

Thermisches Rauschen in interferometrischen  
Gravitationswellendetektoren

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomischen-Fakultät  
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Phys. Daniel Heinert  
geboren am 04.05.1983 in Jena

**Gutachter**

1. Prof. Dr. rer. nat. habil. Paul Seidel (FSU Jena)
2. Prof. Dr. rer. nat. habil. Gerhard Schäfer (FSU Jena)
3. Prof. Stephan Schiller, PhD (HHU Düsseldorf)

**Tag der Disputation: 30.05.2012**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2. Gravitationswellen</b>	<b>6</b>
2.1. Theoretische Grundlagen . . . . .	6
2.2. Quellen von Gravitationswellen . . . . .	7
2.3. Gravitationswellendetektion . . . . .	10
2.3.1. Indirekter Nachweis . . . . .	10
2.3.2. Direkter Nachweis . . . . .	11
<b>3. IGWDs – Interferometrische Gravitationswellendetektoren</b>	<b>14</b>
3.1. Das klassische Michelsoninterferometer . . . . .	14
3.2. Rauschmechanismen in IGWDs . . . . .	16
3.2.1. Quantenrauschen . . . . .	16
3.2.2. Seismisches Rauschen . . . . .	17
3.2.3. Thermisches Rauschen . . . . .	19
3.3. Erweiterte Interferometertechniken . . . . .	19
3.3.1. Optische Resonatoren in den Interferometerarmen . . . . .	19
3.3.2. Power Recycling . . . . .	22
3.3.3. Signal Recycling . . . . .	23
3.3.4. Squeezing . . . . .	23
3.4. Aktuelle und zukünftige Detektoren . . . . .	24
<b>4. Thermisches Rauschen</b>	<b>27</b>
4.1. Gewichtetes Auslesen . . . . .	27
4.2. Brownsches Rauschen . . . . .	29
4.2.1. Harmonischer Oszillator . . . . .	29
4.2.2. Modensummation . . . . .	32
4.2.3. Methode nach Levin . . . . .	33
4.3. Rauschen durch Temperaturfluktuationen . . . . .	35
4.3.1. Thermoelastisches Rauschen . . . . .	36

4.3.2.	Thermorefraktives Rauschen . . . . .	39
4.3.3.	Thermooptisches Rauschen . . . . .	41
<b>5.</b>	<b>Rauschanalyse geplanter IGWDs</b>	<b>42</b>
5.1.	Advanced LIGO (aLIGO) . . . . .	42
5.1.1.	Substratmaterial . . . . .	42
5.1.2.	Schichtmaterial und -geometrie . . . . .	42
5.1.3.	Geometrische und optische Parameter . . . . .	45
5.1.4.	Rauschanalyse . . . . .	45
5.2.	Einstein Telescope . . . . .	49
5.3.	Thermorefraktives Rauschen endlicher Substrate . . . . .	50
5.3.1.	Levins Theorem und virtuelle Entropie . . . . .	51
5.3.2.	Lösung der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	52
5.3.3.	Vergleich mit früheren Theorien und FE-Rechnungen . . . . .	53
5.3.4.	Anwendung auf die ET-Geometrie . . . . .	55
5.4.	Minimierung Brownschen Schichtrauschens . . . . .	57
5.4.1.	Khalilikavität . . . . .	57
5.4.2.	Khalilietalon . . . . .	60
5.4.3.	Weitere Methoden . . . . .	65
<b>6.</b>	<b>Mechanische Verluste</b>	<b>68</b>
6.1.	Der anelastische Festkörper . . . . .	68
6.2.	Thermisch aktivierte Verlustprozesse . . . . .	70
6.2.1.	Doppelmuldenpotential . . . . .	70
6.2.2.	Der elastische Dipol . . . . .	72
6.3.	Thermoelastische Dämpfung . . . . .	73
6.4.	Phonon-Phonon-Wechselwirkung . . . . .	75
6.5.	Meßverfahren . . . . .	77
6.6.	Mechanischer Verlust in Kristallquarz . . . . .	78
6.6.1.	Zylinderförmige Substrate . . . . .	78
6.6.2.	Schwingende Plättchen . . . . .	81
6.7.	Mechanischer Verlust in kristallinem Silizium . . . . .	82
6.7.1.	Zylindrische Proben . . . . .	82
6.7.2.	Schwingende Plättchen . . . . .	86
6.7.3.	Einfluß auf die Gravitationswellendetektion . . . . .	87

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	3
<b>7. Parametrische Instabilitäten</b>	<b>89</b>
7.1. Grundlagen	89
7.1.1. Optische Resonatormoden	93
7.1.2. Elastische Substratmoden	95
7.2. Parametrische Instabilitäten in aLIGO	97
<b>8. Zusammenfassung</b>	<b>99</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>101</b>
<b>Anhang</b>	<b>113</b>
<b>A. Fabry-Perot-Resonator</b>	<b>114</b>
A.1. Der einfache Spiegel	114
A.2. Fabry-Perot-Resonator	116
<b>B. Ermittlung der Materialparameter</b>	<b>119</b>
B.1. Mechanische Eigenschaften	119
B.2. Thermodynamische Eigenschaften	122
B.3. Materialien	126
<b>C. Parametrische Instabilität</b>	<b>130</b>
C.1. Parametrische Resonanz	130
C.2. Optische Resonatormoden	132
C.3. Kontrolle parametrischer Instabilitäten	134
<b>D. Thermoelastische Dämpfung</b>	<b>137</b>
D.1. Thermodynamische Grundlagen	137
D.2. Formulierung der Wärmeleitungsgleichung	141
D.3. Berechnung der dissipierten Energie	143
<b>E. Einfaches Modell der Akhieserdämpfung</b>	<b>147</b>
E.1. Grundlagen	147
E.2. Analytische Modellierung der Akhieserdämpfung	150
E.3. Mechanische Verluste und Schallabsorption	155
<b>Literaturverzeichnis Anhang</b>	<b>158</b>

# 1. Einleitung

Der direkte Nachweis von Gravitationswellen beschäftigt Forscher seit über 50 Jahren. Er stellt nicht nur eine bedeutende Möglichkeit der Überprüfung der Allgemeinen Relativitätstheorie dar [1], sondern verspricht auch den Beginn einer neuen Art der Astronomie. Eine Astronomie mit Gravitationswellen als Informationsträger erlaubt Beobachtungen, die der klassischen Astronomie mit elektromagnetischen Wellen nicht zugänglich sind (siehe z. B. [2]). Die geringe Absorption von Gravitationswellen sowie die Möglichkeit, weiter in die Vergangenheit des Alls blicken zu können, bilden zwei Vorteile einer möglichen Gravitationswellenastronomie.

Die für den astronomischen Informationsgewinn dienliche Eigenschaft geringer Wechselwirkung verhindert andererseits bis heute eine direkte Detektion. Zunächst benutzte man Resonanzmassendetektoren zum Nachweis von Gravitationswellen. In den 1990ern erfolgte verstärkt der Übergang zu interferometrischen Detektoren. Mittlerweile überzeugen interferometrische Detektoren nicht nur durch ihre Breitbandigkeit (50 Hz bis 2 kHz), sondern zeigen auch im gesamten Detektionsband eine höhere Empfindlichkeit als Resonanzmassendetektoren [3]. Obwohl die benutzten Detektoren immer empfindlicher werden, konnte bis heute kein direkter Nachweis einer Gravitationswelle erbracht werden.

Eine weitere Erhöhung der Empfindlichkeit bedingt das Verständnis und die Verringerung der in interferometrischen Detektoren auftretenden Rauschprozesse. Ein wesentlicher Rauschbeitrag wird hierbei durch thermische Fluktuationen gebildet und begrenzt die Empfindlichkeit heutiger und zukünftiger interferometrischer Detektoren im empfindlichsten Frequenzbereich um 100 Hz [4]. So erfahren die optischen Komponenten des Detektors ein Positionsrauschen der reflektierenden Oberfläche und verursachen damit ein Phasenrauschen in den Armen und ein Intensitätsrauschen im Interferometerausgang. Insbesondere begrenzen die dielektrischen Funktionsschichten die Empfindlichkeit. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich deshalb mit der Minimierung dieses Rauschprozesses. Dabei wird zunächst die Idee Khalilis [5] aufgegriffen, den Endspiegel durch einen Fabry-Perot-Resonator in Antiresonanz zu ersetzen. Speziell soll dieses Prinzip auf ein technisch einfacheres Khalilietalon übertragen und der entsprechende Rauschpegel berechnet werden.

Ein Absenken der Substrattemperatur kann das thermische Rauschen ebenfalls verringern. Dadurch können sich jedoch auch die mechanischen Verluste des Substratmaterials ändern. Über das Fluktuations-Dissipations-Theorem [6, 7] bestimmen diese Verluste das Ortsrauschen der Substrate. Die in heutigen Detektoren verwendeten Substrate aus Fused Silica zeigen beim Abkühlen einen starken Anstieg mechanischer Verluste und können daher in kryogenen Detektoren nicht zum Einsatz kommen. Mit Silizium steht ein vielversprechendes kryogenes Substratmaterial zur Wahl [4]. Als kristallines Material zeigt es in den thermischen Parametern ein grundlegend anderes Verhalten als Fused Silica. Durch die erhöhte thermische Weglänge bei tiefen Temperaturen ist der Einfluß der Substratoberflächen auf das Rauschen nicht mehr vernachlässigbar. Ein Teil der vorliegenden Arbeit widmet sich deshalb der Charakterisierung dieses Effekts am Beispiel thermorefraktiven Rauschens.

Einer genauen Abschätzung thermischen Rauschens geht außerdem die Kenntnis der Temperatur- und Frequenzabhängigkeit der mechanischen Verluste der verwendeten Substratmaterialien voraus. Der mechanische Verlust kann über resonante Verfahren für Frequenzen oberhalb einiger 10 kHz temperaturabhängig ermittelt werden [8]. Über die Auswertung existierender Messungen soll die vorliegende Arbeit die beobachteten Verlustprozesse identifizieren. Weiterhin soll eine Modellierung der Verlustprozesse in Silizium erfolgen, um eine zuverlässige Abschätzung des Rauschens im Detektionsband ( $\approx 100$  Hz) zukünftiger Detektoren zu ermöglichen. Als Basis dafür soll Kristallquarz als gut untersuchtes Modellmaterial dienen.

In interferometrischen Detektoren kann die Minimierung mechanischer Verluste auch nachteilig sein – so im Fall der parametrischen Instabilität [9]. Hierbei verursacht eine thermisch angeregte Schwingung der Substrate an ihrer Resonanz die Modulation des umlaufenden Laserlichts in den Armresonatoren. Die Interferenz mit dem ungestörten Licht führt zu einer Schwebung, die in Abhängigkeit der Resonatorgeometrie die Spiegelschwingung weiter anregen kann. Der Detektor ist unter dem Auftreten parametrischer Instabilität nicht mehr stabil und eine Detektion von Gravitationswellen unmöglich. Eine Fehlorientierung zwischen Laserstrahl und Substrat kann die Anzahl instabiler Moden erhöhen. Sie soll deshalb in vorliegender Arbeit untersucht werden.

Mit den genannten Schwerpunkten dient vorliegende Arbeit hauptsächlich der Erstellung von Konzepten für eine Empfindlichkeitserhöhung in Gravitationswellendetektoren und der Abschätzung des zu erwartenden Empfindlichkeitsgewinns. Doch auch für weitere hochpräzise Messungen wie die Laserstabilisierung [10], die durch das Positionsrauschen der verwendeten Substratmaterialien begrenzt wird [11, 12], kann vorliegende Arbeit nützliche Impulse liefern.

## 2. Gravitationswellen

### 2.1. Theoretische Grundlagen

Nach der Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) im Jahre 1916 [13] wurde von Einstein selbst die Möglichkeit periodischer Änderungen der Raumzeit als Spezialfall der ART diskutiert. Dieser Mechanismus ist seitdem unter der Bezeichnung Gravitationswelle bekannt. In der mathematischen Behandlung spiegelt sich eine Gravitationswelle in der periodischen Variation des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}$  wider. In einer Entwicklung niedrigster Ordnung um die Minkowskimetrik  $\eta_{\mu\nu}$ , d. h. den ungekrümmten Raum, geht man von kleinen Änderungen  $h_{\mu\nu}$  aus

$$g_{\mu\nu}(t) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(t) . \quad (2.1)$$

Die Indizes sollen im folgenden so gewählt werden, daß die Zeitkoordinate  $ct$  mit dem Index 0 und die räumlichen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  mit den Indizes 1, 2 und 3 identifiziert werden. Dabei stellt  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit dar. Unter dieser Konvention besitzt die Minkowskimetrik folgende Gestalt

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.2)$$

Mit diesem Ansatz kann unter Zuhilfenahme der Einsteinschen Feldgleichung eine Wellengleichung für den Störterm  $h_{\mu\nu}$  abgeleitet werden. Analog zur Elektrodynamik ergibt sich auch für die Herleitung der Feldgleichung in der ART eine gewisse Eichfreiheit. Die gebräuchlichste Eichung beschränkt sich auf transversale Wellen und spurlose Störungen  $h_{\mu\nu}$  und wird infolgedessen TT-Eichung<sup>1</sup> genannt. Als anschauliches Beispiel wird an dieser Stelle von einer ebenen Gravitationswelle ausgegangen, die sich entlang der  $z$ -Richtung mit dem Wellenvektor  $k_z$  ausbreitet. Eine Lösung

---

<sup>1</sup>Die beiden T stehen für transverse und traceless.

der Einsteinschen Feldgleichungen in der TT-Eichung ergibt sich dann für

$$h_{\mu\nu}(t) = \Re \left[ \hat{h}_{\mu\nu} e^{i(k_z z - \omega t)} \right] \quad (2.3)$$

mit der Amplitude

$$\hat{h}_{\mu\nu} = h_+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h_\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

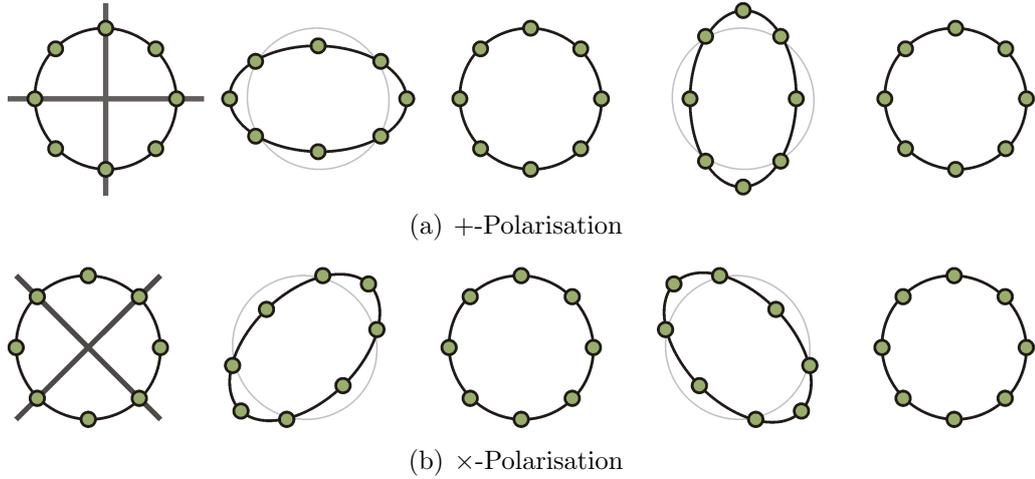
Dabei bezeichnet  $\Re$  den Realteil des Arguments. Der Tensor  $\hat{h}_{\mu\nu}$  zeigt nur Einträge für  $\mu \neq 3$  und  $\nu \neq 3$ , ist damit transversal zur  $z$ -Richtung und außerdem spurfrei; er erfüllt damit die TT-Eichung. Allgemein läßt sich zeigen, daß unter der TT-Eichung alle zeitlichen Komponenten verschwinden ( $\hat{h}_{0\mu} = 0$ ) und eine Berücksichtigung der räumlichen Komponenten genügt. Diese seien in der Größe  $h_{ij}$  zusammengefaßt.

In Gl. (2.4) zeigen sich die zwei möglichen Polarisierungen einer ebenen Gravitationswelle. Diese werden  $+$ -Polarisation und  $\times$ -Polarisation<sup>2</sup> genannt. Eine grafische Veranschaulichung beider Polarisierungen macht die Bezeichnung verständlich. Dazu schaut man sich die Wirkung auf kreisförmig angeordnete, frei fallende Testmassen an. Das Ergebnis ist in Abb. 2.1 dargestellt. Für eine detaillierte Behandlung der hier skizzenhaft dargestellten Ableitung sei auf [14] verwiesen.

## 2.2. Quellen von Gravitationswellen

Nachdem die Möglichkeit der Ausbreitung von Gravitationswellen im Rahmen der ART gezeigt ist, interessiert vor allem die Suche nach möglichen Quellen. In der hier vorgestellten linearen Näherung für kleine Störungen  $h_{ij}$  kann eine Lösung der zugrundeliegenden Differentialgleichung mit Hilfe einer Greenfunktion erfolgen. In Anlehnung an die Elektrodynamik ist auch für Gravitationswellen eine retardierte Zeitkoordinate zu berücksichtigen. Beschränkt man sich weiterhin auf die Kenntnis von  $h_{ij}$  in großer räumlicher Entfernung von der Quelle und geht von nichtrelativistischen Quellen aus, kann man eine Multipolentwicklung für die abgestrahlten Gravitationswellen durchführen. Nichtrelativistische Quellen zeichnen sich hierbei durch Geschwindigkeiten aus, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Dadurch kann die Energiedichte, d. h. die Komponente  $T_{00}$  des Energie-Impuls-Tensors, mit

<sup>2</sup>gesprochen „Plus-“ und „Kreuzpolarisation“



**Abb. 2.1.:** Polarisationszustände einer Gravitationswelle. In der Abbildung ist die zeitliche Wirkung einer Gravitationswelle auf eine kreisförmige Anordnung frei fallender Testmassen dargestellt. Dabei zeigt Abb. a) den Einfluß einer Welle mit +-Polarisation und Abb. b) den der x-Polarisation. Der Phasenunterschied zwischen zwei benachbarten Zuständen beträgt  $\pi/2$ .

$T_{00} = \rho c^2$  über die Ruhemassendichte  $\rho$  ausgedrückt werden. Im Ergebnis dieser Rechnung, die z. B. in [15] ausführlich gezeigt ist, ergibt sich mit der Gravitationskonstanten  $G$  für die Amplitude der abgestrahlten Gravitationswelle

$$h_{ij} = \frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \ddot{Q}_{ij} . \quad (2.5)$$

Die Indizes  $i$  und  $j$  beschreiben hier allein die räumlichen Komponenten. Die Größe  $Q_{ij}$  bezeichnet das Massenquadrupolmoment der Quelle und ist definiert als

$$Q_{ij}(t) = \int \rho(t, \vec{x}) \left( x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij} \right) d^3x . \quad (2.6)$$

In Gl. (2.5) sind sowohl die Gravitationswellenamplitude  $h_{ij}$  als auch das Massenquadrupolmoment  $Q_{ij}$  in der spurfreien und transversalen Eichung zu formulieren. Für den gewählten Spezialfall einer sich in  $z$ -Richtung ausbreitenden Welle findet man folgende Amplituden für die zwei Polarisierungen

$$h_+ = \frac{G}{c^4} \frac{1}{r} \left( \ddot{Q}_{11} - \ddot{Q}_{22} \right) , \quad (2.7)$$

$$h_\times = \frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \ddot{Q}_{12} . \quad (2.8)$$

Analog zur Ladungserhaltung in der Elektrodynamik verhindert das Gesetz der Massenerhaltung eine Änderung des Massenmonopolmomentes. Außerdem wird

Dipolstrahlung, die in der Elektrodynamik erlaubt ist, für Gravitationswellen durch Impuls- und Drehimpulserhaltung ausgeschlossen. Damit werden die von nicht-relativistischen Systemen abgestrahlten Gravitationswellen in führender Ordnung tatsächlich durch Quadrupolstrahlung beschrieben.

Typische Systeme, die ein zeitlich veränderliches Massenquadrupolmoment besitzen, sind Doppelsternsysteme. Für eine grobe Abschätzung der zu erwartenden Amplitude dient ein System mit zwei Sternen gleicher Masse  $M$  in der Entfernung  $r$  vom Beobachter. Die Bahnen dieser Sterne seien als kreisförmig in der  $x$ - $y$ -Ebene mit dem Radius  $R$  angenommen und werden mit der Kreisfrequenz  $\Omega$  durchlaufen. Nach [15, Gl. (3.332)] wird dann eine Gravitationswelle mit der Kreisfrequenz  $2\Omega$  und der Amplitude

$$h_+ = h_\times = \frac{8G}{c^4} \frac{1}{r} M R^2 \Omega^2 = \hat{h} \quad (2.9)$$

abgestrahlt. Durch die Äquivalenz von Radialkraft und Newtonscher Gravitation beider Sterne ergibt sich

$$\Omega^2 = \frac{MG}{4R^3} \Rightarrow \hat{h} = \frac{2G^2}{c^4} \frac{1}{r} \frac{M^2}{R} . \quad (2.10)$$

Für ein Doppelsternsystem zweier Neutronensterne ( $M = 1,4M_\odot \approx 2,8 \cdot 10^{30}$  kg) im Virgohaufen als dem nächsten Galaxienhaufen ( $r \approx 15$  Mpc =  $4,6 \cdot 10^{23}$  m) kurz vor der Kollision ( $R = 20$  km) folgt damit

$$\hat{h}_{\text{DS}} \approx 1 \cdot 10^{-21} . \quad (2.11)$$

Dieser trotz obiger optimistischer Abschätzung geringe Effekt durch Gravitationswellen verdeutlicht die Schwierigkeit ihrer Detektion. Analog zu elektromagnetischen Wellen könnte man auf die Idee kommen, Gravitationswellen im Labor zu erzeugen. Für zwei Massen von jeweils einer Tonne, die mit einer Frequenz von  $\Omega/(2\pi) = 1$  kHz auf einer Bahn mit  $R = 1$  m umlaufen, ergibt sich jedoch ein um Größenordnungen geringerer Wert von [16]

$$\hat{h}_{\text{Lab}} \approx 9 \cdot 10^{-39} . \quad (2.12)$$

Damit scheidet die Möglichkeit aus, die Eigenschaften von Gravitationswellen mit irdischen Quellen zu untersuchen.

Die geringe Wechselwirkung von Gravitationswellen mit Materie stellt andererseits einen entscheidenden Vorteil dar. Gelingt die direkte Detektion von Gravita-

tionswellen, eröffnet sich das Feld der Gravitationswellenastronomie. Im Gegensatz zur konventionellen Astronomie, die allein elektromagnetische Wellen als Informationsträger nutzt, könnten so grundlegend neue Informationen gewonnen werden. Die geringe Wechselwirkung garantiert dabei eine geringe Absorption des Signals auf dem Weg von der Quelle zum Detektor. Einer Gravitationswellenastronomie wären kosmische Objekte mit zeitlich variierendem Massenquadrupolmoment zugänglich. Dazu gehören u. a. sich umkreisende Doppelsternsysteme, asymmetrische Supernovaexplosionen, schnell rotierende nichtsphärische Neutronensterne und der Urknall selbst [14]. Solche Beobachtungen würden beispielsweise wichtige Impulse für die Theoriebildung der Kosmologie und der Physik der Neutronensterne geben.

## 2.3. Gravitationswellendetektion

Aufgrund der geringen Wechselwirkung von Gravitationswellen mit Materie gestaltet sich die direkte Detektion von Gravitationswellen als sehr schwierig und bis heute ungelöst. Indirekt konnten Gravitationswellen hingegen schon an Doppelsternsystemen nachgewiesen werden. In diesem Kapitel soll ein Überblick über mögliche Prinzipien der indirekten und direkten Detektion gegeben werden.

### 2.3.1. Indirekter Nachweis

Das Grundprinzip ihres indirekten Nachweises beruht auf dem Energietransport durch Gravitationswellen. Kreisen zwei Sterne eines Doppelsternsystems umeinander, so strahlen sie Gravitationswellen ab und verlieren folglich Energie. Dies führt zu einer Verringerung des Abstandes beider Sterne und damit zu einer Erhöhung ihrer Umlauffrequenz. Der indirekte Nachweis bedingt daher die genaue Kenntnis der Periodendauer des Systems. Das von Hulse und Taylor 1975 entdeckte Doppelsternsystem PSR 1913+16 [17] ist in dieser Hinsicht besonders geeignet. Dieses System wird von einem Pulsar und einem Neutronenstern gebildet. Über die Dopplerverschiebung der vom Pulsar abgegebenen Pulse konnte die Umlaufdauer des Systems bestimmt werden. Über den Zeitraum von 1974 bis 1981 aufgenommene Daten wurden 1981 von Taylor und Weisberg ausgewertet und publiziert [18]. Vergleicht man die theoretische Änderung der Umlauffrequenz aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen mit den Beobachtungsdaten des Systems PSR 1913+16, so ergibt sich eine Abweichung von unter 5%. Auch in jüngerer Zeit durchgeführte Folgemessungen des Systems belegen eindeutig den vorhergesagten Energieverlust durch die Abstrahlung von Gravitationswellen [19]. Im Jahr 1993 erhielten Hulse und Taylor

für ihre Entdeckung den Nobelpreis.

In der beschriebenen indirekten Methode ist über die Messung der Periodendauer des Systems die komplette, durch Gravitationswellen abgestrahlte Energie zugänglich. Dahingegen muß die Gravitationswelle für einen direkten Nachweis zunächst die Strecke zur Erde zurücklegen, divergiert und wird infolgedessen abgeschwächt (s. Gl. (2.5)). Dies stellt den wesentlichen Unterschied im Grundprinzip und im Anspruch an eine technische Realisierung beider Methoden dar. Deshalb ist ein direkter Nachweis von Gravitationswellen trotz intensiver Bemühungen seit den 1960ern bis in die heutige Zeit noch nicht gelungen.

### 2.3.2. Direkter Nachweis

#### Resonanzmassendetektoren

Resonanzmassendetektoren stellen die älteste Methode zur direkten Detektion von Gravitationswellen dar. Sie nutzen das inverse Prinzip der Erzeugung von Gravitationswellen. So werden Gravitationswellen nicht nur durch bewegte Massen abgestrahlt, sondern geben beim Durchtritt durch eine Masse auch einen Teil ihrer Energie an diese ab. Dadurch wird eine Schwingung der Resonanzmasse angeregt, deren Amplitude nahe der Resonanzfrequenz überhöht ist und dort detektiert werden kann.

Weber publizierte 1960 diese Vorstellung eines Gravitationswellendetektors [20] und nahm daraufhin mehrere Detektoren in Betrieb. Die benutzten Resonanzmassen wurden durch zylinderförmige Aluminiumkörper mit einer Länge von 1,53 m und einem Durchmesser von bis zu 96 cm realisiert. Ihre Bewegung nahe der Resonanzfrequenz von 1660 Hz wurde mit Dehnmessstreifen auf dem Umfang ausgelesen. 1969 interpretierte Weber Ausschläge seiner Detektoren als direkte Detektion von Gravitationswellen [21]. Der schmale Detektionsbereich von Resonanzmassendetektoren, die fehlende Reproduzierbarkeit und die relativ geringe Empfindlichkeit seines Aufbaus verglichen mit späteren Detektoren widerlegen seine Interpretation des Gravitationswellennachweises.

Der Pionierarbeit Webers folgte eine kontinuierliche Weiterentwicklung der Resonanzmassendetektoren bis in die heutige Zeit. So fanden verlustarme Materialien Anwendung, um ein langes Abklingen und eine hohe Schwingungsamplitude der Resonanzbewegung zu gewährleisten. Weiterhin entwickelte man kryogene Detektoren, um thermische Anregungen der Resonanz zu minimieren. Zurzeit betriebene Detektoren dieser Art sind AURIGA und NAUTILUS [3]. Das Konzept dieser Detektion beruht auf der Nutzung möglichst großer Resonanzüberhöhungen der mechani-

schen Testmassenschwingungen. Dies bewirkt jedoch, daß die Resonanz eine spektral schmale Überhöhung zeigt. Somit wird die Breite des Detektionsbandes auf wenige 10 Hz beschränkt. Da aktuelle interferometrische Detektoren höhere Empfindlichkeiten besitzen und wesentlich breitbandiger sind, werden Resonanzmassendetektoren im Hinblick auf die Gravitationswellendetektion in Zukunft eine untergeordnete Rolle spielen. Die aktuelle Forschung stellt kugelförmige Resonanzmassen wie Mini-GRAIL [22] oder SCHENBERG [23] in den Vordergrund, da deren Empfindlichkeit von der Polarisation der Gravitationswelle unabhängig ist. Mit einem einzigen Detektor kann dann die Richtung und die Polarisation der Gravitationswelle bestimmt werden.

### **Interferometrische Detektoren**

Im Gegensatz zu Resonanzmassendetektoren zeigen interferometrische Gravitationswellendetektoren ein breitbandiges Empfindlichkeitsspektrum, typischerweise im Bereich von 50 Hz bis 2 kHz. Sie bestehen im einfachsten Fall aus einem Michelsoninterferometer. Unter dem Einfluß einer Gravitationswelle wird die Lichtlaufzeit eines Armes verkürzt, während die des anderen verlängert wird. Durch diesen Laufzeitunterschied kann am Interferometerausgang eine Intensitätsschwankung beobachtet werden. Eine ausführliche Beschreibung dieser Detektoren erfolgt in Kapitel 3.

Die Idee der Nutzung interferometrischer Gravitationswellendetektoren kam zu Beginn der 1960er auf. Jedoch dauerte es einige Jahre, bis 1971 die erste Charakterisierung eines solchen Apparates publiziert wurde [24]. Federführend für die Entwicklung hin zu den heutigen Interferometern mit großen Armlängen waren die Arbeiten von Weiss [25].

### **Laser Interferometer Space Antenna**

Der erdgebundene Nachweis von Gravitationswellen mit einer Frequenz von unter 5 Hz wird maßgeblich durch seismisches Rauschen verhindert. Die LISA-Mission [26] soll mit Hilfe dreier Satelliten das niederfrequente Gravitationswellenband (von  $10^{-4}$  Hz bis  $10^{-1}$  Hz) einer Beobachtung zugänglich machen. Die Satelliten sollen dabei ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von  $5 \cdot 10^6$  km bilden und im Abstand von  $50 \cdot 10^6$  km hinter der Erde auf dem Erdorbit umlaufen.

### **Pulsar timing**

Pulsare sind schnell rotierende Neutronensterne, deren magnetisches Moment nicht mit ihrer Rotationsachse übereinstimmt. Sie weisen Synchrotronstrahlung in Rich-

tung des magnetischen Momentes auf. Während einer Rotation wird die Synchrotronstrahlung kegelförmig um die Rotationsachse abgegeben. Liegt nun die Erde auf diesem Kegel, kann man periodische Pulse dieser Strahlung detektieren, deren zeitlicher Abstand durch die Periodendauer der Rotation des Neutronensterns gegeben ist. Die Rotationsbewegung vieler Pulsare ist sehr gleichmäßig, so daß sie als kosmische Uhren genutzt werden können. Eine Gravitationswelle kann nun die Raumzeit zwischen Pulsar und Erde verändern. Besitzt diese Welle eine entsprechend große Wellenlänge, d. h. eine kleine Frequenz (typischerweise  $10^{-8}$  Hz), so kann auf der Erde im Vergleich mit einem anderen Zeitnormal eine Abweichung der Pulsabstände des Pulsars detektiert werden [27].

# 3. IGWDs – Interferometrische Gravitationswellendetektoren

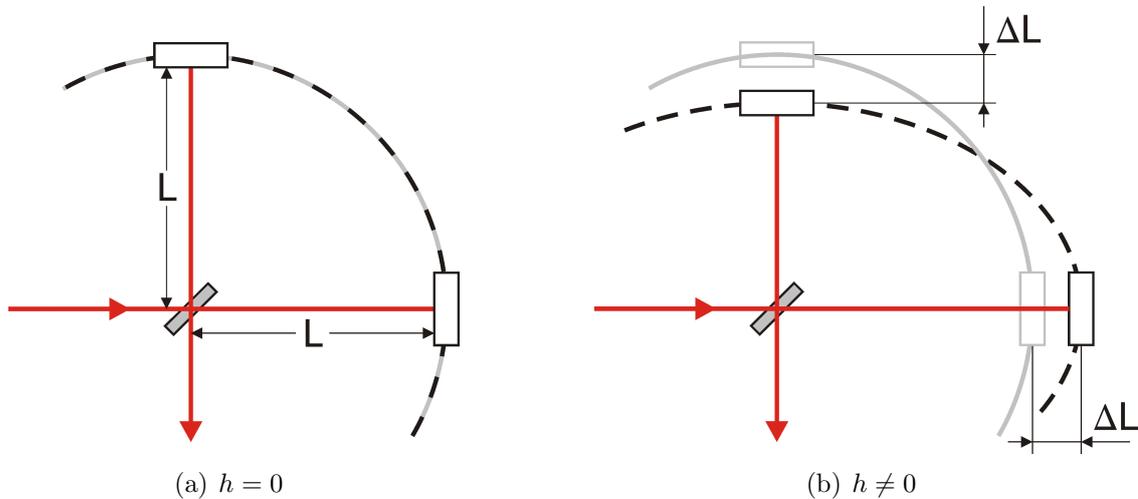
Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf die Analyse thermischen Rauschens interferometrischer Gravitationswellendetektoren. Aus diesem Grund soll im folgenden Kapitel auf deren Funktionsweise und grundlegende Techniken besonders eingegangen werden. Darauf basierend schließt sich eine Übersicht über die in Interferometern auftretenden relevanten Rauschprozesse an.

## 3.1. Das klassische Michelsoninterferometer

Interferometrische Gravitationswellendetektoren nutzen die Laufzeitänderung des Lichts, um die durch Gravitationswellen hervorgerufenen Änderungen der Raumzeit nachzuweisen. Die einfachste Geometrie hierfür stellt ein Michelsoninterferometer dar. Der Effekt einer auf ein Interferometer einfallenden Gravitationswelle ist in Abb. 3.1 gezeigt. Die Interferometerarme der Länge  $L$  werden dabei periodisch um den Betrag  $\Delta L = hL/2$  gestreckt und gestaucht, wobei  $h$  die Amplitude der einfallenden Gravitationswelle angibt. Die periodische Änderung der Lichtlaufzeit führt zu einer Phasenverschiebung zwischen den in den Armen umlaufenden Wellen und einer Intensitätsmodulation am Ausgang des Interferometers.

Das beschriebene Wirkprinzip gilt jedoch nur für frei fallende Testmassen. Fest auf einer Schiene fixierte Substrate erfahren durch eine Gravitationswelle eine Änderung ihres geometrischen Abstandes. Diese Verschiebung der Spiegel kompensiert genau den Effekt des durch die Gravitationswelle geänderten optischen Weges. Eine Detektion wäre so unmöglich. Hingegen erlaubt die Realisierung einer Pendelaufhängung eine effektive Entkopplung der Substrate von einer Bewegung des Aufhängungspunktes entlang der Strahlrichtung. In Richtung des ausgelesenen Weges können die Substrate dann als frei fallende Testmassen angenommen werden.

Setzt man eine Armlänge von  $L = 1$  km und für die Gravitationswellenamplitude  $h \approx 1 \cdot 10^{-21}$  als Ergebnis der optimistischen Abschätzung aus Gl. (2.11)



**Abb. 3.1.: Detektionsprinzip eines interferometrischen Gravitationswellendetektors.** Abb. a) zeigt die Ruhestellung der Testmassen in Abwesenheit einer Gravitationswelle. Der Effekt einer Gravitationswelle mit für die Detektion optimaler Polarisation ist in Abb. b) gezeigt.

an, so wird die meßtechnische Herausforderung der direkten Detektion von Gravitationswellen deutlich. Es gilt eine absolute Längenänderung von  $\Delta L = 10^{-18}$  m nachzuweisen. Dies entspricht etwa einem Tausendstel des Protonendurchmessers. Eine Möglichkeit, die Empfindlichkeit eines Detektors zu erhöhen, besteht in der Vergrößerung der Armlänge. Jedoch ist hier darauf zu achten, daß die Lichtlaufzeit nicht größer als die Periodendauer der einfallenden Gravitationswelle wird. Ist dies der Fall, mißt man eine gemittelte Variation der Raumzeit und das Detektorsignal sinkt erneut. Nach [16, Gl. (2.23)] ergibt sich für eine Gravitationswelle der Frequenz  $f$  und konstanter Amplitude  $h$  ein Phasenunterschied zwischen den Strahlen beider Arme von

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} c\tau_0 \frac{\sin(\pi f\tau_0)}{\pi f\tau_0} h, \quad (3.1)$$

wobei  $\tau_0 = 2L/c$  die Umlaufdauer im Interferometerarm ohne Gravitationswelle und  $\lambda$  die Wellenlänge des Laserlichts darstellt. Um die erforderliche Empfindlichkeit zur Detektion von Gravitationswellen erreichen zu können, muß neben der Maximierung des Meßeffectes vor allem eine genaue Kenntnis aller Stör- und Rauschgrößen in einem solchen System vorliegen und deren Optimierung erfolgen. Im folgenden soll eine kurze Übersicht der Rauschmechanismen erfolgen, die die Empfindlichkeit des Detektors begrenzen.

## 3.2. Rauschmechanismen in IGWDs

### 3.2.1. Quantenrauschen

Das Standardquantenlimit faßt die Rauschbeiträge durch die gequantelte Natur des Lichts zusammen. Die Verteilung der optischen Energie auf gleich große Pakete – die Photonen – verursacht beim Auftreffen eines Lichtstrahls auf einen Photodetektor das Photonenschrotrauschen. Dieses beschreibt Schwankungen in der Rate auftreffender Photonen und wird als Zählstatistik üblicherweise durch eine Poissonverteilung modelliert. Das Intensitätsrauschen auf dem Detektor wird dann auf eine äquivalente Änderung der Armlänge umgerechnet, um es mit Fluktuationen der Spiegeloberfläche vergleichen zu können. Diese Änderung wird umso kleiner, je empfindlicher der Interferometerausgang auf Armlängenänderungen reagiert. Der Arbeitspunkt halber Eingangsleistung am Ausgang maximiert diese Empfindlichkeit. Für ihn existiert eine genaue Berechnung der spektralen Rauschleistungsdichte des Schrotrauschens. Umgerechnet auf eine äquivalente Schwankung der Gravitationswellenamplitude  $h$  ergibt sich [16, Gl. (5.10)]

$$S_h^{(\text{SR})}(f) = \frac{1}{L^2} \frac{\hbar c}{2\pi} \frac{\lambda}{P_0}. \quad (3.2)$$

Hierbei steht  $P_0$  für die Leistung und  $\lambda$  für die Wellenlänge des eingestrahnten Lichts,  $c$  für die Lichtgeschwindigkeit und  $\hbar$  für das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum. Das Schrotrauschen ist von der Beobachtungsfrequenz  $f$  unabhängig und wird dementsprechend als weißes Rauschen klassifiziert. Es kann durch eine Erhöhung der Laserleistung beliebig verringert werden.

Neben dem Schrotrauschen wirkt sich der quantisierte Charakter des Lichts auch im Strahlungsdruckrauschen aus. Die Ursache hierfür liegt im Impulsübertrag durch die Reflexion von Photonen an den Endspiegeln. Durch Fluktuationen des Teilungsverhältnisses am Strahlteiler führt ein Impulsübertrag zu einer Änderung der Armlängen relativ zueinander. Vernachlässigt man die Bewegung des Strahlteilers, erhält man für das Strahlungsdruckrauschen bei der Frequenz  $f$  [16, Gl. (5.17)]

$$S_h^{(\text{SD})}(f) = \frac{1}{m^2 L^2 f^4} \frac{\hbar P_0}{2\pi^3 c \lambda}, \quad (3.3)$$

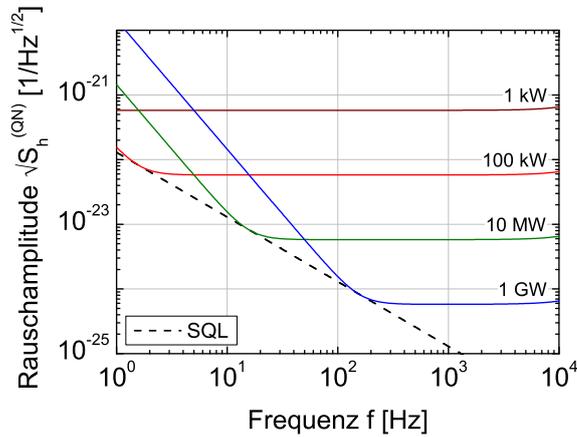
wobei  $m$  die Masse der Endspiegel charakterisiert. Dieses Rauschen ist frequenzabhängig und dominiert für tiefe Frequenzen. Außerdem wächst es mit steigender Laserleistung. Damit wirkt es der Optimierung des Schrotrauschens entgegen.

Minimiert man den Ausdruck  $S_h^{(\text{QN})} = S_h^{(\text{SD})} + S_h^{(\text{SR})}$  als unkorrelierte Summe

beider Rauschterme nach der Laserleistung  $P_0$ , ergibt sich

$$P_{\text{opt}} = \pi c m \lambda f^2 \Rightarrow S_h^{(\text{QN})}(P_{\text{opt}}) = S_h^{\text{SQL}}(f) = \frac{\hbar}{\pi^2} \frac{1}{m L^2 f^2} . \quad (3.4)$$

Der optimierte Rauschpegel bildet das Standardquantenlimit  $S_h^{\text{SQL}}$  als kleinstes Rauschen, das mit klassisch optischen Methoden zu erreichen ist. Optimiert man die Laserleistung für eine feste Frequenz, ist zu beachten, daß nur für diese Frequenz das Standardquantenlimit erreicht wird. Die Rauschkurve  $S_h^{(\text{QN})}(f)$  liegt für alle anderen Frequenzen oberhalb des Standardquantenlimits. Abb. 3.2 illustriert dieses Verhalten am Beispiel der geplanten Geometrie von Advanced LIGO (aLIGO) [28] als Detektor der zweiten Generation. aLIGO soll Endspiegel mit einer Masse von  $m = 40 \text{ kg}$  besitzen und mit einem Laser der Wellenlänge  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  betrieben werden. Bei einer Frequenz von  $f = 10 \text{ Hz}$  erhält man damit eine optimale Leistung von  $P_{\text{opt}} \approx 4 \text{ MW}$ . Mit derzeit erhältlichen Laserquellen liegt man weit unterhalb dieses Wertes. Damit dominiert das Schrotrauschen die Empfindlichkeit eines einfachen Michelsoninterferometers weit oberhalb des Standardquantenlimits. Trotz der Verwendung von Armresonatoren sowie von Power und Signal Recycling (s. Abschnitt 3.3) werden aktuelle Detektoren in ihrer Empfindlichkeit durch das Quantenrauschen für hohe Signalfrequenzen begrenzt.



**Abb. 3.2: Quantenrauschen und Standardquantenlimit eines Interferometers für verschiedene Eingangsleistungen.** Für die gezeigte Modellierung wurden die Parameter  $m = 40 \text{ kg}$ ,  $L = 4 \text{ km}$  und  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  in Gl. (3.2), Gl. (3.3) und Gl. (3.4) eingesetzt. Diese Werte entsprechen den Vorgaben für aLIGO als Detektor der zweiten Generation.

### 3.2.2. Seismisches Rauschen

#### Einkopplung über die Aufhängung

Seismisches Rauschen koppelt einerseits über die Aufhängung in das Interferometer ein und führt so zu einer Bewegung der optischen Elemente. Besonders im Kern des Interferometers (Strahlteiler und Endspiegel) muß eine solche Bewegung minimiert

werden, da sie die optischen Armlängen verändert und somit den Effekt einer Gravitationswelle überdecken kann. Ursachen seismischen Rauschens finden sich vor allem in natürlichen Bewegungen der Erdkruste und den künstlichen Erschütterungen (Züge, Straßenverkehr), die als Zivilisationsrauschen bezeichnet werden. Beispielsweise konnte im GEO600-Detektor [29] nahe Hannover das Signal der Nordseebrandung nachgewiesen werden.

Um der Einkopplung seismischen Rauschens entgegenzuwirken, verwendet man mehrstufige Pendelaufhängungen. Oberhalb ihrer Resonanzfrequenz findet dann eine effektive Dämpfung der seismischen Schwingungen statt. Mit der Verwendung einer siebenstufigen Aufhängung in VIRGO konnte eine Ausweitung des Detektionsbandes hin zu minimalen Frequenzen von bis zu 2 Hz demonstriert werden [30]. Dabei besaßen die einzelnen Pendel Resonanzfrequenzen von 0,5 Hz. Dennoch wird das Detektionsband erdgebundener Gravitationswellendetektoren nach unten durch das seismische Rauschen begrenzt. Mit dem Schritt ins Weltall entfällt diese Begrenzung, so daß für satellitengestützte Missionen wie LISA das Detektionsband auf tiefere Frequenzen ausgeweitet werden kann.

### **Gravity Gradient Noise**

Neben der direkten Einkopplung seismischer Bewegungen in das Interferometer können diese auch über Gravitationskräfte eingebracht werden. Sorgt z. B. eine seismische Welle für eine örtliche Komprimierung des Gesteins in der Nähe des Detektors, wird das Gravitationspotential am Detektorort geändert. Über Gezeitenkräfte wird eine Längenänderung der Interferometerarme induziert. Alle äußeren Einflüsse, die das Gravitationspotential am Detektor ändern, erzeugen sog. Gravity Gradient Noise, so z. B. auch Luftdruckschwankungen oder bewegliche Objekte wie Flugzeuge [31]. Typischerweise beeinflußt dieses Rauschen die Empfindlichkeit zukünftiger Detektoren für Frequenzen unterhalb von 20 Hz.

Eine Abschirmung der Gravitation und damit des Gravity Gradient Noise ist nicht möglich. Aufgrund der Abschwächung von seismischen Oberflächenwellen erlaubt die unterirdische Realisierung von Detektoren eine deutlich empfindlichere Messung. Zusätzlich existieren Konzepte, die eine Messung der seismischen Bewegung um den Ort des Detektors vorschlagen. Daraus kann unter Kenntnis des umgebenden Materials der Gradient der Gravitation berechnet werden. Über eine aktive Gegenregelung des Interferometers soll dann dem Gradientenrauschen entgegengewirkt werden [32].

### 3.2.3. Thermisches Rauschen

Sieht man von den bisher behandelten Rauschquellen ab, verbleibt noch ein weiterer entscheidender Mechanismus. Getrieben durch die thermischen Schwingungen der Atome bewegen sich die reflektierenden Oberflächen der Spiegel und Strahlteiler und ändern somit die Armlänge des Interferometers. Nicht nur die beschichteten Spiegelsubstrate verursachen eine solche Bewegung. Auch die thermische Bewegung der Aufhängung kann Rauschen ins Interferometer eintragen [33].

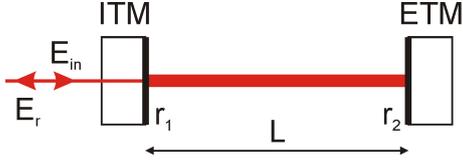
Zusätzlich zu den thermisch angeregten Bewegungen der Interferometerkomponenten finden sich durch statistische Temperaturfluktuationen getriebene Beiträge im Rauschspektrum – thermoelastisches und thermorefraktives Rauschen. Thermisches Rauschen dominiert den empfindlichsten Bereich des Detektionsgebietes von 10 Hz bis 1000 Hz und limitiert damit maßgeblich die Wahrscheinlichkeit der Detektion von Gravitationswellen. Eine eingehende Behandlung des thermischen Rauschens als Hauptpunkt vorliegender Arbeit wird in Kapitel 4 gegeben.

## 3.3. Erweiterte Interferometertechniken

### 3.3.1. Optische Resonatoren in den Interferometerarmen

Um mit der vorgestellten Interferometergeometrie in einem möglichst breiten Frequenzbereich Gravitationswellen nachweisen zu können, empfiehlt sich eine Maximierung der Empfindlichkeit für Frequenzen von ungefähr 200 Hz. Bei dieser Frequenz wechselt die Gravitationswelle alle  $\tau = 2,5$  ms ihr Vorzeichen. Damit liegt bei einer Armlänge von  $L \approx c\tau/2 = 375$  km ein maximales Signal am Interferometerausgang vor. Weiterhin wurde bereits gezeigt, daß die im Interferometer umlaufende Leistung für ein minimales Quantenrauschen in der Größenordnung einiger Megawatt liegen soll. Für niedrigere Leistungen würde das Schrotrauschen am Photodetektor die erreichte Empfindlichkeit begrenzen.

Beide Anforderungen sind mit dem bisher betrachteten Michelsoninterferometer nicht zu realisieren. Es existieren jedoch Konzepte, die Umlaufzeit des Laserstrahls im Interferometer zu erhöhen. Dazu wird in jedem Interferometerarm ein reflektives Element kurz hinter dem Strahlteiler angebracht. Im ersten Fall der sog. delay line ist dies ein zusätzlicher Spiegel. Dieses einkoppelnde Element ist zusammen mit dem Endspiegel so justiert, daß der umlaufende Strahl die Strecke zwischen den beiden Spiegeln mehrmals durchläuft, bis er wieder am Strahlteiler auftrifft. Dabei werden die Lichtwege zwischen zwei Reflexen geometrisch aufgespaltet. Ex-



**Abb. 3.3: Fabry-Perot-Resonator im Interferometerarm.** Der Einkoppelspiegel (ITM) bestimmt mit seinem Reflexionskoeffizienten  $r_1$  die Intensitätsüberhöhung und die Anzahl effektiver Umläufe im Resonator. Der Endspiegel (ETM) weist eine möglichst hohe Reflexivität  $r_2 \approx 1$  auf.

perimentell konnten mit dieser Anordnung  $\mathcal{N} = 45$  Umläufe erreicht werden [34].

Ein zweites Konzept sieht resonante Fabry-Perot-Resonatoren in den Interferometerarmen vor. Dazu wird der zusätzliche Spiegel durch einen Einkoppelspiegel (ITM) mit von null verschiedener Transmission ersetzt. Abb. 3.3 verdeutlicht die Geometrie des Armresonators. Zunächst soll die Wirkung einer Längenänderung  $\Delta L$  des Armresonators auf das reflektierte elektrische Feld  $E_r$  betrachtet werden. Diese zeigt sich anhand des Reflexionskoeffizienten der Kavität [35, Kap. 11, Gl. (30)]

$$r = \frac{E_r}{E_{in}} = \frac{r_1 - r_2 e^{2ikL}}{1 - r_1 r_2 e^{2ikL}} . \quad (3.5)$$

Dabei bezeichnet  $L$  die Resonatorlänge,  $k$  die Wellenzahl des verwendeten Lichts und  $r_1$  bzw.  $r_2$  die Reflexionskoeffizienten der Spiegel. Bei Justierung auf Resonanz ( $\exp(2ikL_{\text{res}}) = 1$ ) wird die Intensität im Resonator, die Zahl effektiver Umläufe und schließlich die Empfindlichkeit des Detektors maximal. Der Effekt einer kleinen Längenänderung des Resonators  $\Delta L$ , wie sie durch eine Gravitationswelle ausgelöst werden kann, wird in einer Taylorentwicklung um die Resonanz deutlich

$$r(L_{\text{res}} + \Delta L) \approx \frac{r_1 - r_2}{1 - r_1 r_2} - i \frac{r_2 (1 - r_1^2)}{(1 - r_1 r_2)^2} 2k \Delta L . \quad (3.6)$$

In erster Ordnung kann also eine Phasenvariation des reflektierten Lichts beobachtet werden. Durch Interferenz am Strahlteiler entsteht daraus eine am Photodetektor meßbare Intensitätsvariation. Analog zur Verwendung von delay lines ergibt sich auch im Falle der Armresonatoren eine Erhöhung der Anzahl effektiver Umläufe. Der einzige Unterschied besteht darin, daß alle Strahlen denselben geometrischen Weg besitzen. Als Phasenänderung des an einem Armresonator reflektierten Lichts erhält man

$$\Delta\varphi = \arg(r) \approx \frac{1 + r_1}{1 - r_1} 2k \Delta L \quad (3.7)$$

in der Näherung hochreflektierender Endspiegel ( $r_2 \approx 1$ ), die im Detektor erfüllt ist. Ein Vergleich mit der Phasenverschiebung in einem Interferometerarm ohne

Resonator  $\Delta\varphi_0 = 2k\Delta L$  ergibt die Anzahl effektiver Umläufe

$$\mathcal{N} \approx \frac{1 + r_1}{1 - r_1} . \quad (3.8)$$

Für  $r_2 = 1$  und  $r_1 \approx 1$  kann die Anzahl effektiver Umläufe auch über die Finesse  $\mathcal{F}$  (s. Anhang A.2) des Fabry-Perot-Resonators ausgedrückt werden. Dann gilt

$$\mathcal{N} \approx \frac{2\mathcal{F}}{\pi} . \quad (3.9)$$

Durch die Verwendung optischer Resonatoren führt eine Längenänderung des Interferometerarms durch das mehrfache Auslesen zu einem größeren Signal am Ausgang. Damit entspricht das Schrotrauschen des Detektors, der unverändert bleibt, einer geringeren Spiegelbewegung in den Interferometerarmen. Effektiv können damit geringere Längenänderungen und geringere Gravitationswellensignale nachgewiesen werden. Gleichzeitig nimmt das Strahlungsdruckrauschen durch die erhöhte Leistung im Resonator zu. Eine genaue Rechnung [16, S.102] zeigt, daß beide Änderungen der Rauschamplitude mit der Anzahl effektiver Umläufe  $\mathcal{N}$  einhergehen. Durch Armresonatoren wird die Laserleistung, an der das Quantenrauschen minimal wird, um den Faktor  $\mathcal{N}^2$  verringert.

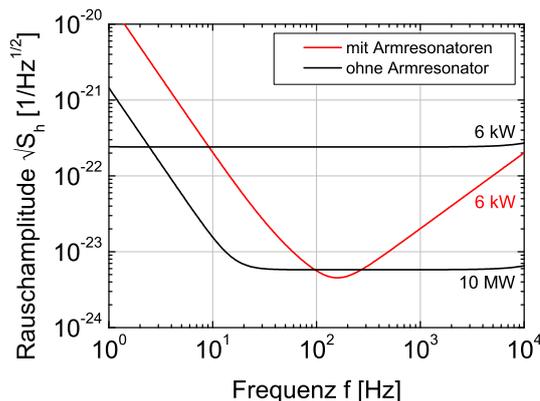
Durch den Einsatz von Armresonatoren verringert man das Schrotrauschen zu Lasten des Strahlungsdruckrauschens und verbessert so die Empfindlichkeit des Detektors, ohne dabei die Leistung des Lasers oder die geometrische Ausdehnung des Interferometerarms zu ändern. In heutigen Gravitationswellendetektoren kommt diese Technik deshalb bereits zum Einsatz. Wählt man die Finesse des Resonators allerdings zu hoch, so daß das Licht länger als eine Periodendauer der Gravitationswelle im Resonator bleibt, verringert sich die effektive Phasenverschiebung zwischen dem reflektierten Licht beider Arme über [16, Gl. (6.30)]

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{4c\tau_s}{\sqrt{1 + (4\pi f\tau_s)^2}} h , \quad \text{mit } \tau_s = \frac{L\mathcal{F}}{\pi c} . \quad (3.10)$$

$\tau_s$  gibt dabei die mittlere Verweilzeit des Lichts im Resonator und  $f$  die Frequenz der einfallenden Gravitationswelle an. Obige Beziehung gilt nur für den Grenzfall, daß die Resonatorlänge klein gegenüber der Wellenlänge der Gravitationswelle ist ( $2\pi f \ll c/(2L)$ ). Diese Näherung ist für die Armlängen und den Detektionsbereich erdgebundener Detektoren erfüllt. Ein Nachteil von Armresonatoren besteht in der Verwendung eines zusätzlichen Spiegels, wodurch das Strahlungsdruckrauschen erhöht wird. Da das im Resonator umlaufende Licht den gleichen Strahlungsdruck

auf den Einkoppel- und den Endspiegel aufprägt, ist die Bewegung beider Resonatorspiegel korreliert. Die Rauschleistung des Strahlungsdruckrauschens vervierfacht sich damit im Vergleich zu einfachen Interferometerarmen.

Für aLIGO beträgt die Zahl effektiver Umläufe  $\mathcal{N} = 286$ . Die im Resonator umlaufende Leistung von  $P_{\text{res}} = 830 \text{ kW}$  entspricht einer Eingangsleistung von  $P_0 = 2P_{\text{res}}/\mathcal{N} \approx 6 \text{ kW}$  vor dem Strahlteiler. Somit folgt für das Quantenrauschen das in Abb. 3.4 dargestellte Spektrum. Mit der Verwendung von Armresonatoren können Gravitationswellen bis zu knapp zwei Größenordnungen kleinerer Amplitude nachgewiesen werden. Am Anstieg des Rauschens für höhere Frequenzen ist der durch die verlängerte Umlaufzeit verursachte Empfindlichkeitsverlust von Armresonatoren zu erkennen. Damit erlauben Armresonatoren die Realisierung einer Empfindlichkeit, die aus Mangel an entsprechend starken Lasern in einer einfachen Michelsongeometrie nicht erreichbar ist.



**Abb. 3.4: Quantenrauschen eines Interferometers mit und ohne Armresonatoren im aLIGO-Design.** Unter Berücksichtigung von Gl. (3.10) wird das Quantenrauschen mit Armresonatoren berechnet und mit dem einfachen Interferometer (vgl. Abb. 3.2) verglichen. Armresonatoren erlauben mit einer Laserleistung von  $6 \text{ kW}$  für Frequenzen um  $100 \text{ Hz}$  ein Quantenrauschen, das sonst nur durch eine optische Eingangsleistung von  $10 \text{ MW}$  erreichbar wäre.

Im Vergleich zur delay line erlaubt der Ansatz mittels Fabry-Perot-Resonator die Nutzung größerer Strahlradien. Wie in Kapitel 4 gezeigt wird, führt dies zu einem geringeren thermischen Rauschen. Außerdem ist die Justierung des Fabry-Perot-Resonators einfacher und unempfindlicher und erlaubt zudem eine höhere Anzahl effektiver Umläufe. Aus diesen Gründen findet man in heutigen Interferometergeometrien keine delay lines, sondern Fabry-Perot-Resonatoren in den Interferometerarmen.

### 3.3.2. Power Recycling

Ein Gravitationswellendetektor wird mit minimaler Intensität am Ausgang betrieben. Folglich verläßt die eingestrahlte Energie das Interferometer Richtung Laser und ist für eine weitere Detektion verloren. Die Idee des Power Recycling nutzt die

aus dem Interferometer austretende Strahlung und koppelt diese erneut ins Interferometer ein. Dazu benutzt man einen Spiegel zwischen Laser und Strahlteiler. Dieser Power Recycling (PR) Spiegel wird auf Resonanz justiert, so daß die Laserintensität im Interferometer erhöht wird [36]. Mit dieser Erhöhung der im Interferometerarm umlaufenden Leistung erfolgt eine Annäherung an den im Hinblick auf das Standardquantenlimit optimalen Wert.

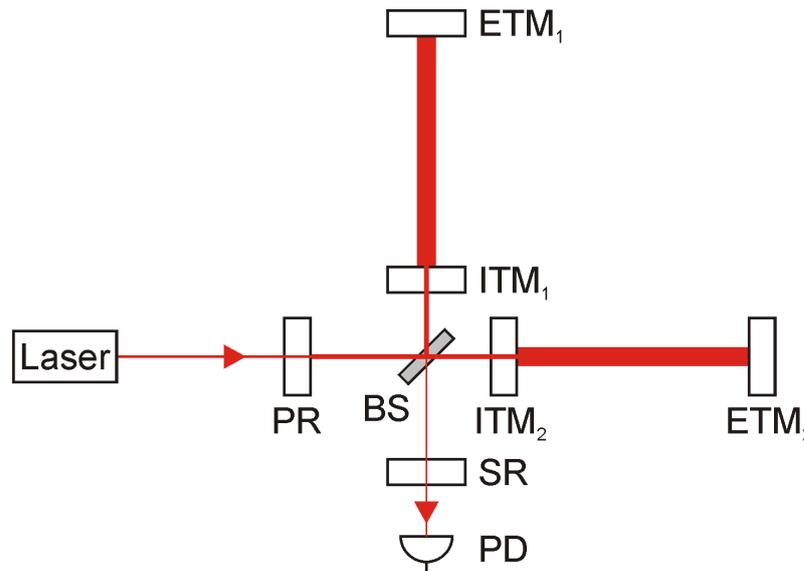
### 3.3.3. Signal Recycling

Ähnlich dem Power Recycling erzeugt man beim Signal Recycling durch einen zusätzlichen Spiegel erneut ein resonantes Untersystem. Der Signal Recycling (SR) Spiegel wird zwischen Strahlteiler und Photodetektor angebracht. Das Signal der Gravitationswelle wird somit erneut in das Interferometer eingekoppelt und seine Amplitude durch den erneuten Umlauf vergrößert. Im Ergebnis erhöht das Signal Recycling so die Empfindlichkeit des Interferometers [36].

### 3.3.4. Squeezing

Das Standardquantenlimit resultiert aus der Kombination des Schrotrauschens und des Strahlungsdruckrauschens. Letzteres kann nach Caves [37] auf zwei Weisen anschaulich interpretiert werden. Die erste Methode stellt den Strahlteiler in den Mittelpunkt der Analyse. Dieser zeigt eine Variation des Teilungsverhältnisses und verursacht Leistungsschwankungen in den Interferometerarmen. Die Energieerhaltung fordert dabei eine Korrelation zwischen beiden Armen, d. h. die Leistungsabnahme in einem Arm bedingt die Leistungserhöhung im zweiten Arm. Diese Variation in der Intensität bewirkt eine unterschiedliche Auslenkung der Testmassen und ein Rauschsignal am Interferometerausgang. Das zweite Konzept zur Beschreibung des Strahlungsdruckrauschens benutzt die Vakuumfluktuationen des elektromagnetischen Feldes. Diese koppeln über den Ausgang in das Interferometer ein. Erhöht eine Fluktuation nun die Intensität in einem Arm, senkt sie gleichzeitig die Intensität im zweiten Arm. Auf diese Weise entsteht erneut eine Differenz des Strahlungsdrucks in beiden Armen und damit ein Rauschsignal.

Gequetschte Zustände des Lichts [38] zeichnen sich durch eine Umverteilung von Amplituden- und Phasenrauschen aus. Sie können z. B. durch nichtlineare Bauteile erzeugt werden. Ersetzt man die Vakuumfluktuationen durch gequetschtes Licht, das über den Interferometerausgang eingekoppelt wird, kann eine Verringerung des auftretenden Strahlungsdruckrauschens erreicht werden [39]. Gleichzeitig erhöht sich dabei das Photonenschrotrauschen am Detektor. In der klassischen



**Abb. 3.5.: Grundaufbau aktueller interferometrischer Gravitationswellendetektoren.** Das vom Laser ausgehende Licht durchläuft den Power Recycling Spiegel (PR), wird am Strahlteiler (BS) geteilt und durchläuft die Fabry-Perot-Resonatoren (Einkoppelspiegel ITM, Endspiegel ETM) in beiden Armen. Am Strahlteiler werden beide Strahlen zusammengeführt und durchlaufen den Spiegel für das Signal Recycling (SR), bevor die Intensität am Photodetektor (PD) gemessen wird. In der Skizze stellt die Linienbreite ein Maß für die Intensität des Laserlichts dar.

Betrachtung wäre dieses Resultat nur durch eine Erhöhung der Eingangsleistung möglich. Die Technik des Squeezings erlaubt jedoch eine spektrale Umverteilung des Quantenrauschens ohne eine Änderung der Laserleistung. Der experimentelle Nachweis der Rauschverringerng für die Gravitationswellendetektion ist in [40] erbracht. Dort konnte eine Reduktion der Rauschleistung durch Squeezing um bis zu 9 dB nachgewiesen werden. Die Auswirkungen einer Anwendung des Experiments in GEO600 sind dort mit einer Rauschverringerng von 6 dB abgeschätzt. Mittlerweile erfolgte eine experimentelle Anwendung gequetschten Lichts in GEO600. Sie ergab eine Rauschverringerng von 3,5 dB [41].

### 3.4. Aktuelle und zukünftige Detektoren

Der Grundaufbau aktueller Detektoren unter Berücksichtigung der vorgestellten erweiterten Techniken ist in Abb. 3.5 dargestellt. Dieses Design bildet im folgenden die Grundlage für die Analyse thermischen Rauschens.

Als die zurzeit empfindlichsten interferometrischen Gravitationswellendetektoren mit Armlängen von einigen 100 m bis Kilometern sind LIGO, VIRGO und GEO600 zu nennen. Das LIGO-Projekt [42] verfügt dabei über zwei Interferometer

mit 4 km langen Armresonatoren im Nordwesten (Hanford) und Südosten (Livingston) der USA. Zusätzlich existiert in Hanford noch ein Detektor mit einer Armlänge von 2 km. Der VIRGO-Detektor [43] besitzt 3 km lange Armresonatoren und befindet sich in Italien nahe Pisa. Seine siebenstufige Aufhängung erlaubt eine effektive Entkopplung der Testmassen von seismischen Einflüssen und stellt den Prototyp für zukünftige Detektoren dar. Das britisch-deutsche Verbundprojekt GEO600 [29] betreibt einen Detektor mit einer Armlänge von 600 m. Im Unterschied zu den vorherigen Detektoren besitzt GEO600 keine Armresonatoren. Zur Erhöhung der Empfindlichkeit wurde der Strahlengang jedoch einmal gefaltet, so daß die effektive Armlänge 1,2 km beträgt. In sogenannten Science Runs befanden sich mehrere der genannten Detektoren erster Generation gleichzeitig im Betrieb, um mit einer Koinzidenzmessung die Zuverlässigkeit eines möglichen Gravitationswellennachweises zu erhöhen. Die große Entfernung zwischen den Standorten hätte dabei eine Ortung der Quelle ermöglicht. Der Bau weiterer Interferometer der zweiten Generation in Australien und Japan berücksichtigt diesen Aspekt ebenfalls [44].

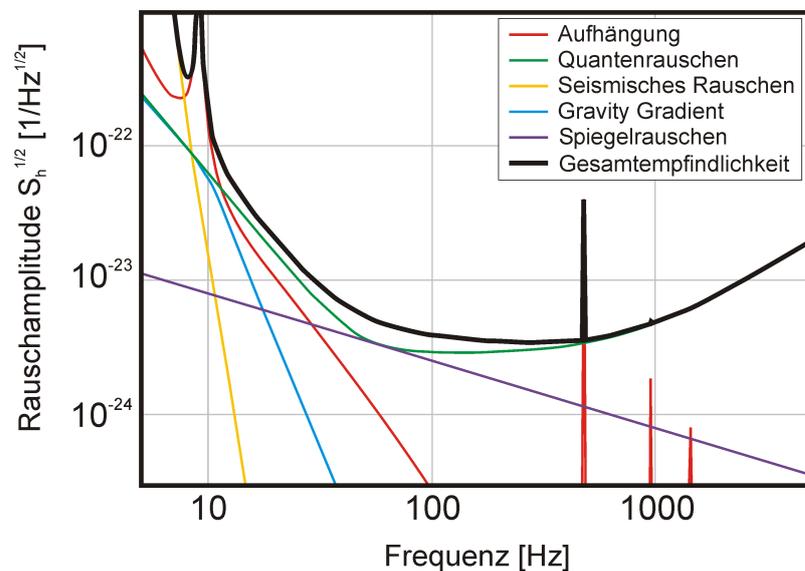
In Japan nahe Kamioka existiert mit CLIO [45] ein Prototyp für einen kryogenen Detektor unter Tage. Die unterirdische Lage des Interferometers mit 100 m langen Armen soll ein verringertes seismisches Rauschen demonstrieren. Gleichzeitig dient CLIO der Erprobung gekühlter Testmassen zur Minimierung thermischen Rauschens. Die Testmassen aus Saphir sollen dabei bei einer Temperatur von 20 K betrieben werden. 2010 wurde mit dem Nachfolgeprojekt LCGT [45] der Aufbau eines unterirdischen, 3 km langen, kryogenen Interferometers bewilligt.

Momentan erfolgt der Ausbau vorhandener Detektoren zur zweiten Generation. Er umfaßt eine Erhöhung der Laserleistung in den Armresonatoren und eine Vergrößerung der Testmassen. Der Umbau sieht außerdem eine Verbesserung der seismischen Isolation, die Benutzung monolithischer Aufhängungen und die Verwendung von Signal Recycling vor. Damit soll die Rauschamplitude im bisher empfindlichsten Detektionsbereich um den Faktor zehn verringert werden [28]. Nach Gl. (2.5) erlaubt eine solche Verbesserung die Beobachtung kosmischer Ereignisse in zehnfachem Abstand. Damit erhöht sich der beobachtbare Raum und entsprechend die Wahrscheinlichkeit der Detektion einer Gravitationswelle um den Faktor 1000.

Da die Detektoren der zweiten Generation bereits errichtet werden, sind konzeptionelle Änderungen nur begrenzt umzusetzen. Die Erkenntnisse vorliegender Arbeit können jedoch in vollem Umfang zur Planung von Detektoren der dritten Generation eingesetzt werden. Als Projekt dritter Generation sieht man für das Einstein Telescope (ET) die Errichtung dreier unabhängiger unterirdischer Detektoren vor [46, 47]. Deren Arme folgen der Geometrie eines gleichseitigen Dreiecks

mit Seitenlängen von 10 km. Pro Detektor soll je ein Interferometer für hohe Frequenzen (ET-HF) und eines für niedrige Frequenzen (ET-LF) optimiert werden. Die Rauschamplitude dieses Detektors der dritten Generation soll im Vergleich zur zweiten Generation wiederum um den Faktor zehn reduziert werden. 2011 wurde unter Mitwirkung des Verfassers die konzeptionelle Designstudie für das Einstein Telescope abgeschlossen [48].

Die Empfindlichkeit zukünftiger Detektoren wird maßgeblich durch die beschriebenen Rauschbeiträge eingeschränkt. Abb. 3.6 zeigt das berechnete spektrale Rauschspektrum von aLIGO als typischem Detektor der zweiten Generation und stellt damit eine obere Grenze für die maximal erreichbare Empfindlichkeit dar. Darin sind die vorher behandelten Rauschmechanismen dargestellt. Der empfindlichste Frequenzbereich des Detektors um 100 Hz wird maßgeblich durch das thermische Rauschen und das Quantenrauschen des Detektors dominiert. Einer Erhöhung der Nachweisempfindlichkeit geht daher zwangsläufig eine Verringerung thermischen Rauschens voraus. Diese Forderung gewinnt mit der Absenkung des Quantenrauschens durch nichtklassische Verfahren wie das Squeezing nochmals an Bedeutung.



**Abb. 3.6.: Spektrale Empfindlichkeit des Gravitationswellendetektors aLIGO nach [49].** Das Diagramm zeigt das Rauschen des Detektors verteilt auf die einzelnen Rauschprozesse. Für tiefe Frequenzen dominiert das seismische Rauschen, im Bereich von 50 Hz bis 200 Hz Quanten- und thermisches Rauschen und für hohe Frequenzen das Schrottrauschen des Detektors. Direkt abzulesen ist die Amplitude der Gravitationswelle, die ein Detektorsignal mit einem Signal-Rausch-Verhältnis von eins verursacht.

## 4. Thermisches Rauschen

Das thermische Rauschen der optischen Komponenten stellt eine wesentliche Einschränkung der Empfindlichkeit zukünftiger interferometrischer Gravitationswellendetektoren dar. In diesem Kapitel werden daher die existierenden Modelle und Gleichungen in Bezug auf das thermische Rauschen zusammengefaßt. Sie bilden die Grundlage für eine Analyse und Erhöhung der Empfindlichkeit zukünftiger Detektoren.

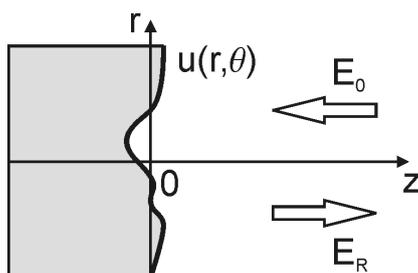
### 4.1. Gewichtetes Auslesen

Als Beispiel für einen Rauschprozeß sei an dieser Stelle die Auslenkung der reflektierenden Oberfläche des Spiegels gewählt. Ein Laserstrahl, der an dieser Oberfläche reflektiert wird, liest die Verschiebung der Oberfläche in Form einer Phasenänderung aus. Eine Phasenänderung in einem Arm wird dann zu einer Intensitätsschwankung am Ausgang des Interferometers führen. Dabei besitzen die Teile des Spiegels, die mit hoher Intensität abgetastet werden, einen stärkeren Einfluß als Zonen geringer Intensität. Die genaue analytische Mittelung wird im folgenden hergeleitet. Abb. 4.1 illustriert den Ausgangspunkt für die Betrachtung.

Die einfallende Welle besitzt dabei eine gaußförmige Amplitude

$$E_0(r, \theta) \propto \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right). \quad (4.1)$$

Die Größe des Strahlradius  $w_0$  erfüllt die Bedingung, daß in einer Entfernung  $r = w_0$



**Abb. 4.1: Optische Detektion thermischen Rauschens.** Der einfallende Laserstrahl  $E_0$  wird an der Spiegeloberfläche reflektiert. Durch die Auslenkung der Spiegeloberfläche  $u(r, \theta)$  erfährt dieser einen Phasenversatz in Abhängigkeit vom Ort  $(r, \theta)$ . Dem reflektierten Strahl  $E_R$  kann über die Wichtung mittels Strahlprofil ein effektiver Gangunterschied zugewiesen werden.

vom Strahlmittelpunkt das elektrische Feld auf den  $1/e$ -ten Teil des Maximums abgefallen ist. Für den an der deformierten Oberfläche reflektierten Strahl gilt dann

$$E_R(z = 0) = E_0(r, \theta) e^{-i2ku(r, \theta)} , \quad (4.2)$$

wobei  $u(r, \theta)$  die Auslenkung des Spiegels senkrecht zur reflektierenden Oberfläche, also in Strahlrichtung, bezeichnet. Für Auslenkungen, die klein gegenüber der Wellenlänge sind, gilt  $ku \ll 1$  und eine sinnvolle Näherung erlaubt

$$E_R(z = 0) \approx E_0(r, \theta) [1 - i2ku(r, \theta) - 2k^2u^2(r, \theta)] . \quad (4.3)$$

Da der Resonator im Interferometerarm nur für die Gaußmode resonant wird, interessiert allein die Entwicklung von  $E_R$  nach der Gaußmode  $E_0$ . Höhere Eigenmoden des Resonators erfahren eine so hohe Dämpfung, daß sie nicht berücksichtigt werden müssen. Eine solche Entwicklung ergibt nach [50]

$$E_R(z = 0) \approx E_0(r, \theta) \left[ 1 - i2 \int_S E_0^* E_0 ku \, dS - 2 \int_S E_0^* E_0 (ku)^2 \, dS \right] \quad (4.4)$$

mit der Spiegeloberfläche  $S$ . In der Klammer des obigen Ausdrucks beschreibt der erste Term die ungestörte reflektierte Welle, der zweite Term die Phasenverschiebung aufgrund der ausgelenkten Oberfläche und der dritte Term die Energieverluste durch die Streuung von Energie aus der Grundmode. Mit Hilfe des imaginären Terms läßt sich eine effektive Längenänderung des Interferometerarms

$$\Delta L = -\frac{1}{k} \int_S E_0^* E_0 ku(r, \theta) \, dS \quad (4.5)$$

definieren. Die Ersetzung von  $E_0$  durch das Strahlprofil der Gaußmode ergibt schließlich

$$\Delta L = -\frac{1}{\pi r_0^2} \int_S \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) u(r, \theta) \, dS . \quad (4.6)$$

Zu beachten ist der neu eingeführte Parameter  $r_0$ . Auch diesen findet man in Veröffentlichungen als Strahlradius. Er beschreibt jedoch den Abfall der Strahlintensität auf den  $1/e$ -ten Teil. Die Umrechnung auf den in der Optik gebräuchlicheren Parameter  $w_0$  erfolgt über  $w_0 = \sqrt{2}r_0$ . Der Vorfaktor in Gl. (4.6) resultiert aus der Normierung  $\int_S E_0^* E_0 \, dS = 1$ .

In den nachfolgenden Abschnitten dieses Kapitels werden die Ursachen für mögliche Phasenverschiebungen diskutiert und ihre Wirkung quantitativ über eine

effektive Auslenkung  $\Delta L$  angegeben. Diese treten überall dort auf, wo eine Wechselwirkung des Lichts mit der Materie in den Interferometerarmen eine Phasenverschiebung zur Folge hat – im wesentlichen am Strahlteiler und den Resonatorspiegeln. Außerdem erfolgt eine Übersicht der meistverwendeten Modelle zur Berechnung der einzelnen Rauschterme.

## 4.2. Brownsches Rauschen

Im Jahre 1827 beobachtete der schottische Botaniker Robert Brown mit dem Mikroskop in Wasser suspendierte Pollen. Er konnte eine unregelmäßige Bewegung der Pollen feststellen und versuchte diese mit seiner Theorie der Lebenskraft zu erklären. 1863 schlug Wiener die Erklärung der Zitterbewegung durch unregelmäßige Stöße von Wassermolekülen mit den leichten Pollenteilchen vor [51]. Diese Erklärung stellte sich als die richtige heraus. Eine thermodynamische Behandlung zeigt, daß einem Teilchen bei einer Temperatur  $T$  pro Freiheitsgrad die mittlere thermische Energie  $\frac{1}{2}k_B T$  zugeordnet werden kann. Die Größe  $k_B$  ist hierbei die Boltzmannkonstante.

Analog zu den Wassermolekülen im Brownschen Versuch führen auch die Atome eines Festkörpers thermische Schwingungen aus. Das Gitter vermittelt schließlich diese Schwingungen zu einer Bewegung der Oberfläche, die in einem Gravitationswellendetektor nachgewiesen wird. Der dadurch entstehende Rauschprozeß wird in Anlehnung an den historischen Versuch Brownsches Rauschen genannt.

### 4.2.1. Harmonischer Oszillator

Um die Grundzüge des Brownschen Rauschens zu verstehen, soll als Modellsystem an dieser Stelle der eindimensionale harmonische Oszillator stehen, wie er z. B. durch einen Federschwinger realisiert wird. In der Theorie stochastischer Prozesse wird die Position  $z$  des Oszillators durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben, die auch Langevingleichung genannt wird

$$m\ddot{z} + d\dot{z} + kz = F_{\text{th}} . \quad (4.7)$$

Obige Bewegungsgleichung charakterisiert ein schwingungsfähiges System mit viskoser Dämpfung. Dieser Ansatz geht auf eine Arbeit von Langevin zurück, in der er erstmals das Konzept einer stochastischen Kraft erwähnte, um Brownsches Rauschen mathematisch quantitativ zu erklären [52]. Die stochastische Kraft besitzt dabei eine frequenzunabhängige spektrale Leistungsdichte von  $F_{\text{th}}^2(f) = 4k_B T d$  [53]. Um das

Ortsrauschen  $S_z$  zu berechnen, wechselt man zweckmäßigerweise in eine Behandlung im Frequenzraum. Das geschieht durch eine Fouriertransformation und führt zu den Ersetzungen  $z(t) \rightarrow z(\omega)e^{i\omega t}$  und  $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$ . Über das Wiener-Chintschin-Theorem [54] findet man für die Rauschleistungsdichte des Ortes

$$S_z(\omega) = z^2(\omega) = \frac{F_{\text{th}}^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 d^2} = \frac{4k_B T d}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 d^2} . \quad (4.8)$$

### Fluktuations-Dissipations-Theorem

Maßgeblich für die eben gezeigte Herleitung der Rauschamplitude ist die Kenntnis des Leistungsspektrums der stochastischen Kraft. Für lineare dissipative Systeme existiert ein alternativer Ansatz zur Berechnung des Rauschens. Dieser wurde zu Beginn der 1950er als Fluktuations-Dissipations-Theorem [6, 7] veröffentlicht. Das Verhalten des zu untersuchenden Systems ist dabei in seiner Impedanz  $Z$  zusammengefaßt. Für den Grenzfall hoher Temperaturen, in dem die thermische Energie  $k_B T$  groß gegen die Energie eines Schwingungsquantums  $\hbar\omega$  ist, gilt

$$S_V(\omega) = 4k_B T \Re[Z(\omega)] . \quad (4.9)$$

Dabei stellt die Größe  $S_V(\omega)$  als Rauschleistungsdichte einer generalisierten Kraft  $V$  die Fluktuationen dar. Die Impedanz  $Z(\omega)$  verknüpft auf lineare Weise die generalisierte Kraft  $V$  mit einer generalisierten Auslenkung  $Q$

$$V = Z(\omega)\dot{Q} . \quad (4.10)$$

Als korrespondierende Größe wird  $Q$  so gewählt, daß die Größe  $V\dot{Q}$  die Einheit einer Leistung besitzt. Somit werden durch Gl. (4.9) die Fluktuationen in  $S_V(\omega)$  mit dem Realteil der Impedanz  $\Re(Z)$  als Maß für die Dissipation im System in Verbindung gebracht.

Im Falle des hier betrachteten Federschwingers kann die Größe  $V$  mit der an der Masse wirkenden Kraft und  $Q$  mit der Auslenkung des Oszillators identifiziert werden. Ein weiterer Spezialfall dieses Theorems ist im Johnson-Nyquist-Rauschen zu finden, in dem  $V$  durch die anliegende Spannung und  $Q$  durch die Ladung des Systems charakterisiert wird.

### Strukturdämpfung

Die Annahme viskoser Dämpfung kann die experimentellen Ergebnisse der Pollenbewegung im Wasser erfolgreich beschreiben. Die Bedingungen im Festkörper wer-

den dadurch aber nur unzureichend wiedergegeben. Deshalb findet im Festkörper das Modell der Strukturdämpfung zur Berechnung der inneren Reibung Anwendung [55]. In diesem Rahmen modelliert man die Reibung als imaginären Anteil der Federkonstanten des Systems. Ein solcher Ansatz entspricht einem Zeitversatz zwischen Auslenkung und angreifender Kraft im Zeitraum. Im Frequenzraum ist die rücktreibende Federkraft dann durch  $F_R(\omega) = -k [1 + i\phi(\omega)] z(\omega)$  gegeben und wird durch den mechanischen Verlust  $\phi$  beschrieben. Dieser zeigt sowohl eine Frequenz- als auch eine Temperaturabhängigkeit und dient gleichzeitig als Maß für die Dissipation mechanischer Energie im Medium.

Die zugrundeliegende Langevingleichung lautet dann im Frequenzraum

$$-m\omega^2 z(\omega) + k [1 + i\phi(\omega)] z(\omega) = F_{\text{th}}(\omega) . \quad (4.11)$$

Analog zum viskosen Fall findet man damit unter Zuhilfenahme des Fluktuations-Dissipations-Theorems eine Rauschleistungsdichte von [56]

$$S_z(\omega) = \frac{4k_B T k \phi(\omega)}{\omega} \cdot \frac{1}{(k - m\omega^2)^2 + k^2 \phi^2} . \quad (4.12)$$

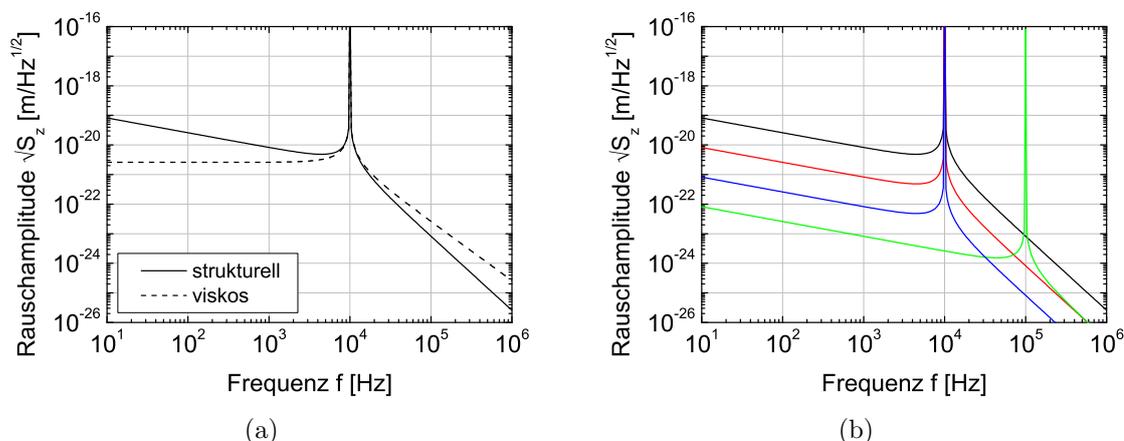
Physikalisch anschaulicher ist die Resonanzfrequenz des Systems im ungedämpften Fall  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Mit dieser Ersetzung findet man für das Rauschspektrum

$$S_z(\omega) = \frac{4k_B T \phi}{m\omega} \cdot \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2} . \quad (4.13)$$

Eine formelle Übereinstimmung der Rauschspektren unter struktureller, Gl. (4.12), und viskoser Dämpfung, Gl. (4.8), ergibt sich für

$$k\phi = \omega d . \quad (4.14)$$

In Abb. 4.2 werden die Rauschspektren für viskose Dämpfung und Strukturdämpfung gegenübergestellt. Sie sind auf gleiche Verluste an der Resonanz normiert ( $d = m\phi\omega_0$ ). Zusätzlich wird die Rauschreduzierung für Frequenzen unterhalb der Resonanz durch eine Änderung der Temperatur, der Verluste und der Eigenfrequenz illustriert. Während eine Verringerung der Temperatur zu einer frequenzunabhängigen Verringerung des kompletten Rauschspektrums führt, zeigt eine Verringerung der Verluste eine Senkung des Rauschens abseits der Resonanz, verbunden mit einer Erhöhung des Rauschspektrums an der Resonanz. Ähnlich führt eine Erhöhung der Resonanzfrequenz zu einer Umverteilung der Rauschenergie von Fre-



**Abb. 4.2.: Rauschamplitudenspektren eines eindimensionalen harmonischen Oszillators.** Abb. a) vergleicht das Rauschspektrum eines viskos (gestrichelt) und eines strukturell (durchgezogen) gedämpften Oszillators. Dabei sind beide Oszillatoren auf gleiche Rauschamplitude an der Resonanz normiert. Dem Spektrum liegen die Parameter  $m = 10$  kg,  $\phi = 10^{-6}$ ,  $T = 300$  K und  $f_0 = 10$  kHz zugrunde. Abb. b) zeigt den Einfluß der Parameter auf das Rauschspektrum eines strukturell gedämpften Oszillators. Ausgehend von den Parametern in a) (schwarz) werden sukzessive die Verluste auf  $\phi = 10^{-8}$  verringert (rot), die Temperatur auf  $T = 3$  K verringert (blau) und die Resonanzfrequenz auf  $f_0 = 100$  kHz erhöht (grün).

quenzen unterhalb der Resonanz in den Frequenzbereich darüber. Das Integral über das Spektrum als Maß für die thermische Energie bleibt dabei in den letztgenannten Fällen konstant.

Die Testmasse im Gravitationswellendetektor bildet zusammen mit der Aufhängung ein Pendel. Dessen Resonanzfrequenz liegt unterhalb des Detektionsbandes und sollte zu möglichst tiefen Frequenzen verschoben werden, um das durch die Aufhängung eingebrachte Rauschen zu minimieren. Außerdem führen auch die Eigenschwingungen der zylinderförmigen Testmasse zu einem Rauschen der Oberfläche. Deren Frequenz ist durch die Geometrie bestimmt und liegt typischerweise im Bereich einiger 10 kHz und somit oberhalb des Detektionsbandes. Um dieses Brownsche Rauschen der Testmassen zu minimieren bleibt also im wesentlichen eine Verringerung der Verluste bzw. der Temperatur.

#### 4.2.2. Modensummation

Während die Aufhängung relativ gut mit dem Modell eines einzelnen harmonischen Oszillators angenähert werden kann, muß die Behandlung der Substrate mittels Kontinuumstheorie mehrere Resonanzen berücksichtigen. Eine Möglichkeit der Verfeinerung des einfachen Modells besteht in der Modensummation. Dazu werden die

Eigenfrequenzen und Auslenkungen der mechanischen Schwingungen der Testmasse berechnet. Die Schwingungen der Oberfläche werden zusätzlich mit dem Gaußstrahl nach Gl. (4.6) gemittelt. Jede Resonanz wird hierbei als unabhängiger harmonischer Oszillator behandelt. Das gesamte Brownsche Substratrauschen ergibt sich schließlich als unkorrelierte Summe der einzelnen Rauschleistungsdichten. Gillespie und Raab wendeten diese Methode im Jahre 1994 auf die damalige Geometrie der LIGO-Spiegel an [50]. Ihre Arbeit beschränkte sich auf den Fall homogen verteilter Verluste. Eine reale, beschichtete Testmasse hingegen weist im optischen Schichtstapel hohe Verluste auf, während die Verluste im Substrat relativ gering sind. Die Modensummation versagt in der Behandlung solch inhomogener Testmassen [57]. Ein weiterer Nachteil dieser Methode besteht im numerischen Aufwand, da für eine konvergente Lösung über 100 Eigenmoden berechnet werden müssen. Speziell für im Vergleich zum Testmassenradius kleine Strahlradien steigt diese Zahl noch weiter und macht die Methode der Modensummation ungeeignet für eine Rauschberechnung.

### 4.2.3. Methode nach Levin

Die diskutierten Nachteile der Modensummation können mit einem direkten Ansatz umgangen werden. Das Konzept dazu umfaßt die direkte Anwendung des Fluktuations-Dissipations-Theorems und wurde 1998 von Levin veröffentlicht [58]. Seine direkte Methode, das Rauschen an der Kreisfrequenz  $\omega$  zu ermitteln, umfaßt drei Schritte. Zunächst bringt man einen virtuellen mechanischen Druck  $p(r) = F_0 f(r)$  auf die reflektierende Oberfläche des Substrates auf. Dieser Druck oszilliere zeitlich harmonisch mit  $\omega$  und besitze dieselbe örtliche Verteilung wie die Intensitätsverteilung des Laserstrahls

$$f(r) = \frac{1}{\pi r_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) . \quad (4.15)$$

In einem zweiten Schritt wird mittels Kontinuumstheorie die Energiedichte  $\epsilon(x)$  im Substrat und anschließend die mittlere dissipierte Leistung  $W_{\text{diss}}$  berechnet. Mit dem Modell der Strukturdämpfung ergibt sich

$$W_{\text{diss}} = \frac{\omega}{2\pi} \Delta E = \omega \int_V \phi(\vec{x}) \epsilon(\vec{x}) d^3x , \quad (4.16)$$

wobei  $\Delta E$  die pro Schwingungsperiode  $2\pi/\omega$  dissipierte Energie,  $V$  das Spiegelvolumen und  $\phi$  den mechanischen Verlust des Materials angibt. Schließlich kann die

spektrale Rauschleistungsdichte der Spiegelposition über

$$S_z(f) = \frac{8k_B T W_{\text{diss}}}{\omega^2 F_0^2} \quad (4.17)$$

berechnet werden.

Als einfache Näherung für die Testmasse kann mit dieser Methode das Rauschen für einen unendlich ausgedehnten elastischen Körper  $S_z^{\text{inf}}$  analytisch bestimmt werden. Nach Liu und Thorne [59] ergibt sich

$$S_z^{\text{inf}}(f) = \frac{4k_B T}{\omega} \frac{1 - \sigma^2}{\sqrt{2\pi E r_0}} \phi. \quad (4.18)$$

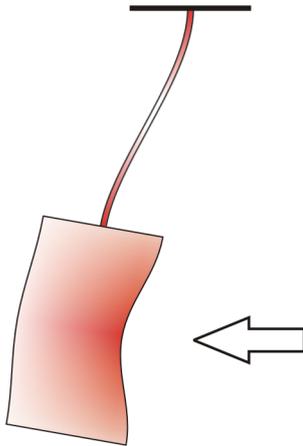
Dabei findet der Elastizitätsmodul  $E$  und die Querkontraktion  $\sigma$  Eingang in das Ergebnis. Eine Lösung für das Brownsche Rauschen endlicher Substratgeometrien wurde von Bondu, Hello und Vinet 1998 gegeben [59, 60]. Für typische Strahldurchmesser, Substratmaterialien und -geometrien ergibt sich unter Berücksichtigung der finiten Ausdehnung eine Reduktion des Brownschen Rauschens von bis zu 15 %.

Die isotropen optischen Schichten, aus denen der hochreflektierende Schichtstapel der Spiegelmassen besteht, zeigen im Vergleich zum Substrat hohe mechanische Verluste. Diese führen ebenfalls zu Brownschem Rauschen. Wegen ihrer geringen Höhe kann der Einfluß der Schicht auf die elastische Antwort des Spiegels vernachlässigt werden. Stattdessen wird die mechanische Energiedichte der Schicht mittels Übergangsbedingungen für den Dehnungstensor  $\epsilon_{ij}$  und den Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  berechnet. Da die Schicht senkrecht zur Substratoberfläche eine Ausdehnung besitzt, die klein gegenüber der radialen Ausdehnung ist, kann auch der mechanische Verlust für Spannungen senkrecht und parallel zur Oberfläche unterschiedlich sein. Dieser Fall wurde von Harry et al. behandelt [61]. Da jedoch nur die Verluste für Schichtspannungen senkrecht zur Oberfläche experimentell zugänglich sind, werden im Ergebnis beide Verluste gleichgesetzt. Für den Spezialfall gleicher elastischer Parameter von Substrat und Schicht erhält man eine kompakte Darstellung des Ergebnisses. Für eine Schicht der Dicke  $d$  mit einem mechanischen Verlust  $\phi_S$  ergibt sich das folgende Brownsche Schichtrauschen

$$S_z(f) = \frac{4k_B T}{\pi\omega} \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{E} \frac{d}{r_0^2} \phi_S. \quad (4.19)$$

Der Einfluß einer finiten Testmasse auf das Brownsche Schichtrauschen wird in [62] quantitativ behandelt.

Wendet man die Methode von Levin auf ein aufgehängtes Substrat an, so er-



**Abb. 4.3: Verformung eines aufgehängten Substrates durch Levins virtuellen Druck.** Dabei wird sowohl eine Deformation des Substrates als auch eine Pendelbewegung der Anordnung deutlich. Durch diese Pendelbewegung wird in den Aufhängungsfasern elastische Energie gespeichert, die der Dissipation unterworfen ist. Gefärbte Bereiche besitzen hierbei eine hohe mechanische Energiedichte. Hohe Verluste an diesen Stellen führen zu einem hohen Pegel Brownschen Rauschens im reflektierten Laserstrahl.

gibt sich das in Abb. 4.3 dargestellte Verhalten. Dabei wird das Substrat zu inneren Schwingungen angeregt, die dessen Schwerpunkt unverändert lassen. Dem ist eine Pendelschwingung des Schwerpunkts an den Aufhängungsfasern überlagert. Die Pendelschwingung leistet zum einen Arbeit im konservativen Schwerfeld der Erde, das keine Dissipation zeigt. Zum anderen wird die Aufhängungsfaser verformt. Diese mechanische Verformung besitzt dissipativen Charakter. Eine Bilanzierung beider Anteile führt zu einem effektiven Pendelverlust  $\phi_{\text{pend}}$ , der geringer als der mechanische Verlust des Aufhängungsmaterials  $\phi_{\text{mat}}$  ist. Mit der Pendellänge  $L$ , dem Flächenträgheitsmoment der Faser  $I$  und dem Elastizitätsmodul des Aufhängungsmaterials  $E$  gilt [33]

$$\phi_{\text{pend}} = \frac{\phi_{\text{mat}}}{2} \sqrt{\frac{EI}{TL^2}}. \quad (4.20)$$

Die in den Aufhängungsfasern herrschende Spannung  $T$  ist dabei durch die Gewichtskraft des Substrates gegeben. Damit kann also eine rauscharme Testmasse ohne wesentliche Beeinträchtigung der Empfindlichkeit an einer relativ stark rauschenden Aufhängung angebracht werden. Aktuelle und geplante Detektoren benutzen mehrstufige Aufhängungen. Deren Einfluß auf das Positionsrauschen der Testmassen ist in theoretischen Arbeiten [56, 63] behandelt.

### 4.3. Rauschen durch Temperaturfluktuationen

Ein Körper, der sich nicht am absoluten Nullpunkt befindet, zeigt neben den sich thermisch bewegenden Atomen einen weiteren Effekt, der Rauschen verursachen kann. Thermodynamisch ergeben sich nämlich auch für ein stationäres Gleichgewicht kleine Temperaturfluktuationen im Körper. Für das mittlere Quadrat der

Temperaturfluktuationen  $\Delta T$  im Volumen  $V$  eines Materials mit der Massendichte  $\rho$  und der Wärmekapazität bei konstantem Volumen  $C_V$  gilt [64, Gl. (112,6)]

$$\langle (\Delta T)^2 \rangle = \frac{k_B T^2}{V \rho C_V} . \quad (4.21)$$

Wie diese Temperaturschwankungen Eingang in das Rauschen der Probe finden, wird in den anschließenden Abschnitten beschrieben.

### 4.3.1. Thermoelastisches Rauschen

Zunächst führt eine Änderung der Temperatur über den nichtlinearen Anteil des Bindungspotentials im Festkörper zu einer thermischen Dehnung. Diese Dehnung verschiebt die reflektierende Oberfläche des Substrates und verursacht einen ersten durch Temperaturfluktuationen bedingten Rauschmechanismus – das thermoelastische Rauschen. Braginsky, Gorodetsky und Vyatchanin untersuchten im Jahr 1999 erstmals die Bedeutung des thermoelastischen Rauschens für die Gravitationswellendetektion [65]. Für den Fall eines unendlich ausgedehnten Substrates (Halbraum) erhalten sie ein Positionsrauschen der reflektierenden Oberfläche von

$$S_z^{(\text{TE})}(\omega) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \alpha^2 (1 + \sigma)^2 \frac{\kappa}{(\rho C)^2} \frac{k_B T^2}{r_0^3} \frac{1}{\omega^2} \quad (4.22)$$

mit dem linearen thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$ , der Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  und der Wärmekapazität  $C$ . Gl. (4.22) stellt das Ergebnis einer adiabatischen Näherung dar, d. h. der Wärmefluß zwischen den auftretenden Temperaturfluktuationen wird vernachlässigt. Diese Näherung wird bei tiefen Frequenzen unbrauchbar, da die auftretenden Wärmeströme die Temperaturverteilung im Substrat dann effektiv verändern. Die Ableitung erfolgte über den Langevinschen Formalismus für die Wärmeleitungsgleichung mit einer thermischen, stochastischen Kraft  $F(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \Delta T = F(\vec{x}, t) , \quad \text{mit } a^2 = \frac{\kappa}{\rho C} . \quad (4.23)$$

Dabei wird der Term  $a^2$  als Temperaturleitfähigkeit bezeichnet. Anschließend wurde die Lösung für die Temperatur  $T$  im Fourierraum berechnet. Über die so ermittelte statistische Temperaturschwankung im Substrat wird die Auslenkung der reflektierenden Oberfläche mit Hilfe der elastischen Grundgleichungen bestimmt. Schließlich ist diese Bewegung noch mit dem Intensitätsprofil des auslesenden Laserstrahls zu wichten.

Andererseits kann auch das thermoelastische Rauschen mit Levins Ansatz elegant berechnet werden. Das Grundschema zeigt analog zum Brownschen Rauschen drei Schritte. Zunächst wird erneut ein virtueller Druck, dessen örtliche Verteilung durch Gl. (4.15) gegeben ist, an die reflektierende Oberfläche angelegt und die elastische Antwort des Festkörpers berechnet. Im zweiten Schritt, der Berechnung der dissipierten Leistung, erscheint jetzt der Mechanismus der thermoelastischen Dämpfung<sup>1</sup>. Eine ausführliche Behandlung dieses Effektes ist in Anhang D dargestellt. Wiederum über Gl. (4.17) wird im dritten und letzten Schritt das thermische Rauschen mit der zeitlich gemittelten Dissipationsrate  $W_{\text{diss}}$  berechnet. Die Methode nach Levin hat vor allem in der numerischen Umsetzung erhebliche Vorteile, da sowohl die Berechnung mechanischer Probleme als auch die Lösung thermischer Fragestellungen Standardaufgaben für kommerzielle Berechnungssoftware darstellen. Damit kann der gezeigte Weg einfach sowohl auf beliebige Geometrien als auch auf anisotrope Materialien erweitert werden.

Durch Liu und Thorne [59] wurde die adiabatische Theorie auf endliche zylinderförmige Testmassen erweitert. Für typische Substratgeometrien zeigen ihre Ergebnisse eine Erhöhung des thermoelastischen Rauschens von bis zu 10%. Der adiabatische Grenzfall bricht jedoch zusammen, wenn die thermische Weglänge in den Bereich des Laserstrahldurchmessers kommt. Dann führen die einsetzenden Wärmeströme zu einem effektiven Temperatúrausgleich und vermindern so das thermoelastische Rauschniveau. Dieser Effekt wurde im Jahre 2001 [66] erstmals untersucht.

Auch die dielektrische Beschichtung zeigt thermoelastisches Rauschen. Dieses Problem wurde 2003 von Braginsky und Vyatchanin für ein Substrat mit einer einzelnen Schicht der Höhe  $h$  untersucht. Sie nehmen vereinfachend die gleichen elastischen Konstanten für Schicht und Substrat an und erhalten im adiabatischen Grenzfall [67]

$$S_z^{(\text{TE})}(\omega \rightarrow \infty) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} k_B T^2 \frac{(1 + \sigma)^2 \alpha^2 h^2}{\sqrt{\kappa \rho C}} \frac{1}{r_0^2} \sqrt{\frac{1}{\omega}}. \quad (4.24)$$

In obiger Gleichung bezeichnet  $\alpha$  die Differenz der thermischen Längenausdehnung für Schicht und Substrat. Die restlichen Materialgrößen beziehen sich auf das Substrat. In Levins Bild führt die Verformung der Schicht zu einem Wärmeeintrag in selbige. Da die Ausdehnung der Schicht relativ gering ist, findet ein Wärmefluß jedoch maßgeblich durch das Substrat statt. Deshalb finden v. a. die thermodyna-

---

<sup>1</sup>Durch den zur thermischen Ausdehnung inversen Prozeß kommt es in elastisch komprimierten und expandierten Bereichen zu einer Temperaturänderung. Der einsetzende Wärmetransport ist irreversibel und dissipiert mechanische Energie (vgl. Abschnitt 6.3).

mischen Parameter des Substrates Eingang in die Beschreibung des thermoelastischen Schichtrauschens. Weiterhin berechneten Braginsky und Vyatchanin in ihrer Näherung gleicher elastischer Konstanten den Einfluß einer endlichen Substratgeometrie. Ein Jahr später folgte die Berechnung des thermoelastischen Rauschens der Schicht ohne die Einschränkung gleicher elastischer Parameter von Fejer et al. [68]. Die Verallgemeinerung auf endliche Testmassen wird in [62] diskutiert und zeigt nur geringfügige Abweichungen für Substrathöhen größer als 2 cm. Die Berechnung des thermoelastischen Rauschens eines Schichtstapels kann dann durch eine geeignete Mittelung der Eigenschaften einzelner Schichten geschehen.

Auch die Aufhängungsfasern zeigen thermoelastisches Rauschen. Über den Levinschen Ansatz ist es mit der thermoelastischen Dämpfung der Drähte verknüpft. In Kapitel 6 wird gezeigt, daß die Aufhängungsdrähte maximale thermoelastische Verluste für  $\omega = 1/\tau$  zeigen (s. Gl. (6.12)). Über die Abhängigkeit der charakteristischen Zeit  $\tau$  vom Drahradius können die Verluste minimiert werden. Dies geschieht dadurch, daß Bereiche, die eine hohe Biegung aufweisen, mit vergrößertem Radius gefertigt werden. Damit entfernt man sich weiter vom Verlustmaximum und das thermoelastische Rauschen sinkt. Eine Vergrößerung des Durchmessers kann aber gemäß Gl. (4.20) zu einem erhöhten Brownschen Rauschen der Aufhängung führen. Unter diesem Aspekt ist also eine Optimierung der Geometrie der Aufhängungsfasern durchzuführen [69].

Dem bisher behandelten thermoelastischen Rauschen der Aufhängung liegt der Umstand zugrunde, daß eine Temperaturänderung an einer Seite der Faser zu einer Längenänderung und damit Auslenkung der Faser führt. Dieser Effekt spiegelt sich als Rauschen der Substratposition wider. Reale Fasern werden nun aber durch das Substratgewicht mit einer gewissen mechanischen Spannung versehen. Eine Änderung des Elastizitätsmoduls bewirkt dann ebenfalls eine Längenänderung der Faser. Die Temperaturfluktuationen im Material bewirken über Nichtlinearitäten des Gitters genau eine solche Änderung des Elastizitätsmoduls. Cagnoli und Willems behandeln diese zweite Rauschquelle und erörtern die Möglichkeit der Kompensation beider Anteile [70]. Dieser zweite Rauscheffekt kann durch die Ersetzung

$$\alpha \rightarrow \alpha - \frac{u_0}{E(T_0)} \left. \frac{dE}{dT} \right|_{T=T_0} \quad (4.25)$$

in den bisherigen Formeln berücksichtigt werden. Dabei bezeichnet  $u_0$  die Auslenkung des Drahtes für die durch das Substrat verursachte Zugspannung. Eine Kompensation beider Anteile ist dann durch die geschickte Wahl der Zugspannung möglich, wenn die thermischen Parameter  $\alpha$  und  $dE/dT$  gleiche Vorzeichen aufwei-

sen. Die meisten Festkörper zeigen dabei eine Abnahme des Elastizitätsmoduls mit steigender Temperatur.

### 4.3.2. Thermorefraktives Rauschen

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, wie Temperaturfluktuationen über die thermische Längenänderung das thermoelastische Rauschen als Positionsrauschen hervorrufen. Neben diesem Effekt resultiert eine Temperaturänderung auch in einer Änderung der Brechzahl im Material. Als Maß dafür sei der thermorefraktive Parameter  $\beta = dn/dT$  eingeführt. Alle Komponenten im Interferometer, die eine Transmission von Licht erfahren, prägen diesem durch die thermischen Schwankungen der Brechzahl ein Phasenrauschen auf – das sogenannte thermorefraktive Rauschen. Neben dem Strahlteiler und den Substraten der Einkoppelspiegel für die Armresonatoren zeigen auch alle optischen Beschichtungen (sowohl die hochreflektierenden Schichtstapel als auch die Antireflexschichten) diesen Effekt.

Tatsächlich wurde das thermorefraktive Rauschen zunächst für das hochreflektierende Schichtsystem des Endspiegels berechnet. Dabei wird am Endspiegel Licht der Designwellenlänge effektiv reflektiert. Dennoch dringt das elektrische Feld in die ersten Schichten des Schichtstapels ein und liest deren optische Eigenschaften aus. Temperaturschwankungen in den Schichten verursachen somit ein Phasenrauschen des reflektierten Lichts. In ihrer Berechnung dieses Effektes erhalten Braginsky, Gorodetsky und Vyatchanin [71] für einen Schichtstapel der Höhe  $H$

$$S_z^{(\text{TR})}(\omega) = \frac{\sqrt{2}k_B T^2}{\pi} \frac{\beta_{\text{eff}}^2}{\sqrt{\rho C \kappa}} \frac{H}{r_0^2} \sqrt{\frac{1}{\omega}}, \quad \text{mit } \beta_{\text{eff}} = \frac{n_2^2 \beta_1 + n_1^2 \beta_2}{4(n_1^2 - n_2^2)}. \quad (4.26)$$

Die Größe  $\beta_{\text{eff}}$  stellt eine effektive Mittelung der zwei Schichtmaterialien (Index 1 und 2) des Schichtstapels dar. Die übrigen thermischen Parameter  $\rho$ ,  $C$  und  $\kappa$  bezeichnen die Eigenschaften des Substrates. Die Ableitung obiger Gleichung wurde auf Frequenzen des Detektionsbandes  $\omega/(2\pi) \approx 10 \text{ Hz} \dots 1 \text{ kHz}$  eines Gravitationswellendetektors spezialisiert. In diesem Frequenzbereich kann für Fused Silica bei Raumtemperatur die Temperaturverteilung in der Schicht senkrecht zur Substratoberfläche als konstant angenommen werden. In ihrer Arbeit benutzten Braginsky, Gorodetsky und Vyatchanin den Langevinansatz mit einem fluktuierenden Quellterm in der Wärmeleitungsgleichung. Die Lösung des Temperaturfeldes in adiabatischer Näherung wurde genutzt, um die Phasenänderung des gaußförmigen Laserstrahls bei der Reflexion am Schichtstapel zu berechnen.

Weiterhin wurde das thermorefraktive Rauschen für den Durchgang eines La-

serstrahls durch ein zylinderförmiges Substrat endlicher Dicke  $H$  und unendlicher radialer Ausdehnung berechnet. Braginsky und Vyatchanin [72] erhalten für ihren Ansatz, der die Lösung der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung ohne adiabatische Näherung umfaßt,

$$S_z^{(\text{TR})}(\omega) = \frac{k_B T^2}{\pi} \frac{\beta^2}{\kappa} H \int_0^\infty \frac{\xi e^{-\xi}}{\left(\frac{\omega r_0^2 \rho C}{2\kappa}\right)^2 + \xi^2} d\xi. \quad (4.27)$$

Analog zur nichtadiabatischen Behandlung des thermoelastischen Rauschens verringert die Berücksichtigung der fließenden Wärmeströme auch die Höhe des thermorefraktiven Rauschens für kleine Frequenzen. Im adiabatischen Grenzfall vereinfacht sich das Integral und man erhält

$$S_z^{(\text{TR})}(\omega \rightarrow \infty) = \frac{4k_B T^2}{\pi} \frac{\kappa \beta^2}{(\rho C)^2} \frac{H}{r_0^4} \frac{1}{\omega^2}. \quad (4.28)$$

Auch dieses Ergebnis wurde aus dem Langevinansatz abgeleitet.

Später zeigte Levin, daß auch mit seinem Ansatz das thermorefraktive Rauschen zu berechnen ist [73]. In seiner Berechnung ist an den Stellen virtuell Entropie in das System einzubringen, die vom Laserstrahl ausgelesen werden. Der Laserstrahl besitze nach dem Auslesen des durchstrahlten Mediums eine effektive Phasenverschiebung von

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z = \frac{2\pi}{\lambda} \int \Delta T(\vec{x}, t) q(\vec{x}) d^3x, \quad (4.29)$$

wobei  $q(\vec{x})$  die räumliche Wichtung des Auslesens widerspiegelt. Nun bringt man aber statt einer virtuellen Kraft die virtuelle Entropiedichte  $s(\vec{x}, t) = F_0 q(\vec{x}) \cos(\omega t)$  in das System ein. Über Gl. (6.17) wird die Dissipationsrate berechnet und mit Gl. (4.17) folgt schließlich ein Ausdruck für das thermische Rauschen.

Die Behandlung thermorefraktiven Rauschens im Strahlteiler eines Interferometers führt zum Effekt stehender Wellen. Da die im Interferometerarm hin- und rücklaufende Welle eine feste Phasenbeziehung besitzt, sind stehende Wellen für die Rauschberechnung zu berücksichtigen. Dies geschah zuerst im Jahr 2009 durch Benthem und Levin [74]. Sie berechneten ein thermorefraktives Positionsrauschen von

$$S_z^{(\text{TR})}(\omega) = \frac{4k_B T^2}{\pi} \frac{\kappa \beta^2}{(\rho C)^2} \frac{H'}{r_0^2} \frac{\eta + \eta^{-1}}{2\eta^2} \frac{1}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{2k^2 r_0^2 \eta}{(\eta + \eta^{-1})(1 + (2kl_{\text{th}})^4)} \right], \quad (4.30)$$

wobei  $H'$  den vom Laserstrahl im Material zurückgelegten Weg,  $k$  die Wellenzahl im Medium und  $l_{\text{th}}$  die thermische Weglänge nach  $l_{\text{th}} = \sqrt{\kappa/(\rho C \omega)}$  beschreibt. Die Größe  $\eta$  wird durch das Verhältnis von großer zu kleiner Halbachse des Strahlprofils im Material beschrieben. Die kleine Halbachse ist dabei mit dem Strahlradius  $r_0$  des kreisförmigen Profils außerhalb des Strahlteilers identisch.

### 4.3.3. Thermooptisches Rauschen

Die vorigen Abschnitte haben gezeigt, daß thermoelastisches und thermorefraktives Rauschen als gemeinsame Ursache die Temperaturfluktuationen im Medium besitzen. Auf den vom Laserstrahl ausgelesenen optischen Weg  $nl$  wird so einmal über die thermische Längenänderung  $\Delta l = \alpha l \Delta T$  als auch über eine Änderung der Brechzahl  $\Delta n = \beta \Delta T$  Rauschen aufgeprägt. Diese gemeinsame Ursache ermöglicht eine Korrelation beider Mechanismen. Das entstehende Rauschspektrum wird dann thermooptisches Rauschen genannt. Die Korrelation erlaubt bei einer geeigneten Materialwahl ein effektiv geringeres Rauschen als die unkorrelierte Summe beider Anteile. Diese Idee wurde unabhängig voneinander von Gorodetsky [75] und Evans et al. [76] untersucht. So erhalten Evans et al. am Beispiel eines Endspiegels für aLIGO einen um den Faktor fünf geringeren Beitrag des thermooptischen Rauschens, verglichen mit der unkorrelierten Summe aus thermoelastischem und thermorefraktivem Rauschen. Die Möglichkeit der vollständigen Kompensation beider Teilprozesse besteht für den Fall des thermooptischen Rauschens des Schichtstapels jedoch nicht. Korrekturen für den Fall endlich ausgedehnter Testmassen finden sich in [62].

Die Behandlung thermooptischen Rauschens ist auch für das Substrat denkbar. Allerdings ist in diesem Fall nur eine verschwindend geringe Korrelation zu erwarten. Denn in Levins Schema bringt das thermoelastische Rauschen Wärme v. a. an der reflektierenden Oberfläche ein, während der Wärmeeintrag im thermorefraktiven Fall homogen entlang der Zylinderachse erfolgt.

# 5. Rauschanalyse geplanter IGWDs

## 5.1. Advanced LIGO (aLIGO)

Die im vorigen Teil der Arbeit beschriebenen Rauschprozesse werden in diesem Kapitel auf eine gegebene Detektorgeometrie angewandt. Als Vertreter der zweiten Generation interferometrischer Gravitationswellendetektoren wird an dieser Stelle aLIGO untersucht.

### 5.1.1. Substratmaterial

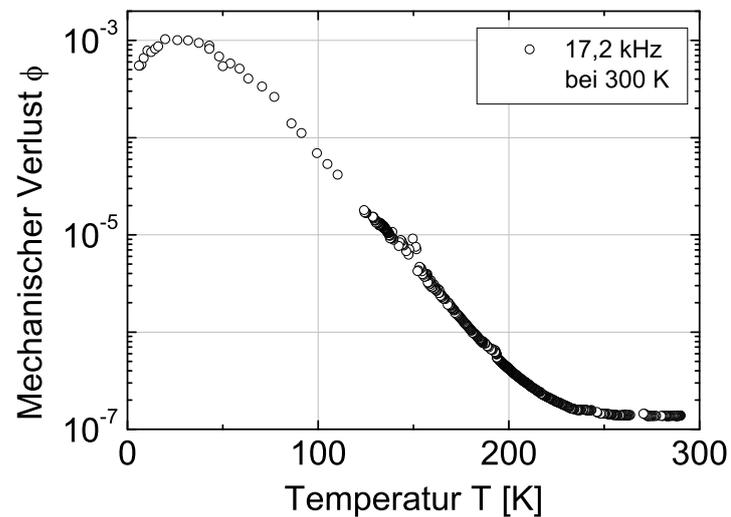
Wie die derzeit empfindlichsten Detektoren – LIGO, VIRGO und GEO600 – wird auch aLIGO bei Raumtemperatur mit Fused Silica als Substratmaterial betrieben werden. Dessen Eigenschaften sind durch vielfältige Anwendungen gut untersucht und in Tab. 5.1 zusammengefaßt. So genügen die optischen Eigenschaften den Ansprüchen an geringe Absorption und Streuung. Der amorphe Charakter von Fused Silica führt durch die fehlende Fernordnung zu einer Abnahme der mittleren freien Weglänge der Phononen und damit zu einer geringen Wärmeleitfähigkeit. Daraus resultiert das thermisch isolierende Verhalten. Zusammen mit dem – für amorphe Materialien typisch – geringen thermischen Ausdehnungskoeffizienten sorgt dies für ein geringes thermoelastisches und thermooptisches Substratrauschen. Außerdem belegen verschiedene Messungen den geringen mechanischen Verlust von Fused Silica bei Raumtemperatur [77], was in einem geringen Brownschen Substratrauschen resultiert. Mit abnehmender Temperatur steigen jedoch die mechanischen Verluste. Dieses Verhalten ist in Abb. 5.1 dargestellt und verhindert den Einsatz von Fused Silica bei kryogenen Temperaturen.

### 5.1.2. Schichtmaterial und -geometrie

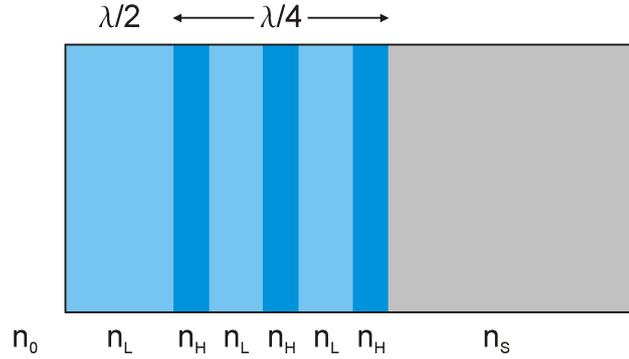
Die Reflektivität der Substrate wird durch Braggspiegel realisiert. Das dazu notwendige dielektrische Schichtsystem ist aus alternierenden  $\lambda/4$ -Schichten zweier dielektrischer Materialien mit unterschiedlicher Brechzahl aufgebaut. Das in der interfe-

Dichte $\rho$	2200 kg m <sup>-3</sup>
Elastizitätsmodul $E$	72 GPa
Querkontraktionszahl $\sigma$	0,17
Mechanischer Verlust $\phi$	$4 \cdot 10^{-10}$ [77]
spezifische Wärme $C_p$	746 J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Wärmeleitfähigkeit $\kappa$	1,38 W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
thermischer Ausdehnungskoeffizient $\alpha$	$5,1 \cdot 10^{-7}$ K <sup>-1</sup>
Brechungsindex $n$	1,45 [74]
thermooptischer Parameter $\beta$	$8,5 \cdot 10^{-6}$ K <sup>-1</sup> [74]

**Tab. 5.1.: Materialeigenschaften von Fused Silica.** Die Tabelle faßt die für eine Rauschanalyse relevanten Materialparameter bei Raumtemperatur  $T_0 = 290$  K zusammen. Nicht referenzierte Parameter wurden aus der Arbeit von Fejer et al. [68] übernommen.



**Abb. 5.1.: Temperaturabhängigkeit des mechanischen Verlustes in Fused Silica [78].** Die Zunahme des mechanischen Verlustes bei tiefen Temperaturen führt zu einem erhöhten Brownschen Rauschen bei tiefen Temperaturen. Als Substratmaterial kryogener Detektoren ist Fused Silica deshalb ungeeignet.



**Abb. 5.2.: Schichtdesign der hochreflektierenden Schichtstapel in Gravitationswellendetektoren.** Die Skizze veranschaulicht den Aufbau des Braggspiegels mit  $N = 3$  hochbrechenden  $\text{Ta}_2\text{O}_5$ -Schichten. Auf das Substrat (Brechzahl  $n_S$ ) sind dabei abwechselnd  $\lambda/4$ -Schichten hoch- und niedrigbrechender Materialien ( $n_H$ ,  $n_L$ ) abgeschieden. Die abschließende Schicht der Dicke  $\lambda/2$  besteht aus dem niedrigbrechenden Schichtmaterial. Die Brechzahl der Umgebung ist mit  $n_0$  angegeben.

rometrischen Gravitationswellendetektion gebräuchlichste Schichtpaar besteht aus Tantalpentoxid ( $\text{Ta}_2\text{O}_5$ ) als hochbrechender und Siliziumdioxid ( $\text{SiO}_2$ ) als niedrigbrechender Komponente. Dieses Schichtpaar wird auch in aLIGO Anwendung finden. Der Schichtstapel wird durch ein sog. Cap, d. h. eine  $\lambda/2$ -Schicht Siliziumdioxid abgeschlossen. Abb. 5.2 verdeutlicht die Geometrie der geplanten Schichtstapel.

Eine Analyse in Bezug auf die Amplitudenreflektivität  $r$  eines Schichtstapels mit  $N$  hochbrechenden Tantalpentoxidschichten ergibt

$$r = \frac{1 - x}{1 + x}, \quad \text{mit } x = \frac{n_L^2}{n_0 n_S} \left( \frac{n_H}{n_L} \right)^{2N}. \quad (5.1)$$

Dabei bezeichnet  $n_L$  die Brechzahl der niedrigbrechenden Komponente und  $n_H$  die der hochbrechenden. Die Brechzahlen der verwendeten Schichtmaterialien sind zusammen mit anderen Eigenschaften in Tab. 5.2 angegeben. Dort stellt der mechanische Verlust von  $\text{Ta}_2\text{O}_5$  den reduzierten Wert unter Zugabe von  $\text{TiO}_2$  dar [79–81]. In dieser Form soll das Schichtmaterial in zukünftigen Detektoren zum Einsatz kommen. Der thermooptische Parameter für die  $\text{SiO}_2$ -Schicht wurde mit dem Wert für makroskopische Fused Silica-Proben aus [82] angenähert. Einen weiteren Anhaltspunkt für die Festsetzung der Materialparameter liefert die Recherche aus [83].

Tantalpentoxid- und Siliziumdioxidschichten bilden eine amorphe Struktur und besitzen relativ geringe mechanische Güten. Mit strukturellen Schichtverlusten von  $\phi_{\text{Ta}_2\text{O}_5} = 2 \cdot 10^{-4}$  und  $\phi_{\text{SiO}_2} = 4 \cdot 10^{-5}$  trägt vor allem das Tantalpentoxid maßgeblich zum Brownschen Schichttauschen bei.

	Ta <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	SiO <sub>2</sub>
Elastizitätsmodul $E$ [GPa]	140	72
Querkontraktion $\sigma$	0,23	0,17
Dichte $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	6850	2200
Mechanischer Verlust $\phi$ [79]	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
spezifische Wärme $C_p$ [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	306	746
thermischer Ausdehnungskoeffizient $\alpha$ [K <sup>-1</sup> ]	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$5,1 \cdot 10^{-7}$
Wärmeleitfähigkeit $\kappa$ [W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ] [83]	0,6	0,5
thermooptischer Parameter $\beta = dn/dT$ [K <sup>-1</sup> ]	$8 \cdot 10^{-6}$ [84]	$8,5 \cdot 10^{-6}$ [82]
Brechungsindex $n$	2,03	1,45
Dicke einer $\lambda/4$ -Schicht [nm] @ 1064 nm	130,7	183,4

**Tab. 5.2.:** Materialeigenschaften amorpher Schichten bei Raumtemperatur. In obiger Tabelle sind die in der folgenden Rauschanalyse verwendeten Materialparameter für Raumtemperatur  $T_0 = 290$  K zusammengefaßt. Daten ohne Referenz stammen aus der Arbeit von Fejer [68].

### 5.1.3. Geometrische und optische Parameter

Da die Designphase für aLIGO abgeschlossen ist, stehen die optischen und geometrischen Parameter des Detektors fest. Sie sind in Tab. 5.3 zusammengefaßt. Der Strahldurchmesser am Strahlteiler wurde mit dem des Einkoppelspiegels gleichgesetzt. Die räumliche Nähe zwischen beiden Bauteilen erlaubt dieses Vorgehen. Die angegebenen Transmissionsgrade  $T$  entsprechen den Vorgaben aus der Designstudie. Ein Überschlag mit Gl. (5.1) und den Materialparametern aus Tab. 5.2 ergibt die Anzahl der Schichtpaare  $N$ , die dieser Vorgabe am nächsten kommt. Für den Strahlteiler kann mit zwei Schichtpaaren ( $N = 2$ ) eine nahezu symmetrische Teilung der Strahlintensität erfolgen.

### 5.1.4. Rauschanalyse

Ausgehend vom Laser trifft der Laserstrahl zunächst auf den Strahlteiler, wird geteilt und passiert den Einkoppelspiegel. Nach mehreren Umläufen im Armresonator verläßt das Laserlicht diesen erneut durch den Einkoppelspiegel. Am Strahlteiler schließlich überlagern sich beide Teilstrahlen. Eine Rauschanalyse des Detektors bedingt nun die Berücksichtigung aller Effekte, die einen Phasenunterschied zwischen den beiden Interferometerarmen verursachen. In obiger Reihenfolge erfüllt der Strahlteiler als erstes Element diese Bedingung. Neben der Bewegung der reflektierenden Oberfläche durchläuft ein Teilstrahl das Substrat des Strahlteilers und

	Endspiegel (ETM)	Einkoppel- spiegel (ITM)	Strahlteiler (BS)
Transmissionsgrad $T$	5,0 ppm [76]	1,4 % [76]	50 %
Anzahl Schichtpaare $N$	19 [76]	8 [76]	2
Radius [cm] [85]	17	17	37
Höhe [cm] [85]	20	20	6
Strahlradius $w$ [cm]	6,20 [85]	5,55 [85]	5,55
Material [85]	Fused Silica	Fused Silica	Fused Silica
Temperatur [K]	290	290	290

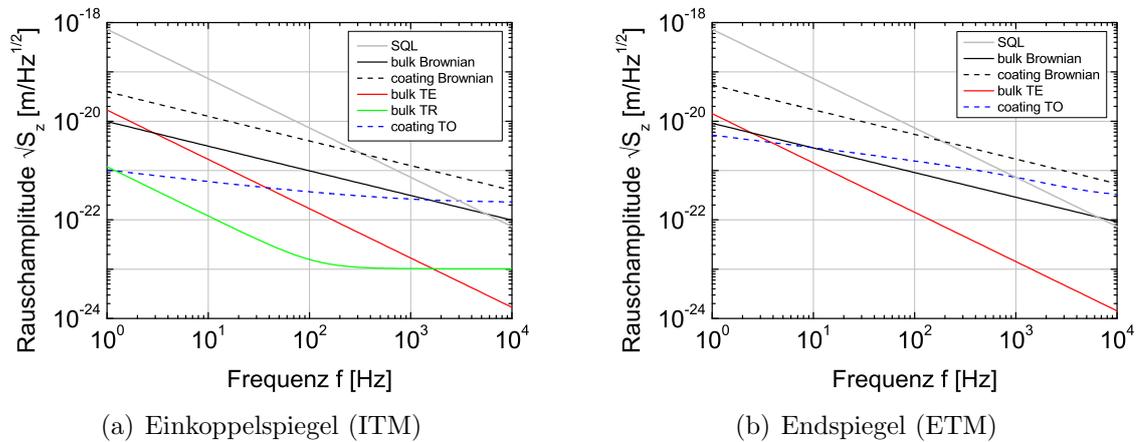
**Tab. 5.3.: Optische und geometrische Parameter für aLIGO.** Aus den gegebenen Werten folgt eine Finesse von  $\mathcal{F} = 450$ . Der Detektor soll bei einer Wellenlänge von  $\lambda = 1064$  nm und mit einer Resonatorlänge von  $L = 3995$  m betrieben werden.

unterliegt damit dem thermorefraktiven Rauschen. Auch der aus dem Interferometerarm rücklaufende Strahl erfährt dieses Rauschen. Der beschriebene Effekt wurde mit Gl. (4.30) berechnet. Ähnlich verhält es sich mit dem Substrat des Einkoppelspiegels. Auch hier kommt Gl. (4.30) zur Anwendung; allerdings für senkrechten Einfall, d. h.  $\eta = 1$ .

Für die Untersuchung der Resonatorspiegel wurde das Brownsche Rauschen für das Substrat [59] und den Schichtstapel [62] berücksichtigt. Das thermooptische Rauschen des Braggspiegels wurde in Anlehnung an [76] berechnet. Das thermisch isolierende Verhalten von Fused Silica als Substratmaterial sorgt dafür, daß der Einfluß der Randbedingungen auf das durch den Laserstrahl ausgelesene Probeninnere für thermoelastisches und thermorefraktives Rauschen vernachlässigbar ist. Deshalb kommt hier die adiabatische Theorie von Liu und Thorne [59] zum Einsatz.

Die Rauschamplitudenspektren des Einkoppel- und Endspiegels als Maß für die erreichbare Empfindlichkeit sind in Abb. 5.3 dargestellt. Das thermorefraktive Substratrauschen des Einkoppelspiegels liegt außerhalb des Armresonators und geht entsprechend abgeschwächt in die Gesamtbilanz ein. Eigene Arbeiten [86] zeigen einen Abschwächungsfaktor von  $\pi/(2\mathcal{F})$ . Dieser Faktor findet ebenfalls Eingang in die Auswertung des Rauschspektrums des Strahlteilers.

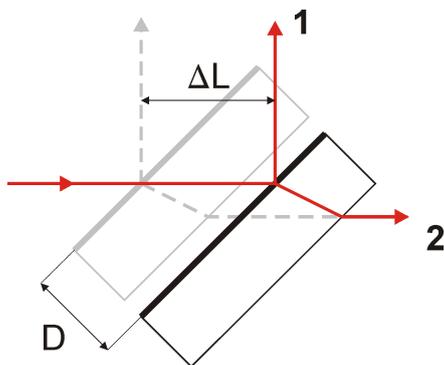
Als Vergleichsgröße wurde das Standardquantenlimit des Detektors herangezogen. Aufgrund der Verwendung von Armresonatoren ist das Leistungsspektrum aus Gl. (3.4) noch mit dem Faktor zwei zu multiplizieren. Im Ergebnis der Rauschanalyse erkennt man die Dominanz des Brownschen Rauschens des Schichtstapels über dem potentiellen Detektionsbereich. Sowohl für den Einkoppel- als auch für den Endspiegel, die das Gesamtrauschen des Detektors maßgeblich beeinflussen, liegt das



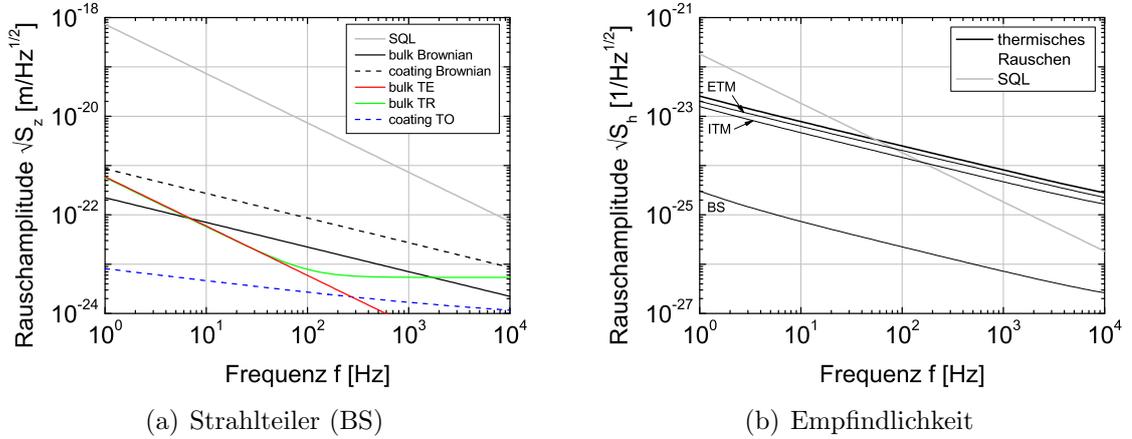
**Abb. 5.3.: Berechnetes Rauschamplitudenspektrum für den Einkoppel- und Endspiegel von aLIGO.** Beide Spiegel werden vom Brownschen Rauschen der Beschichtung dominiert und übertreffen sogar das Standardquantenlimit für Frequenzen  $\gtrsim 200$  Hz. Weitere Erläuterungen siehe Text.

Brownsche Schichtrauschen über den restlichen Rauschprozessen. Oberhalb einer Frequenz von ca. 200 Hz übertrifft es sogar das Standardquantenlimit des Detektors und begrenzt damit dessen Empfindlichkeit. Daran schließt sich für den Einkoppelspiegel das Brownsche Substratrauschen und für den Endspiegel das thermooptische Rauschen der Schicht als zweitstärkster Rauschprozeß an.

Im folgenden wird die Rauschanalyse des Strahlteilers durchgeführt. Im Unterschied zu den Resonatorspiegeln trifft das Licht hier unter einem Winkel von  $45^\circ$  auf die optische Oberfläche. In Abb. 5.4 ist der Effekt einer Verschiebung der Strahlteileroberfläche abgebildet. Dennoch können die bekannten Rauschformeln, die die Bewegung der Spiegeloberfläche beschreiben, mit einer Normierung weiterhin verwendet werden. Für diese Normierung interessiert der Einfluß der Strahlteilerverschiebung auf die Phasendifferenz der aus den Armen kommenden Teilstrahlen. In erster Ordnung kann der Einfluß der Auslenkung  $D$  auf den Phasenunterschied in Arm 1



**Abb. 5.4: Auswirkung einer Verschiebung des Strahlteilers auf den Strahlengang im Detektor.** Die Ruheposition des Strahlteilers ist grau und der Strahlengang in dieser Ruheposition grau gestrichelt gezeichnet. Der verschobene Strahlteiler ist schwarz und der zugehörige Strahlengang als durchgehende rote Linie dargestellt.



**Abb. 5.5.: Berechnetes Rauschamplitudenspektrum für den zur Verwendung in aLIGO vorgeschlagenen Strahlteiler und Empfindlichkeit des Detektors hinsichtlich der Detektion einer Gravitationswelle.** Das Rauschspektrum des Strahlteilers in (a) ist bereits für einen direkten Vergleich mit den Resonatoroptiken gewichtet. Für die Abschätzung der Detektorempfindlichkeit in (b) dienen allein die thermischen Rauschprozesse der Resonatorspiegel und des Strahlteilers. Ihr lag ein Signal-Rausch-Verhältnis von 1 zugrunde. Das Standardquantenlimit des Interferometers ist als graue Linie gezeigt. Oberhalb einer Frequenz von 50 Hz kann das thermische Rauschen die Empfindlichkeit des Detektors verringern.

vernachlässigt werden. Daß die Armlänge groß gegen die Auslenkung  $D$  ist, rechtfertigt diese Näherung. Der Interferometerarm 2 erfährt allerdings eine Verkürzung des Weges und damit eine Phasenänderung im reflektierten Licht. Die Änderung der Armlänge beträgt  $\Delta L = \sqrt{2}D$ . Damit sind alle Mechanismen, die zu einem Bewegungsrauschen der Oberfläche führen, in ihrem Amplitudenspektrum um den Faktor  $\sqrt{2}$  erhöht.

Das elliptische Strahlprofil auf dem Strahlteiler wird in dieser Arbeit als kreisförmig angenähert. Für eine Abschätzung nach oben dient dabei die kleine Halbachse als Strahlradius. Dies erlaubt die Nutzung der in den Grundlagen behandelten Gleichungen. Allein für das thermorefraktive Rauschen des Strahlteilers findet eine analytische Lösung [74] Anwendung, die das elliptische Strahlprofil berücksichtigt. Da der Strahlteiler außerhalb der Armresonatoren liegt, findet außerdem eine Vergrößerung der Rauschamplitude um den Faktor  $\pi/(2\mathcal{F})$  statt. Die Ergebnisse dieser Analyse sind in Abb. 5.5(a) gezeigt.

Auch für den Strahlteiler wird die Dominanz des Brownschen Rauschens der Beschichtung deutlich. Die Position des Strahlteilers außerhalb des Resonators sorgt jedoch dafür, daß das Standardquantenlimit über eine Größenordnung über dem Rauschen des Strahlteilers liegt. Damit ist der Rauscheinfluß des Strahlteilers für

aLIGO vernachlässigbar gering. Eventuelle Antireflexbeschichtungen auf der Rückseite des Strahlteilers blieben in obiger Analyse unberücksichtigt. Bedingt durch die geringe Dicke des Strahlteilers tragen auch diese zum Rauschen der reflektierenden Oberfläche bei. Dennoch wird die Empfindlichkeit des Detektors dadurch nicht begrenzt.

Im Vergleich zum Strahlteiler besitzt der Einkoppelspiegel eine um den Faktor 50 erhöhte Rauschamplitude. Der Endspiegel – bedingt durch den höheren Schichtstapel – besitzt eine nochmals um 50 % erhöhte Rauschamplitude. In der gewichteten Summe aller drei Elemente dominiert daher der Endspiegel das gesamte Rauschspektrum. Eine Optimierung des gesamten Detektors setzt damit v. a. eine Verringerung des Brownschen Schichtrauschens des Endspiegels voraus. In Abb. 5.5(b) ist die unabhängige Summe aller Rauschmechanismen gebildet. Hierbei ist zu beachten, daß das Positionsrauschen der Resonatorspiegel in beiden Armen auftritt. Die entsprechende Rauschleistung ist also zu verdoppeln, um einen Vergleich mit dem Strahlteilerrauschen zu ermöglichen. Über

$$\sqrt{S_h}(f) = \frac{1}{L} \sqrt{S_z}(f) \quad (5.2)$$

wurde das Positionsrauschen auf die Minimalamplitude einer detektierbaren Gravitationswelle  $h$  umgerechnet.

## 5.2. Einstein Telescope

Derzeit ist das Einstein Telescope (ET) als erster Vertreter eines Gravitationswellendetektors dritter Generation in Planung. Im Vergleich zu aLIGO soll die Empfindlichkeit dabei um eine Größenordnung erhöht werden. Aufbauend auf der Detektorgeometrie von aLIGO sind dazu mehrere Schritte notwendig. Besonders das Brownsche Rauschen der Schichtstapel ist hierbei zu minimieren.

Alle behandelten thermischen Rauschprozesse verhalten sich invers zum Strahlradius  $r_0$ . So besteht eine offensichtliche Änderung für das Einstein Telescope in einer Erhöhung von  $r_0$ . Um gleichzeitig die Beugungsverluste unverändert zu lassen, muß damit auch eine Erhöhung des Substratradius einhergehen.

Ebenfalls findet die Substrattemperatur Eingang in das thermische Rauschen. Eine Verringerung der Temperatur kann somit den Rauschpegel senken. Behält man jedoch Fused Silica als Substratmaterial bei, führen dessen wachsende Verluste bei tiefen Temperaturen zu einem Anstieg des Brownschen Substratrauschens und übertreffen sogar das Brownsche Rauschen der Schicht. An dieser Stelle ist die

Verwendung eines alternativen Substratmaterials zu erwägen. Besonders eignen sich hierzu kristalline, dielektrische Materialien mit einer möglichst geringen Konzentration an Verunreinigungen, da diese i. a. geringe mechanische Verluste auch bei tiefen Temperaturen zeigen. In dieser Hinsicht sind Silizium, Saphir und Calciumfluorid als die aussichtsreichsten Kandidaten zu nennen [87, 88]. Durch die Halbleiterindustrie getrieben ist Silizium relativ rein und in großen Abmessungen als Einkristall verfügbar. Auch die Politur gestaltet sich für Silizium einfacher als für das harte Saphir. Aus diesen Gründen schlägt die Designstudie für das Einstein Telescope Silizium als Substratmaterial vor. Die Forderung nach geringer optischer Absorption ist für Silizium bei einer Wellenlänge von 1064 nm jedoch nicht gegeben. Ein Wechsel zu einer größeren Wellenlänge weg von der fundamentalen Bandkante im Silizium kann in dieser Hinsicht Abhilfe schaffen. Vorgeschlagen wird der Betrieb von Erbiumlasern bei 1550 nm. Diese sind, von der Telekommunikation getrieben, mit hohen Leistungen verfügbar. Eine detaillierte Abschätzung des thermischen Rauschens für die Verwendung genannter Substratmaterialien findet sich in [4].

Die verbleibende optische Absorption des Laserlichts im Material verursacht einen Wärmeeintrag. Da der Wärmetransport durch Strahlung bei tiefen Temperaturen ineffizient ist und Konvektion durch das die Substrate umgebende Vakuum ausgeschlossen ist, muß die eingebrachte Wärme allein durch Wärmeleitung über die Aufhängung entzogen werden. Gleichzeitig dürfen die Aufhängungsfasern nicht zu dick werden, um das thermische Rauschen der Aufhängung nicht zu sehr zu erhöhen. Im Ergebnis dieser Optimierung stellt sich heraus, daß das im Armresonator umlaufende Laserlicht für gekühlte Substrate weit unterhalb der 830 kW von aLIGO liegen muß. Damit einher geht jedoch wiederum ein erhöhtes Schrotrauschen.

In der Konsequenz sieht die Designstudie zum Einstein Telescope die Realisierung zweier unabhängiger Detektoren vor. Im sog. Xylophonaufbau [48] existiert ein Detektor für niedrige Frequenzen (ET-LF) mit geringerer optischer Leistung in den Armresonatoren als auch ein Detektor für hohe Frequenzen (ET-HF). Für den letztgenannten sind optische Leistungen von 3 MW und Fused Silica als Substratmaterial vorgesehen. Die Spiegel sollen dabei mit einem Laserstrahl höherer transversaler Ordnung ausgelesen werden. Genaue Werte des geplanten Designs für beide Detektoren finden sich in [48].

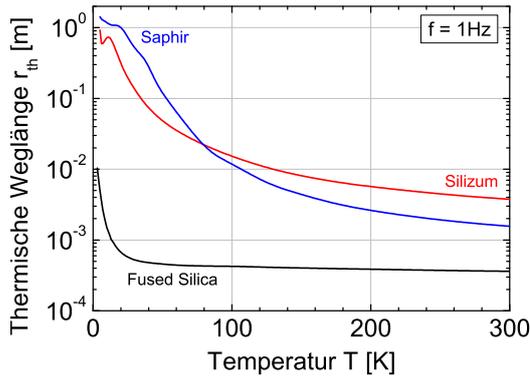
### 5.3. Thermorefraktives Rauschen endlicher Substrate

Im Einstein Telescope sollen kristalline Materialien bei kryogenen Temperaturen als Substratmaterialien zum Einsatz kommen. Durch die im Vergleich zu Raumtempe-

ratur erhöhte Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  und die verringerte Wärmekapazität  $C$  ändert sich damit auch die thermische Weglänge  $r_{\text{th}}$ , über die Wärme effektiv transportiert werden kann. Für einen periodischen Wärmeeintrag der Kreisfrequenz  $\omega$  gilt

$$r_{\text{th}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\omega\rho C}} \quad (5.3)$$

mit der Dichte  $\rho$  des Materials. Das Verhalten der thermischen Weglänge über der Temperatur ist für Silizium und Saphir als Materialkandidaten für kryogene Substrate sowie für Fused Silica in Abb. 5.6 dargestellt. Für Silizium und Saphir wächst die thermische Weglänge bei Temperaturen um 10 K auf etwa 1 m. Damit wechselwirkt die virtuell eingebrachte Wärme mit der Oberfläche des Substrates. Die Substratoberfläche kann in einer Analyse thermorefraktiven Rauschens des Einkoppelspiegels dann nicht mehr vernachlässigt werden. Die Untersuchung dieses Effektes erfolgte erstmals im Rahmen vorliegender Arbeit und ist im folgenden dargestellt.



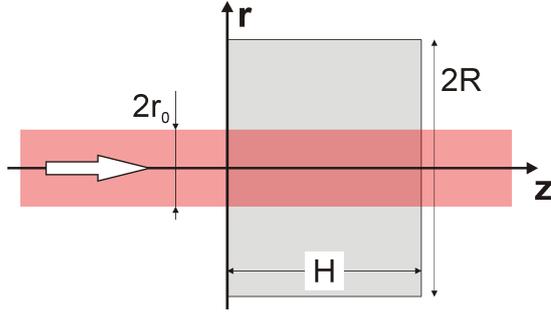
**Abb. 5.6: Temperaturabhängigkeit der thermischen Weglänge** nach Gl. (5.3). Kristalline Materialien wie Silizium oder Saphir zeigen wachsende Weglängen bei einer Temperaturabnahme. Bei Temperaturen um 10 K ergeben sich Weglängen von bis zu 1 m. Fused Silica zeigt ebenfalls eine Zunahme der Weglänge bei sinkender Temperatur. Um 5 K ist die thermische Weglänge mit 5 mm um mehr als zwei Größenordnungen kleiner als in kristallinen Materialien.

### 5.3.1. Levins Theorem und virtuelle Entropie

Die Analyse des thermorefraktiven Substratrauschens erfolgt mit Levins Theorem. Notwendige Voraussetzung für dessen Anwendung ist die Kenntnis der aufgeprägten Phasenverschiebung  $\delta\varphi$  bei einer einfachen Transmission des Laserstrahls. Die Ursache dafür ist in den thermischen Temperaturfluktuationen  $\delta T$  zu finden. Sie führen über den thermooptischen Parameter  $\beta = dn/dT$  zu einer Änderung der Brechzahl und somit zu einer Phasenverschiebung. Entsprechend Abb. 5.7 ergibt sich die Phasenverschiebung aus der Integration über das Substratvolumen  $V$  zu

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\pi r_0^2} \int_V \beta(T_0) \delta T(\vec{r}) \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) dV \quad (5.4)$$

mit der gemittelten Substrattemperatur  $T_0$  und dem Strahlradius  $r_0$ . Nach Levins



**Abb. 5.7: Transmission eines Laserstrahls durch das Substrat.** Der von links einfallende Laserstrahl (Radius  $r_0$ ) durchläuft das Substrat (Höhe  $H$ , Radius  $R$ ) entlang der  $z$ -Richtung des zylindrischen Koordinatensystems.

Ansatz erfolgt nun ein virtueller periodischer Eintrag von Entropie in das Substrat. Die Ortsabhängigkeit der Entropiedichte  $s$  kann aus Gl. (5.4) abgelesen werden und lautet

$$s(\vec{r}, t) = F_0 \cos(\omega t) \frac{\beta}{\pi r_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \quad (5.5)$$

mit der frei wählbaren Konstanten  $F_0$ . Die Entropieänderung im Substrat hat einen Wärmefluß zur Folge, der zu Dissipation im System führt. Nach Levins Theorem ist die Rauschleistung

$$S_z(\omega) = \frac{8k_B T_0}{\omega^2} \frac{W_{\text{diss}}}{s_0^2} \quad (5.6)$$

über die zeitlich gemittelte dissipierte Leistung  $W_{\text{diss}}$  zugänglich. Dabei wurde die Phasenfluktuation auf eine effektive Verschiebung der Oberfläche  $z$  umgerechnet. Die Berechnung der dissipierten Leistung setzt nach [89]

$$W_{\text{diss}} = \frac{1}{2T_0} \int_V \kappa (\nabla T)^2 dV \quad (5.7)$$

jedoch die Kenntnis des stationären Temperaturfeldes im Substrat voraus.

### 5.3.2. Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Das stationäre Temperaturfeld gehorcht der Wärmeleitungsgleichung, in der die virtuell eingebrachte Entropie einen Quellterm bildet

$$\rho C \dot{T}(\vec{r}, t) - \kappa \Delta T(\vec{r}, t) = T(\vec{r}, t) \dot{s}(\vec{r}, t) . \quad (5.8)$$

In der Näherung kleiner Temperaturschwankungen  $\delta T \ll T_0$  kann das Temperaturfeld  $T(\vec{r}, t)$  auf der rechten Seite obiger Gleichung durch den konstanten Mittelwert  $T_0$  ersetzt werden. Dieses Vorgehen erleichtert die Lösung der Wärmeleitungsglei-

chung erheblich. Weiterhin verschwindet der Wärmetransport durch die Substratoberfläche, so daß adiabatische Randbedingungen angenommen werden können

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0,H} = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 . \quad (5.9)$$

Mit dieser Annahme wird die Wärmestrahlung vernachlässigt. Eine Rechtfertigung für diese Annahme findet sich in [90]. Dort ist gezeigt, daß der Effekt der Wärmestrahlung bei kryogenen Temperaturen gegenüber der Wärmeleitung im Substrat um sechs Größenordnungen geringer ist.

Über eine zeitliche und örtliche Fouriertransformation kann obige Wärmeleitungsgleichung mit adiabatischen Randbedingungen gelöst werden. Die benutzten Basisfunktionen sind am Temperaturfeld verdeutlicht

$$T(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{nm} J_0(k_n r) \cos(l_m z) . \quad (5.10)$$

Hierbei stellt  $J_0$  die Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung dar. Die Größen  $k_n$  und  $l_m$  gehorchen den Beziehungen

$$k_n = \frac{a_n}{R} , \quad l_m = m \frac{\pi}{H} \quad (5.11)$$

mit den Nullstellen  $a_n$  der Besselfunktion erster Ordnung  $J_1(a_n) = 0$ . Die detaillierte Rechnung ist von Heinert et al. in [90] gezeigt. Vorliegende Arbeit charakterisiert erstmals die thermorefraktive Rauschleistung unter Berücksichtigung einer endlichen Substratausdehnung als

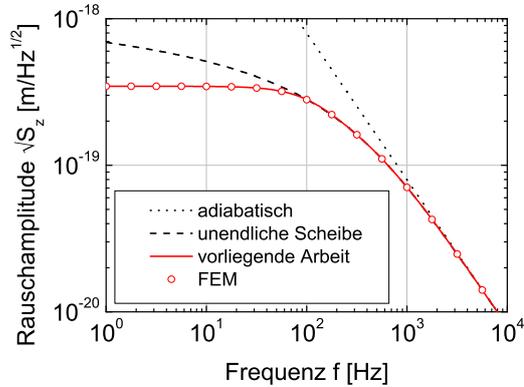
$$S_z(\omega) = \frac{16}{\pi} k_B T_0^2 \frac{H R^2}{r_0^4} \frac{\kappa \beta^2}{\rho^2 C^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2}{[J_0(a_n)]^2} \frac{K_n^2}{\omega^2 + \frac{\kappa^2}{\rho^2 C^2} k_n^4} \quad (5.12)$$

mit

$$K_n = \int_0^1 J_0(a_n \zeta) \exp\left(-\frac{R^2}{r_0^2} \zeta^2\right) \zeta \, d\zeta . \quad (5.13)$$

### 5.3.3. Vergleich mit früheren Theorien und FE-Rechnungen

Das Ergebnis für das thermorefraktive Rauschen endlicher Substrate wird in diesem Abschnitt mit älteren Theorien und einer numerischen Berechnung verglichen. Als Grundlage dafür wird eine potentielle Detektorgeometrie für ET mit einem Radius von  $R = 25$  cm und  $H = 46$  cm und einem Strahlradius von  $w_0 = \sqrt{2} r_0 = 90$  mm



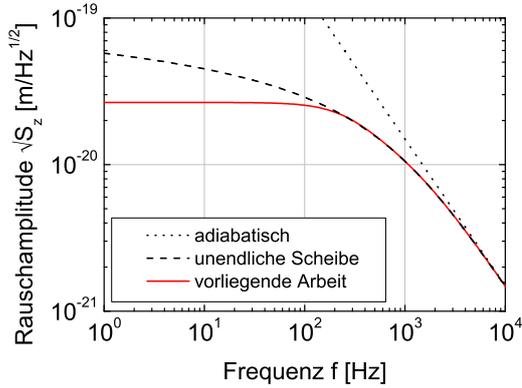
**Abb. 5.8: Thermorefraktives Rauschen in Silizium bei 10 K** nach Gl. (5.12). Im Vergleich zur adiabatischen Theorie führt die endliche Ausdehnung der Substrate zu einer deutlichen Verringerung des Rauschens für Frequenzen  $f < 1000$  Hz. Auch das Modell einer unendlichen Scheibe [72] liefert für Frequenzen unter 100 Hz zu hohe Werte. Zusätzlich bestätigt eine Berechnung des Rauschens mittels finiter Elemente die entwickelte Theorie. Allen Berechnungen lag eine Geometrie von  $\varnothing 500$  mm  $\times$  460 mm zugrunde.

gewählt. Das thermorefraktive Rauschen eines Siliziumsubstrates bei  $T_0 = 10$  K ist in Abb. 5.8 gezeigt. Als konservative Abschätzung liegt der Rechnung ein thermo-optischer Parameter von  $\beta = 1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  zugrunde. Die übrigen Materialparameter wurden aus [86] übernommen.

Für niedrige Frequenzen zeigt das thermorefraktive Rauschen ein konstantes Niveau. In diesem Bereich wird das thermische Gleichgewicht im Substrat erreicht. Dabei verhindern die adiabatischen Randbedingungen eine weitere Zunahme des Rauschens bei einer Frequenzverringern. Bei einer Frequenz nahe 100 Hz erreicht die thermische Weglänge die Größenordnung des Substratradius. Für höhere Frequenzen gelangt die virtuell eingebrachte Wärme effektiv nicht mehr an die Substratoberfläche. Oberhalb dieser Frequenz ergibt sich deshalb eine Übereinstimmung mit dem Modell der unendlich ausgedehnten Scheibe [72]. In beiden Modellen wird die stationäre Temperaturverteilung unter Berücksichtigung der fließenden Wärmeströme ermittelt. Das adiabatische Modell hingegen vernachlässigt den Einfluß der Wärmeströme und zeigt damit eine  $1/f$ -Abhängigkeit in der Rauschamplitude. Das in vorliegender Arbeit entwickelte Modell stimmt für Frequenzen oberhalb von 1000 Hz mit dem adiabatischen Grenzfall überein.

Zusätzlich wurde die Wärmeleitungsgleichung, Gl. (5.8), numerisch mit der Methode finiter Elemente gelöst. Zum Einsatz kam dabei die Software COMSOL [91]. Die für das Siliziumsubstrat numerisch ermittelten Rauschwerte stimmen mit Abweichungen unter 1 % mit den analytischen Werten überein und bestätigen damit die analytische Herleitung.

Auch für Saphir ergibt sich ein ähnliches Verhalten. Bei gleichen Geometrieparametern und einer Substrattemperatur von 10 K erhält man das in Abb. 5.9 gezeigte Verhalten. Der thermo-optische Parameter bei 10 K wurde mit der Meßempfindlichkeit der Anordnung aus [92] mit  $\beta = 9 \cdot 10^{-8} \text{ K}^{-1}$  angenommen. Die übrigen Werte



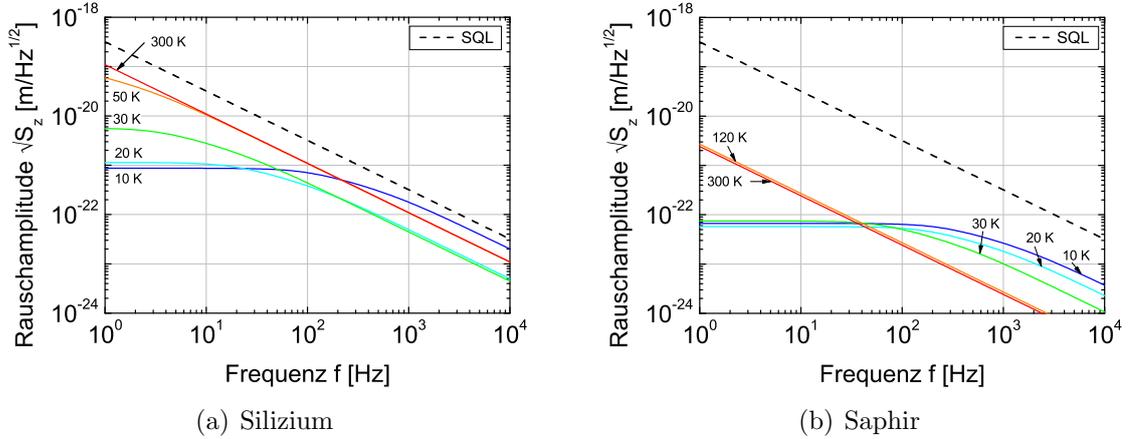
**Abb. 5.9: Thermorefraktives Rauschen eines Saphirsubstrates bei 10 K** nach Gl. (5.12). Bildunterschrift analog zu Abb. 5.8.

stammen aus [86]. Im Vergleich zu Silizium zeigt Saphir aufgrund des kleineren thermooptischen Parameters ein geringeres thermorefraktives Rauschen im Detektionsband. Durch die erhöhte thermische Weglänge weicht das Modell der unendlichen Scheibe hier bereits für Frequenzen  $f < 200$  Hz von vorliegender Theorie ab.

### 5.3.4. Anwendung auf die ET-Geometrie

Mit der entwickelten Theorie soll nachfolgend das thermorefraktive Rauschen des Einkoppelspiegels für ET-LF berechnet werden. Ein Vergleich mit dem Standardquantenlimit im Detektor erlaubt eine Bewertung thermorefraktiven Rauschens hinsichtlich der Beschränkung der Detektorempfindlichkeit. Hier muß wiederum berücksichtigt werden, daß der Einkoppelspiegel als Rauschquelle außerhalb des Armresonators liegt. Dies hat eine Abschwächung der Rauschamplitude mit dem Faktor  $\pi/(2\mathcal{F})$  zur Folge. Die Berücksichtigung beider Interferometerarme mit ihrem unkorrelierten Rauschen führt außerdem zu einer Erhöhung der Rauschamplitude mit dem Faktor  $\sqrt{2}$ . Das mit einer geplanten Finesse von  $\mathcal{F} = 885$  verbundene thermorefraktive Rauschen ist in Abb. 5.10 für Silizium- und Saphirsubstrate und verschiedene Substrattemperaturen gezeigt.

Für eine Minimierung aller Rauschmechanismen bietet sich grundsätzlich die Verwendung möglichst geringer Temperaturen an. In einem realen Detektor muß jedoch die durch die umlaufende Strahlung absorbierte Wärme aus den Testmassen abgeführt werden. Dazu werden kurze Aufhängungsfasern mit großem Querschnitt benötigt, die Wärme effektiv transportieren können. Eine rauscharme Aufhängung muß andererseits eine große Länge und eine hohe mechanische Spannung, also einen kleinen Querschnitt besitzen (s. Gl. (4.20)). Vor diesem Hintergrund scheint eine Substrattemperatur unterhalb 10 K schwer realisierbar zu sein. Für Siliziumtestmassen bei 10 K liegt für Frequenzen über 500 Hz das thermorefraktive Rauschen nur um den Faktor zwei unterhalb des Standardquantenlimits. Sollte jenes weiter gesenkt

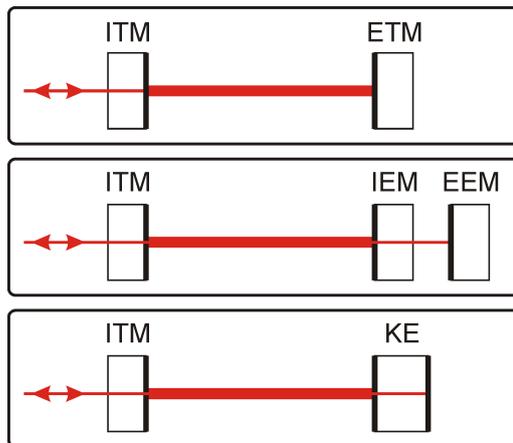


**Abb. 5.10.: Thermorefraktives Rauschen von Silizium- und Saphirsubstraten.** Die Ergebnisse gelten für zylindrische Substrate ( $\varnothing 500 \text{ mm} \times 460 \text{ mm}$ ) und zeigen ebenfalls die Temperaturabhängigkeit des thermorefraktiven Rauschens. Wärmeleitfähigkeit und spezifische Wärme wurden aus [93] entnommen. Der thermooptische Parameter für Silizium stammt aus [94] und für den ordentlichen Strahl im Saphir aus [92, 95].

werden, ist eine Begrenzung der Detektorempfindlichkeit durch das thermorefraktive Rauschen des Einkoppelspiegels zu erwarten. Für steigende Temperaturen zeigt sich eine Abnahme der Grenzfrequenz für den konstanten Bereich. Oberhalb von 50 K wird das thermorefraktive Rauschen näherungsweise temperaturunabhängig und folgt im Frequenzverlauf den Vorhersagen der adiabatischen Theorie. Es liegt mit dem Faktor drei unter dem Standardquantenlimit.

Hinsichtlich des thermorefraktiven Rauschens des ITM bei tiefen Temperaturen ist Saphir jedoch vorzuziehen. Über dem untersuchten Temperaturbereich von 10 K bis 300 K liegt sein thermorefraktives Rauschen mindestens eine Größenordnung unter dem Standardquantenlimit.

Die für ET-LF geplanten Siliziumsubstrate liegen mit ihrem thermorefraktiven Rauschen unter dem Standardquantenlimit und werden die Empfindlichkeit des Detektors deshalb nicht beeinflussen. Jedoch besitzt die Finesse des Armresonators einen entscheidenden Einfluß auf die Wichtung im Vergleich mit Rauschprozessen im Resonator. Für Anwendungen mit geringerer Finesse ist deshalb eine Beeinflussung durch thermorefraktives Rauschen zu erwarten. Bei niedrigen Frequenzen, tiefen Temperaturen und kristallinen Materialien verursacht die adiabatische Randbedingung an der Substratoberfläche ein konstantes Rauschniveau. Dort liegt das Rauschen unterhalb der Vorhersagen durch frühere Theorien unendlich ausgedehnter Substrate.



**Abb. 5.11: Khalilikavität und Khalilietalon.** Die Abbildung zeigt den einfachen Armresonator mit zwei Spiegeln (ITM und ETM). Ersetzt man den Endspiegel (ETM) durch eine Kavität (IEM und EEM), gelangt man zur Khalilikavität. Diese ist in der mittleren Abbildung dargestellt. Ein Khalilietalon (KE) zeichnet sich ebenfalls durch eine Aufteilung der reflektierenden Schichten aus. Allerdings geschieht dies, wie die untere Abbildung verdeutlicht, auf der Vorder- und Rückseite desselben Substrates.

## 5.4. Minimierung Brownschen Schichtrauschens

Die in diesem Kapitel untersuchten Detektoren sind in Bezug auf thermisches Rauschen maßgeblich durch das Brownsche Rauschen der dielektrischen Schichten – insbesondere des Tantalpentoxids – begrenzt. Der Grund dafür ist in der amorphen Struktur und dem damit einhergehenden hohen mechanischen Verlust zu sehen. Neben der Vergrößerung des Strahlradius existieren weitere grundlegende Ansätze zur Minimierung Brownschen Schichtrauschens. Diese bedürfen jedoch weiterer Untersuchungen, um eine Anwendung auch technologisch sicherzustellen und wurden in der Designstudie zum Einstein Telescope deshalb nicht berücksichtigt.

### 5.4.1. Khalilikavität

Ein Ansatz zur Verringerung des Schichtrauschens besteht in der Ersetzung des Endspiegels durch eine antiresonante Kavität. Die nach Khalili [5] vorgeschlagene Konfiguration weist für die antiresonante Kavität einen Einkoppelspiegel mit geringerer Reflektivität und geringerer Anzahl dielektrischer Schichten auf. Der Endspiegel der Khalilikavität besitzt ähnlich dem ursprünglichen Endspiegel eine nahezu ideale Reflektivität. Durch die verringerte Lichtintensität in der Khalilikavität hat eine Rauschbewegung des hinteren Spiegels nur eine geringe Phasenverschiebung des reflektierten Lichts zur Folge. Hauptsächlich bestimmt der vordere Spiegel mit seiner geringen Anzahl dielektrischer Schichten das Rauschen. Effektiv wird also eine hohe Reflektivität mit geringem Rauschen realisiert. Die Geometrie der Khalilikavität ist in Abb. 5.11 gezeigt.

Eine detaillierte Berechnung bedient sich wiederum des Fluktuations-Dissipations-Theorems nach Levin. Dazu muß zunächst der Phasenunterschied bei einer Positionsänderung der beiden Spiegel bekannt sein. Für das von der Khalilikavität

reflektierte Licht ergibt sich ein Reflexionskoeffizient von (siehe z. B. [96])

$$r = e^{2ik_0z_1} \frac{r_1 - r_2 e^{2i\theta}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\theta}}, \quad \theta = k_0 n (z_2 - z_1), \quad (5.14)$$

wobei  $z_1$  und  $z_2$  die Positionen von IEM und EEM darstellen.  $k_0$  symbolisiert die Wellenzahl des Laserlichts im Vakuum und  $n$  die Brechzahl des Mediums zwischen den Spiegeln. Im Falle der Khalilikavität wird der Raum zwischen den Spiegeln evakuiert, so daß dafür  $n = 1$  gesetzt werden kann. Der erste Term beschreibt allein die Phasenänderung durch Verschiebung des Spiegels IEM, während der zweite Teil den Reflexionskoeffizienten der Kavität bei veränderlicher Länge darstellt.

Der Einfluß von Positionsänderungen  $\Delta z_1$  und  $\Delta z_2$  beider Spiegel kann aus der Taylorentwicklung um die Antiresonanz ( $\exp[2i\theta] = -1$  und  $z_1 = 0$ ) abgelesen werden. Diese lautet

$$r \approx \frac{r_1 + r_2}{1 + r_1 r_2} + 2ik_0 (\tilde{e}_1 \Delta z_1 + \tilde{e}_2 \Delta z_2) \quad (5.15)$$

mit

$$\tilde{e}_1 = \frac{r_1 + r_2}{1 + r_1 r_2} - \frac{nr_2(1 - r_1^2)}{(1 + r_1 r_2)^2}, \quad \tilde{e}_2 = \frac{nr_2(1 - r_1^2)}{(1 + r_1 r_2)^2}. \quad (5.16)$$

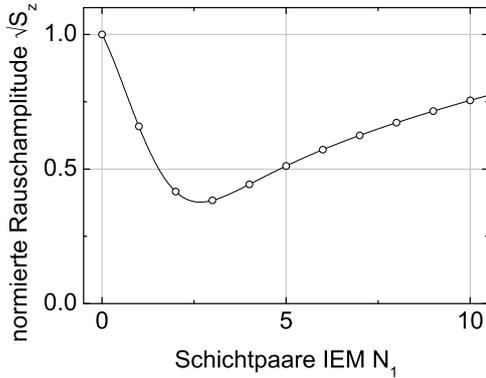
Für die Anwendung in der Gravitationswellendetektion interessiert der Fall eines hochreflektierenden Spiegels EEM ( $r_2 = 1$ ). In dieser Näherung kleiner Auslenkungen ergibt sich eine Phasenverschiebung des reflektierten Strahls von

$$\Delta\varphi = 2k_0 [e_1 \Delta z_1 + e_2 \Delta z_2] \quad (5.17)$$

mit

$$e_1 = 1 - n \frac{1 - r_1}{1 + r_1}, \quad e_2 = n \frac{1 - r_1}{1 + r_1}. \quad (5.18)$$

Die Koeffizienten  $e_i$  bestimmen damit den Einfluß der Bewegungen der Oberfläche auf das Phasenrauschen des reflektierten Strahls. Entsprechend Levins Ansatz müssen zur Ermittlung des Brownschen Rauschens auch die auf die Spiegel aufgebrauchten virtuellen Drücke mit den Parametern  $e_i$  gewichtet werden. An zwei Beispielen wird diese Wichtung veranschaulicht. Für einen idealen Einkoppelspiegel IEM ( $r_1 = 1$ ) erhält man  $e_1 = 1$  und  $e_2 = 0$ . Die Bewegung des Spiegels EEM verändert die Phase des reflektierten Lichts nicht. Dementsprechend sind die Rauscheigenschaften dieses Spiegels unerheblich und der nach Levin aufgebrauchte Druck auf diesen Spiegel muß



**Abb. 5.12: Normierte Amplitude des Brownschen Schichtrauschens als Funktion der Schichtanzahl des IEM.** Deutlich erkennbar ist ein Minimum für  $N_1 = 3$  Schichtpaare auf dem IEM. Die Schichtanzahl auf dem EEM wurde so gewählt, daß insgesamt  $N_1 + N_2 = 20$  Schichtpaare in der Kavität vorhanden sind. Werte  $N_1 > 10$  erfüllen die Forderung  $r_2 \approx 1$  nicht mehr und sind deshalb nicht dargestellt. Als Substratmaterial wurde Fused Silica angenommen.

ebenfalls verschwinden. Diese Situation spiegelt den Fall eines konventionellen Endspiegels wider. Ein ähnliches Resultat ergibt sich für einen komplett transmissiven Spiegel IEM ( $r_1 = 0$ ) unter Berücksichtigung von  $n = 1$ . Weiterhin ist die Summe  $e_1 + e_2 = 1$  konstant und entspricht dem Wert eines einfachen Endspiegels. Die Khalilikavität erlaubt nun eine Wichtung der Rauscheigenschaften beider Spiegel über den Reflexionskoeffizienten  $r_1$ .

Der Effekt der Khalilikavität auf des Brownsche Schichtrauschen kann in einer ersten Überschlagsrechnung deutlich gemacht werden. Dazu werden Schichtpaare mit insgesamt  $N = 20$   $\text{Ta}_2\text{O}_5$ -Schichten auf beide Substrate verteilt. Diese sind mit der in Abb. 5.2 dargestellten Geometrie angenommen. Dabei wird die Anzahl der Schichtpaare  $N_1$  auf dem Spiegel IEM variiert und die Anzahl der Schichtpaare auf dem Spiegel EEM mit  $N_2 = 20 - N_1$  angenommen. Mit der Variation der Reflexionskoeffizienten ändert sich ebenfalls die Verteilung der aufgebrachten virtuellen Drücke  $e_i F_0$ . Im linearen elastischen Substrat und mit dem Modell der Strukturdämpfung ist die dissipierte Leistung  $W_{\text{diss}}$  proportional zum Quadrat dieser Größe. Außerdem skaliert die Rauschleistung Brownschen Schichtrauschens mit der Schichtdicke und damit mit der Anzahl der Schichtpaare  $N_i$ . Da die Rauschbeiträge beider Spiegel unabhängig sind, kann die gesamte Rauschleistungsichte Brownschen Rauschens über die einfache Summe

$$S_z \propto N_1 e_1^2 + N_2 e_2^2 \quad (5.19)$$

berechnet werden. Mit den Parametern aus Tab. 5.1 ergibt sich das in Abb. 5.12 gezeigte Verhalten. In dieser Abschätzung wird deutlich, daß die Verwendung von Khalilikavitäten statt konventioneller Endspiegel ( $N_1 = 0$ ) eine Senkung der Amplitude Brownschen Rauschens um bis zu 60 % erlaubt.

Die Aufteilung der Reflexion und damit der virtuellen Kräfte wirkt sich auch auf die Rauschprozesse des Substrates aus. Für die zugrundeliegenden linearen Pro-

zesse ergibt sich die dissipierte Leistung auch hier über das Quadrat der Amplitude der virtuellen Drücke und damit über  $e_i^2$ . Die gesamte Rauschleistung beider unkorrelierter Bewegungen kann in der Summe der dissipierten Leistungen gefunden werden. Für identische Substrate IEM und EEM gilt

$$S_z \propto e_1^2 + e_2^2 . \quad (5.20)$$

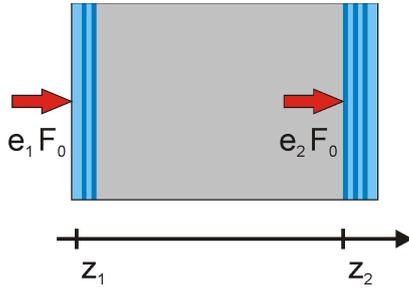
Hieran wird deutlich, daß eine symmetrische Teilung  $e_1 = e_2 = 0,5$  im Vergleich zum konventionellen Spiegel zu einer Halbierung der Rauschleistung führen kann.

Die Verringerung thermischen Rauschens durch die Khalilikavität bringt jedoch einige technische Herausforderungen mit sich [97]. Am aufwendigsten gestaltet sich dabei die Stabilisierung der zusätzlich eingefügten Kavität auf Antiresonanz. Eine technische Realisierung wäre mit einer zusätzlichen Anzahl an Regelkreisen verbunden. Eine solche Verkomplizierung mit der damit verbundenen erhöhten Fehleranfälligkeit ist unerwünscht. Außerdem müßten in einem Detektor beide Spiegel (IEM und EEM) eine separate Aufhängung besitzen. Ein weiterer Nachteil besteht in dem neu auftretenden Mechanismus thermorefraktiven Substratrauschens im IEM. Ebenfalls kann im IEM die optische Absorption über die Ausbildung einer thermischen Linse die Funktionsweise des Detektors beeinträchtigen. Die Verwendung von Khalilietalons, die im nächsten Abschnitt diskutiert wird, kann einige der genannten Nachteile kompensieren.

### 5.4.2. Khalilietalon

Ein Khalilietalon [96] verwirklicht die Idee Khalilis mit einem einzigen Substrat. Wie in Abb. 5.11 dargestellt, werden die zwei reflektierenden Schichtstapel dabei auf dasselbe Substrat aufgebracht. Die Verwendung eines Substrates erlaubt somit die Verwendung einer einzigen Aufhängung. Weiterhin kann das Etalon durch eine relativ einfache Temperaturregelung über den Wärmeausdehnungskoeffizienten des Substrates in Antiresonanz gehalten werden. Die Verwendung von Khalilietalons umgeht dadurch die zwei gravierendsten technischen Probleme der Khalilikavität.

Im Unterschied zur Khalilikavität existiert jedoch eine elastische Kopplung zwischen der thermischen Bewegung der hinteren Spiegelfläche und der Auslenkung der vorderen Spiegelfläche. Damit sind beide Rauschprozesse nicht mehr unkorreliert. Im Rahmen vorliegender Arbeit wurde erstmalig das thermische Rauschen eines Khalilietalons unter Berücksichtigung der genannten Korrelation untersucht und optimiert. Die Ergebnisse werden im folgenden vorgestellt.



**Abb. 5.13: Virtuelle Kräfte am Khalilietalon.**

Die virtuelle Kraft an der dem Strahl zugewandten Seite wird auf der Grenzfläche Schicht-Luft ( $z_1$ ) auf das Khalilietalon aufgebracht. Im Unterschied dazu greift die virtuelle Kraft auf der dem Strahl abgewandten Seite an der Grenzfläche Substrat-Schicht ( $z_2$ ) an. Der hintere Schichtstapel ist damit in  $z$ -Richtung spannungsfrei ( $\sigma_{zz} = 0$ ).

Am Anfang der Betrachtung steht erneut Levins Schema. Die dafür angelegten virtuellen Kräfte  $e_1 F_0$  und  $e_2 F_0$  können aus Gl. (5.18) übernommen werden. Der einzige Unterschied zur Khalilikavität besteht in der Verwendung eines Substrates mit einer Brechzahl  $n \neq 1$ . Die Geometrie der aufgeprägten Kraft wird in Abb. 5.13 deutlich. Die Wechselwirkung des vorderen Schichtstapels mit dem einfallenden Laserlicht ist direkt an der Grenze Luft-Schicht maximal. Deshalb wird hier die virtuelle Kraft angelegt. Innerhalb des antiresonanten Etalons ist die Intensität verringert, so daß eine Auswirkung auf die Grenzfläche Substrat-Schicht für den vorderen Schichtstapel vernachlässigt werden kann. Der hintere Schichtstapel hingegen wird allein durch das Licht im Etalon ausgelesen. Levins Kraft wird für den hinteren Schichtstapel deshalb an der Grenzfläche Substrat-Schicht aufgeprägt.

Die Kenntnis der elastischen Antwort des Substrates auf die virtuellen Kräfte stellt den wesentlichen Schritt zur Berechnung des Brownschen Schichttauschens dar. Aufgrund der geringen Dicke der Schichtstapel im Vergleich zum Substrat können diese für die Lösung des elastischen Problems vernachlässigt werden. Als Randbedingungen sind allein die Normalkomponenten der Spannung  $\sigma_{zz}$  an Front- und Rückseite des Substrates von null verschieden. Sie entsprechen den nach Levin aufgeprägten Drücken  $e_1 F_0 f(r)$  und  $e_2 F_0 f(r)$  und sind entsprechend dem Strahlprofil

$$f(r) = \frac{1}{\pi r_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \quad (5.21)$$

normiert. Zur Lösung des Problems findet die Theorie von Bondu, Hello und Vinet [60] Anwendung. Sie beschränkt sich auf isotrope und homogene Materialien als übliche Annahme in der Berechnung thermischen Rauschens. Über die Wahl von Besselfunktionen als geeigneten Basisfunktionen kann die Auslenkung des Substrates

$\vec{u}$  in Zylinderkoordinaten  $(r, \theta, z)$  bestimmt werden

$$u_r = \sum_m A_m(z) J_1(k_m r) + \Delta u_r , \quad (5.22)$$

$$u_\theta = 0 , \quad (5.23)$$

$$u_z = \sum_m B_m(z) J_0(k_m r) + \Delta u_z . \quad (5.24)$$

Mit dieser Zerlegung können die Komponenten des Dehnungstensors berechnet werden. Für das radialsymmetrische Problem sind nur die Einträge

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} , \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} , \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} , \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (5.25)$$

von null verschieden [89]. Über die elastischen Grundgleichungen

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{rr} + \lambda\epsilon_{\theta\theta} + \lambda\epsilon_{zz} , \quad (5.26)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\epsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\epsilon_{\theta\theta} + \lambda\epsilon_{zz} , \quad (5.27)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\epsilon_{rr} + \lambda\epsilon_{\theta\theta} + (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} , \quad (5.28)$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu\epsilon_{rz} \quad (5.29)$$

und die Lameschen Koeffizienten [89]

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} , \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (5.30)$$

kann damit auch die mechanische Spannung  $\sigma_{ij}$  im Substrat berechnet werden. Eine detaillierte Rechnung dazu findet sich in [96]. In einem zweiten Schritt wird nun die mechanische Spannung und Dehnung in der Schicht berechnet. Dies geschieht über die Übergangsbedingungen. Mit der Forderung eines stetigen Übergangs der wirkenden Kräfte und der Auslenkung beim Durchtritt durch die Grenzfläche erhält man in Zylinderkoordinaten [61]

$$\epsilon'_{rr} = \epsilon_{rr} , \quad \epsilon'_{\theta\theta} = \epsilon_{\theta\theta} , \quad \epsilon'_{rz} = \epsilon_{rz} , \quad \sigma'_{zz} = \sigma_{zz} , \quad \sigma'_{rz} = \sigma_{rz} , \quad (5.31)$$

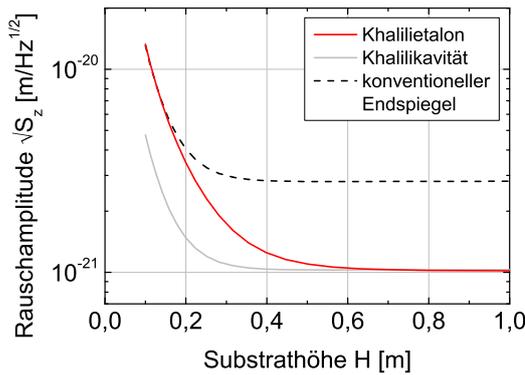
wobei die gestrichenen Schichtgrößen durch die ungestrichenen Substratgrößen vorgegeben werden. Mit den elastischen Grundgleichungen und den Lamekoeffizienten der Schicht können wiederum alle Komponenten des Dehnungs- und Spannungstensors berechnet werden. Schließlich ist die in der Schicht mit dem Volumen  $V'$  gespeicherte mechanische Energie  $U'$  durch die berechneten Spannungs- und Deh-

nungskomponenten über

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{V'} \epsilon'_{ij} \sigma'_{ij} dV' \approx \pi d' \sum_i \int_0^R \epsilon'_{ii}(r) \sigma'_{ii}(r) r dr \quad (5.32)$$

zugänglich.  $R$  steht hierbei für die radiale Ausdehnung der Schicht, die mit dem Substratradius gleichgesetzt wird. In der Näherung obiger Gleichung wurde die Radialsymmetrie des Problems berücksichtigt. Außerdem wurden wegen der geringen Schichtdicke  $d'$  die elastischen Variablen als konstant in  $z$ -Richtung angenommen. Da Levins Drücke nur senkrecht auf die Spiegeloberfläche aufgebracht sind, entstehen ebenfalls keine Scherkomponenten, so daß zur Ermittlung der Energie eine Summation über die Normalkomponenten ausreicht. In der verwendeten Näherung spielt die Anordnung der einzelnen Schichten keine Rolle. Für das Rauschen entscheidend ist einzig die Gesamtdicke und der Verlust der verwendeten Schichten.

Der Vergleich zwischen einem konventionellen Endspiegel und einem Khalilietalon ist in Abb. 5.14 zu erkennen. Dem dortigen Vergleich liegt in Anlehnung an das Einstein Telescope (ET-HF) ein Strahlradius von  $w_0 = 12$  cm und ein Substrat mit einem Radius von  $R = 31$  cm zugrunde. Die Anzahl der  $\text{Ta}_2\text{O}_5$ -Schichten beträgt  $N_1 = 3$  für die Vorder- und  $N_2 = 17$  für die Rückseite. Dem konventionellen Endspiegel wurde ein Schichtstapel mit  $N_1 = 20$   $\text{Ta}_2\text{O}_5$ -Schichten zugrundegelegt und dessen Rauschen entsprechend [62] berechnet.



**Abb. 5.14: Brownsches Schichtrauschen eines Khalilietalons als Funktion der Substrathöhe** für 100 Hz als typische Frequenz des Detektionsbandes. Im Vergleich dazu ist das Schichtrauschen einer Khalilikavität mit gleichen Substraten und eines konventionellen Endspiegels gleicher Reflektivität gezeigt. Mit den im Text beschriebenen Schichtgeometrien ergeben sich Parameter  $e_1 = 0,87$  und  $e_2 = 0,13$ .

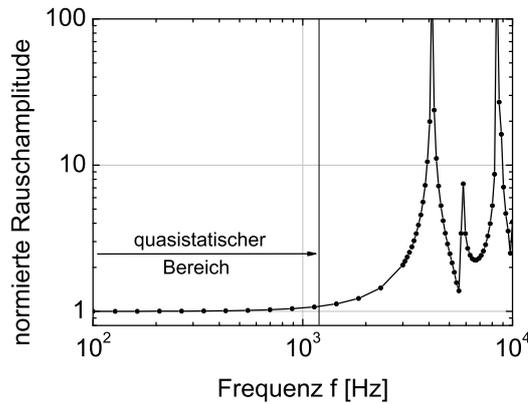
Ein konventioneller Endspiegel zeigt für eine zunehmende Substrathöhe ein abnehmendes Brownsches Schichtrauschen. Ab einer Höhe von  $H = 30$  cm wird ein konstantes Rauschniveau erreicht. Dies ist auch die Substrathöhe, die ein konventioneller Spiegel in einem Detektor besitzen sollte. Größere Spiegel wären sowohl in der Herstellung als auch in der Handhabung im Detektor aufwendiger. Diese Erkenntnis vorliegender Arbeit floß in die Parameterstudie zum Einstein Telescope [48] ein.

Ein Khalilietalon zeigt qualitativ das gleiche Verhalten abnehmenden Rau-

schens für zunehmende Substrathöhen. Allerdings ist es durchweg rauschärmer als der konventionelle Spiegel. Mit der Ersetzung des genannten konventionellen Endspiegels durch ein Khalilietalon gleicher Geometrie sinkt die Amplitude Brownschen Schichtrauschens auf 55 %. Die Sättigung ist hier jedoch erst bei einer Substrathöhe von  $H = 60$  cm erreicht. Im Vergleich zum konventionellen Endspiegel sinkt die Rauschamplitude dort auf 40 %. Für größere Substrathöhen und die untersuchte Frequenz von 100 Hz besteht praktisch keine mechanische Kopplung zwischen Vorder- und Rückseite des Etalons mehr. Das Rauschlevel stimmt dort mit dem einer Khalilikavität überein. Die Verwendung einer Khalilikavität erlaubt schon für Substrathöhen von  $H = 30$  cm eine Rauschreduzierung auf 40 %. Diese ist allerdings mit den bereits diskutierten Nachteilen verbunden und wird deshalb im Einstein Telescope nicht zur Anwendung kommen.

Zusätzlich wurde die Herleitung des Brownschen Schichtrauschens mittels einer FEM-Rechnung mit dem Paket COMSOL [91] für die vorgestellte Geometrie überprüft. Als Vergleichsgröße diente die dissipierte Energie, mit der das Rauschen über Gl. (4.17) berechnet werden kann. Für eine Substrathöhe von  $H = 30$  cm konnte das analytische Ergebnis mit einer Abweichung von unter 3 % bestätigt werden [96]. Weiterhin bietet die numerische Rechnung die Möglichkeit der Überprüfung der quasistatischen Näherung über eine Berechnung des Frequenzverhaltens. Abb. 5.15 faßt die Ergebnisse dazu zusammen. Für tiefe Frequenzen zeigt sich das für einen quasistatischen Prozeß zu erwartende konstante Rauschniveau. Bis zu einer Frequenz von 1200 Hz weicht die Rauschamplitude um weniger als 10 % vom statischen Wert ab. Oberhalb dieser Frequenz bricht die statische Näherung jedoch zusammen. Im Bereich der niedrigsten mechanischen Resonanzen des Substrates steigt das Brownsche Rauschen stark an. Die niedrigste Resonanz liegt für die vorgeschlagene ET-HF-Geometrie bei 4 kHz und damit nahe dem Detektionsband. Im Frequenzbereich von 3 kHz bis 5 kHz ist die Rauschamplitude im Vergleich zum statischen Wert mehr als doppelt so groß. Eine Änderung der Geometrie, die die niedrigsten Substratresonanzen in der Frequenz weiter nach oben verschiebt, könnte diesem Empfindlichkeitseinbruch entgegenwirken.

In der Geometrie des Khalilietalons prägen im Gegensatz zum konventionellen Spiegel auch die thermorefraktiven Fluktuationen des Substrates dem Licht ein Phasenrauschen auf. Gleichzeitig können sich die restlichen Rauschbeiträge ändern. Die Ergebnisse einer Analyse mit den in vorliegender Arbeit vorgestellten Rauschprozessen sind in Abb. 5.16 dargestellt [97]. Dieser Analyse ging eine Optimierung der Verteilung des dielektrischen Schichtsystems zwischen Vorder- und Rückseite des Etalons voraus. In [97] ist ein minimales thermisches Rauschen für  $N_1 = 2$

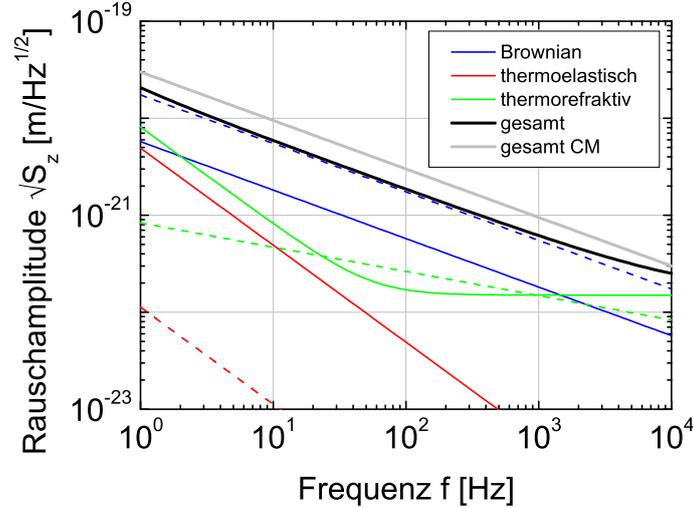


**Abb. 5.15: Frequenzabhängigkeit des Brownschen Schichtrauschens eines Khalilietalons.** Als ein der Rauschleistung proportionales Maß dient hierbei die dissipierte Energie  $\Delta U$ . Diese wurde auf die dargestellte Rauschamplitude umgerechnet. Als Substrat diente Fused Silica in der Abmessung  $\varnothing 620 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$ .

Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub>-Schichten auf der Vorderseite gezeigt. Diese geringe Schichtzahl führt jedoch zu einer relativ hohen Laserintensität im Substrat. Die im Substrat einsetzende Absorption hat den Effekt der thermischen Linse zur Folge. Diese ist technisch nur aufwendig zu kompensieren und sollte deswegen so gering wie möglich sein. Unter diesem Gesichtspunkt wurde eine Konfiguration mit  $N_1 = 3$  Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub>-Schichten auf der Vorderseite gewählt. Die thermische Rauschamplitude erhöht sich dabei um lediglich 5% während die im Etalon umlaufende optische Leistung halbiert wird. In diesem Betrieb kann die thermische Rauschamplitude für aLIGO um den Faktor 2,03 und für ET-HF um den Faktor 1,67 verringert werden [97]. Die Verwendung von Khalilietalons verspricht eine Senkung thermischen Rauschens mit vertretbarem technischen Aufwand. Auch eine Nachrüstung für Detektoren mit einem konventionellen Endspiegel ist möglich, da nur eine Aufhängung benötigt wird.

### 5.4.3. Weitere Methoden

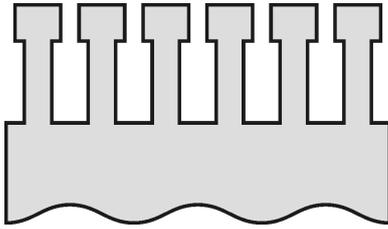
Weitere Aktivitäten zur Reduzierung des Brownschen Schichtrauschens konzentrieren sich auf die Minimierung der Schichtverluste. Nach Gl. (4.19) würde dies zu einem geringeren Brownschen Schichtrauschen führen. In einem solchen Ansatz untersucht man z. B. den Einfluß von Dotierungen oder einer Wärmebehandlung auf die verwendeten Schichten [80,98]. Außerdem wird die Ersetzung von Tantalpentoxid durch ein hochbrechendes Material mit geringeren mechanischen Verlusten verfolgt. Als vielversprechend erweist sich in dieser Hinsicht Hafniumoxid [99]. Amorphes Silizium mit einer hohen Brechzahl von über 3,5 und geringen mechanischen Verlusten entspricht diesen Forderungen ebenfalls. Eine Diffusion des Sauerstoffs an der Grenzfläche zwischen der Silizium- und SiO<sub>2</sub>-Schicht kann jedoch nicht ausgeschlossen werden. Dieses Verhalten würde eine zeitliche Änderung der optischen Eigenschaften eines dielektrischen Spiegels verursachen.



**Abb. 5.16.: Thermisches Rauschen eines Khalilietalons.** Zugrunde liegt eine mögliche ET-HF-Geometrie mit  $N_1 = 3$  Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub>-Schichten auf der Vorderseite und  $N_2 = 17$  Schichten auf der Rückseite. Gestrichelte Linien zeigen Rauschprozesse der Beschichtung, durchgezogene die des Substrates. Das gesamte thermische Rauschen des Etalons ist gegenüber dem des konventionellen Spiegels (CM) verringert.

In einem zweiten Ansatz zur Verringerung des Schichtrauschens können die Schichtdicken minimiert werden. Auch dies führt nach Gl. (4.19) zu einem reduzierten Rauschbeitrag. Eine Steigerung des Brechungsindex von Tantalpentoxid könnte so die Verwendung geringerer Schichtdicken erlauben. Behält man das konventionelle Schichtpaar ohne Änderung bei, kann eine alternative Geometrie des Schichtstapels zu einer Rauschminderung führen. Eine Verringerung der Schichtdicke des Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> bei gleichzeitig erhöhter Dicke der SiO<sub>2</sub>-Schichten kann dabei geringere Rauschbeiträge aufweisen als die konventionellen  $\lambda/4$ -Paare.

Der Strahldurchmesser des gaußförmigen Laserstrahls beeinflusst das Rauschlevel ebenfalls. Je größer dieser wird, desto homogener wird die Probenoberfläche ausgelesen. Diese Mittelung über eine vergrößerte Fläche führt dann zu einer Abnahme des zu erwartenden Rauschens. Erlaubt man die Verwendung eines veränderten Strahlprofils, kann das Auslesen noch homogener erfolgen. Im Idealfall besitzt der Laserstrahl auf der Substratoberfläche eine konstante Intensität. Nach Levin geht damit ein homogener virtueller Druck auf die Probenoberfläche einher. In der Schicht verbleiben allein Spannungen senkrecht zur Oberfläche und die dort gespeicherte Energie wird somit minimiert. Dies minimiert ebenfalls die Dissipation und führt zu einem minimalen Rauschen. Sowohl der Übergang von der Gaußmode zu höheren Laguerre-Gauß-Moden [100] als auch die Verwendung sog. top-hat-beams versprechen ein homogeneres Auslesen und somit ein geringeres Brownsches Schichtrau-



**Abb. 5.17: Prinzipskizze eines monolithischen Wellenleitergitters.** Die obere Schicht sorgt für eine Beugung des Lichts in den Mittelteil. Mit einer kleineren Periode als der Wellenlänge kann der Mittelteil als effektives Medium mit geringerer Brechzahl als das Substrat angesehen werden.

schen [101]. Zur Verwendung der top-hat-beams sind jedoch speziell gefertigte, nicht-sphärische Spiegel notwendig.

Der Einsatz von Wellenleiterstrukturen stellt eine weitere Möglichkeit der Rauschminimierung dar. Ursprünglich besaß die gefertigte Struktur dabei lediglich eine dielektrische Schicht und minimierte durch die Einsparung an Beschichtungsmaterial das Brownsche Schichtrauschen. Experimentell wurden Reflexionsgrade von  $R = 99,08\%$  nachgewiesen [102]. Eine Weiterentwicklung dieses Ansatzes geschieht im Moment hin zu monolithischen Wellenleitern komplett ohne Schichtmaterial. Auch deren Funktion konnte in einem Experiment an Siliziumproben mit einem gemessenen Reflexionsgrad von  $R = 99,79\%$  demonstriert werden [103]. Die Geometrie monolithischer Gitter ist in Abb. 5.17 angedeutet. Für monolithische Gitter ist jedoch eine vergrößerte Oberfläche zu berücksichtigen, deren Verlust i. a. weit über dem des Substratmaterials liegt. Außerdem müssen die thermo-optischen Rauscheinflüsse für diese Geometrien neu überdacht werden. Für den Einsatz in einem Detektor bestehen allerdings weitere technische Probleme. Die Reflektivitäten erweisen sich für einen Betrieb im Detektor als ausreichend, wenn die restliche Strahlung komplett transmittiert wird. Jede Form von Streuung im Detektor führt aber zu einem Fehlersignal am Interferometerausgang und ist deshalb auszuschließen. Eine Charakterisierung monolithischer Gitter in dieser Hinsicht steht noch aus.

Führen die genannten Konzepte zu einer Verringerung des Brownschen Schichtrauschens, wird das Brownsche Substratrauschen als zweitstärkster Rauschprozeß die Detektionsempfindlichkeit begrenzen. Eine weiterführende Optimierung macht dann eine systematische Analyse der auftretenden Verlustprozesse im Substratmaterial notwendig. Diese wird im nächsten Kapitel behandelt.

Im speziellen wäre die Realisierung eines kryogenen Khalilietalons erstrebenswert. Unter Verwendung eines kristallinen Substratmaterials wie Silizium würde auch das Brownsche Substratrauschen abnehmen. Der thermorefraktive Anteil würde gemäß der vorgestellten Theorie für Frequenzen unter 100 Hz auf einem konstant niedrigen Niveau liegen. Insgesamt ergäbe sich somit eine deutlich rauschärmere Anordnung.

## 6. Mechanische Verluste

Das vorige Kapitel hat gezeigt, daß das Brownsche Rauschen die Empfindlichkeit aktueller Detektoren begrenzt. Als Ursache für dieses Rauschen sind die Strukturverluste im Festkörper zu erwähnen. Eine systematische Analyse der Verluste dient zum einen als Grundlage einer zuverlässigen Rauschabschätzung von Gravitationswellendetektoren. Zum anderen bildet sie den Startpunkt für eine Optimierung der Detektorempfindlichkeit durch eine gezielte Minimierung mechanischer Verluste. In diesem Kapitel wird deshalb auf das Modell mechanischer Verluste, mögliche Meßverfahren und physikalische Ursachen eingegangen.

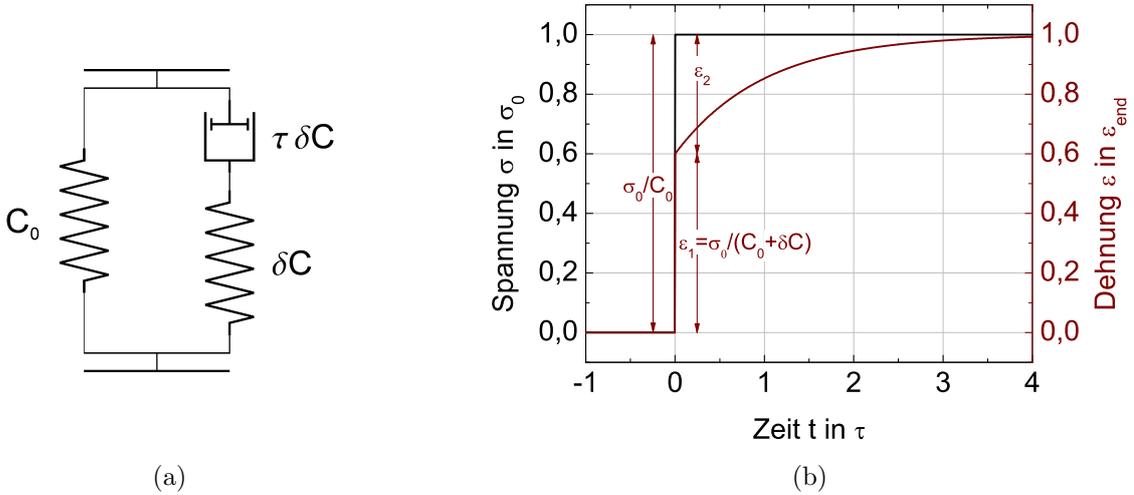
### 6.1. Der anelastische Festkörper

Der ideal elastische Festkörper gehorcht dem Hookeschen Gesetz. Es besagt, daß eine angelegte mechanische Spannung  $\sigma$  in linearer Weise zu einer Dehnung des Festkörpers  $\epsilon$  führt. Diese Dehnung des Festkörpers erfolgt instantan. Ein solches Verhalten führt dazu, daß bei mechanischen Schwingungen des Festkörpers keine Energie dissipiert wird. Die vom System geleistete Arbeit

$$\Delta E = \int \sigma d\epsilon = \int_0^T \sigma(t) \dot{\epsilon}(t) dt \quad (6.1)$$

verschwindet daher für ideal elastische Materialien.

Im Gegensatz zum idealen Festkörper zeigen reale Materialien nicht nur eine instantane Antwort auf eine mechanische Belastung. Vielmehr ist die Dehnung zu einem Zeitpunkt auch durch die Werte der mechanischen Spannung in der Vergangenheit bestimmt. Deutlich wird dieses Verhalten in der Analyse einer sprunghaft angelegten mechanischen Spannung  $\sigma_0$  (s. Abb. 6.1(b)). Zunächst erfolgt eine instantane Änderung der Dehnung  $\epsilon_1 = \sigma_0 / (C_0 + \delta C)$ . Diese Änderung ist über den unrelaxierten Modul  $C_0 + \delta C$  mit der angelegten Spannung verknüpft. Mit einer zeitlichen Verzögerung erfolgt eine zusätzliche Dehnung der Probe. Im Gleichgewicht besitzt diese verzögerte Dehnung einen Betrag von  $\epsilon_2$ . Daraus ergibt sich der sog. relaxierte Modul  $C_0$  über  $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \sigma_0 / C_0$ .



**Abb. 6.1.: Standardmodell des anelastischen Festkörpers.** Das in a) gezeigte mechanische Modell aus zwei Federn und einem Dämpfer erklärt das in b) gezeigte Verhalten bei einer sprungförmig angelegten mechanischen Spannung. Nach einer instantanen Verformung  $\epsilon_1$  kriecht die Dehnung gegen den stationären Wert  $\epsilon_{\text{end}} = \epsilon_1 + \epsilon_2$ .

Dieses anelastische Verhalten kann durch ein einfaches mechanisches Analogon beschrieben werden. Dabei handelt es sich um das Standardmodell des anelastischen Festkörpers. Abb. 6.1(a) zeigt dessen Aufbau. Die Verknüpfung der angreifenden Spannung  $\sigma$  mit der entsprechenden Verformung  $\epsilon$  erfolgt im Frequenzraum und ergibt für harmonische Schwingungen einen effektiven Modul von

$$C_{\text{tot}}(\omega) = \frac{\sigma}{\epsilon} = C_0 + \delta C \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} + i \delta C \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (6.2)$$

Die Antwort des Systems setzt sich demnach aus der phasengleichen Reaktion in den ersten beiden Termen und einem um  $\pi/2$  phasenverschobenen Anteil zusammen. Für  $\omega = 0$  erhält man erneut den rein reellen, relaxierten Modul  $C_0$ . Auch für  $\omega \rightarrow \infty$  ergibt sich ein reeller Modul, der unrelaxierte Modul  $C_0 + \delta C$ . Für die restlichen Frequenzen zeigt das System eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Dehnung und zwangsläufig auch einen Energieverlust. Dieser berechnet sich zu

$$\Delta E = \int_0^T \sigma(t) \dot{\epsilon}(t) dt = \pi \Im(C_{\text{tot}}) \hat{\epsilon}^2 \quad (6.3)$$

mit der Schwingungsamplitude  $\hat{\epsilon}$  und dem Imaginärteil des elastischen Moduls. Mit der im System gespeicherten mechanischen Energie

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \Re(C_{\text{tot}}) \hat{\epsilon}^2 \quad (6.4)$$

folgt ein Ausdruck für den mechanischen Verlust

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{E_{\text{tot}}} \approx \frac{\delta C}{C_0} \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} = \Delta \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} . \quad (6.5)$$

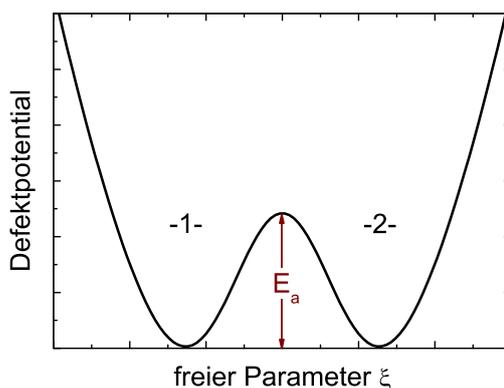
Dabei kommt die Näherung  $\delta C \ll C_0$  zur Anwendung. Diese ist für die untersuchten Verluste im Bereich von unter  $10^{-3}$  gewährleistet. Der Vorfaktor  $\delta C/C_0$  wird in der Relaxationsstärke  $\Delta$  zusammengefaßt. Der charakteristische lorentzartige Frequenzverlauf zeigt ein relativ scharfes Maximum für  $\omega = 1/\tau$  – das sog. Debyemaximum. Dort beträgt der mechanische Verlust  $\Delta/2$ . Im folgenden sollen die mikroskopischen Prozesse, die zu einer Phasenverschiebung zwischen Spannung und Dehnung und somit zu mechanischen Verlusten führen, kurz erläutert werden.

## 6.2. Thermisch aktivierte Verlustprozesse

### 6.2.1. Doppelmuldenpotential

Der Prototyp mechanischer Verluste ist in thermisch aktivierten Umverteilungsprozessen von Defekten in Festkörpern zu finden. Dabei wird ein Defekt, z. B. ein Fremdatom in das Kristallgitter eingebracht. Typischerweise besitzt der Defekt im Kristall mehrere Gleichgewichtszustände. Diese sind durch eine Potentialbarriere voneinander getrennt. Im Ergebnis findet sich ein sog. Doppelmuldenpotential, das die Energie des Defekts in Abhängigkeit eines freien Parameters  $\xi$ , z. B. seiner Position im Kristall, beschreibt. Ein solches Potential ist in Abb. 6.2 dargestellt.

Ohne äußere mechanische Spannung sind beide stabile Zustände entsprechend der Boltzmannverteilung besetzt. Findet nun eine Verformung des Kristalls statt, kann das Defektpotential geändert werden. So kann es zu einer relativen Energieverschiebung der Gleichgewichtszustände kommen. Dann beginnt eine effektive Um-



**Abb. 6.2: Doppelmuldenpotential.** Die Gleichgewichtszustände des Defekts (1 und 2) sind durch einen Potentialwall mit der Aktivierungsenergie  $E_a$  voneinander getrennt. Die thermische Energie des Systems ermöglicht Platzwechselforgänge über den Potentialwall hinweg.

verteilung der Defekte hin zum energieärmeren Zustand. Der Umverteilungsprozeß über die Potentialbarriere der Höhe  $E_a$  wird dabei durch thermische Energie gespeist. Die Anzahl der Defekte mit einer höheren thermischen Energie als  $E_a$  folgt der Boltzmannverteilung und lautet

$$N_D(E > E_a) \propto \exp\left(-\frac{E_a}{k_B T}\right). \quad (6.6)$$

Entsprechend ergibt sich für das typische Zeitintervall zwischen zwei Umverteilungsprozessen

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{E_a}{k_B T}\right) \quad (6.7)$$

mit einer Konstanten  $\tau_0$ . Als typische Dauer bis zur Einstellung des elastischen Gleichgewichts ist  $\tau$  daher für defektinduzierte Verluste mit dem Parameter in Gl. (6.5) zu identifizieren.

Thermisch induzierte Verluste zeigen im Temperaturverlauf ein Maximum bei  $T_{\max}$ . Für diese Temperatur gilt  $\omega\tau(T_{\max}) = 1$ . Durch Einsetzen von Gl. (6.7) wird folgende Beziehung zwischen der Kreisfrequenz der Schwingung  $\omega$  und der Temperatur maximaler Verluste  $T_{\max}$  deutlich

$$\ln \omega = -\frac{E_a}{k_B} \frac{1}{T_{\max}} - \ln \tau_0. \quad (6.8)$$

Trägt man den Logarithmus der Schwingungsfrequenz über der inversen Temperatur maximaler Verluste auf, so ergibt sich für thermisch aktivierte Prozesse ein linearer Zusammenhang. In diesem sog. Arrheniusplot ergibt sich die Aktivierungsenergie aus dem Anstieg der Geraden und die charakteristische Zeitkonstante aus der Nullpunktverschiebung. Für eine korrekte Einheitenrechnung ist der Zahlenwert von  $\omega$  in der Einheit  $\text{s}^{-1}$  einzusetzen. Damit ergibt sich der numerische Wert für  $\tau_0$  in der Einheit s. Sind die Verlustmaxima besonders stark ausgeprägt, können die Verlustparameter  $E_a$ ,  $\tau_0$  und  $\Delta$  auch direkt ermittelt werden – über einen Fitprozeß der Gl. (6.5) an das Temperaturspektrum der gemessenen Verluste.

Die abgeleiteten Zusammenhänge gelten hierbei nur für den Fall idealer kristalliner Festkörper. Für amorphe Festkörper ergibt sich aufgrund der fehlenden Fernordnung eine Variation der Bindungsverhältnisse. Damit einher geht auch eine Variation der Defektparameter, die die Temperatur- und Frequenzabhängigkeit solcher Verluste bestimmen. Typischerweise beobachtet man im amorphen Festkörper Verlustmaxima, die breiter als einfache Debyemaxima im kristallinen Festkörper sind

und sich als Überlagerung solcher Maxima mit leicht variierenden Defektparametern verstehen lassen.

### 6.2.2. Der elastische Dipol

Eine grundlegende Annahme für das Auftreten thermisch aktivierter Verluste besteht in einer relativen Energieverschiebung der Gleichgewichtszustände unter dem Anlegen einer mechanischen Spannung. Erste Aussagen dazu lassen sich mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen tätigen. Diese schließen gewisse Spannungskomponenten  $\sigma_{ij}$  als Ursache der genannten Energieverschiebungen von vornherein aus.

Nowick und Heller begründeten die beschriebene Symmetrieanalyse in den 1960ern [104,105]. In ihrer Theorie des elastischen Dipols werden zunächst die Symmetrieelemente der Punktgruppe  $\mathcal{G}_x$  des ungestörten Kristalls eingeführt. Für den zweiten Schritt wird die genaue Kenntnis der Defektgeometrie im Kristallgitter benötigt. Damit können die Symmetrien des Defekts im Kristall untersucht werden. Diese werden in der Gruppe  $\mathcal{G}_d$  zusammengefaßt. Ihre Elemente lassen die kristallographische Konstitution des Defekts unverändert, ändern aber physikalische Eigenschaften wie Polarisation oder elastisches Verhalten. Die Anzahl physikalisch unterscheidbarer Positionen

$$n_d = \frac{h_x}{h_d} \quad (6.9)$$

ergibt sich über die Mächtigkeit  $h_x$  und  $h_d$  der Gruppen  $\mathcal{G}_x$  und  $\mathcal{G}_d$ . Im vorliegenden Fall endlicher Gruppen stimmt sie mit der Anzahl der Gruppenelemente, d. h. der Anzahl möglicher Symmetrieeoperationen überein.

Für die mechanische Dissipation interessiert jedoch allein, ob physikalisch unterschiedliche Defektpositionen die elastischen Eigenschaften ändern. Dazu genügt eine Klassifikation der Defektgeometrie in eines der sieben Kristallsysteme, denn alle Punktgruppen eines Kristallsystems verhalten sich elastisch in identischer Weise. Schließlich wird der elastische Dipol  $\lambda_{ij}$  als Tensor zweiter Ordnung eingeführt. Dieser verknüpft die anelastische Dehnung  $\epsilon^{\text{an}}$  mit der Besetzungsdichte  $c_p$  der physikalisch unterschiedlichen Defektpositionen  $p$

$$\epsilon_{ij}^{\text{an}} = \sum_{p=1}^{n_d} \lambda_{ij}^{(p)} c_p \quad (6.10)$$

Die freie Energie eines Defekts der Position  $p$  entspricht dann

$$g_p \propto -\lambda_{ij}^{(p)} \sigma_{ij} , \quad (6.11)$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention zu berücksichtigen ist. Zur Charakterisierung dieses Tensors  $\lambda_{ij}^{(p)}$  können seine drei Eigenwerte ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) herangezogen werden, die für alle Positionen  $p$  gleich sind. Allein die Richtung der Hauptachsen unterscheidet sich für unterschiedliche  $p$ .

Mit der Einführung von Symmetriekoordinaten ergibt sich das wesentliche Resultat. Der Fundamentalsatz der Gruppentheorie besagt, daß in jeder linearen Beziehung zwischen zwei Größen nur solche Symmetriekoordinaten miteinander verknüpft sein können, die dieselbe irreduzible Darstellung und denselben Degenerationsindex besitzen. Dies gilt insbesondere für die Konzentrationen  $c_p$  und die anelastische Dehnung  $\epsilon_{ij}^{\text{an}}$  in Gl. (6.10). Über den Tensor der elastischen Moduln führt dies auch nur zu einer Änderung der mechanischen Spannung mit gleicher Symmetrie. Im Umkehrschluß bedeutet dies, daß ein elastischer Modul nur dann eine Relaxation erfährt, wenn eine Defektkonzentration dieselbe irreduzible Darstellung besitzt. Eine Ausnahme besteht für den Fall, daß die Gesamtzahl aller Defekte im Festkörper konstant ist. Dann ist eine Relaxation in der totalsymmetrischen  $A_1$ -Darstellung nicht möglich.

### 6.3. Thermoelastische Dämpfung

Durch die elastische Verformung eines Substratmaterials entstehen Bereiche, deren Volumen sich periodisch ändert. Über den zur thermischen Ausdehnung inversen Prozeß ist damit eine Temperaturänderung verbunden. Der zwischen den Gebieten unterschiedlicher Temperatur einsetzende Wärmestrom ist irreversibel und stellt einen Verlustmechanismus mechanischer Energie dar.

Die erste Behandlung thermoelastischer Dämpfung erfolgte 1937 durch Zener [106]. Für einen rechteckigen, isotropen Stab fand er die für Verlustprozesse typische Debyeabhängigkeit der auftretenden Verluste von der Frequenz

$$\phi_{\text{TE}}(\omega) = \frac{E\alpha^2 T}{\rho C} \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (6.12)$$

mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der spezifischen Wärme  $C$ . Die für die thermo-

elastische Dämpfung charakteristische Zeit

$$\tau = \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \frac{\rho C}{\kappa} \quad (6.13)$$

wird dabei maßgeblich durch die Höhe des Stabes  $h$  bestimmt. Zener erweiterte seine Theorie wenig später auf Stäbe kreisförmigen Querschnitts [107]. Dies führt allein zu einer Änderung des Vorfaktors in Gl. (6.13) und zur Ersetzung der Größe  $h$  mit dem Radius des Stabes. Eine weitere Verfeinerung der Theorie thermoelastischer Dämpfung durch Lifshitz und Roukes [108] erlaubt eine genauere mathematische Beschreibung. Diese neue Theorie bringt v. a. für hohe Frequenzen ( $\omega\tau \gg 1$ ) Änderungen von bis zu 20% mit sich. Anwendung finden thermoelastische Verluste z. B. in Dämpfern sowohl für die Luft- und Raumfahrt als auch in der Automobilindustrie [109].

Die zur Gütemessung verwendeten dreidimensionalen zylindrischen Substrate besitzen kompliziertere Eigenmoden als die eben diskutierten Stäbe. Die Berechnung des thermoelastischen Verlustes setzt deshalb eine allgemeinere Beschreibung der thermodynamischen Prozesse voraus. Zunächst wird die Entropiedichte in Abhängigkeit der mechanischen Spannung berechnet. Nach [110, Gl. (2.1)] gilt

$$s = \alpha_{ij}\sigma_{ij} \quad (6.14)$$

mit dem Tensor der thermischen Ausdehnung  $\alpha_{ij}$  und dem Spannungstensor  $\sigma_{ij}$ . Daraus resultiert ein Quellterm für die Wärmedichte über  $dq = T ds$ . Die Wärmeleitungsgleichung nimmt für harmonische Schwingungen der Kreisfrequenz  $\omega$  die folgende Gestalt an

$$\rho C \dot{T} - \kappa_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = -\alpha_{ij} \dot{\sigma}_{ij} T. \quad (6.15)$$

Die dissipierte mechanische Energie kann über die Änderung der Entropie nach  $\dot{e} = T(\vec{x})\dot{s}$  berechnet werden. Nach [89, Gl. (32,4)] erhält man eine Entropieänderung von

$$\dot{s} = -\frac{\kappa_{ij}}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (6.16)$$

In der Näherung kleiner Temperaturschwankungen kann  $T(\vec{x})$  durch die mittlere

Temperatur  $T_0$  ersetzt werden. Für die Rate der dissipierten Energie folgt dann

$$\dot{E} = \int_V \dot{e}(\vec{x}) d^3x = \int_V T(\vec{x}) \dot{s}(\vec{x}) d^3x \approx -\frac{1}{T_0} \int_V \kappa_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} d^3x \quad (6.17)$$

mit Integrationen über das Substratvolumen  $V$ . Für harmonische Schwingungen lassen sich die thermoelastischen Verluste über die Definition aus Gl. (6.5) mit dem zeitlichen Mittel  $\dot{E}_{\text{avg}}$  und der gesamten mechanischen Energie  $E_{\text{tot}}$  berechnen

$$\phi_{\text{TE}} = -\frac{\dot{E}_{\text{avg}}}{\omega E_{\text{tot}}} . \quad (6.18)$$

Die Ermittlung beider Größen erfolgt numerisch mit Hilfe der Methode finiter Elemente. Zum Einsatz kommt dabei die Software COMSOL. Eine detaillierte Beschreibung dieser Methode zusammen mit der Anwendung an Quarz- und Siliziumproben findet sich bei Heinert et al. [90] und ist im Anhang D näher dargestellt.

## 6.4. Phonon-Phonon-Wechselwirkung

Ein weiterer Verlustmechanismus besteht in der Wechselwirkung der durch die mechanische Schwingung eingetragenen Phononen mit dem Spektrum thermisch angeregter Phononen. Durch Stöße der mechanisch angeregten Phononen wird deren Energie in andere Phononen dissipiert und die mechanische Schwingung gedämpft. Dieser Prozeß ist unter dem Begriff Phonon-Phonon-Wechselwirkung zusammengefaßt. Über das Verhältnis aus der mittleren Lebensdauer eines Phonons  $\tau$  und der Periodendauer der angelegten mechanischen Schwingung  $1/\nu$  unterscheidet man zwei Grenzfälle.

Im ersten Grenzfall für  $\nu\tau \gg 1$  wird die Lebensdauer eines Phonons groß gegen die Periodendauer. Über mehrere Perioden kann eine Wechselwirkung mit thermischen Phononen erfolgen. Aus diesem Grund basiert die Theorie von Landau und Rumer [111] auf der Analyse individueller Stöße der mechanisch angeregten mit thermisch angeregten Phononen. Die Energie- und Impulserhaltung soll dabei uneingeschränkte Gültigkeit besitzen. Praktischen Einfluß besitzt dieser Grenzfall für hohe mechanische Frequenzen bzw. große freie Weglängen, d. h. tiefe Temperaturen. Zu geringe Phononenlebensdauern  $\tau$  führen nach der Unschärferelation  $\Delta E\tau \geq \hbar$  zu einer Aufweichung des Energieerhaltungssatzes und damit zu einer Verletzung der in der Theorie nach Landau und Rumer angenommenen Energieerhaltung.

Der zweite Grenzfall gilt für kleine Phononenlebensdauern  $\nu\tau \ll 1$ , wie sie in den vorliegender Arbeit zugrundeliegenden Messungen realisiert sind. Da in diesem

Regime die Energieerhaltung nicht mehr streng gilt, wird die Wechselwirkung der mechanischen Phononen mit der Gesamtheit des thermisch angeregten Phononensystems betrachtet. Die mechanische Welle induziert dabei eine Dehnung im Kristall, die über nichtlineare Gittereffekte eine Änderung der Phononenfrequenzen  $\omega_{q0}$  hervorruft. Diese Änderung  $\Delta\omega_q$  ist über den Grüneisenparameter  $\gamma_q$  mit der Dehnung  $\epsilon$  verknüpft

$$\Delta\omega_q = \omega_{q0}\gamma_q\epsilon . \quad (6.19)$$

In obiger Gleichung symbolisiert der Parameter  $q$  die Abhängigkeit des Grüneisenparameters sowohl vom Phononenimpuls als auch vom Phononenzweig. In einem Beispielmmodell kann der Verlustmechanismus anschaulich beschrieben werden. Dazu betrachtet man einen Festkörper, dessen Phononen in zwei Gruppen eingeteilt werden können. Die erste Gruppe besitze einen verschwindenden Grüneisenparameter  $\gamma = 0$  während die Phononen der zweiten Gruppe alle denselben von null verschiedenen Grüneisenparameter aufweisen. Im thermischen Gleichgewicht sind die Phononenzustände entsprechend der Boseverteilung

$$g(\hbar\omega_q) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_q}{k_B T}\right) - 1} \quad (6.20)$$

besetzt. Eine akustische Schwingung induziert nun eine Änderung der Phononenfrequenz in der zweiten Gruppe. Damit wird das Phononensystem aus dem Gleichgewicht gebracht. Alternativ kann man den Phononen der zweiten Gruppe auch einen Gleichgewichtszustand höherer Temperatur zuordnen. Daraus resultiert ein Energieübertrag zwischen Phononen der ersten und der zweiten Gruppe zu einem neuen globalen Gleichgewichtszustand. Dieser Übertrag erfolgt jedoch zeitlich verzögert in der Größenordnung der Phononenlebensdauer. Analog zur thermoelastischen Dämpfung fließt ein irreversibler Wärmestrom und entzieht so der mechanischen Schwingung Energie. Die beschriebene Vorstellung des Phononenverlustes im niederfrequenten Grenzfall wurde zuerst von Akhieser formuliert [112]. Bömmel und Dransfeld zeigen eine quantitative Analyse des Akhieserprozesses und erhalten für den mechanischen Verlust [113, 114]

$$\phi_{\text{ph}} = \frac{CT\gamma^2}{c_D^2} \frac{\omega\tau_{\text{ph}}}{1 + (\omega\tau_{\text{ph}})^2} . \quad (6.21)$$

Dabei bezeichnet  $\omega$  die Kreisfrequenz der mechanischen Schwingung und  $\tau_{\text{ph}}$  die mittlere Lebensdauer der Phononen. Letztere ist über die Transporttheorie und die

Wärmeleitfähigkeit zugänglich über

$$\kappa \approx \frac{1}{3} \rho C c_D^2 \tau_{\text{ph}} . \quad (6.22)$$

Die mittlere Schallgeschwindigkeit im Medium  $c_D$  ergibt sich aus der gewichteten Mittelung der Schallgeschwindigkeit transversaler und longitudinaler Wellen

$$\frac{3}{c_D^3} = \frac{1}{c_t^3} + \frac{2}{c_l^3} . \quad (6.23)$$

Zu beachten ist hierbei, daß zur Wärmeleitung nur Umklappprozesse beitragen. Die mittlere Lebensdauer der Phononen wird jedoch auch durch Normalprozesse bestimmt. Damit liefert obige Abschätzung vor allem für tiefe Temperaturen zu lange Phononenlebensdauern.

## 6.5. Meßverfahren

In der folgenden Auswertung sollen die vorgestellten Verlustmodelle auf existierende Messungen angewandt werden. Diese Verlustmessungen wurden allesamt außerhalb vorliegender Arbeit von Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Tieftemperaturphysik nach der resonanten Methode (s. Abschnitt B.1.2) durchgeführt [115–119]. Das Meßsystem für die Messung zylindrischer Substrate ist ausführlich in [8, 120, 121] dargestellt. Bei jeder Verlustmessung ist zu beachten, daß sich der Meßwert aus internen – der Probe eigenen – Verlustprozessen, aber auch aus externen – durch die Anordnung verursachten – Verlusten zusammensetzt. Um eine realistische Abschätzung der internen Verluste eines Substratmaterials zu erhalten, müssen die externen Verluste wie Restgasdämpfung oder Dissipation in der Aufhängung minimiert [116] oder über eine geeignete Modellierung aus den Daten entfernt werden. Um das Brownsche Rauschen der Substrate zu untersuchen, muß das Meßergebnis auch von den übrigen Dämpfungsprozessen separiert werden. Dies setzt eine numerische Analyse der mechanischen Eigenmoden voraus. Die für das Brownsche Rauschen relevanten Verlustmechanismen führen zu einer Phasenverschiebung zwischen Dehnung und Spannung. Typische Beispiele sind thermisch aktivierte Verluste, die Phonon-Phonon-Wechselwirkung oder Oberflächenverluste der Probe.

Der resonanten Methode sind allein die mechanischen Verluste an den Substratresonanzen zugänglich. Auch die Verteilung der mechanischen Spannungen im Substrat ist durch die Geometrie des Substrates fest vorgegeben. Eine Abschätzung des thermischen Rauschens im Gravitationswellendetektor erfordert eine davon ab-

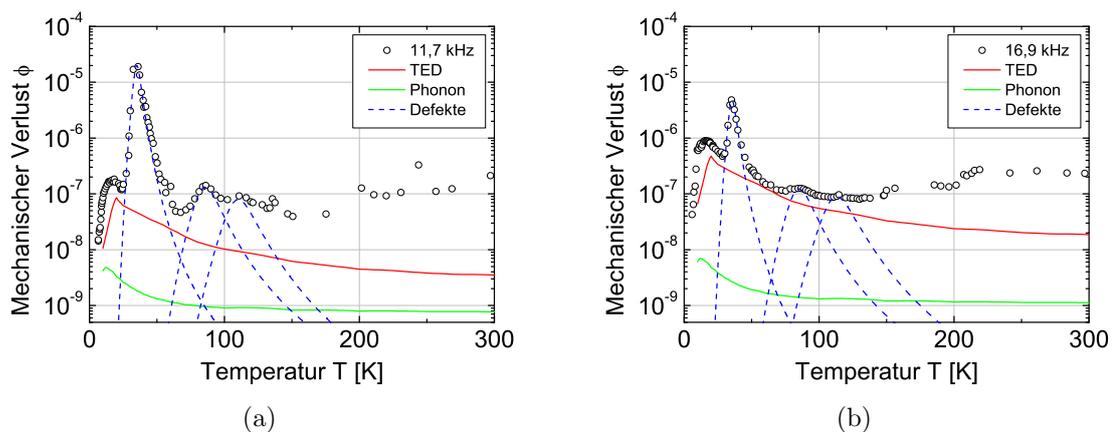
weichende Spannungsverteilung, die durch Levins Ansatz festgelegt ist. Außerdem stellen Frequenzen um 100 Hz, die unterhalb der Resonanzfrequenzen der Substratschwingungen liegen, den für eine Detektion entscheidenden Bereich dar. Eine Skalierung der gemessenen mechanischen Verluste in das Detektionsband und auf die durch Levin vorgegebene mechanische Belastung der Probe setzt damit eine genaue Analyse und zuverlässige Modellierung der Verlustmechanismen voraus.

## 6.6. Mechanischer Verlust in Kristallquarz

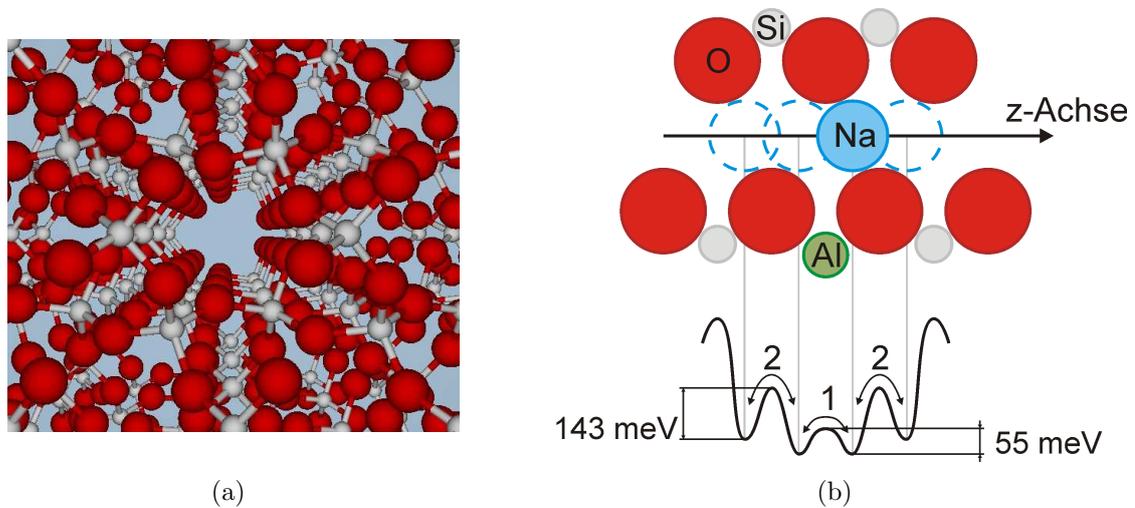
Der mechanische Verlust in Kristallquarz ist in Arbeiten aus den 1950ern und 1960ern gut untersucht. Die damalige Forschung war bestrebt, die Genauigkeit der Zeitmessung mittels Schwingquarzen durch die Verwendung verlustarmer Resonatoren zu erhöhen. Damit eignet sich Kristallquarz als Testmaterial sowohl für die Messung mechanischer Verluste als auch zur Auswertung dieser Messungen.

### 6.6.1. Zylinderförmige Substrate

Die erste auszuwertende Probe wurde im Z-Schnitt gefertigt und besaß eine Abmessung von  $\text{Ø } 76,2 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$ . Die gemessenen Verluste sind zusammen mit dem numerisch berechneten thermoelastischen Verlust und der Abschätzung für die Phonon-Phonon-Wechselwirkung in Abb. 6.3 gezeigt. Während letztere Größenordnungen unter den Meßwerten liegt, wird die Messung durch die thermoelastische Dämpfung



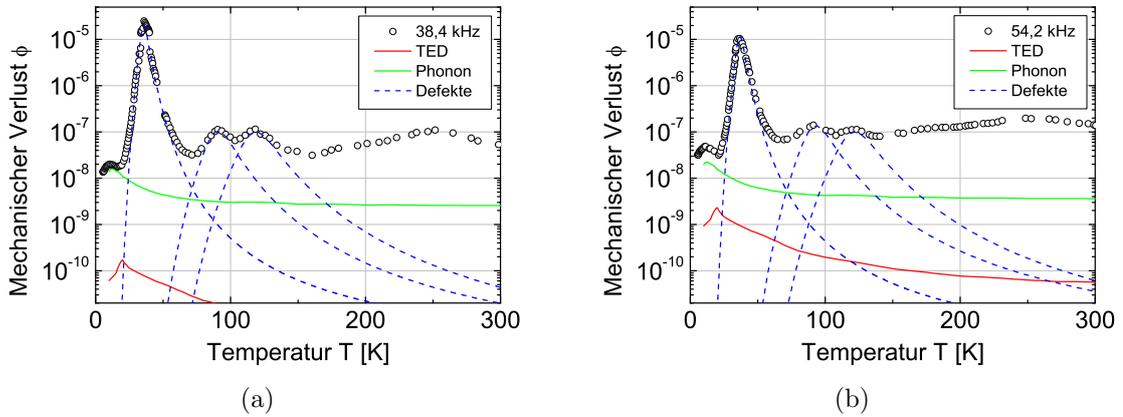
**Abb. 6.3.: Mechanischer Verlust in Kristallquarz.** Als Probe diente ein zylinderförmiges Substrat ( $\text{Ø } 76,2 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$ ) im Z-Schnitt. Die Abbildung zeigt die Meßergebnisse für die beiden Eigenmoden niedrigster Frequenz. Mit der Literatur entnommenen Materialparametern wurde die thermoelastische Dämpfung berechnet und der Phononenverlust abgeschätzt. Als Grüneisenparameter wurde  $\gamma = 1$  angenommen.



**Abb. 6.4.: Mikroskopischer Aufbau des Natriumdefekts in Kristallquarz.** Abb. a) zeigt die Kristallstruktur entlang der dreizähligen  $z$ -Achse. Siliziumatome sind weiß und Sauerstoffatome rot dargestellt. Entlang der  $z$ -Achse ist ein breiter Kanal deutlich erkennbar. Abb. b) zeigt die Defektstruktur nach [124]. Dabei kann sich das Natriumion relativ frei entlang des Kanals bewegen. Diese Bewegung erfolgt in dem gezeigten Doppelmuldenpotential als Ursache des Verlustmaximums. Hierbei ist der Übergang 1 für das Verlustmaximum um 35 K verantwortlich [125].

v. a. bei Temperaturen unterhalb 100 K dominiert. Auch das Verlustmaximum um 20 K könnte durch thermoelastische Verluste erklärt werden. Eine Ursache für die geringen Unterschiede zur Messung könnte dabei in abweichenden Materialparametern gefunden werden, da zur Berechnung nur tabellierte Werte Anwendung fanden. Deutlich zeigt sich außerdem die Abhängigkeit der thermoelastischen Dämpfung von der Modenform. So zeigt die Mode bei 17 kHz eine um den Faktor sechs höhere thermoelastische Dämpfung.

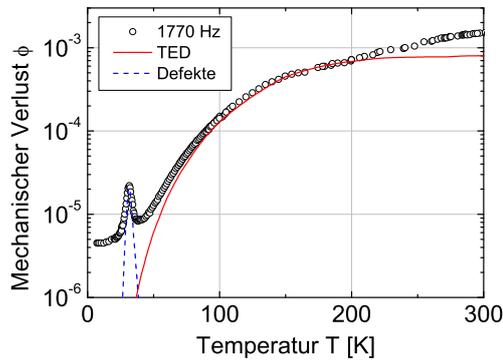
Auffällig im Spektrum ist weiterhin das stärkste Maximum bei Temperaturen um 35 K. Dieses befindet sich in Übereinstimmung mit früheren Messungen und wurde von Martin [122] auf einen Defekt im Quarz zurückgeführt. Danach wird Aluminium auf einem Siliziumplatz in den Kristall eingebaut. Zum Ladungsausgleich ist ein einwertiges Element nötig, das sich auf einem Zwischengitterplatz befindet. Das beobachtete Verlustmaximum bei 35 K konnte dabei auf Natrium an den Zwischengitterplätzen zurückgeführt werden. Dieses kann sich in einem Doppelmuldenpotential entlang der dreizähligen  $z$ -Achse bewegen und verursacht somit eine mechanische Relaxation [123, 124]. Abb. 6.4 illustriert den mikroskopischen Aufbau dieses Defekts. In Abhängigkeit der Modenform und der darin auftretenden Spannungen zeigt sich eine unterschiedlich hohe Relaxationsstärke für den untersuchten Defekt.



**Abb. 6.5.: Mechanischer Verlust in Kristallquarz.** Als Probe diente ein zylinderförmiges Substrat ( $\varnothing 45 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ ) im X-Schnitt. Für die Abschätzung der Phononenverluste wurde ein Grüneisenparameter von  $\gamma = 1$  gewählt. Auch diese Probe zeigt eine starke Abhängigkeit der Relaxationsstärke des durch Natrium verursachten Verlustmaximums um 35 K von der Modenform des Substrates.

Die zweite zylinderförmige Probe aus Kristallquarz wurde im X-Schnitt hergestellt. Mit einem Durchmesser von 45 mm und einer Höhe von 50 mm wies sie im Gegensatz zur Probe im Z-Schnitt eine kompaktere Geometrie auf. Da die Zeitkonstante der thermoelastischen Dämpfung  $\tau$  von der Probengeometrie abhängt, sollte sich die zweite Probe in diesem Punkt von der ersten unterscheiden. In Abb. 6.5 wird eine Abnahme der thermoelastischen Dämpfung deutlich. Sie liegt im gesamten Temperaturbereich über eine Größenordnung unter den Meßwerten.

Im Gegensatz zur ersten Probe könnte hier die Phonon-Phonon-Dämpfung als Erklärung für das Verlustmaximum tiefster Temperatur herangezogen werden. Eine detaillierte Betrachtung der Verluste bei tiefen Temperaturen ist unter Mitwirken des Verfassers vorliegender Arbeit von Grib [126] gegeben. Die grobe Näherung eines einzigen Grüneisenparameters und die Tatsache, daß in der Lebensdauer der Phononen allein Umklappprozesse berücksichtigt werden, erfordern jedoch eine weitergehende Analyse dieses Sachverhalts. Für tiefe Temperaturen wird die Anzahl aller Phononenstöße groß gegen die Anzahl der Umklappprozesse. Eine entsprechende Verringerung der Phononenlebensdauer hätte dann eine Abnahme der theoretisch abgeschätzten Dissipation durch Phononen zur Folge. Dies würde gegen Phononenstöße als Erklärung des Maximums bei tiefen Temperaturen sprechen. Ebenfalls offen bleibt an dieser Stelle die Modellierung der Modenformabhängigkeit der phononeninduzierten Verluste. Die dafür notwendige Abhängigkeit des Grüneisenparameters von der eingebrachten Verformung  $\epsilon$  ist in vorliegender Arbeit unberücksichtigt ge-



**Abb. 6.6: Mechanischer Verlust eines Kristallquartzcantilevers.** Die Probe besaß eine Länge von 43 mm, eine Breite von 8,4 mm und eine Dicke von 102  $\mu\text{m}$ . Für Temperaturen oberhalb von 50 K dominieren die thermoelastischen Verluste. Um 30 K ist der Defektverlust durch Natrium zu beobachten. Die Phononenverluste liegen unter  $1 \cdot 10^{-9}$  und sind deshalb nicht im Diagramm dargestellt.

blieben.

Weiterhin wird das durch Natrium verursachte Verlustmaximum bei 35 K auch in dieser Probe deutlich. Etwas deutlicher ausgebildet als für die Probe im Z-Schnitt zeigen sich hier noch zwei weitere Maxima bei 90 K und 120 K. Nach Stevels und Volger [125] ist das erste Maximum ebenfalls auf Natrium zurückzuführen (Platzwechselforgang 2 in Abb. 6.4(b)). Für das zweite Maximum scheint hingegen Kalium anstelle von Natrium verantwortlich zu sein.

### 6.6.2. Schwingende Plättchen

Neben zylindrischen Substraten soll an dieser Stelle der mechanische Verlust schwingender Quarzplättchen ausgewertet werden. Exemplarisch zeigt Abb. 6.6 den gemessenen mechanischen Verlust eines Quarzplättchens, dessen Oberfläche senkrecht auf der dreizähligen  $z$ -Achse des Quarzes liegt. Auch diese Cantilevermessungen zeigen die typischen Verlustprozesse durch Platzwechselforgänge von Natriumdefekten bei 30 K. Bei Temperaturen oberhalb 50 K wird die Messung jedoch durch die thermoelastische Dämpfung dominiert. Andere Verlustprozesse werden in diesem Bereich überdeckt und können dort deshalb nicht beobachtet werden. Eine Abschätzung der Phonon-Phonon-Wechselwirkung ergibt vernachlässigbar geringe Verluste. Allerdings muß hier berücksichtigt werden, daß für dünne Strukturen, wie den verwendeten Cantilever, Stöße mit dem geometrischen Rand der Probe die Phononenlebensdauer nach oben beschränken können.

Die ausgewerteten Biegemoden zeigen eine einfache Spannungsverteilung. Wie die Bezeichnung vermuten läßt, findet sich fast ausschließlich eine Normalspannung entlang der Richtung der neutralen Faser im Cantilever. Damit ist eine Analyse hinsichtlich des Effektes einzelner Spannungskomponenten einfacher als für zylindrische Proben. Für den vorgestellten Cantilever ist die genaue Orientierung des Schwingers jedoch nicht bekannt. Damit fehlt die Basis für eine zuverlässige Ermittlung

der mechanische Eigenmoden und damit der defektbehafteten Spannungskomponenten. Zukünftige Messungen mehrerer gezielt hergestellter Proben bei speziellen Eigenmoden werden die Bestimmung der Relaxationsstärken  $\Delta$  als Funktion der eingebrachten mechanischen Spannungen erlauben.

## 6.7. Mechanischer Verlust in kristallinem Silizium

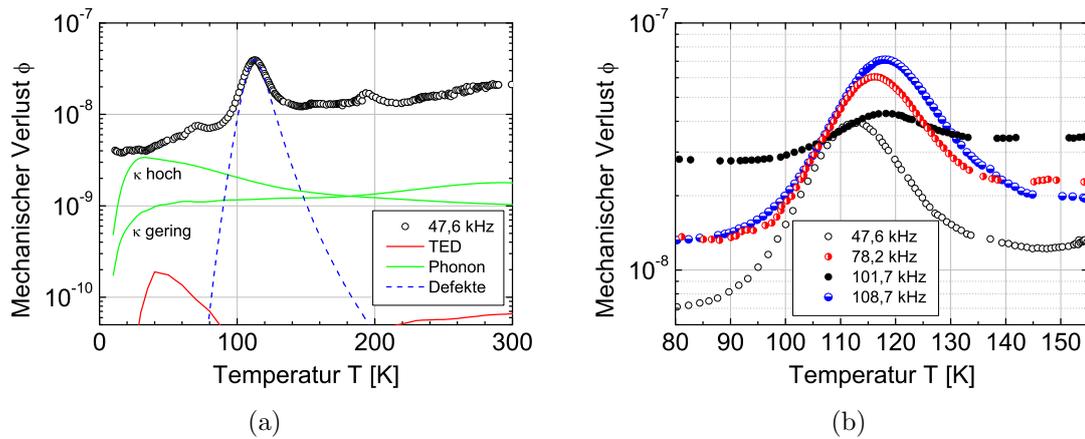
Die genaue Kenntnis des Verhaltens mechanischer Verluste im Silizium spielt für einen Einsatz in zukünftigen Gravitationswellendetektoren eine entscheidende Rolle. So ist sowohl die Orientierung des Kristalls als auch die Methode des Kristallwachstums hinsichtlich minimaler Verluste zu wählen. In der Arbeitsgruppe gemessene Verluste sind beispielsweise in [127, 128] veröffentlicht.

### 6.7.1. Zylindrische Proben

Abb. 6.7(a) zeigt exemplarisch die an einer im Czochralskiverfahren hergestellten Probe gemessenen mechanischen Verluste. Die Probe, deren Zylinderachse mit der kristallographischen  $\langle 111 \rangle$ -Achse zusammenfiel, besaß eine zylindrische Geometrie von  $\varnothing 65 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ . Durch die großen Abmessungen der Probe liegt der thermoelastische Verlust wiederum über eine Größenordnung unter den Meßwerten. Hingegen zeigt der Phononenverlust besonders bei tiefen Temperaturen einen wesentlichen Einfluß. Da die Wärmeleitfähigkeit der untersuchten Probe nicht bekannt war, sind die Phononenverluste für hohe Wärmeleitfähigkeiten (reine Probe) und geringe Leitfähigkeiten (verunreinigte Probe) abgeschätzt. An dieser Stelle sei wiederum an die grobe Näherung erinnert, die dieser Abschätzung zugrundeliegt. Sie liefert lediglich die Größenordnung der durch Phononenstöße zu erwartenden Verluste.

Das Temperaturverhalten der gemessenen Verluste wird durch ein Maximum nahe 120 K dominiert. Dieses folgt der Temperaturabhängigkeit aus Gl. (6.5). Für verschiedene Eigenmoden und damit unterschiedliche Frequenzen variiert die Temperatur maximaler Verluste. Dieses Verhalten wird in Abb. 6.7(b) deutlich. Ein Arrheniusplot liefert eine Aktivierungsenergie von  $E_a = (168 \pm 4) \text{ meV}$  [118] und motiviert damit die Vermutung eines thermisch aktivierten Verlustprozesses. Frühere Messungen [130, 131] bestätigen das Auftreten eines Verlustmaximums oberhalb von 100 K und zeigen eine ähnliche Relaxationsstärke.

Verlustmessungen an Siliziumproben, die im Zonenschmelzverfahren („float zone“) hergestellt wurden, zeigen kein Maximum um 120 K [88]. Verglichen mit dem Czochralskiverfahren trägt das Zonenschmelzverfahren eine deutlich geringe-

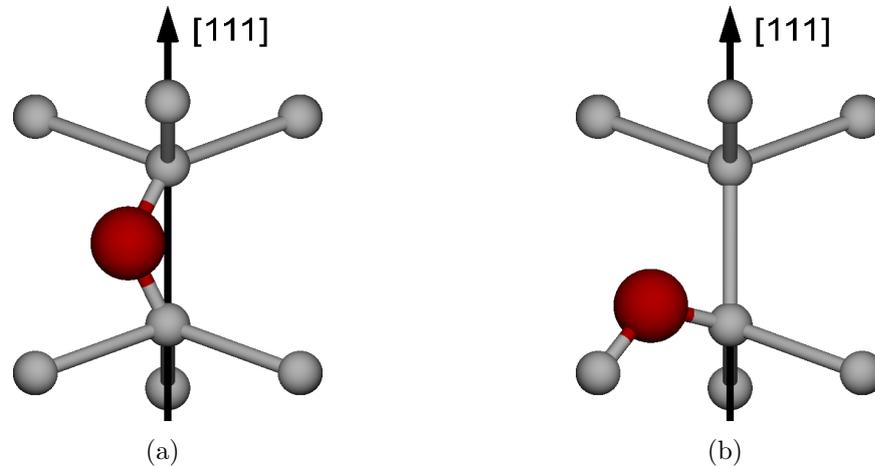


**Abb. 6.7.:** Mechanischer Verlust in kristallinem Silizium für ein zylinderförmiges Substrat ( $\varnothing 65 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ ) in  $\langle 111 \rangle$ -Orientierung [118]. In a) sind die Verluste der Grundmode und die berechneten thermoelastischen und phononeninduzierten Verluste abgebildet. Hohe Wärmeleitfähigkeiten ( $5000 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  im Maximum) zeigen im Vergleich zu geringen ( $1200 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  im Maximum) dabei höhere Phononenverluste. Als Grüneisenparameter diente ein experimentell ermittelter Wert von  $\gamma = 0,21$  [129]. Die Frequenzabhängigkeit der Temperatur maximaler Verluste sowie die Modenformabhängigkeit der Verlusthöhe sind in b) dargestellt.

re Konzentration an Sauerstoffdefekten in die Probe ein. Über die Messung optischer Absorption in Silizium können Sauerstoffdefekte im Kristall nachgewiesen werden [132]. Weiterhin ist damit auch die Defektgeometrie zugänglich. So ordnet sich der Sauerstoff kovalent gebunden mittig zwischen zwei Siliziumatomen entlang der  $\langle 111 \rangle$ -Richtung des Kristalls auf einem Zwischengitterplatz an. Jedoch ist die Gleichgewichtslage etwas aus dieser Richtung heraus verschoben. Abb. 6.8 zeigt die Defektgeometrie. Die asymmetrische Lage des Sauerstoffs führt zu sechs örtlich unterschiedlichen Gleichgewichtspositionen, die sechszählig um die  $\langle 111 \rangle$ -Achse angeordnet sind.

Bosomworth et al. modellierten 1970 das Potential des Sauerstoffatoms an der Defektstelle im Modell eines gestörten zweidimensionalen Oszillators. Der Abstand der Eigenzustände in diesem Potential stimmt mit den gemessenen optischen Absorptionslinien im infraroten Spektralbereich überein. Allerdings liegt der Grundzustand des Defekts in diesem Modell über dem Potentialberg selbst. Somit bricht die klassische Interpretation thermisch induzierter Verluste zusammen. Der Potentialberg besitzt in dem Modell nur eine Höhe von ca. 4 meV und liegt damit um Größenordnungen unterhalb der experimentell ermittelten Aktivierungsenergie.

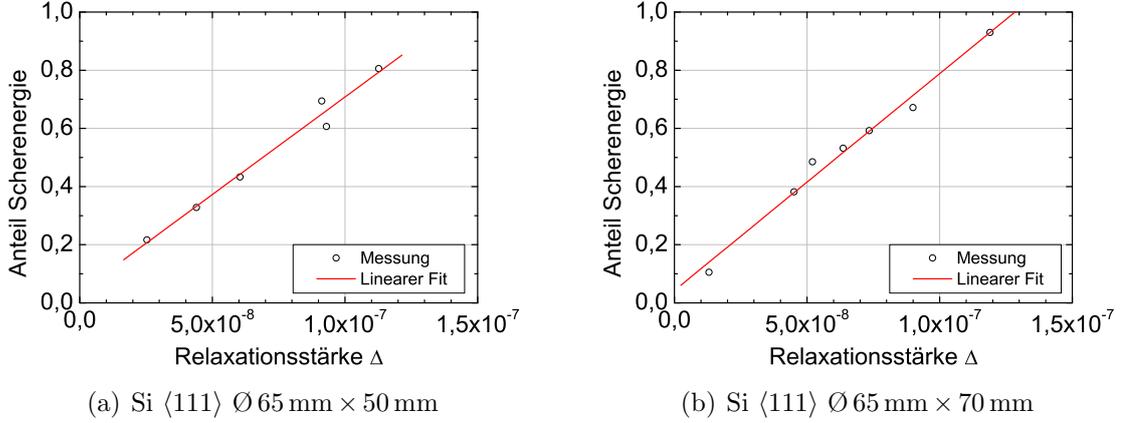
Da eine Lokalisierung des Sauerstoffs wie im klassischen Bild nicht vorliegt, postulieren Nowick und Heller [104], daß die dreizählige Rotationssymmetrie ent-



**Abb. 6.8.: Platzwechselforgänge von Sauerstoff in Silizium.** Abb. a) zeigt den mikroskopischen Aufbau des Sauerstoffdefekts im Silizium. Zwischen den Siliziumatomen (weiß) ist das Sauerstoffatom (rot) kovalent gebunden. Die Gleichgewichtsposition des Defekts ist jedoch aus der  $[111]$ -Achse zwischen den Siliziumatomen heraus verschoben. Um die  $[111]$ -Achse kann der Defekt sechs Gleichgewichtspositionen einnehmen. Neben dieser Rotation kann aber auch ein Aufbrechen der Bindung und ein Wechsel zu einem anderen Si-Si-Paar erfolgen. Das Ergebnis dieses Umklappens ist in b) gezeigt.

lang der  $\langle 111 \rangle$ -Richtung auch mit dem Defekt erhalten bleibt. Somit ergibt sich der Fall eines trigonalen Defekts im kubischen Siliziumkristall. Entscheidend sind nun die Platzwechselprozesse des Sauerstoffatoms zwischen zwei kristallographisch unterschiedlichen  $\langle 111 \rangle$ -Achsen, z. B. von  $[111]$  zu  $[\bar{1}\bar{1}1]$ . Unter der Annahme einer konstanten Defektanzahl ist in dieser Symmetrie allein eine Relaxation über den elastischen Modul  $C_{44}$  möglich. Dissipation mechanischer Energie sollte demzufolge nur für die Scheranteile auftreten [105].

Um diesen Zusammenhang zu überprüfen, wurde die Relaxationsstärke unter Berücksichtigung der Hintergrundverluste aus den Meßwerten bei unterschiedlichen Resonanzen ermittelt. Dies geschah für die oben erwähnte Probe ( $\varnothing 65 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ ) sowie für eine zweite Probe mit den Abmessungen  $\varnothing 65 \text{ mm} \times 70 \text{ mm}$ . Beide Substrate stammen aus demselben Zuchtkristall und sollten daher gleiche Defektkonzentrationen aufweisen. Die Zylinderachsen beider Proben sind entlang der  $\langle 111 \rangle$ -Achse des Kristalls orientiert. Eine numerische Berechnung des Scheranteils der in der Mode gespeicherten Energie erfolgte mit Hilfe der Computersoftware ANSYS. Abb. 6.9 stellt die Relaxationsstärken dem Anteil der Scherenergie in der Mode gegenüber. In eindeutiger Weise ist ein linearer Zusammenhang festzustellen. Die geringen Abweichungen von der Regressionsgeraden können durch die unsichere Interpolation der Untergrundverluste erklärt werden. Ebenfalls bringt die numerische Berechnung der Substrateigenmoden als auch die probenabhängige Variation der mechanischen



**Abb. 6.9.: Abhängigkeit der Relaxationsstärke von dem Anteil der Scherenergie in der zugrundeliegenden Eigenmode.** Der lineare Zusammenhang bestätigt die Hypothese einer trigonalen Defektstruktur von Sauerstoff in Silizium.

Parameter eine Unsicherheit in die Auswertung ein. Beide Einflüsse zusammen sind mit einem relativen Fehler von unter 5% abzuschätzen. Ein Sauerstoffdefekt dissipiert nur dann Energie, wenn die zugrundeliegende Mode an der Defektstelle eine mechanische Spannung aufweist. Sind die Sauerstoffdefekte homogen in der Probe verteilt, erwartet man eine lineare Beziehung zwischen dem Scheranteil der mechanischen Energie und der Relaxationsstärke. Eine räumliche Inhomogenität der Defekte kann allerdings auch zu einer Abweichung von dieser Geraden führen.

Für die vorliegende Defektsymmetrie ist nach Nowick und Heller allein eine Relaxation der Komplianz<sup>1</sup>  $S_{44}$  erlaubt. Mit den Eigenwerten des elastischen Dipols  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  erhalten sie [105, Gl. (6.11)]

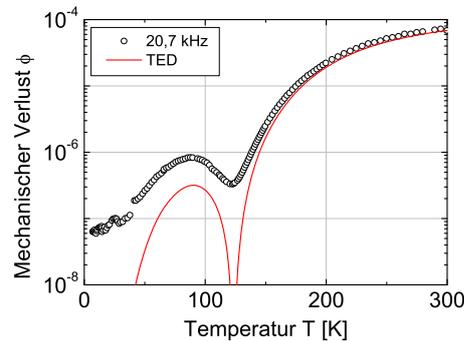
$$\delta S_{44} = \frac{4N_0V_0^2}{9k_B T} (\lambda_1 - \lambda_2)^2. \quad (6.24)$$

Deutlich erkennbar ist die lineare Abhängigkeit von der Anzahldichte der eingebrachten Defekte  $N_0$ .  $V_0$  beschreibt hierbei das charakteristische Defektvolumen. Für kubische Kristalle gilt  $C_{44} = 1/S_{44}$  und damit kann die Relaxationsstärke des Verlustmaximums über

$$\Delta = \frac{\delta C_{44}}{C_{44}} = \frac{\delta S_{44}}{S_{44}} \quad (6.25)$$

mit den Komponenten des elastischen Dipols in Verbindung gebracht werden. Mit der Kenntnis der Defektdichte kann so der Materialparameter  $\lambda_1 - \lambda_2$  berechnet

<sup>1</sup>Der Tensor elastischer Komplianzen ist als inverser Tensor der elastischen Moduln definiert.



**Abb. 6.10.: Mechanischer Verlust eines Siliziumcantilevers.** Die untersuchte Probe besaß eine Länge von 50 mm und eine Breite von 8 mm und wurde im Czochralskiverfahren hergestellt. Die Längsachse des Cantilevers war dabei in  $\langle 110 \rangle$ -Richtung und die Oberfläche senkrecht zur  $\langle 100 \rangle$ -Richtung des Kristalls orientiert. Die mit Tabellenwerten berechneten thermoelastischen Verluste für eine Dicke von 110  $\mu\text{m}$  erklären das Verhalten für Temperaturen oberhalb von 150 K. Die Phononenverluste liegen entsprechend Abb. 6.7(a) unter  $10^{-8}$  und sind deshalb nicht im Diagramm dargestellt.

werden. Die Defektdichte ist für die in vorliegender Arbeit ausgewerteten Proben jedoch nicht bekannt. Eine quantitative Auswertung hinsichtlich des elastischen Dipols unterbleibt deshalb an dieser Stelle.

Der oben erwähnten Analyse der Scherenergie geht die genaue Kenntnis der Modenform einer Resonanz voraus. Dazu wurde das gemessene Resonanzspektrum vor allem bei niedrigen Frequenzen mit dem berechneten verglichen. In diesem Bereich ist eine Zuordnung relativ einfach, da aufeinanderfolgende Moden im Spektrum um einige Kilohertz auseinanderliegen. Probenspezifische Abweichungen der Materialparameter vom in der Simulation verwendeten Literaturwert werden so deutlich. Zusätzlich erkennt man an den niederfrequenten Moden, ob die berechneten Frequenzen ober- oder unterhalb der gemessenen Frequenzen liegen. Für die zuverlässige Identifikation der Modenformen ist es unerlässlich, daß sich jede gemessene Mode im berechneten Spektrum wiederfindet.

### 6.7.2. Schwingende Plättchen

Eine Auswertung an Siliziumcantilevern würde aufgrund der nahezu uniaxialen Belastung einen einfacheren Zugang zur Geometrie des Sauerstoffdefekts erlauben. Verlustmessungen an Siliziumcantilevern zeigen jedoch relativ hohe Verluste  $\gtrsim 1 \cdot 10^{-7}$  für Temperaturen oberhalb von 50 K. Dieses Verhalten ist beispielhaft an der Messung einer Biegemode bei 20,7 kHz in Abb. 6.10 zu erkennen.

Bei hohen Temperaturen dominiert die thermoelastische Dämpfung die ge-

messenen Verluste. Um 120 K besitzt der Ausdehnungskoeffizient von Silizium jedoch einen Nulldurchgang und die thermoelastische Dämpfung verschwindet. Deshalb sollte eine Detektion des durch Sauerstoff verursachten Verlustes in der Nähe dieser Temperatur möglich sein. Die Cantileverachse der verwendeten Probe lag in kristalliner  $\langle 110 \rangle$ -Richtung. In einer Biegemode erwartet man nach der Theorie des elastischen Dipols deshalb keine Dämpfung durch den Sauerstoffdefekt (vgl. Abschnitt 6.7.3). Allerdings zeigen sich auch hier gemessene Verluste von über  $1 \cdot 10^{-7}$ . Diese werden wahrscheinlich durch die Oberfläche verursacht [133] und überdecken das schwache Verlustmaximum von Sauerstoff mit seiner maximalen Relaxationsstärke von  $\Delta \approx 1,4 \cdot 10^{-7}$ . Eine Untersuchung des Sauerstoffdefekts an Biegemoden von Siliziumcantilevern wird dadurch unmöglich.

Demgegenüber steht die Möglichkeit der Vermessung von Torsionsmoden. In ihnen wird mechanische Energie hauptsächlich in den verlustbehafteten Scherkomponenten gespeichert. Die Defektverluste sollten damit maximiert werden. Da eine reine Torsionsverformung keine Volumenänderung mit sich bringt, läßt sich außerdem eine geringere thermoelastische Dämpfung erwarten. Im Vergleich zu Biegemoden weisen Torsionsmoden zudem einen geringeren Energieeintrag nahe der Probenoberfläche auf. Damit sollte ebenfalls der Einfluß möglicher Oberflächendefekte verringert werden. Demgegenüber steht eventuell eine größere Wechselwirkung mit der Klemmung, die zu höheren mechanischen Verlusten führt. Die Untersuchung von Torsionsmoden ist deshalb in zukünftigen Messungen besonders interessant.

### 6.7.3. Einfluß auf die Gravitationswellendetektion

Die ermittelte Abhängigkeit des mechanischen Verlustes von der über den Modul  $C_{44}$  gespeicherten Energie besitzt einen direkten Einfluß auf die Planung zukünftiger Gravitationswellendetektoren. Die Minimierung des Brownschen Rauschens des Substrates setzt nach Gl. (4.18) die Wahl eines möglichst großen elastischen Moduls voraus. In Silizium ist der maximale Elastizitätsmodul  $E_{111} = 188$  GPa entlang der  $\langle 111 \rangle$ -Richtung gegeben. Beschreibt man den Tensor der elastischen Konstanten in einem Koordinatensystem, dessen  $z$ -Achse mit der  $[111]$ -Richtung zusammenfällt, ergibt sich

$$C_{\langle 111 \rangle}^{(\text{Si})} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{14} & 0 & 0 \\ & \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{13} & -\tilde{C}_{14} & 0 & 0 \\ & & \tilde{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \tilde{C}_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{14} \\ & & & & & \tilde{C}_{66} \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Diese Gestalt ist typisch für trigonale Kristalle und spiegelt die dreizählige Symmetrie entlang der  $\langle 111 \rangle$ -Achse von Silizium als kubischem Kristall wider. Alle neuen Einträge lassen sich über die drei gebräuchlichen Konstanten  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  und  $C_{44}$  eindeutig bestimmen. Speziell für  $\tilde{C}_{33}$  lautet dieser Zusammenhang

$$\tilde{C}_{33} = \frac{1}{3} (C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44}) . \quad (6.27)$$

Die Rauschanalyse nach Levin bringt eine Spannung  $\sigma_{33}$  entlang der Zylinderachse auf das Substrat auf. Folglich wird mit dieser Belastung hauptsächlich Energie über den Modul  $\tilde{C}_{33}$  gespeichert. Anteilig findet dabei auch der verlustbehaftete Modul  $C_{44}$  Eingang, der zu einer Erhöhung der mechanischen Verluste  $\phi$  beiträgt. Der erhöhte Verlust kann somit den Vorteil des höheren Elastizitätsmoduls in  $\langle 111 \rangle$ -Orientierung wieder aufheben und das Rauschniveau im Vergleich zur  $\langle 100 \rangle$ -Orientierung sogar erhöhen. Dieses Verhalten ist v. a. dann kritisch, wenn die Substrattemperatur in der Nähe maximaler Defektverluste liegt. Bei einer Detektionsfrequenz von 1 kHz zeigt der Sauerstoffdefekt in Silizium bei 95 K sein Maximum.

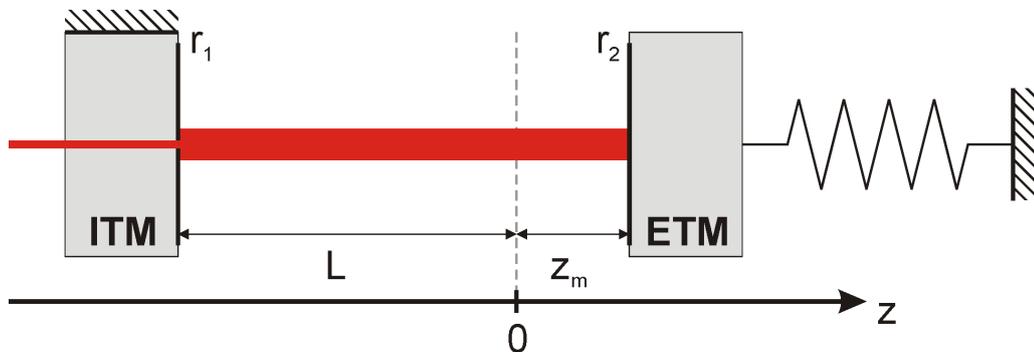
Im Gegensatz dazu zeigt eine entlang der  $\langle 110 \rangle$ -Achse ausgerichtete Probe keine Kopplung des verlustbehafteten Moduls  $C_{44}$  mit der nach Levin aufgebrauchten Spannung. Unter Nutzung des höheren Elastizitätsmoduls kann mit dieser Orientierung hinsichtlich der Sauerstoffdefekte ein geringeres Brownsches Substratrauschen erzielt werden.

# 7. Parametrische Instabilitäten

Die hohe Laserintensität im Armresonator von Gravitationswellendetektoren kann den Effekt der parametrischen Resonanz (s. Anhang C.1) hervorrufen. Unter gewissen Bedingungen können dabei die Resonatorspiegel zu mechanischen Eigenschwingungen angeregt und somit das Interferometer aus dem stabilen Zustand ausgelenkt werden. Dieses Detektorverhalten macht eine Detektion unmöglich.

## 7.1. Grundlagen

Das Grundprinzip dieses Effektes soll an einer vereinfachten Geometrie deutlich gemacht werden. Dazu wird der Endspiegel als harmonischer Oszillator mit idealer Reflektivität  $r_2 = 1$  angenommen. Der Einkoppelspiegel soll örtlich fixiert sein und eine Reflektivität  $r_1 < 1$  besitzen. In Abb. 7.1 ist dieses Modell veranschaulicht.



**Abb. 7.1.:** Modell zur Verdeutlichung der parametrischen Instabilität eines Fabry-Perot-Resonators. Der Endspiegel der Kavität ist als eindimensionaler harmonischer Oszillator modelliert, während der Einkoppelspiegel als örtlich fest angenommen wird.

Zunächst könnte man davon ausgehen, daß die Bewegung des Endspiegels die im Resonator gespeicherte optische Energie moduliert. Mit Resonatorlängen von 4 km dauert ein Umlauf im Resonator  $\tau = 2L/c \approx 27 \mu\text{s}$ . Um die im Resonator umlaufende Intensität effektiv zu ändern, muß der Laserstrahl den Arm mehrmals durchlaufen. Als Maß dafür dient die Anzahl effektiver Umläufe mit typischen Werten von  $\mathcal{N} = 300$ . Da jedoch die elastischen Eigenmoden des Spiegels Frequenzen

über 10 kHz aufweisen, erweist sich diese Bewegung als zu schnell, um die Intensität im Resonator merklich zu modulieren.

Die Erklärung parametrischer Instabilitäten erfolgt stattdessen über die Phasenmodulation, die die Spiegelbewegung über die Auslenkung  $z_m$  dem umlaufenden Licht aufprägt. Mathematisch läßt sich das elektrische Feld direkt nach der Reflexion folgendermaßen zusammenfassen

$$E(t) = \hat{E} e^{i(\omega t - 2kz_m(t))} . \quad (7.1)$$

Für harmonische Spiegelschwingungen sei eine sinusförmige Zeitabhängigkeit mit der Kreisfrequenz  $\Omega$  angesetzt

$$z_m(t) = \hat{z} \sin(\Omega t) . \quad (7.2)$$

In der Näherung kleiner Amplituden  $k\hat{z} \ll 1$  kann man Gl. (7.1) linear entwickeln

$$E(t) \approx \hat{E} (e^{i\omega t} - k\hat{z}e^{i(\omega+\Omega)t} + k\hat{z}e^{i(\omega-\Omega)t}) . \quad (7.3)$$

Neben der in den Resonator eingestrahlten Frequenz entstehen durch die Spiegelschwingung zwei Seitenbänder, die um die Spiegelfrequenz  $\Omega$  gegenüber der Grundfrequenz  $\omega$  verschoben sind. Die sog. Stokesmode bezeichnet dabei die Welle verringerter Frequenz, während die Welle höherer Frequenz Antistokesmode genannt wird. Eine genaue Berechnung zeigt, daß die betrachtete Phasenmodulation auch höhere Seitenbänder mit einer Frequenzverschiebung ganzzahliger Vielfacher von  $\Omega$  besitzt. Für kleine Spiegelauslenkungen, wie sie in der vorliegenden Arbeit angenommen werden, genügt jedoch die Berücksichtigung der ersten Seitenbänder.

Falls die neu entstandenen Seitenbänder nahe der Resonanz des Fabry-Perot-Resonators liegen, wird bei jedem Umlauf Licht phasenrichtig aus der Grundmode in das Seitenband transferiert. Sind die Verluste der optischen Seitenbänder in der Kavität klein genug, steigt damit deren Intensität stetig an. In diesem Prozeß wird die Frequenz und damit auch die Energie der elektromagnetischen Welle geändert. Während die einfache Phasenmodulation die Energie der elektromagnetischen Welle nicht ändert (Energiegewinn in Stokesmode wird durch Energieverlust in Antistokesmode ausgeglichen), kann es durch die Realisierung eines Resonators zu einer Bevorzugung eines Seitenbandes kommen. Um die Energieerhaltung zu gewährleisten, muß der Spiegel die Energiedifferenz ausgleichen. Die Konversion der elektromagnetischen Grundmode in eine Stokesmode setzt Energie frei und führt damit zu einer Zunahme mechanischer Energie im Spiegel. Die entsprechend vergrößerte Schwingungsampli-

tude  $\hat{z}$  erhöht nach Gl. (7.3) die Effizienz der Seitenbänderzeugung und damit die in die Spiegelschwingung übertragene Energie. Mit dieser positiven Rückkopplung ist die mechanische Instabilität des Detektors zu erklären. Eine ausreichende mechanische Dämpfung der Testmasse kann das Auftreten parametrischer Instabilitäten noch verhindern. Antistokesmoden entziehen der Spiegelschwingung Energie und können im Unterschied zu Stokesmoden keine Instabilität hervorrufen.

Der beschriebene Energietransport kann auch dynamisch erklärt werden. Ohne Modulation läuft im Resonator die optische Grundmode um und übt einen konstanten Strahlungsdruck auf den als frei beweglich modellierten Spiegel aus. Dieser ist proportional zur Intensität des am Spiegel reflektierten Lichts. Dabei kann der Einfluß der hochfrequenten optischen Schwingung bei  $10^{15}$  Hz auf den Spiegel wegen dessen mechanischer Trägheit vernachlässigt werden.

Mit der Erzeugung einer optischen Stokesmode ergibt sich nun eine Schwebung mit der optischen Grundmode. Für das resultierende elektrische Feld

$$E(t, x) = E_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + E_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} \quad (7.4)$$

folgt eine Intensität von (siehe beispielsweise [35])

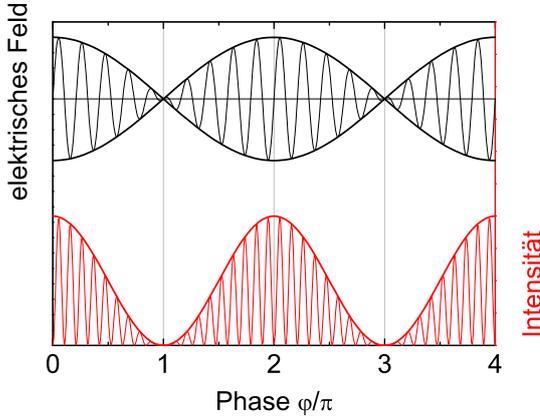
$$I(t, z) \propto E(t, z)E(t, z)^* = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2\Re(E_1 E_2^* e^{i[(\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 - k_1)z]}) . \quad (7.5)$$

Im vorliegenden Fall sind die Amplituden  $E_1$  und  $E_2$  reellwertig. Dies erlaubt eine Vereinfachung zu

$$I(t, z) \propto |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2E_1 E_2 \cos [(\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 - k_1)z] . \quad (7.6)$$

Der behandelte Effekt der Schwebung ist in Abb. 7.2 exemplarisch dargestellt. Mit der Ersetzung  $\omega_1 \rightarrow \omega$  und  $\omega_2 \rightarrow \omega - \Omega$  für den Umlauf von Stokesmoden im Resonator erkennt man die Anregung des Spiegels. Für den resonanten Umlauf beider optischer Moden entfällt der Ortsterm  $(k_2 - k_1)z$  im Argument des Kosinus. Zur Zeit  $t = 0$  bewegt sich der Spiegel entsprechend Gl. (7.2) in positive  $z$ -Richtung nach außen. Gleichzeitig wird auch der Strahlungsdruck maximal und beschleunigt den Spiegel zusätzlich nach außen. Diese phasenrichtige Anregung resultiert in einer Erhöhung der Schwingungsamplitude des Spiegels. Für die Antistokesmode ist das Vorzeichen von  $E_2$  umzukehren. Damit ergibt sich eine Phasenverschiebung der treibenden Kraft am Spiegel um  $180^\circ$  und eine Dämpfung der Spiegelbewegung.

Eine analytische Modellierung der Anregung parametrischer Instabilitäten findet sich in [9]. Braginsky et al. leiten darin einen Ausdruck für die parametrische



**Abb. 7.2: Schwebungsfigur aus der Überlagerung zweier Wellen.** Das Diagramm zeigt exemplarisch das aus einer Überlagerung zweier Wellen leicht unterschiedlicher Frequenz resultierende elektrische Feld. Die Intensität ist mit ihrer quadratischen Abhängigkeit vom elektrischen Feld ebenfalls dargestellt und zeigt ausgeprägte Maxima und Minima. Diese führen aufgrund des Strahlungsdrucks zu einer Bewegung des als schwingungsfähig angenommenen Endspiegels.

Verstärkung  $\mathcal{R}$  und das folgende Kriterium für das Auftreten parametrischer Instabilitäten ab

$$\mathcal{R} = \frac{W}{cML} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_m \gamma_m \gamma_1} \cdot \frac{\Lambda}{1 + \frac{\Delta^2}{\gamma_1^2}} > 1 . \quad (7.7)$$

Dabei ist  $W$  die im Resonator umlaufende Laserleistung,  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit,  $M$  die Spiegelmasse,  $L$  die Armlänge  $\omega_m$  und  $\omega_1$  die Kreisfrequenz des Spiegels und der möglichen optischen Resonatormode,  $\gamma_1$  und  $\gamma_m$  die Abklingrate der optischen Resonatormode und der Spiegelschwingung.  $\Delta = \omega_0 - \omega_m - \omega_1$  bezeichnet die Frequenzabweichung zwischen der potentiellen Resonatormode  $\omega_1$  und der Frequenzdifferenz aus optischer Grundmode und Spiegelschwingung  $\omega_0 - \omega_m$ . Vereinfachungen in diesem Modell findet man sowohl in der konstanten Leistung der Grundmode  $W$  als auch in der Annahme, daß die Abklingzeiten der mechanischen Schwingungen groß gegenüber denen der optischen Moden sind. Durch die Verwendung verlustarmer Substratmaterialien ist die letzte Annahme gerechtfertigt.

Die Größe  $\Lambda$  beschreibt den Überlappfaktor zwischen optischer Grundmode, optischer Stokesmode und der elastischen Substratmode. Diese Einflüsse werden qualitativ plausibel, wenn man sich den Prozeß der Erzeugung parametrischer Instabilitäten vor Augen führt. Eine effektive Anregung der Substratschwingung findet nur dann statt, wenn die Spiegeloberfläche sich dort stark bewegt, wo die optische Stokesmode und die Grundmode gleichzeitig hohe Intensitäten aufweisen. Mathematisch ausgedrückt folgt [9]

$$\Lambda = \frac{[\int_S E_0(\vec{r}) E_1(\vec{r}) u_z(\vec{r}) dS]^2}{\frac{1}{V} \int_V |\vec{u}(\vec{r})|^2 dV \int_S |E_0(\vec{r})|^2 dS \int_S |E_1(\vec{r})|^2 dS} \quad (7.8)$$

mit Integrationen über das Substratvolumen  $V$  bzw. die reflektierende Substratoberfläche  $S$ . Die elektrischen Felder der Grundmode und der höheren Resonatormode sind mit  $E_0$  und  $E_1$  bezeichnet, die Auslenkung der Substratschwingung mit  $\vec{u}$ . Die Komponente  $u_z$  zeigt entlang der Zylinderachse des Substrates senkrecht zur reflektierenden Fläche.

Als Reaktion auf diese erste Behandlung parametrischer Instabilität folgte eine Arbeit von Kells und D'Ambrosio [134]. Sie berücksichtigen in ihrer Arbeit den Effekt der Antistokesmoden, die die Substratschwingungen effektiv dämpfen können. Sie führen zu einer negativen parametrischen Verstärkung von

$$\mathcal{R}_{as} = -\frac{W}{cML} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_m \gamma_m \gamma_2} \cdot \frac{\Lambda}{1 + \left(\frac{\Delta_2}{\gamma_2}\right)^2}. \quad (7.9)$$

Für optische Moden, die sich nur in der longitudinalen Ordnung unterscheiden, sind die optischen Verluste  $\gamma$  gleich. Auch die Modenform auf der Substratoberfläche bleibt unverändert. Da die Frequenz der Antistokesmode  $\omega_2$  immer größer als die der Stokesmode  $\omega_1$  ist, wird die parametrische Verstärkung unter Einbeziehung der Antistokeseffekte sogar negativ. Eine Instabilität ist dann ausgeschlossen. Dies liegt daran, daß der Resonator mit der Grundmode im Maximum betrieben wird und damit die Stokes- und Antistokesmoden gleichermaßen verstärkt.

Spätere Analysen tatsächlicher Detektorgeometrien zeigen jedoch, daß Stokesmoden mit im Vergleich zur Grundmode unterschiedlicher transversaler Ordnung parametrisch instabil werden können. Folglich muß dieser Effekt in der Konstruktion neuer Detektoren Berücksichtigung finden. Weitere Arbeiten berücksichtigen zusätzlich die Anregung einer Substratschwingung aus der Summe mehrerer optischer Stokesmoden [135]. Auch die Dämpfung einer Substratschwingung durch mehrere Antistokesmoden wird in der genannten Arbeit in Erwägung gezogen.

### 7.1.1. Optische Resonatormoden

Eine Analyse parametrischer Instabilitäten setzt die Kenntnis optischer Eigenmoden des verwendeten Resonators voraus. Sowohl die Modenfrequenz als auch die Verteilung des elektrischen Feldes am Spiegel gehen nach Gl. (7.7) in die Berechnung der parametrischen Verstärkung ein. Durch die im Resonator auftretende Schwebung zwischen der Grundmode und einer Mode höherer Ordnung ergibt sich eine mechanische Anregung des Substrates mit der Frequenz  $\omega_{Nmn}$ . Mit den Krümmungsradien

der Spiegel  $R_i$  und der Resonatorlänge  $L$  lautet der Frequenzunterschied [136]

$$\omega_{Nmn} = \frac{c}{L} \left[ \pi N + (n + 2m + 1) \arccos \left( \pm \sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right)} \right) \right]. \quad (7.10)$$

Dabei bezeichnet  $N$  die longitudinale Ordnung,  $n$  die azimutale und  $m$  die radiale Ordnung der optischen Stokesmode. Für stabile Resonatoren besitzen die Faktoren in dem Wurzelausdruck das gleiche Vorzeichen. Dieses Vorzeichen ist im Argument des Arcuscosinus einzusetzen. Eine detailliertere Herleitung ist im Anhang (C.2) dargestellt.

Für die Untersuchung parametrischer Instabilitäten ist weiterhin die Kenntnis optischer Verluste von Bedeutung. Als Hauptmechanismen unterscheidet man die Verluste durch die verbleibende Transmission an den Resonatorspiegeln als auch die Beugungsverluste bei der Reflexion innerhalb der Kavität. Die nach einem Umlauf im Resonator verbleibende Energie kann durch den Transmissionskoeffizienten der Spiegel  $T$  und einen Parameter für die Beugungsverluste  $S$  wie folgt berechnet werden

$$E - \Delta E = E(1 - S_1)(1 - T_1)(1 - S_2)(1 - T_2) = E(1 - T_{\text{opt}}). \quad (7.11)$$

Dabei sind die Verlustmechanismen in dem Parameter  $T_{\text{opt}}$  und die pro Umlauf abgegebene Energie in  $\Delta E$  zusammengefaßt. Die Abklingrate des Resonators  $\gamma$  aus Gl. (7.7) beschreibt jedoch das zeitliche Abklingen der Amplitude des elektrischen Feldes. In diesem Modell folgt der zeitliche Verlauf der optischen Energie einem exponentiellen Gesetz mit doppelter Relaxationsrate

$$E(t) = \hat{E} e^{-2\gamma t}. \quad (7.12)$$

Für einen Umlauf im Resonator wird dabei die Zeit  $t = 2L/c$  benötigt. Damit beide Modelle den gleichen physikalischen Sachverhalt beschreiben, muß der Energieverlust pro Umlauf in beiden Fällen gleich sein. Es ergibt sich eine Vorschrift für die Berechnung von  $\gamma$  zu

$$E(1 - T_{\text{opt}}) = E e^{-4\gamma L/c} \Rightarrow \gamma = -\frac{c}{4L} \ln(1 - T_{\text{opt}}). \quad (7.13)$$

Die Berechnung der Beugungsverluste erfolgt in einer einfachen Näherung über die Integration der Energie außerhalb der Spiegelfläche. Der Koeffizient  $S$ , der die

Energieverluste durch Beugung beschreibt, ergibt sich mit dem Spiegelradius  $R$  zu

$$1 - S = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} |E(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |E(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi}. \quad (7.14)$$

Das Betragsquadrat des elektrischen Feldes ist hierbei proportional zur Intensität des Lichts und kann Gl. (C.7) entnommen werden. In dieser Näherung ist jegliche Änderung der optischen Modenform durch den endlichen Spiegel vernachlässigt. Genauere Untersuchungen mittels numerischer Berechnungen der optischen Modenform bei endlichen Spiegeln sind in [137] gegeben. In ihrer Analyse des Armresonators von aLIGO zeigen sich für Laguerre-Gauß-Moden nur geringfügige Änderungen der Beugungsverluste von etwa 10%. Gravierender wirken sich die Änderungen der Eigenfrequenzen optischer Resonatormoden aus. Diese variieren für Moden höherer Ordnung um bis zu 1 kHz und führen damit zu einer erheblichen Abweichung zwischen der hier gezeigten Berechnung und einem realen Experiment.

### 7.1.2. Elastische Substratmoden

Neben den optischen Eigenschaften des Resonators wird das Auftreten parametrischer Instabilitäten maßgeblich durch die elastischen Eigenschaften des Substrates bestimmt. Gl. (7.7) verdeutlicht, daß die Kenntnis der mechanischen Resonanzfrequenzen  $\omega_m$  als auch der Auslenkung  $\vec{u}$  der zugehörigen Modenformen einer Abschätzung der parametrischen Verstärkung vorausgeht. In Gravitationswellendetektoren sind die Testmassen an dünnen Fasern aufgehängt und können damit als frei schwingend modelliert werden. Deshalb muß die Spannung an der Substratoberfläche für Eigenmoden verschwinden. Mathematisch lautet diese Randbedingung

$$\vec{F}\vec{n} = F_i n_i = \sigma_{ij} A n_j n_i = 0 \quad (7.15)$$

mit der Oberflächennormalen  $\vec{n}$ , der Oberfläche  $A$  und der wirkenden Kraft  $\vec{F}$ . Weiterhin muß im Substrat die Bewegungsgleichung erfüllt sein. Dazu betrachtet man ein infinitesimales Volumenelement des Kontinuums  $\Delta V$ . Newtons zweites Axiom lautet dann

$$F_i = \int_{(\Delta V)} \sigma_{ij} n_j dA = \int_V \sigma_{ij,j} dV = \int_{(\Delta V)} \rho \ddot{u}_i dV = m \ddot{x}_i. \quad (7.16)$$

Hierbei bezeichnet  $(\Delta V)$  die Oberfläche des Volumenelements und  $u$  die elastische Auslenkung. Über das Hookesche Gesetz, Gl. (B.1), können die Spannungen durch

die Dehnung und schließlich durch die Auslenkung ersetzt werden. Diese partielle Differentialgleichung in  $u$  ist schließlich zu lösen.

Die Ermittlung des Spektrums elastischer Moden ist selbst für den einfachen Fall eines zylinderförmigen, isotropen Substrates analytisch nicht möglich. Damit ist eine numerische Analyse der Eigenfrequenzen und mechanischen Modenformen unumgänglich. Im Rahmen dieser Arbeit wurden dazu die Programme COMSOL [91] und ANSYS [138] als Finite-Element-Methoden (FEM) verwendet. Ein Vergleich beider Programme mit bekannten analytischen Lösungen für Chree-Lamb-Moden und Torsionsmoden ist von Heinert und Strigin [139] diskutiert. Im Hinblick auf die Simulationengenauigkeit der Modenfrequenz und Modenform zeigt ANSYS eine deutliche Überlegenheit gegenüber COMSOL und bestätigt damit frühere Arbeiten [140]. Als typisches Beispiel wurde dazu eine Chree-Lamb-Eigenmode bei 51 kHz herangezogen. Bei einem FEM-Modell mit 40000 Elementen betrug die Frequenzabweichung für COMSOL  $\approx 100$  Hz, während der Fehler in ANSYS mit unter einem Hertz anzugeben ist. Demzufolge wurde für die Analyse parametrischer Instabilitäten ausnahmslos die Software ANSYS verwendet.

Wesentlich für das Auftreten parametrischer Instabilitäten ist ebenfalls die Relaxationsrate mechanischer Eigenschwingungen. Analog zu Gl. (7.13) kann sie über den mechanischen Verlust des Substratmaterials berechnet werden

$$\gamma_m = -\frac{\omega_m}{4\pi} \ln(1 - 2\pi\phi) \approx \frac{1}{2}\omega_m\phi. \quad (7.17)$$

Die letzte Näherung gilt dabei für geringe mechanische Verluste  $2\pi\phi \ll 1$ , wie sie im Falle der Detektortestmassen gegeben sind. Da diese Eigenschaft maßgeblich das Brownsche Rauschen der Substrate bestimmt (vgl. Kap. 4), sind relativ viele Meßwerte bekannt. Für unbeschichtete Substrate aus Fused Silica ist eine Interpolation gemessener Verluste nach Penn [77] verfügbar. Darin wird eine Aufteilung in Bulk- und Oberflächenverluste vorgenommen und eine Interpolationsformel angenommen, die mit zunehmender Frequenz abnehmende Verluste postuliert. Für typische Substratgeometrien geplanter Detektoren der zweiten Generation ergeben sich für Frequenzen von 10 kHz bis 80 kHz mechanische Verluste in der Größenordnung von  $\phi = 10^{-8}$  bis  $10^{-7}$ . Diese Abschätzung liefert jedoch zu geringe Verluste, da sie alle restlichen real auftretenden Verlustquellen wie den dielektrischen Schichtstapel, die Aufhängungsfasern oder die Bondflächen, an denen die Aufhängungsfasern mit dem Substrat verbunden werden, vernachlässigt. Die Messung mechanischer Verluste realer Testmassen in der endgültigen Aufhängung belegt diese Vermutung [141]. Auch Messungen realer Testmassen für aLIGO [142] und VIRGO [143] mit metal-

lischen Aufhängungsdrähten unterstützen diese These. Alle genannten Messungen zeigen Verluste über  $\phi = 4 \cdot 10^{-7}$ . Dennoch wird in der vorliegenden Analyse mit  $\phi = 10^{-8}$  ein niedriger Wert angenommen, um in der Simulation keine mögliche instabile Kombination auszulassen.

## 7.2. Parametrische Instabilitäten in aLIGO

Der konkreten Analyse parametrischer Instabilitäten liegen die Parameter für aLIGO aus Tab. 5.3 zugrunde. Zunächst wurden alle mechanischen Substratmoden bis zu einer Frequenz von 50 kHz numerisch berechnet. Anschließend wurden nach Gl. (7.10) die Frequenzen möglicher Stokesmoden ermittelt. Dabei wurde die maximale Ordnung transversaler Moden auf  $n+2m \leq 7$  beschränkt. Diese Wahl begrenzt die maximalen Beugungsverluste der Stokesmode auf 10% und gestattet die Berechnung der Beugungsverluste mit der einfachen Näherung nach Gl. (7.14). Schließlich wurde die parametrische Verstärkung  $\mathcal{R}$  für beliebige Kombinationen aus mechanischen und optischen Moden berechnet. Dabei erfolgte eine Optimierung des Überlappfaktors  $\Gamma$  in Hinblick auf eine Rotation der optischen Mode gegenüber der mechanischen Mode.

Die Auswertung ergab für die angegebenen Parameter insgesamt zwölf parametrisch instabile Kombinationen in aLIGO. Mechanisch entartete Moden wurden hierbei als einzelne Kombination gezählt. Anschließend wurde überprüft, inwieweit die angeregten Spiegelschwingungen Energie an eventuelle Antistokesmoden abgeben und so unter die kritische Schwelle von  $\mathcal{R} = 1$  fallen. Dazu wurde die parametrische Verstärkung jeder einzelnen instabilen Spiegelresonanz für Antistokesmoden bis zu einer Frequenz von 60 kHz berechnet. Um einen von null verschiedenen Überlappfaktor zu erhalten, kommen dazu nur optische Moden mit der gleichen azimuthalen Symmetrie wie die Spiegelmode in Frage. Im Ergebnis erweisen sich vier der zwölf Kombinationen als stabil, wenn Antistokesmoden berücksichtigt werden. Die Ergebnisse sind in Tab. 7.1 dargestellt.

Eine mögliche Verschiebung  $Z$  zwischen der Strahlachse des Laserstrahls und der Symmetrieachse des Spiegelsubstrates führt zur Aufweichung der azimuthalen Symmetriebedingung. Folglich ist für die angesprochene Verschiebung eine erhöhte Anzahl parametrisch instabiler Kombinationen zu erwarten. Vorliegende Arbeit untersucht erstmals den Effekt einer solchen Verschiebung. Eine beispielhafte Analyse für eine Verschiebung von 1 cm zeigt dabei das Auftreten zweier neuer Kombinationen. Eine detaillierte Beschreibung ist von Heinert und Strigin in [139] gegeben. Da die Justierung des Laserstrahls in den Detektoren jedoch auf unter 1 mm genau ge-

#	$f_m$ [Hz]	$\Delta f$ [Hz]	$m$	$n$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}_{as}$	$\mathcal{R}_{tot}$
27	14347	14484	0	3	3.04	0.00	3.04
55	19539	19312	2	0	5.90	0.31	5.59
56	19705	19312	1	2	1.72	0.15	1.57
143	28656	28968	2	2	1.90	0.61	1.29
153	29391	28968	2	2	4.22	0.88	3.33
155	29395	28968	1	4	1.25	0.02	1.23
162	29929	28968	3	0	1.28	0.64	0.64
208	33059	33796	3	1	3.36	6.85	-3.49
256	35876	33796	3	1	1.10	0.60	0.50
298	38048	37547	0	0	3.62	4.00	-0.39
526	47276	47203	1	0	63.92	1.32	62.57
527	47331	47203	1	0	18.70	0.09	18.60

**Tab. 7.1.: Parametrisch instabile Spiegelschwingungen für aLIGO.** Neben der Modennummer # der instabilen Spiegelmode ist auch deren Frequenz  $f_m$  gegeben. Die entsprechende Stokesmode ist durch den azimuthalen Index  $n$ , den radialen Index  $m$  und den Frequenzunterschied zur optischen Grundmode  $\Delta f$  beschrieben. Die parametrische Verstärkung  $\mathcal{R}$  wird durch Antistokesmoden um  $\mathcal{R}_{as}$  verringert. Damit bleiben vier der ursprünglich zwölf instabilen Spiegelmoden durch den Einfluß der Antistokesmoden stabil.

schieht, sind dort keine neuen Kandidaten zu erwarten. Durch die Fehlorientierung des Strahls verringert sich weiterhin der Überlappfaktor der Moden, die die azimuthale Bedingung erfüllen. Jedoch beläuft sich auch dieser Effekt für eine Verschiebung kleiner 1 mm auf unter 1%.

Die hier dargelegte Rechnung weist im Vergleich zu realen Testmassen einige Ungenauigkeiten auf. So besitzen reale Testmassen auf dem Umfang plane Flächen (sog. flats), um die Aufhängungsfasern zu bonden. Diese ändern die mechanischen Eigenfrequenzen des Substrates und führen teilweise zur Aufspaltung ursprünglich entarteter Moden. Außerdem führen Inhomogenitäten der elastischen Parameter im Substrat zu einer Variation der Resonanzfrequenzen. Die optischen Frequenzen des Resonators sind maßgeblich von den Krümmungsradien der Spiegel und der Resonatorlänge abhängig. Auch hier bewirken kleine Änderungen große Variationen in den Frequenzen. Letztendlich beeinflussen auch die Beugungsverluste die Resonanzfrequenz optischer Moden. Die genannten Unsicherheiten führen zu dem Schluß, daß die Berechnung parametrischer Instabilitäten an Beispielgeometrien einen rein stochastischen Charakter hat. Grundlegende Ideen können an diesen Beispielrechnungen veranschaulicht werden. Die konkreten instabilen Moden eines realen Detektors sind aber ausschließlich mit experimentellen Werten für optische und mechanische Resonanzen zuverlässig zu bestimmen.

## 8. Zusammenfassung

Für eine erfolgreiche direkte Detektion von Gravitationswellen ist eine Verbesserung der Empfindlichkeit aktueller interferometrischer Detektoren unabdingbar. Die vorliegende Arbeit identifiziert dabei das thermische Rauschen der Testmassen als Begrenzung zukünftiger Detektoren wie aLIGO. Die Anwendung bekannter analytischer Lösungen für die einzelnen Rauschbeiträge verdeutlicht, daß insbesondere das Brownsche Rauschen der dielektrischen Schichtstapel die erreichbare Empfindlichkeit maßgeblich einschränkt.

Basierend auf der Idee der Khalilikavität wurde gezeigt, daß die Verwendung von Khalilietalons eine neuartige und wirksame Methode zur Senkung des Schichtrauschens darstellt. Zudem ist die technologische Umsetzung einfacher als für eine Kavität. Für typische Substratgeometrien erlaubt die Verwendung eines Khalilietalons eine Halbierung der Rauschamplitude. Die Wahrscheinlichkeit einer Detektion von Gravitationswellen kann somit um etwa eine Größenordnung erhöht werden.

Eine Absenkung der Temperatur zur Verringerung thermischen Rauschens macht einen Wechsel des Substratmaterials notwendig. Die Verwendung von Silizium bringt dabei eine erhöhte thermische Weglänge mit sich. Der Einfluß der Substratoberfläche auf das Rauschen ist dann entgegen der Annahme existierender Modelle nicht mehr vernachlässigbar. Vorliegende Arbeit belegt erstmals die Verringerung des thermorefraktiven Rauschens für kryogene Substrattemperaturen unter Berücksichtigung der Substratoberfläche. Die Analyse eines möglichen Einkoppelspiegels des Einstein Telescope ergibt bei 10 K und Frequenzen über 500 Hz ein thermorefraktives Rauschen, das nur leicht unter dem Standardquantenlimit liegt. Kommen im späteren Detektor Techniken zum Einsatz, die das Standardquantenlimit senken, kann das thermorefraktive Rauschen die Detektorempfindlichkeit in diesem Frequenzbereich begrenzen. Auch für die Realisierung kryogener Khalilietalons muß die in vorliegender Arbeit entwickelte Theorie Berücksichtigung finden.

Das Brownsche Rauschen des Substrates stellt in zukünftigen Detektoren den zweitstärksten Rauschmechanismus dar. Die Modellierung mechanischer Verluste als Maß Brownschen Rauschens wurde zunächst an Kristallquarz überprüft. Hierbei konnten bekannte, durch Kristalldefekte verursachte Verlustmaxima mit der Theo-

rie von Debye erfolgreich bestätigt werden. Auch die thermoelastischen Verluste und die Akhieserdämpfung im Material wurden abgeschätzt. In Siliziumproben, die im Czochralskiverfahren hergestellt wurden, kam ein schwächer ausgeprägtes Maximum bei Temperaturen um 115 K zum Vorschein. Dieses Maximum folgt dem Arrheniusgesetz und im Temperaturverlauf der Debyeschen Theorie. Mit einer Modenanalyse konnte die Dissipation in Silizium allein auf die Scherkomponenten zurückgeführt werden. Dieser Sachverhalt bildet eine experimentelle Bestätigung der Theorie von Nowick und Heller [105]. Genannte Indizien weisen auf einen defektinduzierten Verlust im Silizium hin. Da Proben im Zonenschmelzverfahren kein solches Verlustmaximum zeigen, scheint es sich dabei um Sauerstoffdefekte zu handeln.

Schließlich ermöglichen die gewonnenen Erkenntnisse die Abschätzung des Brownschen Rauschens für Siliziumtestmassen unterschiedlicher Orientierung. Die bisher bevorzugte Orientierung der Zylinderachse entlang einer kristallinen  $\langle 111 \rangle$ -Achse zeigt zwar ein hohes Elastizitätsmodul und demnach ein geringeres Substratraschen. Gleichzeitig würde der durch den Sauerstoff verursachte Verlust aber im Vergleich zu anderen Orientierungen steigen und das Rauschen erhöhen. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten identifizieren vorliegende Untersuchungen dabei eine Orientierung der Substrate entlang der  $\langle 110 \rangle$ -Achse als optimal. Diese Konfiguration weist den höchsten Elastizitätsmodul ohne verlustbehaftete mechanische Spannungen auf.

Eine Minimierung der Substratverluste führt in aLIGO bereits zum unerwünschten Effekt parametrischer Instabilitäten. Die in vorliegender Arbeit dargelegte Rechnung besitzt dabei einen rein stochastischen Charakter, da die Eigenfrequenzen des Substrates und des Resonators für eine exakte Voraussage nicht hinreichend genau bekannt sind. Es ist wahrscheinlich, daß in Detektoren dritter Generation mit nochmals gesteigerter optischer Leistung im Resonator die Anzahl instabiler Moden weiter erhöht wird. Zukünftige Detektoren müssen deshalb zwingend mit Techniken ausgerüstet werden, die parametrische Instabilitäten unterdrücken. Wie in vorliegender Arbeit erstmals gezeigt wurde, bringt eine Verschiebung zwischen Laserstrahl und Rotationsachse des zylindrischen Substrates ebenfalls eine erhöhte Anzahl instabiler Moden mit sich. Eine solche Verschiebung ist deshalb in zukünftigen Detektoren zu vermeiden.

Die vorliegende Arbeit liefert somit wesentliche Beiträge zur Optimierung aktueller und zur Planung zukünftiger Gravitationswellendetektoren. Teile der Arbeit fanden in diesem Zusammenhang bereits Eingang in die Designstudie für das Einstein Telescope.

# Literaturverzeichnis

- [1] H. Dittus, F. Everitt, C. Lämmerzahl und G. Schäfer (1999) *Die Gravitation im Test*. Physikalische Blätter **55**(11) 39–46.
- [2] K. D. Kokkotas (2008). *Gravitational Wave Astronomy*. arXiv:0809.1602v1 [astro-ph].
- [3] O. D. Aguiar (2011) *Past, present and future of the Resonant-Mass gravitational wave detectors*. Research in Astronomy and Astrophysics **11**(1) 1–42.
- [4] R. Nawrodt, S. Rowan, J. Hough et al. (2011) *Challenges in thermal noise for 3rd generation of gravitational wave detectors*. General Relativity and Gravitation **43** 593–622.
- [5] F. Y. Khalili (2005) *Reducing the mirrors coating noise in laser gravitational-wave antennae by means of double mirrors*. Physics Letters A **334** 67–72.
- [6] H. B. Callen und T. A. Welton (1951) *Irreversibility and Generalized Noise*. Physical Review **83**(1) 34–40.
- [7] H. B. Callen und R. F. Greene (1952) *On a Theorem of Irreversible Thermodynamics*. Physical Review **86**(5) 702–710.
- [8] R. Nawrodt, A. Zimmer, S. Nietzsche et al. (2006) *A new apparatus for mechanical Q-factor measurements between 5 and 300 K*. Cryogenics **46** 718–723.
- [9] V. B. Braginsky, S. E. Strigin und S. P. Vyatchanin (2001) *Parametric oscillatory instability in Fabry-Perot interferometer*. Physics Letters A **287** 331–338.
- [10] S. Seel, R. Storz, G. Ruoso, J. Mlynek und S. Schiller (1997) *Cryogenic Optical Resonators: A New Tool for Laser Frequency Stabilization at the 1 Hz Level*. Physical Review Letters **78**(25) 4741–4744.
- [11] K. Numata, A. Kemery und J. Camp (2004) *Thermal-Noise Limit in the Frequency Stabilization of Lasers with Rigid Cavities*. Physical Review Letters **93** 250602.

- [12] A. Chijioko, Q.-F. Chen, A. Y. Nevsky und S. Schiller (2011). *Thermal noise of whispering gallery resonators*. arXiv:physics/1107.0276v1 [quant-ph].
- [13] A. Einstein (1916) *Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie*. Annalen der Physik **49** 769–822.
- [14] C. W. Misner, K. S. Thorne und J. A. Wheeler (1973) *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, New York.
- [15] M. Maggiore (2008) *Gravitational Waves*. Oxford University Press.
- [16] P. R. Saulson (1994) *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*. World Scientific, Singapore.
- [17] R. A. Hulse und J. H. Taylor (1975) *Discovery of a pulsar in a binary system*. The Astrophysical Journal **195** L51–L53.
- [18] J. H. Taylor und J. M. Weisberg (1982) *A new test of general relativity: Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16*. The Astrophysical Journal **253**(2) 908–920.
- [19] J. M. Weisberg, D. J. Nice und J. H. Taylor (2010) *Timing Measurements of the relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16*. The Astrophysical Journal **722** 1030–1034.
- [20] J. Weber (1960) *Detection and Generation of Gravitational Waves*. Physical Review **117**(1) 306–313.
- [21] J. Weber (1969) *Evidence for Discovery of Gravitational Radiation*. Physical Review Letters **22**(24) 1320–1324.
- [22] L. Gottardi, A. de Waard, O. Usenko et al. (2007) *Sensitivity of the spherical gravitational wave detector MiniGRAIL operating at 5 K*. Physical Review D **76** 102005.
- [23] C. A. Costa, I. D. Aguiar, N. F. Oliveira Jr et al. (2008) *The Schenberg data acquisition and analysis: results from its first commissioning run*. Classical and Quantum Gravity **25** 184002.
- [24] G. E. Moss, L. R. Miller und R. L. Forward (1971) *Photon-Noise-Limited Laser Transducer for Gravitational Antenna*. Applied Optics **10**(11) 2495–2498.

- [25] R. Weiss (1972) *Electromagnetically Coupled Broadband Gravitational Antenna*. Quarterly Progress Report, MIT Research Lab of Electronics **105** 54.
- [26] D. A. Shaddock (2008) *Space-based gravitational wave detection with LISA*. Classical and Quantum Gravity **25** 114012.
- [27] G. Hobbs et al. (2010) *The International Pulsar Timing Array project: using pulsars as a gravitational wave detector*. Classical and Quantum Gravity **27** 084013.
- [28] G. M. Harry (2010) *Advanced LIGO: the next generation of gravitational wave detectors*. Classical and Quantum Gravity **27** 084006.
- [29] H. Grote (2010) *The GEO 600 status*. Classical and Quantum Gravity **27** 084003.
- [30] G. Ballardin et al. (2001) *Measurement of the VIRGO superattenuator performance for seismic noise suppression*. Review of Scientific Instruments **72**(9) 3643–3652.
- [31] P. R. Saulson (1984) *Terrestrial gravitational noise on a gravitational wave antenna*. Physical Review D **30**(4) 732–736.
- [32] M. G. Beker, G. Cella, R. DeSalvo et al. (2011) *Improving the sensitivity of future GW observatories in the 1–10 Hz band: Newtonian and seismic noise*. General Relativity and Gravitation **43** 623–656.
- [33] G. Cagnoli, J. Hough, D. DeBra et al. (2000) *Damping dilution factor for a pendulum in an interferometric gravitational waves detector*. Physics Letters A **272** 39–45.
- [34] D. Shoemaker, R. Schilling, L. Schnupp et al. (1988) *Noise behavior of the Garching 30-meter prototype gravitational-wave detector*. Physical Review D **38**(2) 423–432.
- [35] A. E. Siegman (1986) *Lasers*. University Science Books, Mill Valley, California.
- [36] K. A. Strain und B. J. Meers (1991) *Experimental Demonstration of Dual Recycling for Interferometric Gravitational-Wave Detectors*. Physical Review Letters **66**(11) 1391–1394.
- [37] C. M. Caves (1980) *Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer*. Physical Review Letters **45**(2) 75–79.

- [38] D. F. Walls (1983) *Squeezed states of light*. Nature **306** 141–146.
- [39] C. M. Caves (1981) *Quantum-mechanical noise in an interferometer*. Physical Review D **23**(8) 1693–1708.
- [40] H. Vahlbruch, A. Khalaidovski, N. Lastzka et al. (2010) *The GEO 600 squeezed light source*. Classical and Quantum Gravity **27** 084027.
- [41] The LIGO Scientific Collaboration (2011) *A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit*. Nature Physics Letters doi:10.1038/nphys2083.
- [42] J. R. Smith (2009) *The path to the enhanced and advanced LIGO gravitational-wave detectors*. Classical and Quantum Gravity **26** 114013.
- [43] T. Accadia und B. L. Swinkels (2010) *Commissioning status of the Virgo interferometer*. Classical and Quantum Gravity **27** 084002.
- [44] P. Barriga et al. (2010) *AIGO: a southern hemisphere detector for the worldwide array of ground-based interferometric gravitational wave detectors*. Classical and Quantum Gravity **27** 084005.
- [45] K. Arai et al. (2009) *Status of Japanese gravitational wave detectors*. Classical and Quantum Gravity **26** 204020.
- [46] M. Punturo et al. einschließlich D. Heinert (2010) *The Einstein Telescope: a third-generation gravitational wave observatory*. Classical and Quantum Gravity **27** 194002.
- [47] M. Punturo et al. einschließlich D. Heinert (2010) *The third generation of gravitational wave observatories and their science reach*. Classical and Quantum Gravity **27** 084007.
- [48] S. Hild et al. einschließlich D. Heinert (2011) *Sensitivity studies for third-generation gravitational wave observatories*. Classical and Quantum Gravity **28** 094013.
- [49] R. Adhikari (2010). *Enhancing the 2nd generation interferometers*. Vortrag zum GWAD Workshop Kyoto.  
Verfügbar unter <http://gw.icrr.u-tokyo.ac.jp/gwadw2010/>.

- [50] A. Gillespie und F. Raab (1995) *Thermally excited vibrations of the mirrors of laser interferometer gravitational-wave detectors*. Physical Review D **52**(2) 577–585.
- [51] C. Wiener (1863) *Erklärung des atomistischen Wesens des tropfbar-flüssigen Körperzustandes, und Bestätigung desselben durch die sogenannten Molecularbewegungen*. Annalen der Physik **194**(1) 79–94.
- [52] D. S. Lemons und A. Gythiel (1997) *Paul Langevin's 1908 paper "On the Theory of Brownian Motion" ["Sur la théorie du mouvement brownien," C. R. Acad. Sci. (Paris) 146, 530–533 (1908)]*. American Journal of Physics **65**(11) 1079–1081.
- [53] M. C. Wang und G. E. Uhlenbeck (1945) *On the Theory of the Brownian Motion II*. Reviews of Modern Physics **17**(2-3) 323–342.
- [54] F. Reif (1987) *Statistische Physik und Theorie der Wärme*. Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- [55] A. S. Nowick und B. S. Berry (1972) *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*. Academic Press, New York.
- [56] P. R. Saulson (1990) *Thermal noise in mechanical experiments*. Physical Review D **42**(8) 2437–2445.
- [57] K. Yamamoto, M. Ando, K. Kawabe und K. Tsubono (2007) *Theoretical approach to thermal noise caused by an inhomogeneously distributed loss: Physical insight by the advanced modal expansion*. Physical Review D **75** 082002.
- [58] Y. Levin (1998) *Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach*. Physical Review D **57**(2) 659–663.
- [59] Y. T. Liu und K. S. Thorne (2000) *Thermoelastic noise and homogeneous thermal noise in finite sized gravitational-wave test masses*. Physical Review D **62** 122002.
- [60] F. Bondu, P. Hello und J.-Y. Vinet (1998) *Thermal noise in mirrors of interferometric gravitational wave antennas*. Physics Letters A **246** 227–236.
- [61] G. M. Harry, A. M. Gretarsson, P. R. Saulson et al. (2002) *Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings*. Classical and Quantum Gravity **19** 897–917.

- [62] K. Somiya und K. Yamamoto (2009) *Coating thermal noise of a finite-size cylindrical mirror*. Physical Review D **79** 102004.
- [63] E. Majorana und Y. Ogawa (1997) *Mechanical thermal noise in coupled oscillators*. Physics Letters A **233** 162–168.
- [64] L. D. Landau und E. M. Lifschitz (1987) *Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band V: Statistische Physik. Teil 1*. Akademie-Verlag, Berlin.
- [65] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky und S. P. Vyatchanin (1999) *Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational wave antennae*. Physics Letters A **264** 1–10.
- [66] M. Cerdonio, L. Conti, A. Heidmann und M. Pinard (2001) *Thermoelastic effects at low temperatures and quantum limits in displacement measurements*. Physical Review D **63** 082003.
- [67] V. B. Braginsky und S. P. Vyatchanin (2003) *Thermodynamical fluctuations in optical mirror coatings*. Physics Letters A **312** 244–255.
- [68] M. M. Fejer, S. Rowan, G. Cagnoli et al. (2004) *Thermoelastic dissipation in inhomogeneous media: loss measurements and displacement noise in coated test masses for interferometric gravitational wave detectors*. Physical Review D **70** 082003.
- [69] A. Cumming, A. Heptonstall, R. Kumar et al. (2009) *Finite element modelling of the mechanical loss of silica suspension fibres for advanced gravitational wave detectors*. Classical and Quantum Gravity **26** 215012.
- [70] G. Cagnoli und P. A. Willems (2002) *Effects of nonlinear thermoelastic damping in highly stressed fibers*. Physical Review B **65** 174111.
- [71] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky und S. P. Vyatchanin (2000) *Thermo-refractive noise in gravitational wave antennae*. Physics Letters A **271** 303–307.
- [72] V. B. Braginsky und S. P. Vyatchanin (2004) *Corner reflectors and quantum-non-demolition measurements in gravitational wave antennae*. Physics Letters A **324** 345–360.
- [73] Y. Levin (2007) *Fluctuation-dissipation theorem for thermo-refractive noise*. Physics Letters A **372** 1941–1944.

- [74] B. Benthem und Y. Levin (2009) *Thermorefractive and thermochemical noise in the beamsplitter of the GEO600 gravitational-wave interferometer*. Physical Review D **80** 062004.
- [75] M. L. Gorodetsky (2008) *Thermal noises and noise compensation in high-reflection multilayer coatings*. Physics Letters A **372** 6813–6822.
- [76] M. Evans, S. Ballmer, M. Fejer et al. (2008) *Thermo-optic noise in coated mirrors for high-precision optical measurements*. Physical Review D **78** 102003.
- [77] S. D. Penn, A. Ageev, D. Busby et al. (2006) *Frequency and surface dependence of the mechanical loss in fused silica*. Physics Letters A **352** 3–6.
- [78] R. Nawrodt, C. Schwarz, D. Heinert et al. (2009) *Cryogenic Setup for Q-factor measurements on bulk materials for future gravitational wave detectors*. In H.-M. Chang, Hg., *Proceedings of ICEC22-ICMC2008*, 978–89–957138–2–2. The Korea Institute of Applied Superconductivity and Cryogenics.
- [79] R. Flaminio, J. Franc, C. Michel et al. (2010) *A study of coating mechanical and optical losses in view of reducing mirror thermal noise in gravitational wave detectors*. Classical and Quantum Gravity **27** 084030.
- [80] I. Martin et al. (2008) *Measurements of a low-temperature mechanical dissipation peak in a single layer of Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> doped with TiO<sub>2</sub>*. Classical and Quantum Gravity **25** 055005.
- [81] I. W. Martin, E. Chalkley, R. Nawrodt et al. einschließlich D. Heinert (2009) *Comparison of the temperature dependence of the mechanical dissipation in thin films of Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> and Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> doped with TiO<sub>2</sub>*. Classical and Quantum Gravity **26** 155012.
- [82] D. B. Leviton und B. J. Frey (2008). *Temperature-dependent absolute refractive index measurements of synthetic fused silica*. arXiv:0805.0091v1 [physics.optics].
- [83] J. Franc, N. Morgado und R. Flaminio (2009). *Mirror thermal noise in laser interferometer gravitational wave detectors operating at room and cryogenic temperature*. ET-021-09. Verfügbar unter [www.et-gw.eu](http://www.et-gw.eu).
- [84] W. H. Cheng, S. F. Chi und A. K. Chu (1999) *Effect of thermal stresses on temperature dependence of refractive index for Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> dielectric films*. Thin Solid Films **347** 233–237.

- [85] P. Fritschel (2008) *Advanced LIGO Systems Design*. Technical Report LIGO-T010075-01-I, LIGO. Verfügbar unter <http://www.ligo.caltech.edu>.
- [86] D. Heinert, A. G. Gurkovsky, R. Nawrodt, S. P. Vyatchanin und K. Yamamoto (2011) *Thermorefractive noise of finite-sized cylindrical test masses*. Physical Review D **84** 062001.
- [87] S. Rowan, J. Hough und D. R. M. Crooks (2005) *Thermal noise and material issues for gravitational wave detectors*. Physics Letters A **347** 25–32.
- [88] C. Schwarz, D. Heinert, P. Seidel et al. (2011) *Mechanical loss of calcium fluoride at cryogenic temperatures*. Physica Status Solidi A **208**(12) 2719–2723.
- [89] L. D. Landau und E. M. Lifschitz (1991) *Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band VII: Elastizitätstheorie*. Akademie-Verlag, Berlin.
- [90] D. Heinert, A. Grib, K. Haughian et al. (2010) *Potential mechanical loss mechanisms in bulk materials for future gravitational wave detectors*. Journal of Physics: Conference Series **228** 012032.
- [91] [www.comsol.com](http://www.comsol.com).
- [92] T. Tomaru, T. Suzuki, S. Miyoki et al. (2002) *Thermal lensing in an cryogenic sapphire substrates*. Classical and Quantum Gravity **19** 2045–2049.
- [93] Y. S. Touloukian (1970) *Thermophysical properties of matter*. IFI/Plenum, New York-Washington.
- [94] B. J. Frey und D. B. Leviton (2006). *Temperature-dependent refractive index of silicon and germanium*. arXiv:physics/0606168v1 [physics.optics].
- [95] A. C. DeFranzo und B. G. Pazol (1993) *Index of refraction measurements on sapphire at low temperatures and visible wavelengths*. Applied Optics **32**(18) 2224–2234.
- [96] K. Somiya, A. G. Gurkovsky, D. Heinert et al. (2011) *Reduction of coating thermal noise by using an etalon*. Physics Letters A **375** 1363–1374.
- [97] A. G. Gurkovsky, D. Heinert, S. Hild et al. (2011) *Reducing Thermal Noise in Future Gravitational Wave Detectors by employing Khalili Etalons*. Physics Letters A **375** 4147–4157.

- [98] I. W. Martin et al. (2010) *Effect of heat treatment on mechanical dissipation in Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> coatings*. Classical and Quantum Gravity **27** 225020.
- [99] M. R. Abernathy, S. Reid, E. Chalkley et al. (2011) *Cryogenic mechanical loss measurements of heat-treated hafnium dioxide*. Classical and Quantum Gravity **28** 195017.
- [100] B. Mours, E. Tournefier und J.-Y. Vinet (2006) *Thermal noise reduction in interferometric gravitational wave antennas: using high order TEM modes*. Classical and Quantum Gravity **23** 5777–5784.
- [101] E. D’Ambrosio, R. O’Shaughnessy, K. Thorne et al. (2004) *Advanced LIGO: non-Gaussian beams*. Classical and Quantum Gravity **21** 867–873.
- [102] F. Brückner, D. Friedrich, T. Clausnitzer et al. (2009) *Demonstration of a cavity coupler based on a resonant waveguide grating*. Optics Express **17**(1) 163–169.
- [103] F. Brückner, D. Friedrich, T. Clausnitzer et al. (2010) *Realization of a Monolithic High-Reflectivity Cavity Mirror from a Single Silicon Crystal*. Physical Review Letters **104** 163903.
- [104] A. S. Nowick und W. R. Heller (1963) *Anelasticity and Stress-induced Ordering of Point Defects in Crystals*. Advances in Physics **12**(47) 251–298.
- [105] A. S. Nowick und W. R. Heller (1965) *Dielectric and anelastic relaxation of crystals containing point defects*. Advances in Physics **14**(54) 101–166.
- [106] C. Zener (1937) *Internal Friction in Solids: I. Theory of Internal Friction in Reeds*. Physical Review **52** 230–235.
- [107] C. Zener (1938) *Internal Friction of Solids: II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction*. Physical Review **53** 90–99.
- [108] R. Lifshitz und M. L. Roukes (2000) *Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems*. Physical Review B **61**(8) 5600–5609.
- [109] J. E. Bishop und V. K. Kinra (1997) *Elastothermodynamic damping in laminated composites*. International Journal of Solids and Structures **34**(9) 1075–1092.

- [110] A. N. Norris und D. M. Photiadis (2004) *Thermoelastic relaxation in elastic structures, with applications to thin plates*. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **58**(1) 143–163.
- [111] L. Landau und G. Rumer (1937) *Über Schallabsorption in festen Körpern*. Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion **11** 18–25.
- [112] A. Akhieser (1939) *On the absorption of sound in solids*. Journal of Physics (USSR) **1**(4) 277–287.
- [113] H. E. Bömmel und K. Dransfeld (1960) *Excitation and Attenuation of Hypersonic Waves in Quartz*. Physical Review **117**(5) 1245–1252.
- [114] V. B. Braginsky, V. P. Mitrofanov und V. I. Panov (1985) *Systems with Small Dissipation*. The University of Chicago Press, Chicago.
- [115] R. Nawrodt (2008) *Kryogene Gütemessung an optischen Substratmaterialien für zukünftige Gravitationswellendetektoren*. Doktorarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- [116] C. Schwarz (2011) *Mechanische Charakterisierung von verlustarmen Materialien für die Präzisionsmesstechnik*. Doktorarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- [117] S. Kroker (2008) *Charakterisierung mechanischer Verluste dielektrischer Schichten bei kryogenen Temperaturen*. Diplomarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- [118] G. Hofmann (2011) *Charakterisierung von Bulk-Materialien bei tiefen Temperaturen*. Diplomarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- [119] J. Komma (2011) *Messung und Charakterisierung von optischen Schichten für die Präzisionsmesstechnik*. Diplomarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- [120] A. Zimmer, R. Nawrodt, T. Koettig et al. einschließlich D. Heinert (2007) *Cryogenic resonant acoustic spectroscopy of bulk materials (CRA spectroscopy)*. Review of Scientific Instruments **78** 063905.
- [121] D. Heinert, A. Zimmer, R. Nawrodt et al. (2007) *High-sensitivity tool for studying phonon related mechanical losses in low loss material*. Journal of Physics: Conference Series **92** 012183.

- [122] J. J. Martin (1984) *Aluminum-related acoustic loss in AT-cut quartz crystals*. Journal of Applied Physics **56**(9) 2536–2540.
- [123] J. Breton und C. Girardet (1986) *Al-M<sup>+</sup> centers (M=Li,Na,K) in a quartz crystal: Potential surfaces*. Physical Review B **33**(12) 8748–8754.
- [124] W. P. Mason, Hg. (1965) *Physical Acoustics*, Band 3. Academic Press, New York.
- [125] J. M. Stevels und J. Volger (1962) *Further experimental investigations on the dielectric losses of quartz crystals in relation to their imperfections*. Philips Research Reports **17** 283–314.
- [126] A. Grib, D. Heinert, R. Nawrodt et al. (2010) *Acoustic losses in a thick quartz plate at low temperatures*. Journal of Applied Physics **107** 013504.
- [127] R. Nawrodt, A. Zimmer, T. Koettig et al. einschließlich D. Heinert (2008) *High mechanical Q-factor measurements on silicon bulk samples*. Journal of Physics: Conference Series **122** 012008.
- [128] C. Schwarz, D. Heinert, K. Haughian et al. (2011) *Mechanical spectroscopy of silicon as a low loss material for high precision mechanical and optical experiments*. Solid State Phenomena accepted.
- [129] A. G. Beattie und J. E. Schirber (1970) *Experimental Determination of the Low-Temperature Grüneisen Parameter of Silicon from Pressure Derivatives of Elastic Constants*. Physical Review B **1**(4) 1548–1551.
- [130] D. F. McGuigan, C. C. Lam, R. Q. Gram et al. (1978) *Measurements of the Mechanical Q of Single-Crystal Silicon at Low Temperatures*. Journal of Low Temperature Physics **30**(5/6) 621–629.
- [131] C. C. Lam und D. H. Douglas (1981) *Observation of Oxygen Impurities in Single-Crystal Silicon by Means of Internal Friction*. Journal of Low Temperature Physics **44**(3/4) 259–264.
- [132] H. J. Hrostowski und R. H. Kaiser (1957) *Infrared Absorption of Oxygen in Silicon*. Physical Review **107**(4) 966–972.
- [133] R. Nawrodt, C. Schwarz, S. Kroker et al. einschließlich D. Heinert (2010). *Investigation of mechanical losses of thin silicon flexures at low temperatures*. arXiv:1003.2893v1 [cond-mat.mtrl-sci].

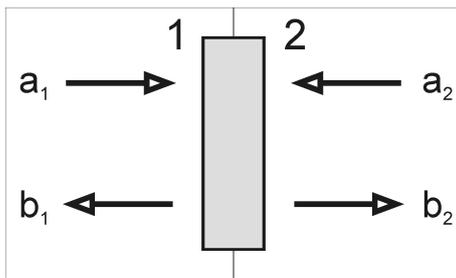
- [134] W. Kells und E. D'Ambrosio (2002) *Considerations on parametric instability in Fabry-Perot interferometer*. Physics Letters A **299** 326–330.
- [135] L. Ju, S. Gras, C. Zhao, J. Degallaix und D. G. Blair (2006) *Multiple modes contributions to parametric instabilities in advanced laser interferometer gravitational wave detectors*. Physics Letters A **354** 360–365.
- [136] H. Kogelnik und T. Li (1966) *Laser Beams and Resonators*. Applied Optics **5**(10) 1550–1567.
- [137] P. Barriga, B. Bhawal, L. Ju und D. G. Blair (2007) *Numerical calculations of diffraction losses in advanced interferometric gravitational wave detectors*. Journal of the Optical Society of America A **24** 1731–1741.
- [138] [www.ansys.com](http://www.ansys.com).
- [139] D. Heinert und S. Strigin (2011) *The effect of a laser beam displacement on parametric oscillatory instabilities for Advanced LIGO*. Physics Letters A **375** 3804–3810.
- [140] S. E. Strigin, D. G. Blair, S. Gras und S. P. Vyatchanin (2008) *Numerical calculations of elastic modes frequencies for parametric oscillatory instability in Advanced LIGO interferometer*. Physics Letters A **372** 5727–5731.
- [141] J. R. Smith, G. Cagnoli, D. R. M. Crooks et al. (2004) *Mechanical quality factor measurements of monolithically suspended fused silica test masses of the GEO600 gravitational wave detector*. Classical and Quantum Gravity **21** 1091–1098.
- [142] J. Miller, M. Evans, L. Barsotti et al. (2011) *Damping parametric instabilities in future gravitational wave detectors by means of electrostatic actuators*. Physics Letters A **375** 788–794.
- [143] P. Amico, L. Bosi, L. Carbone et al. (2002) *Mechanical quality factor of mirror substrates for VIRGO*. Classical and Quantum Gravity **19** 1663–1668.

# Anhang

# A. Fabry-Perot-Resonator

In diesem Anhang sollen die grundlegenden Zusammenhänge am Fabry-Perot-Resonator dargelegt werden. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Analyse des reflektierten und transmittierten Lichts als auch auf dem Parameter der Finesse.

## A.1. Der einfache Spiegel



**Abb. A.1:** Veranschaulichung der optischen Funktion eines einfachen Spiegels. Die Größen  $a_i$  beschreiben das elektrische Feld, das auf den Spiegel einfällt, während das austretende Feld durch  $b_i$  beschrieben wird.

Um den Fabry-Perot-Resonator zu verstehen, wird zunächst entsprechend [144] die Reflexion und Transmission an einem einfachen Spiegel untersucht. Die zugrundeliegende Geometrie ist dabei in Abb. A.1 veranschaulicht. Über die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten  $r_{ij}$  und  $t_{ij}$  werden die austretenden elektrischen Felder  $b_1$  und  $b_2$  mit den auftreffenden Feldern  $a_1$  und  $a_2$  in Verbindung gebracht. Dabei besitzt aus unterschiedlichen Richtungen einfallende Strahlung auch unterschiedliche Koeffizienten.

$$b_1 = r_{11}a_1 + t_{12}a_2 , \quad (\text{A.1})$$

$$b_2 = t_{21}a_1 + r_{22}a_2 . \quad (\text{A.2})$$

Diese werden zur Streumatrix  $S$  zusammengefaßt, die das einfallende und austretende elektrische Feld verknüpft

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = S\vec{a} , \quad S = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} \\ t_{21} & r_{22} \end{pmatrix} . \quad (\text{A.3})$$

Die Intensität einer elektrischen Welle im Medium der Brechzahl  $n$  ist proportional zur Brechzahl und zum Betragsquadrat der Amplitude des elektrischen Feldes  $I \propto n |E|^2$ . Die Umgebung links und rechts des Spiegels bestehe aus Luft, so daß die Brechzahl mit  $n = 1$  angenähert werden kann. Mithilfe der Energieerhaltung kann man nun Aussagen über  $S$  ableiten. Die gesamte eingestrahlte Intensität  $\vec{a} \vec{a}^*$  muß für verlustfreie Spiegel in jedem Fall der abgestrahlten Intensität  $\vec{b} \vec{b}^*$  entsprechen

$$I_{out} \propto \vec{b} \vec{b}^* = (S\vec{a})^\dagger S\vec{a} = \vec{a}^\dagger S^\dagger S\vec{a} = \vec{a}^\dagger \vec{a} . \quad (\text{A.4})$$

Diese Rechnung zeigt, daß die gesuchte Streumatrix unitär sein muß ( $S^\dagger S = I$ ). Daraus ergeben sich die für die folgende Ableitung wichtigen Gleichungen

$$|r_{11}|^2 + |t_{12}|^2 = 1 , \quad |t_{21}|^2 + |r_{22}|^2 = 1 . \quad (\text{A.5})$$

Aus der Symmetrie gegen die Umkehr des Lichtweges läßt sich ableiten, daß die Transmissionselemente der Streumatrix gegen eine Vertauschung der Einstrahlrichtung invariant sind ( $t_{12} = t_{21}$ ). Über Gl. (A.5) folgt daraus zusätzlich die Gleichheit des Betrages der Reflexionselemente. Für die Streumatrix ergibt sich damit die folgende Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} r \exp(i\phi_{11}) & t \exp(i\phi_{12}) \\ t \exp(i\phi_{12}) & r \exp(i\phi_{22}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

mit reellen Koeffizienten  $r$  und  $t$ . Für die Analyse der Transmissions- und Reflexionsgrade sind diese Einschränkungen bereits ausreichend, da dafür die Phasen der elektrischen Felder unerheblich sind. Diese Freiheit in der Wahl der Streumatrixkomponenten ist bei einer konkreten Realisierung optischer Spiegel nicht gegeben. Z. B. legt die genaue Geometrie der Schichten eines Braggspiegels die Phase aller Einträge der Streumatrix eindeutig fest. Im vorliegenden Fall der Untersuchung von Längenänderungen auf das reflektierte Licht eines Fabry-Perot-Resonators ist diese Freiheit in der Wahl der Streumatrixkomponenten jedoch vorhanden. Aus Symmetriegründen wird im weiteren die Streumatrix

$$S = \begin{pmatrix} r & it \\ it & r \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

verwendet. Sie erfüllt die Forderung nach Unitarität.

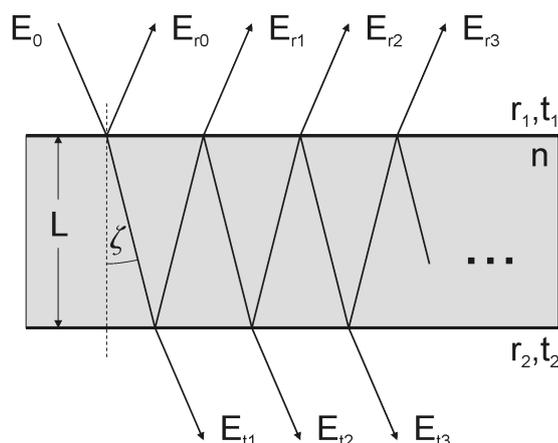


Abb. A.2.: Strahlengang am Fabry-Perot-Resonator.

## A.2. Fabry-Perot-Resonator

Ein Fabry-Perot-Resonator (FPR) besteht nun aus zwei solchen Spiegeln zwischen denen das eingestrahelte Licht mehrmals umläuft. Die Teilstrahlen auf jeder Seite des Resonators interferieren zum insgesamt transmittierten und reflektierten Licht. Abb. A.2 verdeutlicht diesen Sachverhalt. Eine kurze Rechnung ergibt den Phasenunterschied zwischen zwei benachbarten Strahlen als

$$2\theta = \frac{4\pi}{\lambda} nL \cos \zeta . \quad (\text{A.8})$$

### A.2.1. Transmission und Finesse

Das transmittierte Feld errechnet sich damit zu

$$E_t = \sum_n E_{tn} = E_0 it_1 e^{i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} (r_2 e^{i\theta} r_1 e^{i\theta})^k it_2$$

$$E_t = -E_0 e^{i\theta} \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 e^{i2\theta}} . \quad (\text{A.9})$$

Ersetzt man in obiger Gleichung die Streumatrix durch eine andere mögliche Wahl, ändert sich allein die Phase der einzelnen Komponenten. Dieser Phasenunterschied kann im Falle des FPR durch eine veränderte Länge  $L$  kompensiert werden. Für den Transmissionsgrad erhält man mit Gl. (A.5) nach kurzer Rechnung

$$T = \left| \frac{E_t}{E_0} \right|^2 = \frac{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2 \theta} . \quad (\text{A.10})$$

Die Finesse  $\mathcal{F}$  eines FPR definiert sich über das Verhältnis aus freiem Spektralbereich  $\Delta\lambda$  und der Resonanzbreite (FWHM) des Spektrums  $\delta\lambda$ . Eine Änderung der Wellenlänge  $d\lambda$  verursacht eine Änderung des Phasenunterschiedes  $d\theta$  und damit die Änderung der Transmission. Die Gleichung

$$\theta + d\theta = \frac{2\pi}{\lambda + d\lambda} nL \cos \zeta \quad (\text{A.11})$$

verbindet beide Größen. Durch Umstellen nach  $d\lambda$  ergibt sich

$$d\lambda = -\frac{\lambda^2}{\frac{2\pi nL \cos \zeta}{d\theta} + \lambda} \approx -d\theta \frac{\lambda^2}{2\pi nL \cos \zeta} . \quad (\text{A.12})$$

Die letzte Näherung gilt für Resonatoren, deren Ausdehnung groß im Vergleich zur Wellenlänge des verwendeten Lichts ist.

Der Transmissionsgrad  $T$  wird für  $\theta = m\pi$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) maximal. Einsetzen von  $d\theta = \pi$  liefert den freien Spektralbereich als Abstand zweier benachbarter Transmissionsmaxima

$$\Delta\lambda \approx -\frac{\lambda^2}{2nL \cos \zeta} . \quad (\text{A.13})$$

Abseits des Maximums fällt der Transmissionsgrad unter der Bedingung

$$(1 - r_1 r_2)^2 = 4r_1 r_2 \sin^2 \theta \quad (\text{A.14})$$

auf die Hälfte ab. Unter dieser Bedingung stellt  $\theta$  die halbe Resonanzbreite dar. Umgeformt erhält man für die Resonanzbreite

$$\delta\theta = 2 \arcsin \frac{1 - r_1 r_2}{2\sqrt{r_1 r_2}} . \quad (\text{A.15})$$

Die Anwendung von Gl. (A.12) ergibt  $\delta\lambda$  und schließlich

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\pi}{2 \arcsin \frac{1 - r_1 r_2}{2\sqrt{r_1 r_2}}} \approx \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} . \quad (\text{A.16})$$

Die angegebene Näherung gilt dabei für kleine Argumente der Sinusfunktion und damit für hohe Reflektivitäten.

### A.2.2. Reflexion

Das elektrische Feld in Reflexion berechnet sich ebenfalls aus der phasenrichtigen Summe der reflektierten Teilstrahlen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 E_r &= \sum_n E_{rn} = E_0 r_1 + E_0 i t_1 e^{i\theta} r_2 \sum_{k=0}^{\infty} (e^{i\theta} r_1 e^{i\theta} r_2)^k e^{i\theta} i t_1 \\
 &= E_0 \left( r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{i2\theta}}{1 - r_1 r_2 e^{i2\theta}} \right) = E_0 \frac{r_1 - r_2 e^{i2\theta} (r_1^2 + t_1^2)}{1 - r_1 r_2 e^{i2\theta}} \\
 E_r &= E_0 \frac{r_1 - r_2 e^{i2\theta}}{1 - r_1 r_2 e^{i2\theta}} . \tag{A.17}
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt dabei allein unter der Annahme verlustfreier Spiegel.

# B. Ermittlung der Materialparameter

Die angegebenen Gleichungen zur Berechnung des thermischen Rauschens in interferometrischen Gravitationswellendetektoren beinhalten eine Vielzahl materialspezifischer Konstanten. Während viele Parameter für reine Verbindungen bekannt und katalogisiert sind (siehe z. B. [145]), fehlen v. a. Messungen über die Eigenschaften von Schichtmaterialien. Dieses Kapitel faßt die Meßmethoden zusammen, mit deren Hilfe Materialparameter der einzelnen Komponenten ermittelt werden können. Eine solche Messung geht der Ausführung einer quantitativen Rauschabschätzung zwangsläufig voraus.

## B.1. Mechanische Eigenschaften

### B.1.1. Elastische Konstanten

Die elastischen Eigenschaften eines Materials sind im Tensor der elastischen Konstanten  $C_{ijkl}$  zusammengefaßt. Dieser Tensor vierter Ordnung vermittelt die angelegte Spannung  $\sigma_{ij}$  mit der Dehnung des Materials  $\epsilon_{ij}$  über

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} . \quad (\text{B.1})$$

Eine vereinfachte zweidimensionale Darstellung von  $C_{ijkl}$  ergibt sich in der Voigtnotation. Dazu vereinfacht man Spannung und Dehnung nach folgendem Schema zu sechskomponentigen Vektoren

$$\sigma^{(\text{V})} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}) , \quad (\text{B.2})$$

$$\epsilon^{(\text{V})} = (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{12}) . \quad (\text{B.3})$$

Man erhält die Matrix der elastischen Moduln  $C_{ij}^{(\text{V})}$  durch die Ersetzung des vorderen und hinteren Indexpaares analog der Vorschrift für  $\sigma^{(\text{V})}$ . Der Faktor zwei vor den Scherkomponenten der Dehnung  $\epsilon_{ij}$  garantiert, daß die einfache Formulierung des

Hookeschen Gesetzes in der Voignotation

$$\sigma_i^{(V)} = C_{ij}^{(V)} \epsilon_j^{(V)} \quad (\text{B.4})$$

erhalten bleibt und mit dem Tensorgesetz aus Gl. (B.1) übereinstimmt. Die Tensoren der Spannung und Dehnung besitzen aus ihrer Definition heraus eine Symmetrie gegen Vertauschung ihrer Indizes. Diese Symmetrie überträgt sich auch auf den Tensor der elastischen Konstanten. In der Voignotation nimmt  $C_{ij}^{(V)}$  deshalb immer die Gestalt einer symmetrischen Matrix an. Unter Beachtung zugrundeliegender Kristallsymmetrien des Materials verringert sich die Anzahl unabhängiger Koeffizienten weiter. Die genaue Form der Matrix elastischer Konstanten kann z. B. bei Nye [146] nachgeschlagen werden.

In bisherigen Arbeiten zum thermischen Rauschen wurde stets von isotropen Materialien ausgegangen. Für diesen Spezialfall ergeben sich die folgenden elastischen Konstanten

$$C^{(V)} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$$C_{11} = \frac{(1 - \sigma)E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad C_{12} = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad C_{44} = \frac{E}{1 + \sigma}. \quad (\text{B.6})$$

Der Elastizitätsmodul  $E$  und die Querkontraktion  $\sigma$  stellen dabei die beiden unabhängigen Variablen zur Beschreibung eines isotropen Materials dar.

Der Tensor der elastischen Konstanten kann über die Messung der Schallgeschwindigkeit unterschiedlich polarisierter akustischer Wellen im Material erfolgen (siehe z. B. [147]). Dazu müssen jedoch mehrere Proben mit unterschiedlichen Schnitten für eine komplette Charakterisierung vorliegen. Einfacher gestaltet sich die Messung über die Methode der resonanten Ultraschallspektroskopie (RUS) [148]. Dazu wird das Frequenzspektrum der elastischen Resonanzen einer Probe vermessen und über eine inverse Rechnung die zugrundeliegenden elastischen Moduln ermittelt. Solche Messungen sind für kristalline Substratmaterialien in großer Zahl verfügbar.

Für Schichten gestaltet sich die Messung der elastischen Moduln schwieriger. Eine Messung von Oberflächenwellen (surface acoustic waves) in der beschichteten Probe ist denkbar, denn in die Geschwindigkeit dieser Wellen finden die elastischen

Konstanten der Schicht Eingang. Weiterhin besteht eine mögliche Methode in der Fertigung mikroskopischer Resonatoren, indem die Schicht nach dem Aufbringen auf das Substrat unterätzt wird und so frei über dem Substrat steht und zu Eigenschwingungen angeregt werden kann. In besonderer Weise muß für Schichtmessungen der Einfluß des Substrates genau bekannt sein. Verschiedene Substratmaterialien können über eine unterschiedliche Wechselwirkung unterschiedliche Meßergebnisse verursachen. Ebenfalls läßt die Methode der Schichtherstellung eine Änderung der Schichtparameter vermuten.

### B.1.2. Mechanische Verluste

Als wesentlicher Parameter geht der mechanische Verlust  $\phi$  ins Brownsche Rauschen ein. Dieser definiert sich über den Anteil der pro Schwingungsperiode dissipierten Energie  $\Delta E$  und der mechanischen Gesamtenergie  $E_{\text{tot}}$  zu

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{E_{\text{tot}}} . \quad (\text{B.7})$$

Der mechanische Verlust kann grundsätzlich mittels zweier Verfahren gemessen werden. Die erste und geschichtlich ältere Methode benutzt im Material umlaufende Ultraschallwellen und mißt deren Abschwächung [147]. Einer solchen Messung ist der mechanische Verlust im Frequenzbereich einiger GHz zugänglich. Der für eine Rauschabschätzung von Gravitationswellendetektoren interessante Detektionsbereich um 100 Hz kann somit nicht direkt untersucht werden. Hingegen bietet die Messung der Verluste abseits mechanischer Resonanzen der Probe einen Vorteil dieses Prinzips. Mit der zweiten Methode können mechanische Verluste bei tieferen Frequenzen gemessen werden. Dazu wird die Probe zu resonanten Schwingungen der Frequenz  $f_R$  angeregt und das freie Abklingen der Schwingung ausgewertet. Der Nachteil dieser Methode besteht darin, daß nur an den mechanischen Resonanzen der Probe gemessen werden kann, da die Schwingungsamplituden im nichtresonanten Frequenzgebiet so gering sind, daß sie von der Meßapparatur nicht mehr aufgelöst werden können. Typisch zugängliche Frequenzen liegen hierfür bei einigen 10 kHz für zylindrische Proben und oberhalb einiger 100 Hz für Proben in der Geometrie schwingender Plättchen (Cantilever).

Die Verluste dielektrischer Schichten werden in bisherigen Arbeiten über eine Differenzmethode zwischen beschichteten und unbeschichteten Cantilevern gemessen (siehe z. B. [149, 150]). Zunächst wird der Verlust eines unbeschichteten dünnen Plättchens  $\phi_0$  bestimmt. Anschließend wird die zu untersuchende Schicht aufge-

bracht und die Messung für die beschichtete Probe wiederholt. Mit dem zweiten Meßwert  $\phi_{\text{ges}}$  und der Kenntnis der in der Schicht und im Substrat gespeicherten mechanischen Energie  $E_S$  und  $E_0$  kann der Schichtverlust  $\phi_S$  separiert werden

$$(E_0 + E_S) \phi_{\text{ges}} = E_0 \phi_0 + E_S \phi_S \Rightarrow \phi_S \approx \frac{E_0}{E_S} (\phi_{\text{ges}} - \phi_0) . \quad (\text{B.8})$$

Obige Gleichung stellt eine reine Bilanz der dissipierten Energie des Gesamtsystems dar. Die angewandte Näherung setzt dabei voraus, daß die Energie der Schicht als klein gegenüber der Energie im Substrat angenommen werden kann. Da die Schichtdicke typischerweise klein gegen die Substratdicke ist, ist eine solche Näherung gerechtfertigt. Besonders geeignet für die Ermittlung von Schicht- und Substratenergie sind reine Biegeschwingungen der Probe, da hier die zugrundeliegenden mathematische Beschreibung relativ einfach wird.

Der reine Verlust des Schichtmaterials könnte mit Schwingungen der schon erwähnten unterätzten Schichten gemessen werden. Allerdings müßte sich daran eine Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Schicht und Substrat anschließen. Denn eine Beeinflussung der Schichteigenschaften durch das Substrat ist wahrscheinlich und liegt auch in der späteren Anwendung im Detektor vor.

## B.2. Thermodynamische Eigenschaften

### B.2.1. Wärmeleitfähigkeit

Die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa_{kl}$  verknüpft den fließenden Wärmestrom  $j$  mit dem Temperaturgradienten in einem Material

$$j_k = \kappa_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} T . \quad (\text{B.9})$$

In Hauptachsenlage nimmt der Tensor  $\kappa_{kl}$  Diagonalgestalt an

$$\kappa_{kl} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix} . \quad (\text{B.10})$$

Je nach Kristallsymmetrie stimmen einige der Eigenwerte überein. Im Falle eines isotropen Festkörpers oder eines kubischen Kristalls ergeben sich komplett identische Eigenwerte  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$ . Diese können durch eine einzige skalare Größe  $\kappa$  beschrieben werden.

Zur Messung der Wärmeleitfähigkeit makroskopischer Proben ist die folgende statische Methode weit verbreitet. Dazu wird auf einer Seite der Probe über einen Heizer eine bekannte elektrische Leistung in thermische Leistung umgesetzt. Daraufhin setzt ein Wärmestrom entlang der Probe bis zum Wärmebad ein. Dieser ist mit einem Temperaturgradienten über der Probe verbunden. Die Messung der Temperatur an zwei Punkten der Probe erlaubt unter Kenntnis der Probengeometrie die Berechnung der Wärmeleitfähigkeit. Diese Methode liegt vielen Meßwerten bei tiefen Temperaturen zugrunde. Vor allem bei hohen Wärmeleitfähigkeiten wird der Temperaturunterschied gering und ist dann schwer zu messen. Neben der statischen Methode existieren auch diverse dynamische Methoden. So kann über die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Heizpulses die Wärmeleitfähigkeit berechnet werden. Eine weitere Möglichkeit besteht in der  $3\omega$ -Methode [151]. Dabei werden Elektroden auf das Substrat aufgebracht. Diese dienen gleichermaßen als Heizer und als Thermometer. Wird nun ein Heizstrom der Frequenz  $\omega$  an die Heizer gelegt, besitzt die eingebrachte thermische Leistung eine Frequenz von  $2\omega$  und es bildet sich in der Probe eine Temperaturschwankung mit derselben Frequenz  $2\omega$  aus. Das Auslesen der Temperatur erfolgt über die an der Heizelektrode abfallende Spannung. Diese zeigt aus der Summe des mit  $\omega$  modulierten Heizstromes und der mit  $2\omega$  modulierten Temperatur einen Anteil mit  $3\omega$ . Dieser Anteil kann störungsarm gemessen werden, um daraus die Wärmeleitfähigkeit zu berechnen.

Das Temperaturverhalten der Wärmeleitfähigkeit wird im wesentlichen durch drei Mechanismen beschränkt. In der theoretischen Beschreibung tragen Phononen die thermische Energie vom heißen zum kalten Ende eines Festkörpers. Bei tiefen Temperaturen sind relativ wenige Phononen angeregt. Dieser Umstand drückt sich auch in der  $T^3$ -Abhängigkeit der spezifischen Wärme aus. Damit begrenzt die Anzahl der Phononen für tiefe Temperaturen die thermische Leitfähigkeit. Mit steigenden Temperaturen spielt die Streuung an Defekten eine entscheidende Rolle. Durch die Streuung wird der Weg vom kalten zum warmen Ende der Probe verlängert und entsprechend die gemessene Wärmeleitung herabgesetzt. Als Streuzentrum ist neben Defekten - wie Korngrenzen, Fehlstellen, Fremdatomen - auch die Oberfläche an sich zu verstehen. So besitzen Proben mit rauer Oberfläche eine geringere Wärmeleitfähigkeit als polierte Proben gleicher Geometrie [152]. Selbst die Variation von Isotopen in natürlichen Proben führt zu einer verringerten Wärmeleitfähigkeit. Z.B. zeigt isotonenreines Silizium mit einer maximalen Wärmeleitfähigkeit von  $30\,000\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$  den sechsfachen Wert im Vergleich zu undotiertem Silizium natürlicher Zusammensetzung. Für Silizium wird die Wärmeleitfähigkeit - je nach Defektdichte - oberhalb von 5 K bis 20 K von der Streuung an Defekten dominiert. Bei

hohen Temperaturen führt die wachsende Anzahl von Phononen zu einer Wechselwirkung untereinander. Die Gitteratome zeigen eine wachsende thermische Auslenkung und wirken selbst als Streuzentren. Diese Streuung zwischen Phononen führt ebenfalls zu einer verringerten Wärmeleitfähigkeit und tritt im Silizium für Temperaturen oberhalb von 100 K auf. In diesem Bereich wirken sich Unterschiede in der Defektdichte nicht mehr signifikant auf die Leitfähigkeit aus.

### B.2.2. Lineare Wärmeausdehnung

Eine Temperaturänderung  $\Delta T$  führt in Materialien zu einer thermischen Dehnung  $\epsilon^{\text{th}}$ . In niedrigster Ordnung, d. h. für kleine Temperaturänderungen  $\Delta T$ , verknüpft die lineare Wärmeausdehnung beide Größen miteinander

$$\epsilon_{ij}^{\text{th}} = \alpha_{ij} \Delta T . \quad (\text{B.11})$$

Als symmetrischer Tensor zweiter Ordnung erfüllt  $\alpha_{ij}$  dieselben Symmetriebedingungen wie die Wärmeleitfähigkeit. Im kubischen und isotropen Fall stimmen alle Eigenwerte überein. Dann gilt die skalare Vereinfachung obiger Gleichung, die die thermische Längenänderung  $\Delta L$  beschreibt

$$\Delta L = \alpha L \Delta T . \quad (\text{B.12})$$

In frühen Ansätzen der Messung thermischer Ausdehnung benutzt man die Interferenz zwischen zwei parallel angeordneten Platten. Diese Platten sind durch drei Kegel des zu untersuchenden Materials voneinander getrennt. Eine Längenänderung der Abstandshalter führt damit zu einem geänderten optischen Weg und zu einer Verschiebung des Interferenzmusters [153]. Weitere Ansätze nutzen die Kapazität eines Kondensators als Meßgröße, der zwischen einer festen Elektrode und dem Ende der zu vermessenden Probe gebildet wird. Dehnt sich die Probe aus, verringert sich der Plattenabstand des Kondensators und damit seine Kapazität. In ähnlicher Weise kann auch das Spannungsverhältnis eines Transformators gemessen werden. Dessen Primär- und Sekundärspule werden dann durch die Ausdehnung der Probe gegeneinander verschoben. Weiterhin existieren interferometrische Messungen der Höhe eines Probekörpers. Deren Genauigkeit beträgt  $\Delta\alpha \approx 1 \cdot 10^{-8}$  [154].

In kristallinen Proben ermöglicht die Röntgenbeugung die Ermittlung der thermischen Expansion. Die Analyse mittels Röntgenbeugung erfolgt nicht an einer makroskopische Längenänderung des Probekörpers, sondern an den mikroskopischen Abmessungen der Elementarzelle. Damit hebt sie sich grundsätzlich von den bisher

erwähnten Methoden ab. Die Auflösung dieser Technik ist durch die Monochromasie der verwendeten Strahlung gegeben und beträgt typischerweise  $\Delta\alpha \approx 3 \cdot 10^{-6}$  [155].

### B.2.3. Thermooptischer Parameter

Auch der Brechungsindex zeigt eine Abhängigkeit von der Temperatur. Der thermooptische Parameter  $\beta$  beschreibt diese Abhängigkeit in linearer Näherung

$$\beta(T_0) = \left. \frac{\partial n}{\partial T} \right|_{T_0} . \quad (\text{B.13})$$

Über die Temperaturabhängigkeit der Brechzahl  $n(T)$  kann  $\beta$  berechnet werden.

Eine genaue und gebräuchliche Methode zur Ermittlung des Brechungsindex nutzt die Lichtablenkung am Prisma. Unter Drehung des Prismas wird der minimale Ablenkwinkel des Lichtstrahls gemessen. Dieser liegt bei symmetrischem Durchgang des Lichts durch das Prisma vor. Unter der Kenntnis der Prismengeometrie kann damit die Brechzahl berechnet werden. Frey und Leviton [156] liefern Ergebnisse für den thermooptischen Koeffizienten verschiedener Materialien für kryogene Temperaturen im Bereich von 30 K bis 295 K und im Wellenlängenbereich von 100 nm bis 5,5  $\mu\text{m}$ .

### B.2.4. Wärmekapazität

Die Wärmekapazität  $C$  verknüpft die Temperaturänderung  $\Delta T$  eines Körpers der Masse  $m$  mit der zugeführten Wärmemenge  $\Delta Q$  über

$$\Delta Q = mC\Delta T . \quad (\text{B.14})$$

Meßtechnisch einfach kann eine Messung bei konstantem äußeren Druck erfolgen. Mit der einsetzenden Temperaturänderung wird dann auch Volumenarbeit durch die thermische Ausdehnung des Festkörpers geleistet. Im Ergebnis erhält man die Wärmekapazität bei konstantem äußeren Druck  $C_p$ . Die Wärmekapazität bei konstantem Volumen  $C_V$  schließt Volumenarbeit hingegen aus. Für Festkörper kann jedoch  $C_p = C_V = C$  angenommen werden, da der Unterschied zwischen beiden Größen dort vernachlässigbar gering ist. Die Wärmekapazität kann statt auf die Probenmasse auch auf das Probenvolumen bezogen werden. Letztere ergibt sich aus der einfachen Multiplikation mit der Dichte  $\rho C$ .

Die ursprüngliche Ermittlung der Wärmekapazität beruht auf der Messung des Temperaturunterschieds bei einer Zufuhr einer bekannten Menge thermischer Ener-

gie. Typischerweise erfolgt diese Zufuhr über einen elektrischen Widerstand, dessen Energieumsatz aus Messungen der Stromstärke und Spannung berechnet wird (siehe z. B. [157]). Besonderes Augenmerk muß hierbei auf den Wärmetransport aus der Probe heraus gelegt werden, z. B. durch Wärmestrahlung mit der Kryostatenwand oder durch Wärmeleitung in der Aufhängung. Zusätzlich muß das Anbringen probenfremder Teile wie Heizer und Thermometer zu einer möglichst geringen Verfälschung der Messung führen. Eine zweite experimentelle Variante erlaubt die Messung der Wärmekapazität an Proben, die in thermischem Kontakt mit einem Wärmebad stehen [158]. Dazu wird periodisch Wärme in das Substrat eingebracht und dessen Temperaturverlauf im stationären Zustand gemessen. Über die Amplitude der Temperaturschwingung bei der Anregfrequenz kann dann die spezifische Wärme berechnet werden. Diese Technik vermeidet das Auswerten transienter Daten und stellt wesentlich geringere Anforderungen an den experimentellen Aufbau.

## B.3. Materialien

### B.3.1. Silizium

Ein für die Gravitationswellendetektion vielversprechendes Substratmaterial ist kristallines Silizium [159]. Dieses kann getrieben durch die Anforderungen der Halbleiterindustrie in großen Abmessungen hergestellt werden. Es zeigt einen geringen mechanischen Verlust bei Raumtemperatur, der hin zu kleineren Temperaturen sogar noch abnimmt. Diese Eigenschaft verspricht ein geringes Brownsches Rauschen. Allerdings führen die hohe thermische Ausdehnung als auch die vergleichsweise hohe thermische Leitfähigkeit zu einem erhöhten thermoelastischen Rauschen. Diesem Sachverhalt kann mit einer Kühlung der Testmassen zweifach entgegengewirkt werden. Ein Abkühlen führt neben der direkten Rauschverringerung nach Gl. (4.22) auch zu einer Verringerung des thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$ . Beide Effekte haben eine Verringerung des thermoelastischen Rauschens zur Folge.

Die kubische Kristallstruktur erlaubt eine skalare Beschreibung der Wärmeleitfähigkeit und der thermischen Ausdehnung. Die Wärmeleitfähigkeit von Silizium zeigt eine starke Abhängigkeit von der Probengeometrie und -reinheit. Da im Interferometer verlustarme Substrate zum Einsatz kommen sollen, müssen möglichst defektfreie Proben verwendet werden. Die großen Abmessungen der Testmassen sprechen weiterhin für eine große freie Weglänge der Phononen. Aus diesem Grund liegt der folgenden Analyse die Messung mit der höchsten Leitfähigkeit aus [145] zugrunde. Dort wurden maximale Werte von  $\kappa = 5000 \text{ W m}^{-1} \text{ K}$  beobachtet. Wer-

te für die thermische Ausdehnung  $\alpha$  von Silizium wurden ebenfalls [145] entnommen und folgen der empfohlenen Kurve. Die thermische Ausdehnung zeigt wie die Wärmekapazität geringere Variationen für unterschiedliche Proben. Werte für die Wärmekapazität stammen aus [160]. Die Matrix der elastischen Moduln von Silizium als Vertreter der kubischen Kristallstruktur lautet

$$C_{\text{Si}}^{(\text{V})} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

mit folgenden Werten bei einer Temperatur von 20 °C [161]

$$C_{11} = 165,7 \text{ GPa} , \quad C_{12} = 63,9 \text{ GPa} , \quad C_{44} = 79,6 \text{ GPa} . \quad (\text{B.16})$$

Die elastischen Konstanten ändern sich zu tiefen Temperaturen hin um weniger als 2%. Deshalb werden sie in vorliegender Arbeit als temperaturunabhängig angenähert.

### B.3.2. Kristallquarz

Unter Normalbedingungen ist die  $\alpha$ -Modifikation des Quarzes stabil. Sie ordnet sich in das trigonale Kristallsystem ein und besitzt damit die folgende Struktur elastischer Moduln

$$C_{\text{Quarz}}^{(\text{V})} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & C_{14} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} , \quad C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) . \quad (\text{B.17})$$

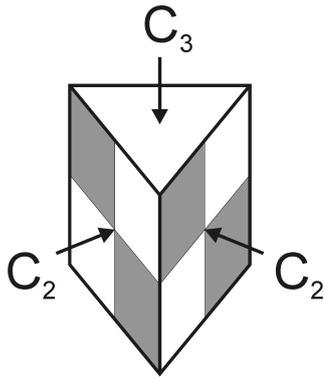
Eine experimentelle Bestimmung der elastischen Konstanten erfolgte nach Tarumi et al. [162] und ergibt bei einer Temperatur von 275 K

$$C_{11} = 86,76 \text{ GPa} , \quad C_{33} = 105,41 \text{ GPa} , \quad C_{44} = 58,27 \text{ GPa} , \quad (\text{B.18})$$

$$C_{12} = 7,06 \text{ GPa} , \quad C_{13} = 11,9 \text{ GPa} , \quad C_{14} = -17,98 \text{ GPa} . \quad (\text{B.19})$$

Zu tiefen Temperaturen ändern sich die elastischen Moduln um weniger als 3 GPa. Für die Berechnung der Eigenmoden und Resonanzfrequenzen wird deshalb analog zum Silizium auch diese Temperaturabhängigkeit vernachlässigt.

Mit einer dreizähligen Achse ( $z$ -Achse) und drei dazu senkrechten zweizähligen Achsen ( $x$ -Achse) ordnet sich  $\alpha$ -Quarz in die Punktgruppe  $D_3$  ein. Abb. B.1 verdeutlicht diese Symmetrie anhand eines geometrischen Analogons.

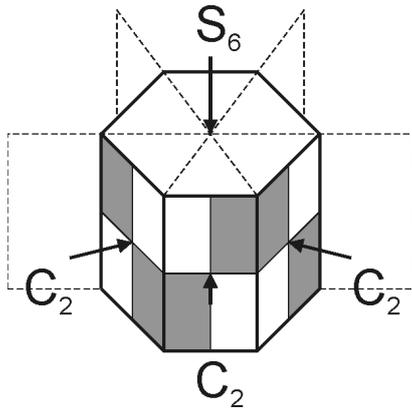


**Abb. B.1: Symmetrien der Punktgruppe des  $\alpha$ -Quarzes  $D_3$ .** Die Wahl des Koordinatensystems zur Darstellung tensorieller Eigenschaften wie dem Tensor elastischer Moduln orientiert sich an dieser Symmetrie. Die dreizählige Achse ( $C_3$ ) wird dabei mit der  $z$ -Achse und die zweizählige Achse ( $C_2$ ) mit der  $x$ -Achse identifiziert.

Allerdings erlaubt die trigonale Kristallstruktur im Vergleich zum kubischen Silizium das Auftreten der Doppelbrechung und des piezoelektrischen Effekts. Beide Effekte sprechen gegen einen Einsatz als Substratmaterial für zukünftige kryogene Gravitationswellendetektoren. Ebenfalls führt die niedrigere Kristallsymmetrie dazu, daß Wärmeleitfähigkeit und thermische Expansion anisotrop werden. In vorliegender Arbeit werden die temperaturabhängigen Werte der Wärmeleitfähigkeit und der spezifischen Wärme aus [145] verwendet. Die Werte für die thermische Ausdehnung liegen [163] zugrunde. Durch die vielfältigen Untersuchungen mechanischer Verluste in Kristallquarz dient dieses Material hauptsächlich als Referenzmaterial für Verlustmessungen. Die Empfindlichkeit der Apparatur zur Messung mechanischer Verluste kann damit überprüft werden.

### B.3.3. Saphir

Als drittes Substratmaterial mit geringen mechanischen Verlusten ist Saphir ein Kandidat, der in heutigen Prototypen kryogener Interferometer bereits zum Einsatz kommt. Als kristallines Material zeigt es ähnliche Eigenschaften wie Silizium. Allerdings kondensiert es im trigonalen Kristallsystem - genauer gesagt entsprechend der ditrigonal-skalenoedrischen Punktgruppe  $D_{3d}$ . Diese Punktgruppe zeichnet sich durch eine dreizählige Drehinversionsachse und zweizählige Drehachsen senkrecht dazu aus. Abb. B.2 verdeutlicht die Symmetrie des Saphir anhand eines geometrischen Analogons.



**Abb. B.2: Symmetrien der Punktgruppe des Saphir  $D_{3d}$ .** Zur Beschreibung der Kristalleigenschaften wird ein Koordinatensystem verwendet, dessen  $z$ -Achse mit der sechs-zähligen Drehspiegelachse ( $S_6$ ) übereinstimmt. Die  $x$ -Achse wird entlang einer zwei-zähligen Drehachse ( $C_2$ ) gewählt.

Die elastischen Moduln weisen die gleiche Struktur wie für Kristallquarz entsprechend Gl. (B.17) auf. Eine experimentelle Bestimmung der elastischen Konstanten erfolgte nach Bernstein [164] bei einer Temperatur von  $27^\circ\text{C}$  und ergibt

$$C_{11} = 490,2 \text{ GPa} , \quad C_{33} = 490,2 \text{ GPa} , \quad C_{44} = 145,4 \text{ GPa} , \quad (\text{B.20})$$

$$C_{12} = 165,4 \text{ GPa} , \quad C_{13} = 113,0 \text{ GPa} , \quad C_{14} = -23,2 \text{ GPa} . \quad (\text{B.21})$$

Nach Tefft [165] ändern sich die elastischen Parameter für tiefe Temperaturen um maximal 3%. Für die Rauschberechnungen wird damit auch diese Temperaturabhängigkeit vernachlässigt.

Wiederum führt die Kristallstruktur zum Auftreten von Doppelbrechung und piezoelektrischem Effekt und spricht gegen einen Einsatz als Substratmaterial für Gravitationswellendetektoren. Die niedrige Kristallsymmetrie führt außerdem dazu, daß Wärmeleitfähigkeit und thermische Expansion anisotrop werden. Diese Anisotropie ist für die thermische Ausdehnung gut dokumentiert. In vorliegender Arbeit werden die Werte aus [145] verwendet. Im Gegensatz dazu finden sich nur wenige Veröffentlichungen, in denen überhaupt die Anisotropie der Wärmeleitfähigkeit angesprochen wird. Aus Mangel an genaueren Daten wird deshalb im folgenden eine isotrope Wärmeleitung mit den Vorgaben aus [145] für reinen Saphir angenommen.

Gegen eine Verwendung von Saphir im Detektor spricht die große mechanische Härte. Sie erschwert die Bearbeitung und Politur solcher Substrate. Ebenfalls sind die Radien verfügbarer zylindrischer Einkristalle geringer als für Silizium. Das erwartete thermische Rauschen ist dementsprechend erhöht.

# C. Parametrische Instabilität

## C.1. Parametrische Resonanz

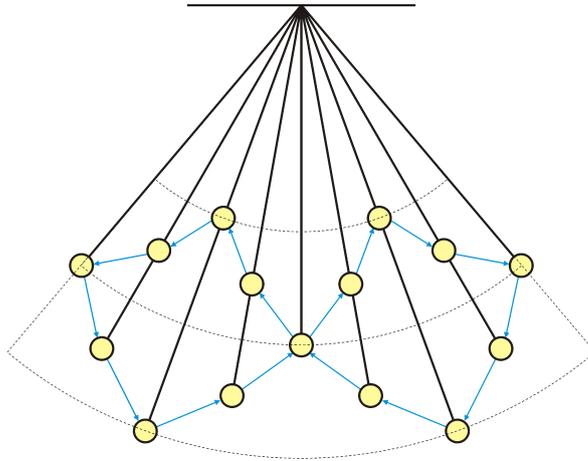
Der Effekt der parametrischen Resonanz beschreibt die Anregung eines schwingungsfähigen Systems durch eine periodische Änderung seiner inneren Parameter. Das zugrundeliegende System soll durch die Auslenkung  $x$  und die Eigenfrequenz  $\omega(t)$  über die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0 \tag{C.1}$$

beschrieben werden. Anschaulich kann die zeitlich variierende Eigenfrequenz des Systems an einem Fadenpendel diskutiert werden. Hier kann zum einen die Fadenlänge eine Variation erfahren. Andererseits kann bei konstanter Fadenlänge der Aufhängungspunkt verschoben werden, was einer Variation der Schwerebeschleunigung entspricht und ebenfalls einen inneren Parameter darstellt.

Zunächst sollen die Verhältnisse an einem Fadenpendel mit variierender Pendellänge (Abb. C.1) verdeutlicht werden. Dieses anschauliche Beispiel beschreibt die Grundlage des Schaukelns von Kindern und wird in vielen Lehrbüchern behandelt. Ausgehend von einer Anfangsauslenkung des Pendels wird die Fadenlänge im Punkt der höchsten Geschwindigkeit verringert. Dazu muß Arbeit gegen das Schwerfeld der Erde und gegen die Zentrifugalkraft der Masse verrichtet werden. Im folgenden wird die Länge des Pendels an den Umkehrpunkten wieder vergrößert. Dabei gibt das System die gleiche potentielle Energie ab, die es im vorigen Schritt aufgenommen hat. Da die Masse am Umkehrpunkt jedoch ruht, leistet das System keine Arbeit gegen die Zentrifugalkraft. Beim nächsten Durchlauf der Nulllage wird das Pendel erneut verkürzt. Effektiv wird dem Pendel durch den Unterschied der an der Zentrifugalkraft verrichteten Arbeit also Energie zugeführt. Dies führt zu einer resonanten Erhöhung der Schwingungsamplitude.

Wesentliche Unterschiede zur extern getriebenen Resonanz bestehen darin, daß das System schon eine Anfangsauslenkung aufweisen und die Variation der Parameter mit der doppelten Resonanzfrequenz des Systems erfolgen muß. Analog zeigen



**Abb. C.1: Parametrische Resonanz eines Fadenpendels.** Die Abbildung verdeutlicht die periodische Änderung der Pendellänge mit der doppelten Resonanzfrequenz des Systems. Die hier gezeigte Phasenlage führt dabei zu einem Anwachsen der mechanischen Schwingung.

sich parametrische Resonanzen auch bei Parametervariationen mit höheren geradzahigen Vielfachen der Resonanzfrequenz. Diese weisen jedoch mit zunehmender Ordnung eine geringere Verstärkung auf.

Für die mathematische Behandlung der parametrischen Resonanz kann man sich auf harmonische Systeme der Kreisfrequenz  $\omega_0$  zurückziehen. Diese Näherung führt zu einem zeitabhängigen Ansatz der Eigenfrequenz von

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 [1 + h \cos(\gamma t)] . \quad (\text{C.2})$$

Die entstehende Bewegungsgleichung gehört zum Typ der Mathieschen Differentialgleichung. Weiterhin benutzt man die Näherung kleiner Oszillationen  $h \ll 1$ . Damit wird der Störterm die ursprüngliche harmonische Antwort nur unwesentlich beeinflussen. Als Lösungsansatz für  $x$  kann demzufolge eine Schwingung mit langsam veränderlicher Amplitude gewählt werden, deren zweite Ableitungen zu null verschwinden. Wie bereits qualitativ erörtert ist die erste Resonanz für  $\gamma = 2\omega_0$  zu erwarten. Deshalb dient als Ansatz die Funktion [166]

$$x(t) = a(t) \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t \right] + b(t) \sin \left[ \left( \omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t \right] , \quad (\text{C.3})$$

wobei  $\epsilon$  als klein gegenüber der Resonanzfrequenz angenommen wird. Setzt man obigen Ansatz in die Schwingungsgleichung (C.1) ein, erhält man ein Differentialgleichungssystem für die Amplituden  $a(t)$  und  $b(t)$ . Unter Vernachlässigung der zweiten Ableitungen von  $a(t)$  und  $b(t)$  ergeben sich Lösungen proportional zu  $e^{st}$  mit

$$s^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \epsilon^2 \right] . \quad (\text{C.4})$$

Ein exponentielles Anwachsen der Amplitude ist für  $s^2 > 0$  gegeben und liegt im Bereich

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \epsilon < \frac{h\omega_0}{2} \quad (\text{C.5})$$

vor. Weist das zugrundeliegende System Reibung auf, kann diese durch eine exponentielle Dämpfung freier Schwingungen mit  $e^{-\lambda t}$  beschrieben werden. Das Gebiet parametrischer Resonanz verringert sich dann zu

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} < \epsilon < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} . \quad (\text{C.6})$$

Dementsprechend tritt in dissipativen Systemen eine parametrische Anregung nur oberhalb einer bestimmten Grenze für die Variationsamplitude  $h$  auf.

## C.2. Optische Resonatormoden

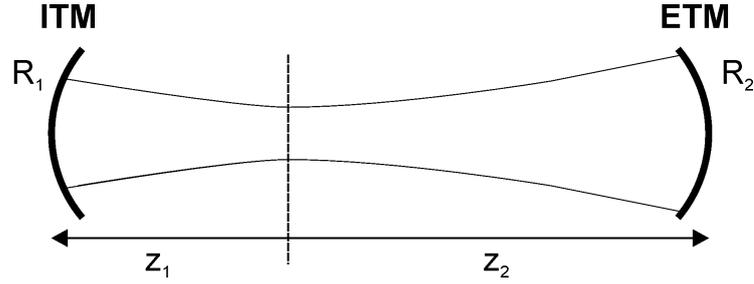
Die Beschreibung optischer Eigenmoden des Resonators erfolgt in zylindrischen Koordinaten  $(r, \varphi, z)$  mit den assoziierten Laguerrepolynomen  $L_m^n$ . Für das elektrische Feld frei propagierender Laguerre-Gauß-Moden gilt nach [167, 168]

$$E_{mn}(\rho, \varphi, z) \propto \frac{1}{w} \left(\frac{\rho}{w}\right)^2 L_m^n \left[2\frac{\rho^2}{w^2}\right] \exp \left[ i \left( kz - n\varphi + \frac{z}{z_0} \frac{\rho^2}{w^2} + \phi_{mn}(z) \right) \right] . \quad (\text{C.7})$$

Dabei zeigt die  $z$ -Richtung des Koordinatensystems in Ausbreitungsrichtung des Laserstrahls. In der Beschreibung des elektrischen Feldes nach Gl. (C.7) liegt die Strahltaile bei  $z = 0$  mit einem Strahlradius von  $w = w_0$ . Der Strahlradius  $w$  berechnet sich in Abhängigkeit des Abstandes zur Strahltaile  $z$  zu

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} . \quad (\text{C.8})$$

Die Eigenmoden werden durch den radialen Index  $m$  und den azimutalen Index  $n$  numeriert.  $z_0$  beschreibt die Rayleighlänge mit  $z_0 = kw_0^2/2$  und  $k = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl des Laserlichts. Der erste Phasenterm in Gl. (C.7) charakterisiert die normale Phasenänderung einer ebenen Welle. Der zweite beschreibt das azimutale Verhalten der Mode, während im dritten die Krümmung der Phasenfront berücksichtigt ist. In der paraxialen Näherung wird mit dem dritten Term eine Kugelwelle angenähert. Der vierte Term  $\phi_{mn}(z)$  wird Gouyphase genannt. Er zeigt eine Abhängigkeit vom



**Abb. C.2.: Geometrie eines Fabry-Perot-Resonators.** Die Krümmungsradien der Spiegel  $R_i$  und die Resonatorlänge  $L = z_1 + z_2$  legen die Lage und Größe der Strahlteile fest.

Abstand zur Strahlteile über

$$\phi_{mn}(z) = -(n + 2m + 1) \arctan \frac{z}{z_0}. \quad (\text{C.9})$$

Man erkennt außerdem eine Abhängigkeit der Gouyphase von der Ordnung der zugrundeliegenden Mode. Dieses Verhalten erlaubt die Selektion einzelner Moden in einem Fabry-Perot-Resonator. Über die Änderung der Resonatorlänge können alle Moden  $(n, m)$  mit konstantem Wert für  $n + 2m$  gleichzeitig zur Resonanz gebracht werden. In der Transmission sind folglich die übrigen Moden in ihrer Amplitude verringert. Speziell die Grundmode  $n = m = 0$  kann so als Einzelmode zur Resonanz gebracht werden. Der Prozeß der Modenselektion findet unter der Bezeichnung mode cleaning auch in Gravitationswellendetektoren Anwendung [169].

Im Resonator wird der Strahlradius an der Taille  $w_0$  durch die Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  und den Abstand der Resonatorspiegel  $L$  festgelegt. Die Forderung, daß an der Spiegeloberfläche die Krümmung der Wellenfront mit der Spiegelkrümmung übereinstimmt, führt zu folgendem Ausdruck [167]

$$w_0^4 = \left(\frac{2}{k}\right)^2 \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}. \quad (\text{C.10})$$

Die Entfernung der Strahlteile zu den jeweiligen Spiegeln  $z_1$  bzw.  $z_2$  ist in [167] ebenfalls für stabile Resonatoren mit konvexen Spiegeln angegeben

$$z_1 = \frac{L(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L}, \quad z_2 = \frac{L(R_1 - L)}{R_1 + R_2 - 2L}. \quad (\text{C.11})$$

Die Geometrieparameter sind in Abb. C.2 verdeutlicht.

Mit dem Wissen um die optischen Eigenmoden des Resonators können deren Eigenfrequenzen berechnet werden. Die Resonanzbedingung verlangt dabei, daß der

Phasenunterschied für einen kompletten Umlauf im Resonator einem ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$  entsprechen muß

$$\pi N = kL + \phi_{mn}(z_1) - \phi_{mn}(-z_2) . \quad (\text{C.12})$$

Mit der Dispersionsgleichung des Lichts  $\omega = ck$  folgen schließlich die Eigenfrequenzen der Resonatormoden

$$\omega_{Nmn} = \frac{c}{L} \left[ \pi N + (n + 2m + 1) \left( \arctan \frac{z_1}{z_0} + \arctan \frac{z_2}{z_0} \right) \right] . \quad (\text{C.13})$$

Obige Gleichung kann auf die geometrischen Parameter des Resonators zurückgeführt werden. Im Ergebnis erscheint an dieser Stelle der Ausdruck aus Gl. (7.10)

$$\omega_{Nmn} = \frac{c}{L} \left[ \pi N + (n + 2m + 1) \arccos \left( \pm \sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right)} \right) \right] . \quad (\text{C.14})$$

Für stabile Resonatoren stimmen die Vorzeichen von  $1 - L/R_1$  und  $1 - L/R_2$  überein. Dieses Vorzeichen ist im Argument des Arcuscosinus der angegebenen Gleichung zu wählen.

### C.3. Kontrolle parametrischer Instabilitäten

Um die Empfindlichkeit zukünftiger Detektoren zu verbessern, ist zum einen die Minimierung des Schrotrauschens durch eine Erhöhung der Laserleistung unumgänglich. Zum anderen müssen mechanische Verluste der Testmassen minimiert werden, um das Brownsche Rauschen der Detektoren zu verringern. Beide Forderungen führen zu einer Erhöhung der parametrischen Verstärkung, so daß in zukünftigen Detektoren Konzepte zur Dämpfung parametrischer Instabilitäten realisiert werden müssen.

Ein Jahr nach der ersten Veröffentlichung zu parametrischen Instabilitäten in Gravitationswellendetektoren stellten Braginsky und Vyatchanin ein Konzept zu deren Dämpfung vor [170]. Darin wird der Endspiegel auch auf der Rückseite verspiegelt und damit ein weiterer Resonator konstruiert. Dieser wird dann mit Hilfe eines vom Interferometer unabhängigen, zweiten Lasers gepumpt. Durch das umlaufende Licht erfolgt im zweiten Resonator ein Impulsübertrag zwischen Vorder- und Rückseite des Spiegels. Eine Bewegung der für den Detektor entscheidenden Vorderseite führt dann zu einer Änderung des zweiten Resonators. Damit ändert sich die im Resonator umlaufende Leistung und der Strahlungsdruck auf die Vorderfläche.

Durch die endliche Umlaufzeit benötigt die Einstellung des neuen Gleichgewichts jedoch eine gewisse Zeit. Entsprechend erfolgt die Wirkung des Strahlungsdruckes auf die Frontfläche des Substrates phasenverschoben. Eine solche Phasenverschiebung kann zur Dissipation mechanischer Energie führen. Auf diese Weise kann der Spiegelverlust bei geeigneter Wahl der Parameter des neuen Resonators um den Faktor 1000 erhöht werden. Gleichzeitig ist das durch die Dämpfung eingetragene Rauschen vernachlässigbar gering. Mit dieser Methode können nur axialsymmetrische Instabilitäten effektiv gedämpft werden. Das zusätzlich eingekoppelte Licht kann durch Streuung die eigentliche Messung verfälschen und führt auch im Endspiegel zu thermischen Effekten durch Absorption. Das größte Problem besteht jedoch im Aufbau einer Kavität für den Einkoppelspiegel. Hierfür schlagen Braginsky und Vyatchanin ein Einkoppelgitter vor.

Eine einfachere Variante zur Minimierung parametrischer Verstärkung nutzt den Krümmungsradius der Resonatorspiegel als freien Parameter. Durch dessen Variation können die Frequenzen optischer Moden verschoben, die Frequenzabweichung  $\Delta$  vergrößert und im Ergebnis die parametrische Verstärkung verringert werden. Für aLIGO ist eine solche Optimierung in [171] dargestellt.

Technologisch noch einfacher gestaltet sich die Abschwächung der parametrischen Verstärkung durch das Aufbringen verlustreicher Materialien. Mit Levins Theorem ist für das thermische Rauschen allein der Verlust in der Nähe der reflektierenden Schicht verantwortlich [172, 173]. Demzufolge kann eine zusätzliche dissipative Schicht auf dem Umfang bzw. der Rückseite des Substrates angebracht werden, ohne das Rauschen wesentlich zu erhöhen. Gleichzeitig werden die Eigenmoden des Substrates jedoch effektiv gedämpft. Gras et al. demonstrierten mit einer ringförmig auf dem Umfang aufgetragenen dämpfenden Schicht eine Erhöhung der Modenverluste um den Faktor fünf, während das Rauschen um weniger als 1% zunahm [174]. Eine passive Dämpfung kann also parametrische Instabilitäten bei einer gleichzeitig geringen Erhöhung thermischen Rauschens unterdrücken. Noch effektiver wäre das Aufbringen einer verlustbehafteten Schicht auf der Substratrückseite. Bis auf reine Longitudinalmoden würde eine Bewegung der Rückfläche zu Energiedissipation führen. Aufgrund der Symmetrie des Substrates geht eine erhöhte Bewegung der Frontfläche so zwangsläufig mit einer erhöhten Dämpfung der mechanischen Mode und damit einer effektiven Verringerung der parametrischen Verstärkung einher. Für den Einkoppelspiegel müßte diese Schicht bei hohen mechanischen Verlusten gleichzeitig eine geringe optische Absorption und hohe Transmission aufweisen.

2011 wurde von Miller et al. ein aktives Schema zur Dämpfung parametrischer Instabilitäten vorgeschlagen [175]. Über elektrostatische Aktuatoren soll eine

externe Kraft das Anwachsen der Spiegelschwingung verhindern. Die benötigten Aktuatoren finden sich bereits im Detektordesign, um die Resonatorarme auf eine konstante Länge auszuregeln. In ihrer Arbeit bestätigen Miller et al. ihr Modell zur Dämpfung parametrischer Instabilitäten experimentell. Sie zeigen, daß die Amplitude der elektrostatischen Gegenregelung ausreicht, um Instabilitäten effektiv zu dämpfen. Dennoch schlagen sie eine Kombination passiver und aktiver Techniken vor. Denn jede aktiv gegengeregelte Spiegelmode benötigt einen eigenen Regelkreis und verkompliziert damit die Detektorelektronik.

# D. Thermoelastische Dämpfung

Gegenstand dieses Anhangs ist die Einordnung der thermoelastischen Dämpfung (TED) in das Grundgerüst der Thermodynamik. Eine Anwendung dieser Grundlagen führt hin zu den notwendigen Gleichungen zur Beschreibung des Energieverlusts harmonisch schwingender, anisotroper Festkörper durch TED.

## D.1. Thermodynamische Grundlagen

Den Ausgangspunkt einer thermodynamischen Behandlung bildet die freie Energie  $F$  als Funktion der Temperatur  $T$  und dem Dehnungstensor  $\epsilon_{ij}$  als unabhängigen Variablen. Sie ist für anisotrope Kristalle u. a. in [176, Gl. (10,1) und (10,11)] zu finden und lautet

$$F(T, \epsilon_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - C_{ijkl} \alpha_{ij} \epsilon_{kl} (T - T_0) . \quad (\text{D.1})$$

Darin stellt  $\alpha_{ij}$  den Tensor der thermischen Ausdehnung,  $C_{ijkl}$  den Tensor elastischer Moduln und  $T_0$  die mittlere Temperatur dar. Zu beachten ist die Summation über doppelt auftretende Indizes.

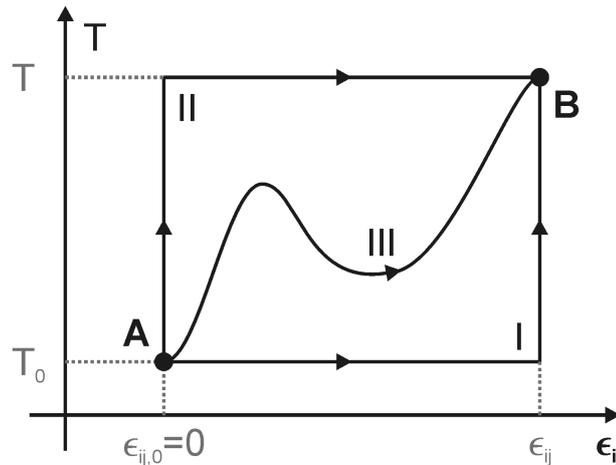
Obigen Ausdruck kann man sich folgendermaßen verdeutlichen. Der erste Term der Summe beschreibt die freie Energie bei konstanter Temperatur. Dieser Zusammenhang ist durch den Tensor der elastischen Moduln  $C_{ijkl}$  gegeben; genauer gesagt handelt es sich um die isothermen, elastischen Moduln. Für die mechanischen Spannungen  $\sigma_{ij}$  und die freie Energie  $F$  gilt bei konstanter Temperatur

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} , \quad (\text{D.2})$$

$$dF_1(T = \text{const.}, \epsilon_{ij}) = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} d\epsilon_{ij} = d \left( \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \right) . \quad (\text{D.3})$$

Folglich beschreibt dieser Beitrag den Anteil der Energie, der durch reine Verformung in den Körper eingebracht wird.

Bei der freien Energie handelt es sich um eine Potentialfunktion. Dieser Begriff beschreibt die Tatsache, daß ihr Wert allein durch die Zustandsgrößen  $T$  und



**Abb. D.1.: Zugang der Berechnung der freien Energie als Potentialfunktion  $F(T, \epsilon_{ij})$ .** Die Abbildung verdeutlicht den Weg vom Ruhezustand A ( $T_0, \epsilon_{ij} = 0$ ) hin zum ausgelenkten Endzustand B ( $T, \epsilon_{ij}$ ). In der vorliegenden Ableitung wird der Weg I verwendet. Er besteht aus einer isothermen Verformung des Festkörpers, der dann eine Erwärmung bei fester Auslenkung folgt. Als Potentialfunktion ist die freie Energie nur vom Endzustand B abhängig und nicht vom Weg in diesen Endzustand. Deshalb ist die Wahl des der Rechnung zugrundeliegenden Weges von A nach B beliebig. Die eingezeichneten Wege II und III sollen diesen Sachverhalt verdeutlichen.

$\epsilon_{ij}$  bestimmt wird<sup>1</sup>. Dabei spielt der Weg hin zu dem jeweiligen Endzustand keine Rolle. So kann beispielsweise zuerst eine Auslenkung des Festkörpers  $\epsilon_{ij}$  bei der festen Anfangstemperatur  $T_0$  betrachtet werden und im Anschluß eine Erwärmung bei konstanter Auslenkung. Alternativ ist aber auch eine Erwärmung des unausgelenkten Körpers möglich, der dann bei der Endtemperatur eine isotherme Verformung folgt. Dieser Sachverhalt ist in Abb. D.1 skizziert. Für die hier gezeigte Herleitung der freien Energie wird Weg I genutzt. Nach der isothermen Verformung aus der Ruhelage ( $\epsilon_{ij} = 0$  und  $T = T_0$ ) in den ausgelenkten Zustand  $\epsilon_{ij} \neq 0$  schließt sich eine Temperaturänderung bei konstanter Verformung hin zum Endzustand B ( $\epsilon_{ij}$  und  $T$ ) an. Der Beitrag des zuletzt genannten Prozesses stellt den zweiten Term in Gl. (D.1) dar. In diesem Prozeß muß der Körper bei gegebener Verformung von der Ausgangstemperatur auf die Endtemperatur  $T \neq T_0$  gebracht werden. Dabei ist er jedoch bestrebt, sich auszudehnen oder zusammenzuziehen (je nach Vorzeichen von  $\alpha$  und  $\Delta T$ ). Die Energie, die aufzubringen ist, um diese Formänderung zu

<sup>1</sup>analog zum Potentialbegriff in der Mechanik

verhindern, findet im erwähnten zweiten Term Berücksichtigung. Es gilt

$$\epsilon_{ij}^{\text{th}} = \alpha_{ij}(T - T_0) , \quad (\text{D.4})$$

$$dF_2 = \sigma_{ij}(-d\epsilon_{ij}^{\text{th}}) = -\sigma_{ij}\alpha_{ij} d(T - T_0) = -d(C_{ijkl}\epsilon_{kl}\alpha_{ij}T) . \quad (\text{D.5})$$

Gedanklich hat man sich eine Verformung des Körpers in der Art vorzustellen, daß eine Erwärmung genau wieder zum gewünschten Endzustand  $\epsilon_{ij}$  führt. In analoger Weise läßt sich der Prozeß umgekehrt als Erwärmung mit anschließender isothermer Verformung verstehen. Diese Rechnung ist hier nicht aufgezeigt.

Mit der Kenntnis der freien Energie des Systems ist die Thermodynamik im Prinzip geklärt. Weitere Potentiale sind über die thermodynamischen Beziehungen zugänglich. Dies gilt ebenfalls für die Berechnung der Entropie  $S(T, \sigma_{ij})$  in Abhängigkeit der Temperatur  $T$  und der Spannungen  $\sigma_{ij}$  als Grundlage für die Berechnung der TED. Die Ableitung beginnt mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$dU = dQ + dW = T dS + y_i dX_i . \quad (\text{D.6})$$

In der oberen Gleichung stehen die  $y_i$  für intensive Zustandsgrößen – in vorliegendem Fall also für die Spannungen  $\sigma_{ij}$ . Die  $X_i$  symbolisieren hingegen extensive Zustandsgrößen – hier die Dehnung  $\epsilon_{ij}$ . Bekannt ist diese Beziehung vor allem für ideale Gase (pVT-Systeme) mit  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$  und  $X_i = V$  und damit  $-p dV$  als Arbeitsterm<sup>2</sup>. Weiterhin ist zu beachten, daß sämtliche Größen als Dichten aufzufassen sind. So beziehen sich innere Energie  $U$ , freie Energie  $F$  und Entropie  $S$  immer auf ein Volumenelement.

Die Einführung der freien Energie  $F = U - TS$  führt zu folgender Gleichung

$$dF = d(U - TS) = -S dT + y_i dX_i = -S dT + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} . \quad (\text{D.7})$$

Daraus folgt für die Ermittlung der Entropie  $S$  mit dem Ausdruck für  $F$  aus Gl. (D.1)

$$-S = \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{\epsilon_{ij}} = -C_{ijkl}\alpha_{ij}\epsilon_{kl} , \quad (\text{D.8})$$

---

<sup>2</sup>Das Minus in der Gleichung folgt aus der unterschiedlichen Definition von Druck und Spannung und aus der damit unterschiedlichen Orientierung der Kräfte bezüglich der Körperoberfläche. Während  $\sigma$  die Kräfte in das Körpervolumen hinein beschreibt, steht  $p$  für nach außen gerichtete Kräfte.

und für die mechanischen Spannungen

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_{T, \{\epsilon_{kl}\} \setminus \epsilon_{ij}} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - C_{ijkl} \alpha_{kl} (T - T_0) . \quad (\text{D.9})$$

Die Gültigkeit der dargelegten Ableitungen setzt dabei standardmäßig die Unabhängigkeit der elastischen Konstanten  $C$  als auch der thermischen Ausdehnung  $\alpha$  von den freien Variablen, der Dehnung  $\epsilon_{ij}$  und der Temperatur  $T$  voraus. Die beidseitige Multiplikation der letzten Gleichung mit  $\alpha_{ij}$  liefert mit der anschließenden Summation und Ersetzung in Gl. (D.8) für die Entropie letztlich

$$S = C_{ijkl} \alpha_{ij} \epsilon_{kl} = \alpha_{ij} \sigma_{ij} + C_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl} (T - T_0) . \quad (\text{D.10})$$

Gewöhnlich formuliert man das vorliegende Problem über die Wärmekapazität  $C_p$ . Dazu benutzt man die Gibbsche Fundamentalgleichung, um die Ableitung der Entropie nach der Temperatur bei konstanter Spannung zu berechnen. Aus der Definition der Wärmekapazität und Gl. (D.10) ergibt sich mit der Massendichte  $\rho$

$$\rho C_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}} = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}} \quad (\text{D.11})$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}} = \frac{\rho C_p}{T} = C_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl} , \quad (\text{D.12})$$

und damit ein Zusammenhang zwischen der Wärmekapazität, den elastischen Modulen und dem Wärmeausdehnungskoeffizienten. Die Größe  $C_p$  ist dabei die spezifische Wärmekapazität bei konstanter mechanischer Spannung. In Anlehnung an die pVT-Systeme erfolgt auch ihre Benennung mit dem Buchstaben  $p$ , der konstanten Druck symbolisieren soll. Ihre Einführung wird deshalb vorgenommen, da die experimentelle Ermittlung der TED meist an frei gelagerten Probekörpern erfolgt, die sich unter konstantem Druck ohne Einschränkung ausdehnen können. Die Einheit von  $C_p$  beträgt  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ . Die hier verwendete Größe  $\rho C_p$  stellt die volumenbezogene Wärmekapazität dar.

Das Einsetzen dieser Beziehung in die Relation für die Entropie liefert (vgl. [177])

$$S = \alpha_{ij} \sigma_{ij} + \rho C_p \frac{T - T_0}{T} . \quad (\text{D.13})$$

An dieser Stelle ist die thermodynamische Vorarbeit abgeschlossen. Eine wichtige Anmerkung zur dargestellten Ableitung besteht darin, daß die periodische Ver-

formung eines Körpers für sich genommen einem reversiblen Prozeß entspricht und deshalb mit der Theorie thermodynamischer Potentiale zu behandeln ist. Berücksichtigt man jedoch die Wärmeleitung im nächsten Schritt, ändert sich dieser Sachverhalt und man erhält einen dissipativen Prozeß, der mit einer Entropieerhöhung einhergeht.

## D.2. Formulierung der Wärmeleitungsgleichung

Jeder Wärmetransport sorgt für eine Entropieerhöhung und bringt damit dissipatives Verhalten in das System ein. Wesentlichen Einfluß auf den Wärmetransport im Festkörper besitzt lediglich die Wärmeleitung, so daß sich dieses Kapitel auf ihre Behandlung beschränken wird. Die Wärmeleitungsgleichung stellt eine Bilanz der thermischen Energie dar. Sie besagt, daß die Wärmeänderung eines Gebietes durch die zu- und abfließenden Ströme getragen werden müssen. In differentieller Formulierung lautet sie

$$\dot{q} + \operatorname{div} \vec{k} = 0 . \quad (\text{D.14})$$

Dabei bezeichnet  $q$  die Dichte der im Körper befindlichen Wärme und  $\dot{q}$  entsprechend ihre zeitliche Änderung.  $\vec{k}$  stellt die vorhandene Wärmestromdichte dar. Den bereits erwähnten Bilanzcharakter der Gleichung erkennt man bei der Integration beider Seiten über ein kleines Volumen.

In der vorliegenden Arbeit soll jedoch eine Indexnotation zur Anwendung kommen, in der ein Komma vor dem Index eine Ableitung nach der entsprechenden Koordinate darstellt. Obige Gleichung schreibt sich dann als

$$\dot{q} + k_{i,i} = 0 . \quad (\text{D.15})$$

Weiterhin gilt laut Fourierschem Gesetz für die Wärmestromdichte

$$\vec{k} = -\kappa_{ij} \operatorname{grad} T \Leftrightarrow k_i = -\kappa_{ij} T_{,j} , \quad (\text{D.16})$$

wobei  $\kappa_{ij}$  die Wärmeleitfähigkeit der Probe im allgemein anisotropen Fall als Tensor zweiter Ordnung beschreibt. Die eingebrachte Wärme läßt sich mit der zuvor berechneten Entropie (s. Gl. (D.10)) auswerten. Unter Zuhilfenahme der Beziehung

aus Gl. (D.12) folgt

$$\dot{q} = T\dot{S} = \alpha_{ij}\dot{\sigma}_{ij}T + \rho C_p \dot{T} . \quad (\text{D.17})$$

Die thermoelastischen Effekte werden also letztendlich durch folgende Gleichung beschrieben.

$$\rho C_p \dot{T} - \kappa_{ij} T_{,j,i} = -\alpha_{ij} \dot{\sigma}_{ij} T \quad (\text{D.18})$$

In ihr ist die volle Anisotropie des Kristalls erhalten und keinerlei Näherung angewandt worden.

Da die Temperaturschwankungen infolge typischer Volumenänderungen des Festkörpers klein gegen die mittlere Temperatur  $T_0$  sein werden, kann die Temperatur  $T(x, t)$  auf der rechten Seite der Gleichung durch den konstanten Wert  $T_0$  ersetzt werden. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung wird so entscheidend vereinfacht. Mit dieser Entkopplung beider Seiten<sup>3</sup> erhält man

$$\rho C_p \dot{T} - \kappa_{ij} T_{,j,i} = -\alpha_{ij} \dot{\sigma}_{ij} T_0 . \quad (\text{D.19})$$

Mit dieser Entkopplung ist im Falle resonanter, harmonischer Anregungen

$$\sigma_{ij}(x, t) = \Re(\hat{\sigma}_{ij}(x) \exp(i\omega t)) \quad (\text{D.20})$$

der typische Lösungsansatz mit einer Separation des Zeitanteils zu unternehmen

$$T(x, t) = \Re\left(\hat{T}(x) \exp(i\omega t)\right) . \quad (\text{D.21})$$

$\Re$  bezeichnet dabei den Realteil, und  $\omega = 2\pi f$  steht für die Kreisfrequenz der jeweiligen Schwingung. Im Imaginärteil von  $\hat{T}(x)$  ist dadurch auch die Phasenverschiebung zwischen Temperatur und mechanischer Belastung gegeben. Auf diese Weise ergibt sich für den Ortsanteil  $\hat{T}(x)$  die Gleichung

$$i\omega \rho C_p \hat{T} - \kappa_{ij} \hat{T}_{,j,i} = -i\omega \alpha_{ij} \hat{\sigma}_{ij} T_0 . \quad (\text{D.22})$$

---

<sup>3</sup>Dies entspricht einer Entkopplung von Mechanik und Wärmetransport. Die Wirkung der auftretenden Wärmeströme auf die mechanische Verformung wird dabei vernachlässigt.

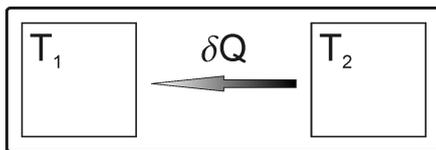
### D.3. Berechnung der dissipierten Energie

Grundsätzlich existieren zwei Möglichkeiten, den Energieverlust durch TED zu berechnen. Beide beginnen mit der Kenntnis des Temperaturfeldes  $\hat{T}(x)$ , das die obige Gleichung erfüllt. Besitzt man dieses Feld, kann man einerseits die fließenden Ströme integrieren. Diese Größe ist ein Maß für die Umwandlung mechanischer in thermische Energie. Andererseits besteht die Möglichkeit, die durch die Temperatur hervorgerufenen thermischen Verformungen des Körpers zu berechnen. Die Arbeit, die die thermischen Verformungen an den vorhandenen mechanischen Spannungen leisten, ist ebenfalls ein Maß für die Energiedissipation im System.

#### D.3.1. Berechnung über Entropieerhöhung

Das grundsätzliche Vorgehen zur Ermittlung der mechanischen Verluste über Entropieänderungen wird an einer einfachen Entropiebilanz gemäß dem vereinfachten System aus Abb. D.2 verdeutlicht. Dabei handelt es sich um zwei Körper unterschiedlicher Temperatur, zwischen denen ein Wärmeaustausch  $\delta Q$  stattfindet. Die Entropie des Systems ergibt sich nun aus der Summe der Entropien der einzelnen Körper zu

$$T \, dS = \delta Q \Rightarrow dS_{ges} = dS_1 + dS_2 = \frac{\delta Q}{T_1} - \frac{\delta Q}{T_2} . \quad (\text{D.23})$$



**Abb. D.2: Entropiebilanz** eines Wärmeaustausches zweier Körper unterschiedlicher Temperatur ( $T_1 < T_2$ ) in einem abgeschlossenen System.

Mit der Ausgangsbedingung  $T_1 < T_2$  ergibt sich somit eine Entropieerhöhung. Denselben Prozeß überträgt man nun auf infinitesimale Gebiete des Festkörpers. Eine integrale Formulierung, die in [176] beschrieben ist, liefert dann

$$\dot{S} = - \int \frac{\text{div} \vec{k}}{T} \, dV = - \int \text{div} \left( \frac{\vec{k}}{T} \right) \, dV + \int \vec{k} \, \text{grad} \left( \frac{1}{T} \right) \, dV . \quad (\text{D.24})$$

Mit verschwindenden Strömen durch die Probenoberfläche, also unter Annahme adiabatischer Randbedingungen, entfällt das erste Volumenintegral. Schließlich ergeben die Identitäten der Vektoranalysis für das zweite Integral

$$\dot{S} = - \int \frac{\vec{k}}{T^2} \, \text{grad} \, T \, dV = - \int \frac{k_i}{T^2} T_{,i} \, dV = \int \kappa_{ij} \frac{1}{T^2} T_{,i} T_{,j} \, dV . \quad (\text{D.25})$$

Die letzte Umformung geschah unter der Anwendung des Fourierschen Gesetzes der Wärmeleitung aus Gl. (D.16). Die Ersetzung des Nenners  $T^2$  durch die mittlere Temperatur  $T_0^2$  entspricht der Entwicklung des Nenners in erster Ordnung nach der Temperatur und stellt wegen der geringen Temperaturschwankungen innerhalb der Probe eine geeignete Näherung dar

$$\dot{S} = \frac{1}{T_0^2} \int \kappa_{ij} T_{,i} T_{,j} dV . \quad (\text{D.26})$$

Obige Gleichung beschreibt das zeitliche Anwachsen der Entropie und damit die dem System zugeführte Wärme. Diese Wärme wird der mechanischen Schwingung entnommen und stellt somit gleichzeitig die dissipierte Energie dar. Unter erneuter Benutzung der Näherung homogener Temperatur  $T_0$  im Körper berechnen sich die Energieverluste zu

$$dE_{\text{diss}} = T_0 dS . \quad (\text{D.27})$$

Die Größe der thermoelastischen Verluste  $\phi_{\text{TED}}$  ist laut Definition bis auf einen Vorfaktor als Verhältnis der pro Periode dissipierten Energie  $\Delta E$  zur mechanischen Gesamtenergie  $E_{\text{mech}}$  gegeben

$$\phi_{\text{TED}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{E_{\text{mech}}} . \quad (\text{D.28})$$

An dieser Stelle muß noch die zeitliche Integration von  $dE_{\text{diss}}$  über eine Periodendauer  $\tilde{T}$  der mechanischen Schwingung erfolgen, um  $\Delta E$  zu berechnen

$$\Delta E = \int dE_{\text{diss}} = \int_0^{\tilde{T}} \dot{E}_{\text{diss}} dt = T_0 \int_0^{\tilde{T}} \dot{S} dt . \quad (\text{D.29})$$

Einsetzen von Gl. (D.26) liefert

$$\Delta E = \frac{1}{T_0} \int_0^{\tilde{T}} \int_V \kappa_{ij} T_{,i} T_{,j} dV dt . \quad (\text{D.30})$$

Die Auswertung des Integrals setzt voraus, daß man sich die Struktur von  $T(x, t)$  noch einmal in Erinnerung ruft. Dabei galt  $T(x, t) = \Re[\hat{T}(x) \exp(i\omega t)]$  für den harmonischen Ansatz. Für die Auswertung von Zeitintegralen über harmonische

Größen ist die folgende Grundgleichung nach Brillouin (vgl. [178]) zu empfehlen

$$\int_0^{\tilde{T}} \Re(\hat{a}e^{i\omega t}) \Re(\hat{b}e^{i\omega t}) dt = \frac{\tilde{T}}{2} \Re(\hat{a}\hat{b}^*) . \quad (\text{D.31})$$

Dabei steht das Sternchen \* für die komplexe Konjugation. Die Vertauschbarkeit von Ableitung und Bildung des Realteils ermöglicht die Ausführung des Zeitintegrals über eine Periode  $\tilde{T}$  zu

$$\int_0^{\tilde{T}} T_{,i} T_{,j} dt = \int_0^{\tilde{T}} \Re(\hat{T}_{,i} e^{i\omega t}) \Re(\hat{T}_{,j} e^{i\omega t}) dt = \frac{\tilde{T}}{2} \Re(\hat{T}_{,i} \hat{T}_{,j}^*) . \quad (\text{D.32})$$

Somit folgt für die pro Periode ( $\tilde{T} = 1/f = 2\pi/\omega$ ) dissipierte Energie

$$\Delta E = \frac{\pi}{\omega} \frac{1}{T_0} \int \kappa_{ij} \Re(\hat{T}_{,i} \hat{T}_{,j}^*) dV . \quad (\text{D.33})$$

Wählt man das Koordinatensystem in Hauptachsenlage des Tensors  $\kappa_{ij}$ , besitzt dieser Diagonalgestalt  $\kappa_{ij} = \delta_{ij} \kappa_i$ , und der obige Ausdruck liefert

$$\Delta E = \frac{\pi}{\omega} \frac{1}{T_0} \int \kappa_i \hat{T}_{,i} \hat{T}_{,i}^* dV . \quad (\text{D.34})$$

Unter Kenntnis der Lösung der Wärmeleitungsgleichung erhält man damit eine Vorschrift zur Ermittlung des Energieverlustes. Über die weitere Vorgabe der Dehnung  $\epsilon_{ij}(x)$  bzw. der Spannungen  $\sigma_{ij}(x)$  ist die im Körper gespeicherte mechanische Energie  $E_{\text{mech}}$  zu berechnen. Aus beiden Größen können schließlich die thermoelastischen Verluste berechnet werden. Wie von Bishop und Kinra [178] schon betont wurde, kann über den Ansatz der Entropieerhöhung keine Aussage über die räumliche Verteilung der dissipierten Energie gemacht werden. Die gesamte in der Probe umgewandelte mechanische Energie ist dieser Berechnung jedoch zugänglich.

### D.3.2. Berechnung über thermische Ausdehnung

Die zweite Methode bedingt zunächst die Berechnung des thermischen elastischen Feldes  $\epsilon_{ij}^{\text{th}}$ , welches durch die eintretenden Wärmeströme und das Temperaturfeld  $T(x, t)$  entsteht. Das erwähnte Dehnungsfeld besitzt eine Phasenverschiebung zur eigentlichen Resonanzbewegung des Substrates und verrichtet somit gegen die zur Resonanz gehörenden mechanischen Spannungen Arbeit. Diese Arbeit ist ebenfalls ein Maß für die Dissipation im System. Die thermische Dehnung  $\epsilon_{ij}^{\text{th}}$  (s. Gl. (D.4)) erfolgt spannungsfrei, so daß durch den umgekehrten Prozeß (Arbeit der Resonanz-

verformung gegen thermische Spannungen) keine Energie dissipiert wird. Damit gilt

$$dE = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{\text{th}} \quad (\text{D.35})$$

$$\Rightarrow \Delta E = \int_V \int_0^{\tilde{T}} \sigma_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}^{\text{th}}}{dt} dt dV \quad (\text{D.36})$$

$$= \int_V \int_0^{\tilde{T}} \Re(\hat{\sigma}_{ij} e^{i\omega t}) \frac{d}{dt} \Re[\alpha_{ij}(T - T_0)] dt dV . \quad (\text{D.37})$$

Nach der Vertauschung von Realteilbildung und Zeitableitung und der Ausführung der Ableitung erhält man

$$\Delta E = \int_V \int_0^{\tilde{T}} \Re(\hat{\sigma}_{ij} e^{i\omega t}) \Re(\alpha_{ij} i\omega \hat{T} e^{i\omega t}) dt dV . \quad (\text{D.38})$$

Hier kommt erneut Gl. (D.31) zur Berechnung des Zeitintegrals zum Einsatz

$$\Delta E = \frac{\tilde{T}}{2} \int_V \Re \left[ \hat{\sigma}_{ij} (\alpha_{ij} i\omega \hat{T})^* \right] dV . \quad (\text{D.39})$$

Die willkürliche Wahl des Zeitnullpunktes erlaubt die Wahl der Größe  $\hat{\sigma}_{ij}$  derart, daß sie reell bleibt und somit aus dem Realteil herausgezogen werden kann. Mit  $\omega \tilde{T} = 2\pi$  und Anwendung der Beziehung  $\Re(ix) = -\Im(x)$  ergibt sich letztendlich für den Betrag der dissipierten Energie

$$\Delta E = \pi \int_V \alpha_{ij} \hat{\sigma}_{ij} \Im(\hat{T}) dV . \quad (\text{D.40})$$

Erneut kann auch hier mit Hilfe der gesamten im Körper gespeicherten mechanischen Energie der thermoelastische Verlust  $\phi_{\text{TED}}$  berechnet werden.

# E. Einfaches Modell der Akhieserdämpfung

Dieser Anhang beschäftigt sich mit der Erklärung und Ableitung einer einfachen Theorie zur Dissipation mechanischer Energie über den Prozess der Phonon-Phonon-Wechselwirkung. Als Grundlage dient dabei die Veröffentlichung von Bömmel und Dransfeld [147] aus dem Jahr 1960. In ihr wird die Anwendung der Akhiesertheorie auf ein einfaches System zweier Gruppen von Phononenzweigen angegeben. Dabei soll eine Gruppe einen verschwindend geringen Grüneisenparameter besitzen, während die Vertreter der zweiten Gruppe einen gleich großen Grüneisenparameter  $\gamma \neq 0$  aufweisen sollen. Die in der Veröffentlichung unterdrückte Ableitung eines Ausdruckes für die Energieverluste soll in diesem Kapitel erfolgen.

## E.1. Grundlagen

Auf dem Gebiet der Energieverluste durch Phononenstöße existieren mehrere Theorien. Wesentlich sind dabei die Arbeiten von Landau und Rumer [179] und Akhieser [180]. Diese Autoren beschreiben Konzepte zur Behandlung der Wechselwirkung zwischen den Phononen in unterschiedlichen Grenzfällen. Der folgende Abschnitt soll beide Theorien kurz skizzieren und die mittlere freie Weglänge der Phononen als Kriterium für die Gültigkeit der Theorien beleuchten.

### E.1.1. Mittlere freie Weglänge

Phononen werden üblicherweise als quantisierte Teilchen der Gitterschwingung in einer Kette mit harmonischer nächster-Nachbar-Wechselwirkung eingeführt. In diesem Modell bilden sie sich als unabhängige Eigenschwingungen des Systems. Diese Unabhängigkeit verhindert im Fall eines harmonischen Potentials, d. h. einer linearen Kraft, eine Wechselwirkung zwischen Phononen. Sobald das Potential zwischen den Atomen jedoch eine Abweichung vom idealen quadratischen Verhalten aufweist, sind die ursprünglich unabhängigen Phononen keine Eigenlösungen des Systems mehr.

Folglich kann sich die Frequenz eines angeregten Phonons im realen Kristall mit der Zeit ändern. Formal muß dieser Effekt als Entwicklung der harmonischen Phononen nach den neuen Eigenschwingungen des anharmonischen Kristalls erfolgen. Diese erprobte quantenmechanische Behandlung führt schließlich zu Übergangsmatrizen, die die Wahrscheinlichkeit eines Überganges zwischen zwei Phononen beschreibt. Im Teilchenmodell kann man sich diesen Übergang als Stoß zwischen Phononen vorstellen.

Den entscheidenden Parameter zur Beschreibung der Wechselwirkung von Phononen stellt die mittlere freie Weglänge  $l$  dar. Sie beschreibt die Länge, auf der sich ein Phonon im Mittel ohne Stöße ausbreiten kann. Mit der Phasengeschwindigkeit des Phonons  $c$  ergibt sich eine äquivalente Beschreibung durch die gemittelte Zeit zwischen zwei Stößen  $\tau = l/c$ . Die Transporttheorie verknüpft schließlich die Stoßzeit  $\tau$  mit der Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  der Probe

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho C c^2 \tau . \quad (\text{E.1})$$

Dabei beschreibt  $C$  die spezifische Wärme und  $\rho$  die Dichte des Materials. Für den Wärmewiderstand sind allerdings allein Umklappprozesse<sup>1</sup> verantwortlich. Da jedoch auch Normalprozesse zum Verlust mechanischer Energie beitragen, kann die genannte Formel nur als grobe Abschätzung dienen.

### E.1.2. Theorie nach Landau und Rumer

Landau und Rumer [179] behandeln die mechanischen Energieverluste als Integration über einzelne Stöße mit strenger Energie- und Impulserhaltung. Diese Theorie vernachlässigt damit die auftretende erlaubte Energieunschärfe der Phononen ( $\Delta E \tau \geq \hbar$ ). Demzufolge versagt das Prinzip bei kurzen freien Weglängen. Zusätzlich ist eine Wechselwirkung zwischen zwei Schwingungen nur sinnvoll zu definieren, wenn wenigstens eine Wellenlänge beider Phononen kohärent, d. h. ohne Stoß, durchlaufen wird. Dies ist der Fall für  $\nu \tau \gg 1$ , wobei  $\nu$  die Frequenz der akustischen Schwingung angibt.

---

<sup>1</sup>Bei Umklappprozessen bleibt der Gesamtimpuls der beteiligten Phononen nicht erhalten. Die Impulsbilanz vor und nach dem Stoß unterscheidet sich um einen Gittervektor des inversen Gitters.

### E.1.3. Theorie nach Akhieser

Akhieser [180] behandelt den Energieverlust durch die Wechselwirkung von Phononen im entgegengesetzten Grenzfall  $\nu\tau \ll 1$ . Mit anderen Worten ist die Lebensdauer eines Phonons hier kürzer als die Schwingungsdauer einer akustischen Schwingung. In diesem Grenzfall kann die akustische Welle als konstanter Verformungshintergrund für das Phononenspektrum angesehen werden. Aufgrund der kurzen Phononenlebenszeiten paßt sich das Spektrum nahezu instantan den äußeren Bedingungen an.

Die periodische mechanische Dehnung  $\epsilon$  des Substrates kann in diesem Fall als quasistatisch betrachtet werden. Sie führt zu einer Änderung der zwischenatomaren Potentiale und damit zu einer Änderung der Phononenenergien  $\Delta\omega$  bzw. der Dispersionsrelation. In einer einfachen Theorie wird die Energieänderung mittels Grüneisenparameter  $\gamma$  linear mit der Verformung verknüpft

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \gamma\epsilon. \quad (\text{E.2})$$

Verschiedene Phononenzweige verhalten sich unter einer mechanischen Verformung unterschiedlich. Deshalb wird jedem Zweig ein unterschiedlicher Parameter  $\gamma$  zugewiesen. Allgemein ist auch das Verhalten bezüglich unterschiedlicher Dehnungen  $\epsilon_{ij}$  unterschiedlich, was die Beschreibung durch einen Tensor  $\gamma_{ij}$  mit sich bringt.

Der bosonische Charakter der Gitterschwingungen führt zu einer Besetzung entsprechend der Bose-Einstein-Verteilung. Diese lautet

$$g(\hbar\omega) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}. \quad (\text{E.3})$$

Eine akustische Welle  $\epsilon = \hat{\epsilon} \sin(\omega t)$  führt nun zu einer Energieänderung des Phononenzweiges bei zunächst unveränderter Besetzungszahl. Dies entspricht einer periodischen Auslenkung des Phononensystems aus dem Gleichgewicht. Da die Boseverteilung nur von dem Quotienten aus Energie und Temperatur abhängt, kann dieser Zustand des Nichtgleichgewichts äquivalent als Gleichgewichtszustand mit veränderter Temperatur verstanden werden. Existieren nun mindestens zwei Zweige mit unterschiedlichem Grüneisenparameter, setzt ein Wärmefluß zwischen den beiden Zweigen ein. Dieser findet in Form von Stößen zwischen Phononen unterschiedlicher Zweige statt. Die Entropie des Systems erhöht sich, die mechanische Energie nimmt ab.

## E.2. Analytische Modellierung der Akhieserdämpfung

Im folgenden Abschnitt soll eine detaillierte Herleitung der Gleichung für die durch Phononen verursachten Verluste erfolgen. Dazu wird die Idee von Bömmel und Dransfeld [147] aufgegriffen, das Phononenspektrum auf effektiv zwei Gruppen zu beschränken. Dabei sollen Phononenzweige der ersten Gruppe verschwindende Grüneisenparameter  $\gamma_1 = 0$  besitzen und die der zweiten Gruppe den gleichen und konstanten Wert  $\gamma_2 = \gamma \neq 0$ . Eine weitere wesentliche Forderung ist die Gleichheit der spezifischen Wärme beider Zweige.

Die Rechnung beginnt damit, die zeitliche Temperaturverteilung beider Gruppen zu berechnen. Dies geschieht über die Wärmeleitungsgleichung mit einer empirischen Relaxationszeit  $\tau$ . Anschließend wird unter Kenntnis des Temperaturverhaltens der auftretende Wärmefluß integriert und die damit verbundene Entropieerhöhung berechnet. Abschließend ergibt sich ein Wert für die mechanischen Energieverluste im verformten Festkörper. Ein letzter Teil beschäftigt sich mit der Umrechnung dieser Größe auf die Dämpfung akustischer Wellen, um einen Vergleich mit der früheren Theorie zu ermöglichen.

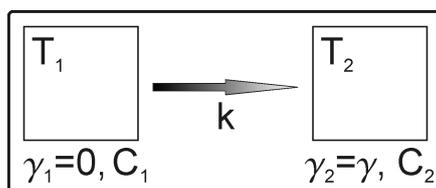
### E.2.1. Harmonisches Temperaturverhalten der Phononenzweige

Der Ausgangspunkt der folgenden Betrachtung findet sich in der Wärmeleitungsgleichung

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{k} = \dot{q}_{\text{erz}} . \quad (\text{E.4})$$

Dabei stellt  $T$  die Temperatur,  $C$  die spezifische Wärmekapazität,  $\rho$  die Dichte,  $\vec{k}$  die Wärmestromdichte und  $\dot{q}_{\text{erz}}$  die Rate der in den Körper eingebrachten Wärme dar. Dieses vereinfachte Modellsystem soll nun aus zwei Phononenzweigen bestehen und kann demzufolge diskretisiert werden. Abb. E.1 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

Die eingebrachte Wärme resultiert aus der Änderung der Phononenenergie durch den Grüneisenparameter. Sie geht mit der spezifischen Wärme jedes einzel-



**Abb. E.1:** Einfaches Modell des Wärmetransportes zwischen zwei Phononenzweigen.

nen Zweiges einher. Eine akustische Welle führt zur Temperaturänderung  $\Delta T_i$  eines Zweiges  $i$  und trägt damit die Energie  $\rho C_i \Delta T_i$  in das Phononensystem ein. Um nun die freigesetzte Wärmeleistung zu berechnen, muß dieser Ausdruck noch abgeleitet werden.

$$\dot{q}_{\text{erz}} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho C_i \Delta T_i) . \quad (\text{E.5})$$

Die Temperaturänderung ist dabei direkt an den Grüneisenparameter gekoppelt. Sie wird so eingeführt, daß nach der Verformung die Phononenverteilung im thermischen Gleichgewicht bleibt. Das bedingt die Konstanz des Faktors  $\hbar\omega/(k_B T)$  unter der Verformung. Diese Forderung wird durch die Gleichung

$$\Delta T_i = \frac{\Delta\omega_i}{\omega} T = \gamma_i \epsilon T \quad (\text{E.6})$$

erfüllt. Obige Überlegung liefert damit einen Ausdruck für den Quellterm in der Wärmeleitungsgleichung.

In einem zweiten Schritt muß der Wärmestrom  $k$  zwischen den beiden Zweigen genauer untersucht werden. Zu diesem Zweck wird ein empirisches Modell verwendet, in dem die Wärmeleitung mit einer gewissen Zeit  $\tau$  geschieht. Dieses Modell orientiert sich an dem Verhalten eines Probekörpers (Temperatur  $T$ ), der in thermischem Kontakt zu einem Wärmebad der Temperatur  $T_0$  steht. Beide Temperaturen sollen sich zur Zeit  $t = 0$  um  $\theta_0 = T - T_0$  unterscheiden. Infolge der Wärmeleitung wird sich die Temperatur des Probekörpers exponentiell der des Wärmebades annähern. Der ganze Prozeß läßt sich formal wie folgt beschreiben

$$C\dot{\theta} + C\frac{\theta}{\tau} = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) , \quad (\text{E.7})$$

wobei  $\theta$  den Temperaturunterschied zwischen Probe und Bad und  $C$  die Wärmekapazität der Probe repräsentiert. Als hilfreich erweist sich die Interpretation der Zeit  $\tau$  als mittlere Zeit, die zum Ausgleich der Energie  $C\theta_0$  nötig ist.

In analoger Weise erfolgt jetzt die Beschreibung des Wärmestromes zwischen den Phononenzweigen. Wärmeaustausch zwischen verschiedenen Zweigen erfolgt im allgemeinen unterschiedlich schnell. Da das vorliegende Modell jedoch nur zwei Zweige berücksichtigt, wird hierzu nur eine Zeitkonstante  $\tau_{12} = \tau$  benötigt. Aus Gl. (E.7)

ergibt sich unter Berücksichtigung der durch die Verformung eingebrachten Wärme

$$C_1 \dot{T}_1 - \frac{C_2 T_2 - C_1 T_1}{\tau} = \frac{\partial}{\partial t} (C_1 \Delta T_1) , \quad (\text{E.8})$$

$$C_2 \dot{T}_2 - \frac{C_1 T_1 - C_2 T_2}{\tau} = \frac{\partial}{\partial t} (C_2 \Delta T_2) . \quad (\text{E.9})$$

Das vorliegende Modell beschränkt sich auf gleiche Wärmekapazitäten  $C_1 = C_2$  und einen verschwindenden Grüneisenparameter für den zweiten Zweig ( $\gamma_2 = 0$ ). Damit ergibt sich nach Gl. (E.6) schließlich

$$\dot{T}_1 - \frac{T_2 - T_1}{\tau} = \frac{\partial}{\partial t} \Delta T_1(t) , \quad (\text{E.10})$$

$$\dot{T}_2 - \frac{T_1 - T_2}{\tau} = 0 . \quad (\text{E.11})$$

An dieser Stelle werden die Gleichungen addiert bzw. subtrahiert und die Größen  $T_1 + T_2$  durch  $x$  und  $T_1 - T_2$  durch  $y$  ersetzt. Am Ende dieser Umformung steht das Gleichungssystem

$$\dot{y} + 2\frac{y}{\tau} = \frac{\partial}{\partial t} \Delta T_1(t) , \quad (\text{E.12})$$

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial t} \Delta T_1(t) . \quad (\text{E.13})$$

In einer ersten Näherung im Sinne der Störungstheorie wird die Rückwirkung des Phononsystems auf die elastische Verformung  $\epsilon$  der Probe vernachlässigt. Demnach wird  $\Delta T_1(t) = \hat{T} \cos(\omega t)$  als harmonische Größe mit konstanter Amplitude  $\hat{T}$  angesetzt. Dieses Vorgehen ist durch die geringe Größe der Energieschwankungen im Phononensystem gerechtfertigt. Als Lösung für  $x$  folgt

$$x = T_1 + T_2 = \hat{T} \cos(\omega t) + T_c \quad (\text{E.14})$$

mit der Integrationskonstanten  $T_c$ . Für die Lösung von  $y$  benutzt man einen komplexen Ansatz für die eingebrachte Temperaturänderung

$$\Delta T_1(t) = \hat{T} \cos(\omega t) = \Re(\hat{T} e^{i\omega t}) . \quad (\text{E.15})$$

Damit ergibt sich Gl. (E.12) zu

$$\dot{y} + 2\frac{y}{\tau} = \Re(i\omega \hat{T} e^{i\omega t}) . \quad (\text{E.16})$$

Mit einem ebenfalls komplexen Ansatz  $y = \Re[\hat{y} \exp(i\omega t)]$  und der Vertauschung von

Ableitung und Realwertbildung folgt

$$\hat{y} = \hat{T} \frac{\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2} (\omega\tau + 2i) , \quad (\text{E.17})$$

$$y = T_1 - T_2 = \Re(\hat{y}e^{i\omega t}) = \hat{T} \frac{\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2} [\omega\tau \cos(\omega t) - 2 \sin(\omega t)] . \quad (\text{E.18})$$

Das Ergebnis für die Temperaturen der einzelnen Phononenzweige erhält man letztendlich aus der Linearkombination der Lösungen für  $x$  und  $y$ .

$$T_{1/2}(t) = \frac{1}{2} [(T_1 + T_2) \pm (T_1 - T_2)] = \frac{1}{2}(x \pm y) , \quad (\text{E.19})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \hat{T} \cos(\omega t) + T_c \pm \hat{T} \frac{\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2} [\omega\tau \cos(\omega t) - 2 \sin(\omega t)] \right\} . \quad (\text{E.20})$$

## E.2.2. Entropiezunahme und Dissipation

Im vorherigen Abschnitt wurde im Rahmen des einfachen Modells zweier Phononenzweige die Temperatur der einzelnen Phononenzweige hergeleitet. Unter dieser Kenntnis sollen jetzt die auftretenden Wärmeströme bilanziert und die resultierenden Energieverluste berechnet werden. Am Anfang steht dabei die Definition der Entropie bzw. ihrer Änderung. So führt ein Wärmetransport der Menge  $\delta Q$  vom Reservoir der Temperatur  $T_1$  zum Reservoir der Temperatur  $T_2$  zu einer Entropieänderung von (s. Abb. E.1)

$$dS = -\frac{\delta Q}{T_1} + \frac{\delta Q}{T_2} . \quad (\text{E.21})$$

Dabei werden thermodynamische Größen wie Entropie und Wärme als Dichten aufgefaßt. Für den gewöhnlichen Fall  $T_1 > T_2$  ergibt sich gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik eine Entropieerhöhung. Im hier gezeigten Fall spielen die Phononenzweige die Rolle der Reservoirs. Da dem zweiten Phononenzweig keine Wärme durch die mechanische Schwingung zugeführt wird ( $\gamma_2 = 0$ ), dient die Energieänderung dieses Zweiges  $\rho C dT_2$  gleichzeitig als Maß für die zwischen den Zweigen ausgetauschte Wärme  $\delta Q$ .<sup>2</sup> Es ergibt sich

$$dS = -\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \rho C dT_2 . \quad (\text{E.22})$$

Für geringe Auslenkungen  $\epsilon$  bleiben auch die Abweichungen der Temperatur vom Mittelwert  $T_0$  sehr gering, so daß eine Berechnung in linearer Näherung angebracht

<sup>2</sup>Im Gegensatz dazu erlaubt die Betrachtung der Temperaturänderung  $dT_1$  keine Aussage über die fließende Wärme und ist für eine Analyse der Entropieänderung ungeeignet.

ist. Dazu entwickelt man die Terme  $T_i(t) = T_0 + \theta_i(t)$  für kleine  $\theta_i$

$$\frac{1}{T_i} = \frac{1}{T_0 + \theta_i} = \frac{1}{T_0 \left(1 + \frac{\theta_i}{T_0}\right)} \approx \frac{1}{T_0} \left(1 - \frac{\theta_i}{T_0}\right) \quad (\text{E.23})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \approx -\frac{\theta_1 - \theta_2}{T_0^2} = \frac{T_2 - T_1}{T_0^2} . \quad (\text{E.24})$$

In Gl. (E.22) eingesetzt liefert dieses Resultat

$$dS = \rho C \frac{T_1 - T_2}{T_0^2} dT_2 . \quad (\text{E.25})$$

Für die Berechnung der mechanischen Verluste interessiert die Entropieerhöhung pro Schwingungsperiode  $\tilde{T} = 2\pi/\omega$  und damit das Integral von  $dS$  über eine Periode. Diese Größe berechnet sich für kleine Temperaturänderungen zu

$$\Delta E = \int T dS \approx T_0 \int dS . \quad (\text{E.26})$$

Dementsprechend muß zur Berechnung des Energieverlustes das anschließende Integral gelöst werden

$$\Delta E = \frac{\rho C}{T_0} \int (T_1 - T_2) dT_2 = \frac{\rho C}{T_0} \int_0^{2\pi} (T_1 - T_2) \frac{d}{d(\omega t)} T_2 d(\omega t) , \quad (\text{E.27})$$

$$= \frac{\rho C}{\omega T_0} \int_0^{2\pi} (T_1 - T_2) \dot{T}_2 d\varphi . \quad (\text{E.28})$$

Unter Zuhilfenahme von Gl. (E.18) und Gl. (E.20) erhält man mit  $\varphi = \omega t$

$$T_2 = a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi , \quad (\text{E.29})$$

$$T_1 - T_2 = a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi \quad (\text{E.30})$$

mit den Koeffizienten

$$a_1 = \frac{\hat{T}}{2} \left(1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{\Omega}\right) , \quad b_1 = \hat{T} \frac{\omega \tau}{\Omega} , \quad (\text{E.31})$$

$$a_2 = \hat{T} \frac{\omega^2 \tau^2}{\Omega} , \quad b_2 = -2\hat{T} \frac{\omega \tau}{\Omega} \quad (\text{E.32})$$

und dem Parameter  $\Omega = 4 + \omega^2 \tau^2$ . Einsetzen in das Integral liefert

$$\int_0^{2\pi} (T_1 - T_2) \dot{T}_2 d\varphi = \int_0^{2\pi} (a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi) (b_1 \omega \cos \varphi - a_1 \omega \sin \varphi) d\varphi . \quad (\text{E.33})$$

Im nächsten Schritt werden alle Terme weggelassen, die unter dem Integral zu null werden. Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} (T_1 - T_2) \dot{T}_2 d\varphi = \omega \int_0^{2\pi} (a_2 b_1 \cos^2 \varphi - a_1 b_2 \sin^2 \varphi) d\varphi \quad (\text{E.34})$$

$$= \pi\omega (a_2 b_1 - a_1 b_2) \quad (\text{E.35})$$

$$= \pi\omega \hat{T}^2 \frac{\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2} . \quad (\text{E.36})$$

Damit folgt für die pro Periode dissipierte Energie

$$\Delta E = \pi\rho C \frac{\hat{T}^2}{T_0} \frac{\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2} . \quad (\text{E.37})$$

Mit der Ersetzung  $\tau = 2\tau'$  ergibt sich die für Verluste typische Debyesche Form

$$\Delta E = \pi\rho C \frac{\hat{T}^2}{T_0} \frac{\omega 2\tau'}{4 + 4\omega^2\tau'^2} = \frac{1}{2} \pi\rho C \frac{\hat{T}^2}{T_0} \frac{\omega\tau'}{1 + \omega^2\tau'^2} . \quad (\text{E.38})$$

Für die Ermittlung der mechanischen Verluste wird jetzt noch ein Wert für die mechanische Energiedichte im Körper  $E_{\text{tot}}$  benötigt. Dieser ergibt sich für den isotropen Fall proportional zum Quadrat der angelegten Dehnung

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} E \hat{\epsilon}^2 . \quad (\text{E.39})$$

Dabei bezeichnet die Größe  $E$  den Elastizitätsmodul des als isotrop angenommenen Festkörpers. Zusammen mit dem Ausdruck  $\gamma\epsilon T_0$  aus Gl. (E.6) für die Größe  $\hat{T}$  ergibt sich

$$\phi_{\text{ph}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{E_{\text{tot}}} = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 \rho C T_0}{E} \frac{\omega\tau'}{1 + \omega^2\tau'^2} . \quad (\text{E.40})$$

Bis auf den Vorfaktor stimmt dieses Ergebnis mit dem Ausdruck von Braginsky [181, Gl. (3.2)] überein.

### E.3. Mechanische Verluste und Schallabsorption

Um das Ergebnis für den mechanischen Verlust mit dem Ausdruck von Bömmel und Dransfeld [147] vergleichen zu können, muß aus dem mechanischen Verlust der Schallabsorptionskoeffizient berechnet werden. Denn genannte Autoren behandeln die Absorption akustischer Wellen beim Durchgang durch ein Medium. Der

wesentliche Parameter ist dabei die Abschwächung  $\alpha$  der Wellenamplitude  $u$ . In Abhängigkeit der zurückgelegten Strecke  $x$  im Medium gilt

$$u(x) = u_0 e^{-\alpha x} . \quad (\text{E.41})$$

Am Beispiel einer longitudinalen Welle soll nachfolgend der Koeffizient  $\alpha$  berechnet werden. Nach [176, §34] gilt für die Auslenkung einer sich in  $x$ -Richtung ausbreitenden longitudinalen Welle

$$u_x = u_0 \cos(kx - \omega t) . \quad (\text{E.42})$$

Zunächst berechnet man die mittlere Gesamtenergiedichte der akustischen Welle, die mit der maximalen kinetischen Energiedichte übereinstimmt, zu

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} = \frac{\rho}{2} \dot{u}|_{\text{max}}^2 = \frac{\rho \omega^2}{2} u_0^2 . \quad (\text{E.43})$$

Die einzige Komponente des Dehnungstensors, die bei der gegebenen Auslenkung nicht verschwindet, ist  $\epsilon_{xx}$ . Für sie gilt

$$\epsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} = -u_0 k \sin(kx - \omega t) . \quad (\text{E.44})$$

Mit der Definition des Grüneisenparameters und Gl. (E.6) folgt für dispersionsfreie Phononen ( $k = \omega/c$ ) mit der Schallgeschwindigkeit  $c$

$$\frac{\hat{T}^2}{T_0^2} = \gamma^2 \epsilon_{xx}^2 = \gamma^2 u_0^2 k^2 = \gamma^2 u_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} . \quad (\text{E.45})$$

Die Berechnung des Absorptionskoeffizienten erfolgt analog zu [176, §34]. Es gilt

$$\dot{E}_{\text{tot}} = \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{dE_{\text{tot}}}{dx} \frac{dx}{dt} = c \frac{dE_{\text{tot}}}{dx} \quad (\text{E.46})$$

Berücksichtigt man an dieser Stelle die quadratische Abhängigkeit der Wellenenergie von der Wellenamplitude  $E_{\text{tot}} \propto u$  ergibt sich<sup>3</sup> über Gl. (E.41)

$$\dot{E}_{\text{tot}} = -2c\alpha E_{\text{tot}} . \quad (\text{E.47})$$

---

<sup>3</sup>in Übereinstimmung mit [176, Gl. (34,3)]

Das Einsetzen von Gl. (E.37), Gl. (E.43) und Gl. (E.45) liefert schließlich

$$\alpha = \frac{\frac{\omega}{2\pi} \Delta E}{2c E_{\text{tot}}} = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 C T_0}{c^3} \frac{\omega^2 \tau}{4 + \omega^2 \tau^2}. \quad (\text{E.48})$$

Bis auf den Vorfaktor entspricht dieser Ausdruck dem Ergebnis der Veröffentlichung von Bömmel und Dransfeld. Eine Umrechnung von  $\alpha$  in die mechanischen Verluste  $\phi$  geschieht wie folgt

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{E_{\text{tot}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{2\pi}{\omega} \dot{E}_{\text{tot}}}{E_{\text{tot}}} = \frac{2c}{\omega} \cdot \alpha. \quad (\text{E.49})$$

Für rein longitudinale Substratmoden<sup>4</sup> und verschwindende Querkontraktion ist die Schallgeschwindigkeit über den Elastizitätsmodul  $E$  und die Dichte  $\rho$  gegeben als

$$c = c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (\text{E.50})$$

woraus unmittelbar

$$\phi = \frac{\gamma^2 \rho C T_0}{E} \frac{\omega \tau}{4 + \omega^2 \tau^2} \quad (\text{E.51})$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus dem vorherigen Abschnitt folgt.

---

<sup>4</sup>Der Begriff longitudinale Mode ist als Überlagerung von Wellen zu verstehen. Er bedeutet, daß die jeweilige Mode allein aus der Überlagerung longitudinaler Wellen konstruiert werden kann und folglich keine transversalen Anteile enthält.

# Literaturverzeichnis Anhang

- [144] O. Burmeister (2005) *Fabry-Perot Resonatoren mit diffraktiven Einkopplern*. Diplomarbeit, Universität Hannover & Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik.
- [145] Y. S. Touloukian (1970) *Thermophysical properties of matter*. IFI/Plenum, New York-Washington.
- [146] J. F. Nye (1985) *Physical Properties of Crystals*. Oxford University Press.
- [147] H. E. Bömmel und K. Dransfeld (1960) *Excitation and Attenuation of Hypersonic Waves in Quartz*. Physical Review **117**(5) 1245–1252.
- [148] R. G. Leisure und F. A. Willis (1997) *Resonant ultrasound spectroscopy*. Journal of Physics: Condensed Matter **9** 6001–6029.
- [149] I. Martin et al. (2008) *Measurements of a low-temperature mechanical dissipation peak in a single layer of Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> doped with TiO<sub>2</sub>*. Classical and Quantum Gravity **25** 055005.
- [150] I. W. Martin, E. Chalkley, R. Nawrodt et al. (2009) *Comparison of the temperature dependence of the mechanical dissipation in thin films of Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> and Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> doped with TiO<sub>2</sub>*. Classical and Quantum Gravity **26** 155012.
- [151] D. G. Cahill und R. O. Pohl (1987) *Thermal conductivity of amorphous solids above the plateau*. Physical Review B **35**(8) 4067–4073.
- [152] S. Hunklinger (2009) *Festkörperphysik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, München.
- [153] F. C. Nix und D. MacNair (1941) *An Interferometric-Dilatometer with Photographic Recording*. Review of Scientific Instruments **12** 66–70.
- [154] R. B. Roberts (1975) *Absolute dilatometry using a polarization interferometer*. Journal of Physics E: Scientific Instruments **8** 600–602.

- [155] D. N. Batchelder und R. O. Simmons (1964) *Lattice Constants and Thermal Expansivities of Silicon and of Calcium Fluoride between 6° and 322° K.* The Journal of Chemical Physics **41**(8) 2324–2329.
- [156] B. J. Frey und D. B. Leviton (2006). *Temperature-dependent refractive index of silicon and germanium.* arXiv:physics/0606168v1 [physics.optics].
- [157] N. Pearlman und P. H. Keesom (1952) *The Atomic Heat of Silicon below 100° K.* Physical Review **88**(2) 398–405.
- [158] P. F. Sullivan und G. Seidel (1968) *Steady-State, ac-Temperature Calorimetry.* Physical Review **173**(3) 679–685.
- [159] S. Rowan, J. Hough und D. R. M. Crooks (2005) *Thermal noise and material issues for gravitational wave detectors.* Physics Letters A **347** 25–32.
- [160] R. Hull, Hg. (1999) *Physical properties of Crystalline Silicon.* INSPEC, The Institution of Electrical Engineers, London.
- [161] H. J. McSkimin (1953) *Measurement of Elastic Constants at Low Temperatures by Means of Ultrasonic Waves—Data for Silicon and Germanium Single Crystals, and for Fused Silica.* Journal of Applied Physics **24**(8) 988–997.
- [162] R. Tarumi, K. Nakamura, H. Ogi und M. Hirao (2007) *Complete set of elastic and piezoelectric coefficients of  $\alpha$ -quartz at low temperatures.* Journal of Applied Physics **102** 113508.
- [163] T. H. K. Barron, J. F. Collins, T. W. Smith und G. K. White (1982) *Thermal expansion, Grüneisen functions and static lattice properties of quartz.* Journal of Physics C: Solid State Physics **15** 4311–4326.
- [164] B. T. Bernstein (1963) *Elastic Constants of Synthetic Sapphire at 27 °C.* Journal of Applied Physics **34**(1) 169–172.
- [165] W. E. Tefft (1966) *Elastic Constants of Synthetic Single Crystal Corundum.* JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards—A. Physics and Chemistry **70A**(4) 277–280.
- [166] L. D. Landau und E. M. Lifschitz (1990) *Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band I: Mechanik.* Akademie-Verlag, Berlin.
- [167] H. Kogelnik und T. Li (1966) *Laser Beams and Resonators.* Applied Optics **5**(10) 1550–1567.

- [168] J. Enderlein und F. Pampaloni (2004) *Unified operator approach for deriving Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian laser modes*. Journal of the Optical Society of America A **21**(8) 1553–1558.
- [169] A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp et al. (1981) *A mode selector to suppress fluctuations in laser beam geometry*. Optica Acta **28**(5) 641–658.
- [170] V. B. Braginsky und S. P. Vyatchanin (2002) *Low quantum noise tranquilizer for Fabry-Perot interferometer*. Physics Letters A **293** 228–234.
- [171] C. Zhao, L. Ju, J. Degallaix, S. Gras und D. G. Blair (2005) *Parametric Instabilities and Their Control in Advanced Interferometer Gravitational-Wave Detectors*. Physical Review Letters **94** 121102.
- [172] Y. Levin (1998) *Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach*. Physical Review D **57**(2) 659–663.
- [173] K. Yamamoto, M. Ando, K. Kawabe und K. Tsubono (2002) *Thermal noise caused by inhomogeneous loss in the mirrors used in the gravitational wave detector*. Physics Letters A **305** 18–25.
- [174] S. Gras, D. G. Blair und L. Ju (2008) *Test mass ring dampers with minimum thermal noise*. Physics Letters A **372** 1348–1356.
- [175] J. Miller, M. Evans, L. Barsotti et al. (2011) *Damping parametric instabilities in future gravitational wave detectors by means of electrostatic actuators*. Physics Letters A **375** 788–794.
- [176] L. D. Landau und E. M. Lifschitz (1991) *Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band VII: Elastizitätstheorie*. Akademie-Verlag, Berlin.
- [177] A. N. Norris und D. M. Photiadis (2004) *Thermoelastic relaxation in elastic structures, with applications to thin plates*. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **58**(1) 143–163.
- [178] J. E. Bishop und V. K. Kinra (1997) *Elastothermodynamic damping in laminated composites*. International Journal of Solids and Structures **34**(9) 1075–1092.
- [179] L. Landau und G. Rumer (1937) *Über Schallabsorption in festen Körpern*. Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion **11** 18–25.

- [180] A. Akhieser (1939) *On the absorption of sound in solids*. Journal of Physics (USSR) **1**(4) 277–287.
- [181] V. B. Braginsky, V. P. Mitrofanov und V. I. Panov (1985) *Systems with Small Dissipation*. The University of Chicago Press, Chicago.

# Danksagung

Es bereitet mir Freude, an dieser Stelle den Personen meinen Dank auszusprechen, die in vielfältiger Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle sei Prof. Dr. Paul Seidel gedankt. Mit der Etablierung und Verlängerung des SFB/TR 7 erlaubte er mir die Erstellung dieser Dissertationsschrift und die Fortführung der in meiner Diplomphase behandelten Arbeiten.

Weiterhin gilt mein Dank Dr. Ronny Nawrodt. Durch seine konstruktive Kritik und seine sympathische und motivierende Art hat er meine Promotionszeit maßgeblich geprägt. Die Zusammenarbeit mit meinem langjährigen Kommilitonen Christian Schwarz erlaubte den reibungslosen Transfer von Meßergebnissen zur Auswertung und theoretischen Interpretation in diese Arbeit. Meine Hochachtung für die feinfühlig Justage der Substrate und seine zahlreichen Ideen zur Weiterentwicklung der Meßapparatur ist ihm gewiß. Beide Personen waren maßgeblich für den Aufbau der experimentellen Anlagen zur Gütemessung verantwortlich. Damit legten sie den Grundstein vorliegender Arbeit. Neben der fachlichen Zusammenarbeit werden mir wohl viele Treffen - darunter das legendäre Bunker kino - in Erinnerung bleiben. Dr. Anja Schröter danke ich für die fachliche Einführung in das Thema mechanischer Verluste im Rahmen meiner Diplomarbeit.

Für die Initiierung und Koordination der Untersuchung zum Khalilietalon danke ich Dr. Stefan Hild und Dr. Kentaro Somiya. Stellvertretend für die angenehme Zusammenarbeit im Rahmen der Rauschabschätzung gilt mein Dank Professor Sergey Vyatchanin. Seine offene Art der Zusammenarbeit auf Augenhöhe erlaubte einen großen Erkenntnisgewinn meinerseits. Im Rahmen der Arbeiten an parametrischen Instabilitäten sei Professor Sergey Strigin Dank ausgesprochen. Für Diskussionen und Ideen zur Modellierung mechanischer Verluste danke ich außerdem Dr. Alexander Grib.

Für wesentliche Impulse und das unbändige Interesse am Thema mechanischer Verluste gilt mein Dank Christoph Heilmann, Gerd Hofmann, Julius Komma und Stefanie Kroker.

Der Bibliothek danke ich für die problemlose Ausleihe von Büchern und die Organisation von Fernleihen. Stellvertretend seien hier Christina Feustel und Margret

Knorr genannt.

Holger Mühlig und Ralf Neubert möchte ich meinen Dank für die Wartung der Rechentechnik während meiner Promotionsphase aussprechen. Auch Sonderwünschen wie dem Einrichten eines SVN-Servers wurde umgehend nachgekommen.

Ebenfalls soll die Leistung der Mitarbeiter im Heliumverflüssiger nicht unerwähnt bleiben. Mit ihrem Einsatz ermöglichten sie erst die kryogenen Messungen mechanischer Verluste. Namentlich seien Tobias Eißmann, Lutz Föllmer und Matthias Thürk genannt.

Neben den fachlichen Randbedingungen erfuhr ich durch die Liebe Andreas den alltäglichen Rückhalt, der zur Anfertigung einer solchen Arbeit ebenfalls notwendig ist. Außerdem trugen meine Eltern und Großeltern mit ihrem uneingeschränkten Zuspruch zum Gelingen dieser Arbeit bei. Letztlich führten auch die entspannenden Momente mit Freunden - besonders erinnere ich mich an die Winterurlaube - sowie der Ausgleich durch das Singen im Chor und die sportliche Betätigung im Basketballverein zum Entstehen dieser Arbeit. Es gibt keinen bessere Familien- und Freundeskreis, als ich ihn habe.

Abschließend sei allen Mitarbeitern im gelben Haus für ihr Interesse und die ehrliche Kameradschaft gedankt. In den unverwechselbaren Weihnachtsfeiern und Institutsausflügen, die einer Etappe der Tour de France in nichts nachstanden, spiegelt sich die offene und fröhliche Stimmung am deutlichsten wider. Abschließend bleibt zu erwähnen, daß mir die zahlreichen Gespräche auch viele Einsichten nicht-wissenschaftlicher Art erlaubten.

# Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Weitere Personen waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder andere Personen) in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die geltende Promotionsordnung der Physikalisch-Astronomischen Fakultät ist mir bekannt.

Ich versichere ehrenwörtlich, daß ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Jena, den 01.06.2012

Daniel Heinert

# Lebenslauf

	<b>Angaben zur Person</b>
Name	Daniel Heinert
Geburtsdatum	04.05.1983
Geburtsort	Jena
Familienstand	ledig
	<b>Berufliche Tätigkeit</b>
30.05.2012	Tag der Disputation
ab 01.01.2012	Wissenschaftlicher Mitarbeiter (Helmholtz-Institut Jena)
31.12.2011	Wissenschaftlicher Mitarbeiter (Friedrich-Schiller-Universität Jena, Institut für Festkörperphysik)
01.01.2008	
	<b>Studium</b>
19.12.2007	Abschluss: Diplomphysiker (Gesamtnote: sehr gut)
01.10.2002	Beginn des Physikstudiums (Friedrich-Schiller-Universität Jena)
	<b>Wehrdienst</b>
31.05.2002	Dienst im 4. Instandsetzungsbataillon 11 (Delmenhorst)
01.09.2001	
	<b>Schulbildung</b>
23.06.2001	Abschluss: Abitur (Note: 1,0)
1993–2001	Carl-Zeiss-Gymnasium Jena
1989–1993	Staatliche Grundschule Camburg

Jena, den 01.06.2012

Daniel Heinert