplom (Sehr gut)
seit 2011 Promotion an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Jena, 13. Oktober 2015

Martin Breithaupt