
Preprint No. M 11/10

**Zur numerischen Approximation von
Einzugsbereichen periodischer
Schwingungen mit Mittelungsmethode
und Poincaré-Methode im ebenen Fall**

Werner Vogt

Mai 2011

Impressum:

Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik

Weimarer Straße 25

98693 Ilmenau

Tel.: +49 3677 69-3621

Fax: +49 3677 69-3270

<http://www.tu-ilmenau.de/math/>

**Zur numerischen Approximation
von Einzugsbereichen
periodischer Schwingungen
mit Mittelungsmethode und
Poincaré-Methode
im ebenen Fall**

Werner Vogt

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Postfach 100565
98684 Ilmenau

17. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Anwendung der Mittelungsmethode	4
2.1	Grundlagen	6
2.2	Approximation der Invarianzkurven	12
2.3	Ein subharmonisch erregter Oszillator von Ch. Hayashi	19
2.4	Der Ferroresonanz-Stabilisator von E. Philippow	24
3	Approximation mittels Poincaré-Methode	27
3.1	Die Poincaré-Abbildung	27
3.2	Sattelpunktbestimmung	30
3.3	Numerische Kurvenverfolgung	32
3.4	Der Fortsetzungs-Algorithmus	39
3.5	Vergleich der Integrationsverfahren	43
4	Anwendungen des Fortsetzungs-Algorithmus	46
4.1	Parametrisch erregte Pendel	46
4.2	Oszillatoren vom Duffing-Typ	47
4.3	Der Ferroresonanz-Stabilisator von E. Philippow	51
5	Schlussfolgerungen	56

Zusammenfassung Der Beitrag stellt zwei wesentliche Verfahren zur numerischen Approximation stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten dynamischer Systeme vor. Während der *analytische Zugang* eine Mittelung der Differenzialgleichungen nach der averaging-Methode vornimmt und ein autonomes System generiert, dessen Gleichgewichtslagen (Fixpunkte) anschließend untersucht werden, wird vermittels der *numerisch gebildeten Poincaré-Abbildung* das gegebene in ein diskretes dynamisches System überführt, für das ebenfalls die Fixpunkte analysiert werden.

Wir beschränken uns auf den ebenen Fall und betrachten periodisch erregte zweidimensionale Systeme, womit die zu approximierenden stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eindimensional sind. Algorithmen werden für beide Zugänge angegeben und auf Oszillatoren vom Duffing-Typ sowie auf die Gleichung 2. Ordnung des Ferroresonanz-Stabilisators von E. Philippow angewandt. Mittels Parametervariationen kann damit die Abhängigkeit der Einzugsbereiche (Bassins) stabiler periodischer Schwingungen für derartige Systeme genauer analysiert werden.

MSC 2010: 37M20, 65P99

Keywords: Numerical approximation of invariant manifolds, averaging method, computational methods for bifurcation problems

1 Einleitung

In zahlreichen Anwendungen der Natur- und Ingenieurwissenschaften treten Schwingungsprobleme mit periodischen Lösungen zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme auf. Wegen der Nichtlinearität der beschreibenden Differenzialgleichungen besitzen derartige Modelle im Allgemeinen mehrere Lösungen, die stabil bzw. instabil sind. Die numerische Approximation derartiger Lösungen und ihre Stabilitätsanalyse stellen damit Grundaufgaben für dynamische Systeme dar und werden in [12] ausführlich behandelt.

Für die globale Analyse eines vorliegenden Modells ist jedoch auch das transiente Verhalten wesentlich, also die Klärung der Frage, gegen welche stabile periodische Lösung sich das System bei Vorgabe eines bestimmten Anfangswertes "einschwingt". Zur Illustration betrachten wir eine periodisch erregte Differenzialgleichung (DGL) 1. Ordnung

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

mit dem in t periodischen Vektorfeld f der Periode $T = 2\pi$. Das System besitze die drei in Abb. 1 dargestellten periodischen Lösungen¹ im zylindrischen Phasenraum $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Während

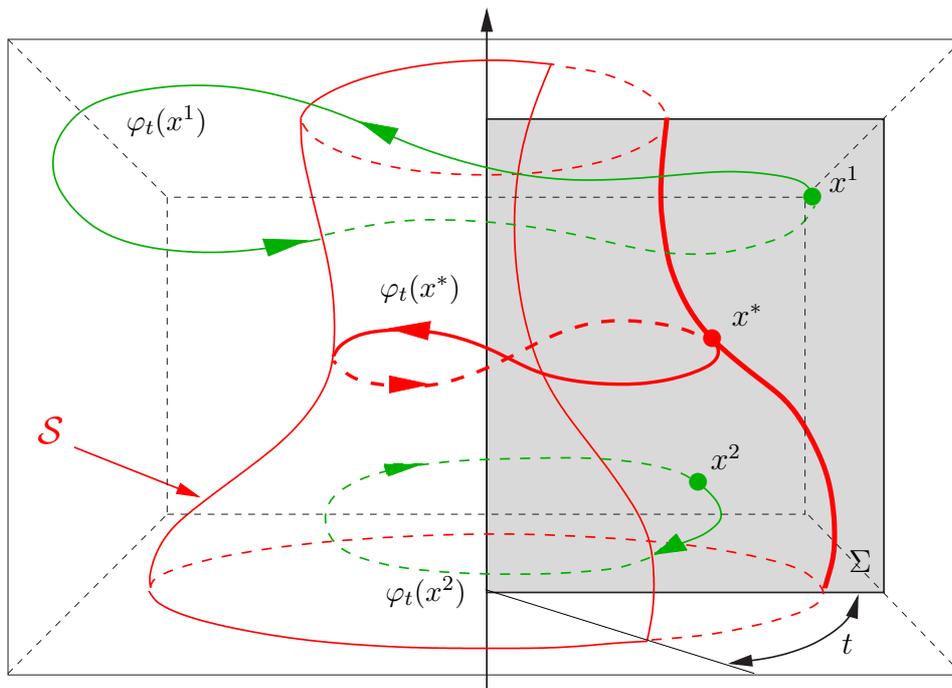


Abbildung 1: Periodische Lösungen und Stroboskop-Abbildung des Systems (1)

die grün eingezeichneten Lösungen $\phi_t(x^1)$ und $\phi_t(x^2)$ stabil vom Fokustyp sind, ist die rot gezeichnete Lösung $\phi_t(x^*)$ instabil vom Satteltyp. Um das skizzierte Problem zu lösen, bei welchen Anfangswerten x^0 ein Einschwingen gegen $\phi_t(x^1)$ bzw. gegen $\phi_t(x^2)$ erfolgt, sind die Einzugsbereiche (Bassins) der beiden stabilen Lösungen zu approximieren. Der Rand dieser Bassins wird durch die stabile Mannigfaltigkeit der sattelartigen Lösung $\phi_t(x^*)$ definiert, die damit auch als Separatrix S dient. Offenbar ist diese in Abb. 1 rot dargestellte glatte Man-

¹Abb. 1 basiert auf einer sehr anschaulichen Darstellung in [1], die für unsere Aufgabe angepasst und erweitert wurde.

Um die aufwändige numerische Integration der DGL samt der nötigen Interpolationen zu vermeiden, ist – zumindest in einer Umgebung der sattelartigen Lösung $\varphi_t(x^*)$ – eine analytische (formelmäßige) Parameterdarstellung der Separatrixfläche S in der Form

$$u = u(s, t), \quad t \in \mathbb{S}^1, \quad s \in (a, b)$$

wünschenswert. Dabei stellt t die Winkelvariable aus Abb. 2 und s einen geeigneten weiteren Flächenparameter dar. Mit $w(s) = u(s, 0)$ läge dann eine Parametrisierung der stabilen Invarianzkurve $W^s(x^*)$ vor. Die *Mittelungsmethode* (*averaging method*) kann als ein Ansatz betrachtet werden, um für DGL in periodischer Standardform

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (2)$$

eine derartige Parametrisierung näherungsweise zu gewinnen. Durch Integration der Funktion f bezüglich t bei festem x und Parameterwert $\varepsilon = 0$ erhalten wir das *gemittelte System*

$$\dot{x} = \varepsilon F(x) \quad \text{mit} \quad F(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t, 0) dt, \quad (3)$$

mit dem das Verhalten des Flusses in der Ebene Σ approximiert werden kann. Numerisch lassen sich damit insbesondere die gesuchten invarianten Mannigfaltigkeiten $W^s(x^*)$ und $W^u(x^*)$ annähern. Die Grundlagen und Voraussetzungen zur Anwendung dieser Methode werden im folgenden Abschnitt 2 vorgestellt.

Am Ende der Arbeit sollen die beiden skizzierten Zugänge, die wir zur besseren Unterscheidung als *Mittelungsmethode* und *Poincaré-Methode* bezeichnen, anhand verschiedener Anwendungsfälle miteinander verglichen werden.

2 Anwendung der Mittelungsmethode

Die Grundideen der Mittelungsmethode für Differenzialgleichungen wurden bereits im 18. Jahrhundert entwickelt, als Mathematiker und Astronomen wie *Laplace* und *Clairaut* die Bewegungen der Planeten und ihrer Monde auf der Basis der Newton'schen Gravitationstheorie berechneten. Ausgehend von Zweikörper-Bewegungen des Systems Sonne - Planet wurde der Einfluss weiterer Planeten bzw. Monde mittels Störungsrechnung berücksichtigt. Besonders *Lagrange*³ war um eine transparente Darstellung dieser Störungsmethode bemüht. 1788 veröffentlichte er seinen später als "Variation der Konstanten" bezeichneten Zugang:

"All approximations suppose (that we know) the exact solution of the proposed equation ... This solution forms the first order approximation and one improves this by taking successively into account the neglected quantities ... To extend this solution to other forces which one can call perturbations, the simplest course is to conserve the form of the first solution while *making variable the arbitrary constants* which it contains ... So we have reduced the problem to finding the equations between these variables." (Zitat aus [17], S.183)

³Joseph Louis Lagrange (1736-1813) vollendete das Gebäude der Newtonschen Mechanik mit seiner analytischen Mechanik. Zahlreiche Arbeiten zur Himmelsmechanik, zur Algebra und zur Zahlentheorie.

Damit erhielt Lagrange die Differenzialgleichungen in den neuen Variablen, die wir nachfolgend als Störungsgleichungen in *Lagrangescher Standardform*

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t) + \varepsilon^2 g(x, t, \varepsilon), \quad x(0) = x_0 \quad (4)$$

bezeichnen. Sodann entwickelte Lagrange die Funktion f (die er mit Ω bezeichnet) in das was wir heute "Fourier-Reihe" nennen:

"To determine the secular variations one has only to substitute for Ω the non-periodic part of this function, i.e. the first term of the expansion of Ω in the sine and cosine series which depend on the motion of the perturbed planet and the perturbing planets ... and the first term which contains no sine or cosine will be the only one which can produce secular equations." (Zitat aus [17], S.183)

Diese Fourier-Entwicklung bezüglich t bei festem x führt also auf die DGL

$$\dot{x} = \varepsilon a_0(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(x) \cos kt + b_k(x) \sin kt] + O(\varepsilon^2),$$

deren erster, zeitunabhängiger Term die sogenannte Säkulargleichung

$$\dot{y} = \varepsilon a_0(y), \quad y(0) = x_0,$$

liefert. Dies ist offenbar die durch Mittelung erster Ordnung nachfolgend erhaltene DGL (7).

Mit dem Aufkommen der Radiotechnik im 20. Jahrhundert entstand die Aufgabe, nichtlineare Schwingungen zu modellieren. 1926 leitete der holländische Physiker *Balthasar van der Pol* die später nach ihm benannte Gleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \quad \text{mit Parameter } 0 < \varepsilon \ll 1$$

her (vgl. dazu [2]). Sie beschreibt mathematisch die Oszillationen eines elektrischen Schwingkreises mit einer Triode⁴. Mit der Transformation

$$x = a \sin(t + \phi), \quad \dot{x} = -a \cos(t + \phi)$$

überführte van der Pol die Originalgleichung mit (x, \dot{x}) -Koordinaten in ein System 1. Ordnung für die Variablen (a, ϕ) und behandelte dieses in der sogenannten Amplitudenebene. Es zeigte sich, dass die Transformation $x = a \sin(t + \phi)$ ein Beispiel für Lagrange's Variation der Konstanten bildet und die entstehende DGL für $a(t)$ nach Weglassen der Terme höherer Ordnung genau die Säkulargleichung für die Amplitude darstellt. Van der Pol konstatiert selbst:

... that the equation "is closely related to some problems which arise in the analytical treatment of the perturbations of planets by other planets." (Zitat aus [17], S.187)

Obwohl im Ingenieurbereich vielfach erfolgreich eingesetzt, war das asymptotische Verhalten der Mittelungsmethode bis dato nicht geklärt. Erst *P. Fatou* lieferte 1928 den ersten Beweis für das $O(\varepsilon)$ -Verhalten auf der Zeitskala $1/\varepsilon$, falls das Vektorfeld f periodisch in t ist (vgl.

⁴Für jüngere Leser: Die Triode war eine Elektronenröhre, die direkte Vorgängerin des Transistors.

dazu nachfolgenden Satz 3). *N.M. Krylov* und *N.N. Bogoljubov* verifizierten 1937 die Methode auch für fast-periodische Vektorfelder; letzterer verallgemeinerte die Resultate auf den allgemeinen Fall, indem lediglich gefordert wird, dass das allgemeine Mittel

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t) dt \quad \text{in der DGL} \quad \dot{x} = \varepsilon f(x, t)$$

existiert. Neben der Theorie wurden von Bogoljubov und *J.A. Mitropolski* in [3] zahlreiche Anwendungen vorgestellt und trugen so wesentlich zur Verbreitung der Mittelungsmethode bei, die deshalb auch oft als Krylov-Bogoljubov-Mitropolski-Methode (KBM-Methode) bezeichnet wird.

Es soll schließlich nicht unerwähnt bleiben, dass die Mittelungsmethode im 20. Jahrhundert sehr erfolgreich in der nichtlinearen Elektrotechnik bei Stabilitäts- und Bifurkationsstudien periodischer Schwingungen eingesetzt wurde. So analysierte *Ch. Hayashi* in der bereits 1964 erschienenen Monografie [6] sowohl autonome als auch periodisch erregte Systeme 2. Ordnung

$$\ddot{x} + x = \varepsilon g(x, \dot{x}) \quad \text{und} \quad \ddot{x} + x = \varepsilon g(x, \dot{x}, t)$$

vom Duffing-Typ auf beispielhafte Weise.

Bei der Darstellung der Grundlagen wollen wir uns nachfolgend auf die Monografien [5], [17] und [22] sowie auf [12], S. 185ff, beziehen.

2.1 Grundlagen

Den Ausgangspunkt der Mittelungsmethode bildet die *Lagrangesche Standardform* für Systeme 1. Ordnung, die wir hier nur für periodisch erregte DGL-Systeme angeben wollen⁵

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Darin sind ε ein kleiner positiver Parameter und f eine 2π -periodische Funktion in t , d.h.

$$f(x, t + 2\pi, \varepsilon) = f(x, t, \varepsilon) \quad \forall (x, t, \varepsilon) \quad \text{mit} \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (6)$$

die als hinreichend glatt vorausgesetzt wird.

Bemerkung 1 Die ebenfalls häufig anzutreffende Darstellung der Lagrangeschen Standardform

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t) + \varepsilon^2 g(x, t, \varepsilon)$$

gewinnt man offenbar aus Gleichung (5), wenn man die Funktion f nach dem Parameter ε an der Stelle 0 entwickelt. Wir wollen nachfolgend jedoch die Form (5) beibehalten. ■

Das *gemittelte System* erhalten wir durch Integration der Funktion f in (5) bezüglich t bei festem z und Parameterwert $\varepsilon = 0$

$$\dot{z} = \varepsilon F(z) \quad \text{mit} \quad F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z, t, 0) dt. \quad (7)$$

⁵Die Darstellung wird dann auch als “periodische Standardform“ bezeichnet.

Zu gegebenen Anfangswerten $x(0) = x_0$ und $z(0) = z_0$ aus einem vorgegebenen Bereich seien Lösungen $x(t)$ des Originalsystems (5) und $z(t)$ des gemittelten Systems (7) für $t > 0$ bestimmbar. Folgende Probleme sind damit von Interesse:

- Wie verhalten sich diese beiden Lösungen $x(t)$ und $z(t)$ zueinander?
- Was lässt sich über die originale Lösung $x(t)$ aussagen, wenn $z(t) = z_0$ eine Gleichgewichtslage des gemittelten Systems ist?
- Wie verhalten sich die stabilen bzw. instabilen invarianten Mannigfaltigkeiten beider Systeme zueinander?

Diese und weitere Fragen sind Gegenstand der Theorie der Mittelung, die u.a. in [17] ausführlich vorgestellt wird. Wir beginnen zur Veranschaulichung des Lösungsverhaltens mit dem einfachen

Beispiel 2 Betrachten wir zu kleinem Parameter $0 < \varepsilon \ll 1$ die skalare DGL

$$\dot{x} = \varepsilon(x - \varepsilon \sin t)(1 - \cos t) + \varepsilon \cos t,$$

so hat sie offenbar die Gestalt (5) mit der hinreichend glatten 2π -periodischen Funktion in t

$$f(x, t, \varepsilon) := (x - \varepsilon \sin t)(1 - \cos t) + \cos t.$$

Zu gegebenem Anfangswert $x(0) = x_0$ bestimmen wir leicht ihre Lösung zu

$$x(t) = x_0 e^{\varepsilon(t - \sin t)} + \varepsilon \sin t.$$

Integration gemäß (7) liefert die Funktion $F(z) = z$ und damit die gemittelte Gleichung

$$\dot{z} = \varepsilon z \quad \text{mit Lösung} \quad z(t) = z_0 e^{\varepsilon t}$$

zum Anfangswert $z(0) = z_0$. Der Vergleich beider Lösungen ergibt mittels Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} x(t) - z(t) &= x_0 e^{\varepsilon t} (1 - \varepsilon \sin t + O(\varepsilon^2)) - z_0 e^{\varepsilon t} + \varepsilon \sin t \\ &= e^{\varepsilon t} (x_0 - z_0) + \varepsilon (1 - x_0) \sin t + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Gilt also für die Anfangswerte $x_0 - z_0 = O(\varepsilon)$, so auch $x(t) - z(t) = O(\varepsilon)$, allerdings wegen des Vorfaktors $e^{\varepsilon t}$ nur auf einer Zeitskala $t \sim 1/\varepsilon$. ■

Das Verhalten der Lösungen dieses Beispiels lässt sich unter den getroffenen Voraussetzungen verallgemeinern und führt auf das bekannte Mittelungs-Theorem, das wir in der Fassung aus [5], S.168, allerdings ohne die erforderlichen umfangreichen Beweise angeben:

Satz 3 (Mittelungs-Theorem) *Das Vektorfeld f sei hinreichend glatt und 2π -periodisch in t . Dann existiert für Parameterwerte $0 < \varepsilon \ll 1$ eine Koordinatentransformation*

$$x = z + \varepsilon w(z, t, \varepsilon) \quad \text{mit } C^r\text{-Funktion } w,$$

bei deren Anwendung das Originalsystem (5) in die DGL

$$\dot{z} = \varepsilon F(z) + \varepsilon^2 F_2(z, t, \varepsilon) \tag{8}$$

mit F aus (7) übergeht. F_2 ist eine hinreichend glatte Funktion, die 2π -periodisch in t ist. Damit sind folgende Beziehungen zwischen originalem und gemitteltem System nachweisbar:

- (i) Sind $x(t)$ und $z(t)$ die Lösungen der DGL (5) bzw. (7) mit den Anfangswerten $x(0) = x_0$ bzw. $z(0) = z_0$, so folgt aus $x_0 - z_0 = O(\varepsilon)$ auch $x(t) - z(t) = O(\varepsilon)$ auf einer Zeitskala $t \sim 1/\varepsilon$.
- (ii) Ist z^* ein hyperbolisches Gleichgewicht⁶ von (7), so existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, mit dem für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ das Originalsystem (5) einen eindeutigen hyperbolischen Orbit $\gamma_\varepsilon = z^* + O(\varepsilon)$ mit demselben Stabilitätstyp wie z^* besitzt.
- (iii) Mit den Resultaten von (ii) gilt weiterhin: $z^s(t) \in W^s(z^*)$ sei eine Lösung des gemittelten Systems (7), die in der stabilen Mannigfaltigkeit von z^* liegt, $x^s(t) \in W^s(\gamma_\varepsilon)$ eine Lösung von (5), die in der stabilen Mannigfaltigkeit des Orbits $\gamma_\varepsilon = z^* + O(\varepsilon)$ liegt. Ist $x^s(0) - z^s(0) = O(\varepsilon)$, so auch $x^s(t) - z^s(t) = O(\varepsilon)$ für $0 \leq t < \infty$.
- (iv) Liegen $z^u(t) \in W^u(z^*)$ und $x^u(t) \in W^u(\gamma_\varepsilon)$ in den jeweiligen instabilen Mannigfaltigkeiten, so folgt aus $x^u(0) - z^u(0) = O(\varepsilon)$ auch $x^u(t) - z^u(t) = O(\varepsilon)$ für $-\infty < t \leq t$.

Die Aussagen (iii) und (iv) lassen sich auch auf kompliziertere hyperbolische Mengen verallgemeinern. Falls das gemittelte System (7) einen hyperbolischen geschlossenen Orbit Γ besitzt, so lässt sich unter geeigneten Voraussetzungen nachweisen, dass das Originalsystem einen hyperbolischen invarianten 2-Torus \mathcal{T}_Γ besitzt (vgl. [5], S.181) besitzt. Wir werden hier allerdings nur die Aussagen dieses Satzes 3 nutzen und verweisen auf [18] und die eingangs genannte Literatur.

Zur Bestimmung und Analyse *periodischer Lösungen* und deren *invarianter Mannigfaltigkeiten* bietet der Übergang zum autonomen gemittelten System mit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ den wesentlichen Vorteil, dass sich nun der Phasenraum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ des Originalsystems (5) auf den \mathbb{R}^n reduziert. Im ebenen Fall mit $n = 2$ werden damit anschauliche Untersuchungen möglich. In den meisten Anwendungen tritt ein kleiner Parameter ε allerdings nicht in der DGL auf, so dass von Systemen

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (9)$$

mit hinreichend glatter Funktion f , die 2π -periodisch in t ist, ausgegangen werden muss. Kann allerdings vorausgesetzt werden, dass $\|f\| \ll 1$ im betrachteten Bereich $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ gilt, so liefert die *formale Mittelung*

$$\dot{z} = F(z) \quad \text{mit} \quad F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z, t) dt \quad (10)$$

trotz nicht erfüllter Voraussetzungen des Satzes 3 dennoch oft gute Näherungen (vgl. [18]).

Bemerkung 4 Dieser im Ingenieurbereich verbreitete Zugang besitzt eine enge Beziehung zur sogenannten *Harmonischen-Balance-Methode* (vgl. [14], [18]), die allerdings nur der Approximation periodischer Lösungen mittels Fourier-Ansatzes dient und nicht mit der Mittelungsmethode verwechselt werden sollte. Mathematisch betrachtet stellt sie ein Galerkin-Verfahren mit trigonometrischen Polynomen als Basisfunktionen dar. Approximieren wir dazu eine gesuchte 2π -periodische Lösung von DGL (1) durch ein reelles Fourier-Polynom

$$x(t) \approx c_0 + \sum_{k=1}^N c_{2k-1} \sin kt + c_{2k} \cos kt \quad \text{mit} \quad c_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2N,$$

⁶Der Punkt z^* mit $F(z^*) = 0$ wird dann auch als Fixpunkt bzw. Ruhelage bezeichnet.

so erhalten wir nach Einsetzen in die DGL

$$\sum_{k=1}^N c_{2k-1} k \cos kt - c_{2k} k \sin kt = f \left(c_0 + \sum_{k=1}^N c_{2k-1} \sin kt + c_{2k} \cos kt, t \right).$$

Entwickeln wir die rechte Seite ebenfalls in eine abgebrochene Fourierreihe

$$f \left(c_0 + \sum_{k=1}^N c_{2k-1} \sin kt + c_{2k} \cos kt, t \right) \approx f_0(c) + \sum_{k=1}^N f_{2k-1}(c) \sin kt + f_{2k}(c) \cos kt$$

mit der Bezeichnung $c = (c_0, c_1, \dots, c_{2N})$, so liefert Einsetzen und Koeffizientenvergleich das bestimmende Gleichungssystem für die Fourierkoeffizienten c_k

$$\begin{aligned} 0 &= f_0(c) \\ -kc_{2k} &= f_{2k-1}(c) \\ -kc_{2k-1} &= f_{2k}(c). \end{aligned} \tag{11}$$

Wenden wir speziell diesen Ansatz in seiner einfachsten Form mit $N = 0$ auf die DGL (9) an, so besteht das System (11) offenbar nur aus der Gleichung

$$0 = f_0(c_0) \quad \text{mit} \quad f_0(c_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c_0, t) dt.$$

Bestimmen wir andererseits die Gleichgewichtslagen des gemittelten Systems (10), so ergibt sich wegen

$$0 = F(z) \quad \text{mit} \quad F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z, t) dt$$

dieselbe Bestimmungsgleichung und liefert in diesem Falle dieselben Approximationen der Gleichgewichtslagen wie die Harmonische-Balance-Methode. ■

Die Gewinnung der Standardform mit einem kleinen Parameter ε ist im konkreten Fall – z.B. bei Vorliegen einer DGL 2. Ordnung – oft nicht einfach und gelingt in vielen Fällen deshalb nicht. Da wir uns nachfolgend auf Modelle konzentrieren, die durch DGL 2. Ordnung beschrieben werden, werden wir eine geeignete Transformation erläutern und an den betrachteten Beispielen ausführen. In jedem Falle ist mit dem Übergang zur Standardform ein gewisser analytischer Aufwand verbunden.

Die bei van der Pol sowie Krylov, Bogoljubov und Mitropolski anzutreffende Vorgehensweise (vgl. dazu [13]) geht im Allgemeinen von einer Schwingungs-DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x} + x = \varepsilon g(x, \dot{x}, t), \quad 0 < \varepsilon \tag{12}$$

aus, die bei kleinem ε einen gestörten harmonischen Oszillator darstellt. Die (nichtlineare) Störungsfunktion g wird als hinreichend glatt und 2π -periodisch in t vorausgesetzt.

Wir überführen mit $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = \dot{x}(t)$ die DGL in ein System 1. Ordnung für 2π -periodische Funktionen $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ mit

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \varepsilon g(y_1, y_2, t), \end{aligned} \tag{13}$$

das allerdings noch nicht die gewünschte periodische Standardform (5) besitzt. Um diese Form zur Anwendung der Mittelungsmethode zu gewinnen, gehen wir von der allgemeinen Lösung des ungestörten harmonischen Oszillators (d.h. mit $g = 0$) aus

$$\begin{aligned}y_1^0(t) &= z_1 \cos t + z_2 \sin t \\y_2^0(t) &= -z_1 \sin t + z_2 \cos t\end{aligned}$$

und ersetzen die Konstanten z_1, z_2 mittels ‘‘Variation der Konstanten‘‘ durch t -abhängige Funktionen $z_1(t)$ und $z_2(t)$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= z_1(t) \cos t + z_2(t) \sin t \\y_2(t) &= -z_1(t) \sin t + z_2(t) \cos t.\end{aligned}\tag{14}$$

Einsetzen dieses Ansatzes in (13) und Umstellung nach den Ableitungen \dot{z}_1, \dot{z}_2 liefert das System

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= -\varepsilon g(y_1(t), y_2(t), t) \sin t \\ \dot{z}_2(t) &= \varepsilon g(y_1(t), y_2(t), t) \cos t\end{aligned}\tag{15}$$

für die beiden Amplitudenfunktionen z_1, z_2 . Setzen wir den Ansatz auch in g ein, so erhalten wir mit der Bezeichnung

$$\psi(z_1, z_2, t) := g(z_1 \cos t + z_2 \sin t, -z_1 \sin t + z_2 \cos t, t)\tag{16}$$

die gewünschte periodische Standardform

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= -\varepsilon \psi(z_1, z_2, t) \sin t \\ \dot{z}_2(t) &= \varepsilon \psi(z_1, z_2, t) \cos t.\end{aligned}\tag{17}$$

Die (numerische) Integration dieses Systems liefert allerdings nicht die gesuchten, sondern die mittels (14) transformierten Lösungen $z_1(t)$ und $z_2(t)$. Wenden wir nun die Stroboskop-Abbildung mit $T = 2\pi$ an, so stimmen zu den Zeitpunkten $2\pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ wegen

$$y_1(2\pi k) = z_1(2\pi k) = x(2\pi k), \quad y_2(2\pi k) = z_2(2\pi k) = \dot{x}(2\pi k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

die erhaltenen mit den gesuchten Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ überein.

Bei formaler Mittelung, d.h. im Falle $\varepsilon = 1$, folgt offenbar aus $|g| \ll 1$, dass dann auch die beiden rechten Seiten von (17) betragsklein sind. Integrieren wir nun diese, so erhalten wir das gemittelte System

$$\dot{z}_1(t) = -\varepsilon F_1(z_1, z_2), \quad \dot{z}_2(t) = \varepsilon F_2(z_1, z_2)\tag{18}$$

mit den Funktionen⁷

$$\begin{aligned}F_1(z_1, z_2) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(z_1, z_2, t) \sin t \, dt \\ F_2(z_1, z_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(z_1, z_2, t) \cos t \, dt.\end{aligned}\tag{19}$$

⁷Hierzu empfiehlt sich die Nutzung eines Computeralgebra-Systems, z.B. Maple.

Beispiel 5 (Periodisch erregter Duffing-Oszillator) Wir betrachten die DGL des periodisch erregten Duffing-Oszillators als Darstellungsbeispiel, an dem wir die Vorgehensweise demonstrieren wollen. Aus den z.T. unterschiedlichen Darstellungen in der Literatur greifen wir (vgl. [5],[6])

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x} + x + \gamma x^3 = B \cos(\eta\tau) \quad (20)$$

mit den festen Parameterwerten $\kappa = 0.05$, $\eta = 1.3$, $B = 1.0$ heraus. Den Parameter $\gamma = 0.005, 0.01, 0.02, 0.05$ für die Nichtlinearität wollen wir bei Bedarf variieren. Gesucht sind periodische Lösungen $x(\tau)$ der Erregungsperiode $T = 2\pi/\eta$.

(1) *Zeittransformation*: Zuerst bietet sich eine Transformation auf das Zeitintervall $[0, 2\pi]$ an, um auf die Standardperiode 2π zu kommen. Mit $t = \eta\tau$ und den Funktionen

$$y_1(t) = x(\tau) \quad \text{und} \quad y_2(t) = \dot{x}(\tau)/\eta$$

erhalten wir das System 1. Ordnung für 2π -periodische Funktionen $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{\kappa}{\eta}y_2 - \frac{1}{\eta^2}y_1 - \frac{\gamma}{\eta^2}y_1^3 + \frac{B}{\eta^2}\cos t, \end{aligned}$$

worin der Punkt nun die Ableitung nach der normierten Zeit t bezeichnet. Mit der Abkürzung

$$\beta = 1 - \frac{1}{\eta^2} = 0.4082840237 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\eta} = \sqrt{1 - \beta}$$

erhält dieses System die für die nachfolgenden Berechnungen geeignete Form (13) mit $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \beta y_1 - \kappa\sqrt{1 - \beta}y_2 - \gamma(1 - \beta)y_1^3 + B(1 - \beta)\cos t. \end{aligned} \quad (21)$$

Sie beschreibt die Grundform des harmonischen Oszillators

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -y_1 \quad (22)$$

mit der additiven nichtlinearen Störung

$$g(y_1, y_2, t) := \beta y_1 - \kappa\sqrt{1 - \beta}y_2 - \gamma(1 - \beta)y_1^3 + B(1 - \beta)\cos t. \quad (23)$$

(2) *Übergang zur Standardform*: Setzen wir den Ansatz (14) in diese Störungsfunktion g ein, so gewinnen wir die Darstellung

$$\psi(z_1, z_2, t) := g(z_1 \cos t + z_2 \sin t, -z_1 \sin t + z_2 \cos t, t) \quad (24)$$

und damit die periodische Standardform

$$\dot{z}_1(t) = -\psi(z_1, z_2, t) \sin t, \quad \dot{z}_2(t) = \psi(z_1, z_2, t) \cos t.$$

(3) *Formale Mittelung*: Das formal gemittelte System erhalten wir schließlich durch Integration der beiden rechten DGL-Seiten

$$F_1(z_1, z_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(z_1, z_2, t) \sin t \, dt, \quad F_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(z_1, z_2, t) \cos t \, dt$$

in folgender Darstellung mit allgemeinen Parameterwerten

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{\kappa}{4\eta}z_1 - \frac{\beta}{4}z_2 + \frac{3\gamma}{16\eta^2}z_2(z_1^2 + z_2^2) \\ \dot{z}_2 &= \frac{\beta}{4}z_1 - \frac{\kappa}{4\eta}z_2 - \frac{3\gamma}{16\eta^2}z_1(z_1^2 + z_2^2) + \frac{B}{4\eta^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Nach Einsetzen der obigen Zahlenwerte für κ , η und B ergibt sich daraus das vom Parameter γ abhängende gemittelte System

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{1}{104}z_1 - \frac{69}{676}z_2 + \frac{75}{676}\gamma z_2(z_1^2 + z_2^2) \\ \dot{z}_2 &= \frac{69}{676}z_1 - \frac{1}{104}z_2 - \frac{75}{676}\gamma z_1(z_1^2 + z_2^2) + \frac{25}{169}. \end{aligned} \quad (26)$$

Wir betrachten das gemittelte System (26) vorerst mit dem festen Parameterwert $\gamma = 0.01$,

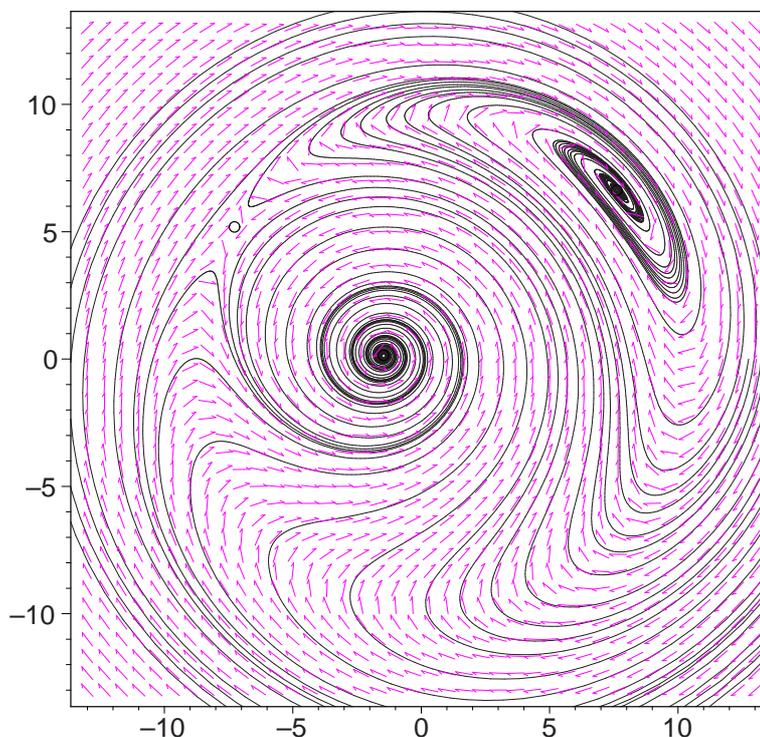


Abbildung 3: Richtungsfeld und Phasenportrait des gemittelten Systems (26)

wofür wir Richtungsfeld und Phasenportrait im Bereich $[-15, 15] \times [-15, 15]$ in Abb. 3 darstellen. Zwei stabile Fokuspunkte und ein Sattelpunkt sind erkennbar. ■

2.2 Approximation der Invarianzkurven

Für das gemittelte System (7) berechnen wir – möglichst sämtliche – Gleichgewichtslösungen z^* , indem wir geeignete nichtlineare Gleichungslöser (vgl. [7], [12]) auf

$$F(z) = 0 \quad (27)$$

anwenden. Um die Einzugsbereiche stabiler Gleichgewichte zu bestimmen, gehen wir von Sattelpunkten z^* aus und ermitteln deren stabile und instabile invariante Mannigfaltigkeiten. Deren Existenz wird gesichert durch (vgl. [15])

Satz 6 (Stable-Manifold-Theorem) *Es sei D eine offene Untermenge des \mathbb{R}^n , die den Ursprung enthält, $F \in C^1(D)$ und φ_t der Fluss des nichtlinearen Systems (7). Es wird angenommen, dass $F(z^*) = 0$ gilt und $D_z F(z^*)$ genau k Eigenwerte mit negativem Realteil und $n - k$ Eigenwerte mit positivem Realteil hat. Dann existiert eine k -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit $W_{loc}^s(z^*)$, tangential zum stabilen Eigenraum E_s im Punkt z^* , so dass $\varphi_t(W_{loc}^s(z^*)) \subset W_{loc}^s(z^*)$ für alle $t \geq 0$ gilt und*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(z) = z^* \quad \text{für alle } z \in W_{loc}^s(z^*) \quad \text{ist.}$$

Weiterhin existiert eine $(n - k)$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit $W_{loc}^u(z^*)$, tangential zum instabilen Eigenraum E_u im Punkt z^* , so dass $\varphi_t(W_{loc}^u(z^*)) \subset W_{loc}^u(z^*)$ für alle $t \leq 0$ gilt und

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(z) = z^* \quad \text{für alle } z \in W_{loc}^u(z^*) \quad \text{ist.}$$

Die Mengen $W_{loc}^s(z^*)$ und $W_{loc}^u(z^*)$ heißen lokale stabile bzw. lokale instabile Mannigfaltigkeit in z^* . Zur Gleichgewichtslage z^* von (7) heißen die Mengen

$$\begin{aligned} W^s(z^*) &:= \{z \in D : \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(z) = z^*\} \\ W^u(z^*) &:= \{z \in D : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(z) = z^*\} \end{aligned} \quad (28)$$

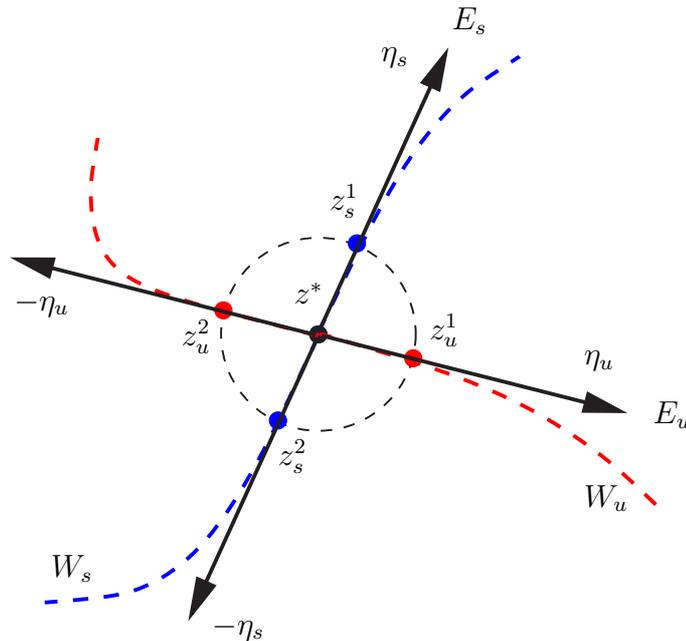
(globale) stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit des Systems (7) in z^* . Ist z^* ein hyperbolisches Gleichgewicht, so lassen sich die (globalen) invarianten Mannigfaltigkeiten (28) in der Form

$$\begin{aligned} W^s(z^*) &= \bigcup_{t \geq 0} \varphi_{-t}(W_{loc}^s(z^*)) \\ W^u(z^*) &= \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(W_{loc}^u(z^*)) \end{aligned} \quad (29)$$

darstellen. Offenbar ist $W_{loc}^s(z^*) \subseteq W^s(z^*)$ und $W_{loc}^u(z^*) \subseteq W^u(z^*)$. Die Mannigfaltigkeiten $W^s(z^*)$ und $W^u(z^*)$ sind invariant unter φ_t . Im betrachteten ebenen Fall mit $n = 2$ und $k = 1$ sind beide Mannigfaltigkeiten eindimensional, weshalb wir sie desweiteren als *Invarianzkurven* $W^s(z^*)$ und $W^u(z^*)$ bezeichnen wollen.

Wir untersuchen zuerst die erhaltenen Fixpunkte des gemittelten Systems auf ihr Stabilitätsverhalten. Die beiden Eigenwerte λ_s, λ_u der Jacobimatrix $D_z F(z) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_k} \right)$ eines Sattelpunktes z^* sind reell mit $\lambda_s < 0 < \lambda_u$. Mit Hilfe der zugehörigen normierten Eigenvektoren η_s und η_u ermitteln wir leicht die eindimensionalen invarianten Unterräume E_u und E_s . In Abb. 4 sind die Invarianzkurven $W^u(z^*)$ (rot) und $W^s(z^*)$ (blau) zusammen mit den invarianten Unterräumen E_u und E_s dargestellt. Um $W^u(z^*)$ zu approximieren, bestimmen wir zwei geeignete Startpunkte

$$z_u^1 := z^* + \delta \eta_u \quad \text{und} \quad z_u^2 := z^* - \delta \eta_u, \quad (30)$$

Abbildung 4: Normierte Eigenvektoren und Startpunkte $z_u^1, z_u^2, z_s^1, z_s^2$

die in E_u nahe z^* liegen und in Abb. 4 rot dargestellt sind. Dabei ist $0 < \delta \ll 1$ hinreichend klein zu wählen, um den Anfangsfehler der Kurven-Approximation zu minimieren.⁸ Mit diesen Anfangswerten integrieren wir die gemittelten Gleichungen (7) in positive Zeitrichtung, d.h.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F(z), \quad z(0) = z_u^1 && \text{liefert die Teilkurve } W_1^u, \\ \dot{z} &= F(z), \quad z(0) = z_u^2 && \text{liefert die Teilkurve } W_2^u. \end{aligned}$$

Diese Integration kann mit einem adaptiven Ein- oder Mehrschrittverfahren (vgl. [8]) bis auf eine gewünschte Genauigkeit durchgeführt werden und sollte in einem interaktiv zu ermittelnden Zeitintervall $[0, t_{end}]$ erfolgen.

Um die stabile Invarianzkurve $W_s(z^*)$ zu ermitteln, sind geeignete Startpunkte z_s^1 und z_s^2 im stabilen Unterraum E_s zu bestimmen. Wir wählen die in Abb. 4 blau dargestellten Punkte

$$z_s^1 := z^* + \delta \eta_s \quad \text{und} \quad z_s^2 := z^* - \delta \eta_s$$

mit dem bereits eingeführten $\delta > 0$. Die gemittelten Gleichungen müssen nun in negative Zeitrichtung integriert werden. Mittels t -Substitution ergeben sich negierte rechte Seiten, d.h.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -F(z), \quad z(0) = z_s^1 && \text{liefert die Teilkurve } W_s^1, \\ \dot{z} &= -F(z), \quad z(0) = z_s^2 && \text{liefert die Teilkurve } W_s^2. \end{aligned}$$

Zur numerischen Integration darf nun t_{end} nicht zu groß gewählt werden, denn – anders als bei den instabilen Mannigfaltigkeiten – konvergieren diese Kurven nicht im Endlichen, so dass bei der Wahl der Zeitintervalle sorgfältig vorgegangen werden muss.

⁸ δ sollte andererseits wesentlich größer als die Integrationsgenauigkeit des DGL-Lösers sein!

Beispiel 7 (Periodisch erregter Duffing-Oszillator) Wir setzen nun die Untersuchung des periodisch erregten Duffing-Oszillators fort, für den wir die gemittelten DGL

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{1}{104}z_1 - \frac{69}{676}z_2 + \frac{75}{676}\gamma z_2(z_1^2 + z_2^2) \\ \dot{z}_2 &= \frac{69}{676}z_1 - \frac{1}{104}z_2 - \frac{75}{676}\gamma z_1(z_1^2 + z_2^2) + \frac{25}{169} \end{aligned} \quad (31)$$

erhalten hatten.

(4) *Bestimmung der Fixpunkte:* Bei (vorerst) festem Parameterwert $\gamma = 0.01$ erhalten wir leicht die drei Gleichgewichtslagen

$$\begin{aligned} z^P &= (-1.470812523, 0.1419230561), \\ z^Q &= (7.618259242, 6.627543037), \\ z^* &= (-7.274113385, 5.190533899). \end{aligned}$$

Während in Abb. 3 die Punkte z^P und z^Q als stabile Foci auszumachen sind, kann der sattelartige Gleichgewichtspunkt z^* kaum erkannt werden. Die Farbdarstellung in Abb. 5 zeigt den Verlauf einzelner Orbits besser als in Abb. 3 an.

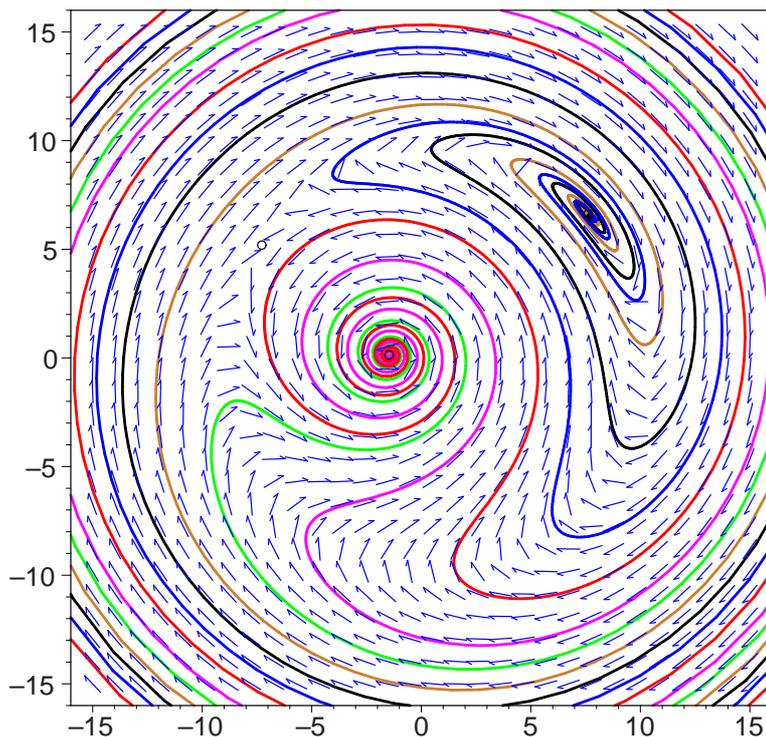


Abbildung 5: Richtungsfeld und Phasenportrait in (z_1, z_2) -Koordinaten

(5) *Analyse der Fixpunkte:* Wir untersuchen nun die drei Fixpunkte des gemittelten Systems auf ihr Stabilitätsverhalten. Die Eigenwerte der Jacobimatrix $D_z F(z)$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^P &= -0.009615384616 \pm 0.09719593020i && \text{für den Fokus } z^P \\ \lambda_{1,2}^Q &= -0.009615384600 \pm 0.05121344621i && \text{für den Fokus } z^Q \\ \lambda_{u,s}^* &= (0.03735385407, -0.05658462329) && \text{für den Sattel } z^*. \end{aligned}$$

Für den Sattelpunkt $z^* = (-7.274113385, 5.190533899)$ ermitteln wir leicht die eindimensionalen invarianten Unterräume E_u und E_s , die durch die normierten Eigenvektoren

$$\begin{aligned} \eta_u &= (-0.3338458419, -0.9426276855) && \text{für den instabilen Unterraum } E_u \\ \eta_s &= (-0.7828046048, -0.6222675877) && \text{für den stabilen Unterraum } E_s \end{aligned}$$

aufgespannt werden.

(6) *Approximation der instabilen Mannigfaltigkeit:* Wir bestimmen zuerst die in E_u liegenden Startpunkte z_u^1 und z_u^2 . Mit der Wahl $\delta = 0.1$ lauten die konkreten Zahlenwerte

$$z_u^1 := (-7.307497969, 5.096271130) \quad \text{und} \quad z_u^2 := (-7.240728801, 5.284796668).$$

Mit diesen Anfangswerten integrieren wir die gemittelten Gleichungen in positive Zeitrichtung. Benutzt wurde dazu der Maple-Standardlöser `rkf45` mit dem Zeitintervall $0 \leq t \leq 500$. In Abb. 6 werden beide Teilkurven in roter Farbe dargestellt.

(7) *Approximation der stabilen Mannigfaltigkeit:* Um $W_s(z^*)$ zu ermitteln, sind geeignete Startpunkte z_s^1 und z_s^2 im stabilen Unterraum E_s zu bestimmen. Wir ermitteln ebenfalls mit

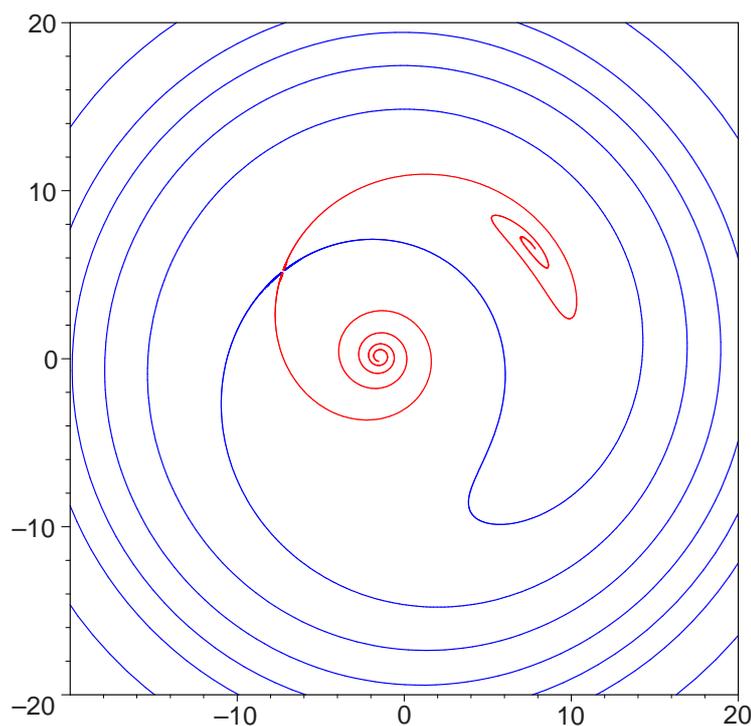


Abbildung 6: Invarianzkurven des gemittelten Duffing-Systems mit $\gamma = 0.01$

$\delta = 0.1$ die Zahlenwerte

$$z_u^1 := (-7.352393845, 5.128307140) \quad \text{und} \quad z_u^2 := (-7.195832925, 5.252760658)$$

und integrieren die gemittelten Gleichungen in negative Zeitrichtung bzw. mittels Substitution $t \rightarrow -t$ im Intervall $0 \leq t \leq t_{end}$. Hier wurde das Zeitintervall $0 \leq t \leq 150$ im ersten Fall und $0 \leq t \leq 200$ im zweiten Fall für den Maple-Standardlöser `rkf45` benutzt. Beide Teilkurven wurden in Abb. 6 blau gezeichnet. ■

Algorithmus 8 (Invarianzkurven-Approximation)

Function $[z^*, W_1^u, W_2^u, W_1^s, W_2^s] = \text{kurvenapprox}(DGL, tol_1, tol_2, \delta)$

1. Zeittransformation (optional):
Transformation auf $[0, 2\pi]$ mit $t = \eta\tau$ liefert die Störungsfunktion g aus (12).
2. Übergang zur Standardform:
Bestimmung von ψ gemäß (16) liefert die periodische Standardform (17).
3. Mittelung der rechten DGL-Seiten:
Integration der rechten DGL-Seiten von (18) liefert die Funktion F . Deren Jacobimatrix $D_z F$ ist analytisch zu bestimmen.
4. Bestimmung der Fixpunkte (Gleichgewichtslagen):
Bestimmung der Punkte z^* mit $F(z^*) = 0$ mit numerischem Gleichungslöser bis auf Genauigkeit tol_1 .
5. Analyse der Fixpunkte:
Für jeden Fixpunkt numerische Bestimmung der Eigenwerte λ_u und λ_s und der normierten Eigenvektoren η_u und η_s von $D_z F(z^*)$. Falls $\lambda_u, \lambda_s \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_s < 0 < \lambda_u$, so z^* Sattelpunkt und Fortsetzung mit Schritt 6.
6. Approximation der instabilen Mannigfaltigkeit:
Bestimmung der Startpunkte $z_u^1 := z^* + \delta\eta_u$ und $z_u^2 := z^* - \delta\eta_u$. Integration der gemittelten Gleichungen im Zeitintervall $[0, t_{end1}]$ bis auf Genauigkeit tol_2 :

$$\dot{z} = F(z), \quad z(0) = z_u^1 \quad \text{liefert die Teilkurve } W_1^u,$$

$$\dot{z} = F(z), \quad z(0) = z_u^2 \quad \text{liefert die Teilkurve } W_2^u.$$
 Grafische Darstellung von z^*, W_1^u, W_2^u .
7. Approximation der stabilen Mannigfaltigkeit:
Bestimmung der Startpunkte $z_s^1 := z^* + \delta\eta_s$ und $z_s^2 := z^* - \delta\eta_s$. Integration der transformierten gemittelten Gleichungen im Zeitintervall $[0, t_{end2}]$ bis auf Genauigkeit tol_2 :

$$\dot{z} = -F(z), \quad z(0) = z_s^1 \quad \text{liefert die Teilkurve } W_1^s,$$

$$\dot{z} = -F(z), \quad z(0) = z_s^2 \quad \text{liefert die Teilkurve } W_2^s.$$
 Grafische Darstellung von z^*, W_1^s, W_2^s .

Die für die Duffing-Gleichung angegebenen 7 Schritte zur Approximation der Invarianzkurven des gemittelten Systems sind auch in anderen Fällen typisch und werden deshalb in Algorithmus 8 überblicksmäßig zusammengefasst. Das Verfahren wurde in MAPLE 8 implementiert und an die jeweiligen Anwendungen angepasst. Es kombiniert die rein analytischen (symbolischen) Schritte 1–3 mit den (in der Regel) numerischen Verfahrensschritten 4–7.

Beispiel 9 (Periodisch erregter Duffing-Oszillator) Mit dem vorgestellten Verfahren können nun leicht Parameterstudien durchgeführt werden. Wir variieren den Parameter

$\gamma = 0.005, 0.01, 0.02, 0.05$ für die Nichtlinearität in der Duffing-Gleichung (20). Die entsprechenden Abbildungen 7 und 8 zeigen die Invarianzkurven und damit die Veränderung der Einzugsbereiche der beiden stabilen Gleichgewichtspunkte. Für kleinen Parameterwert γ besitzt der Fokus z^P einen wesentlich größeren Einzugsbereich als z^Q . Bei Vergrößerung von γ kehren sich die Verhältnisse um, so dass schließlich der Einzugsbereich von z^P verschwindend klein wird. Entsprechende Variationen anderer Parameter werden dem Leser überlassen. ■

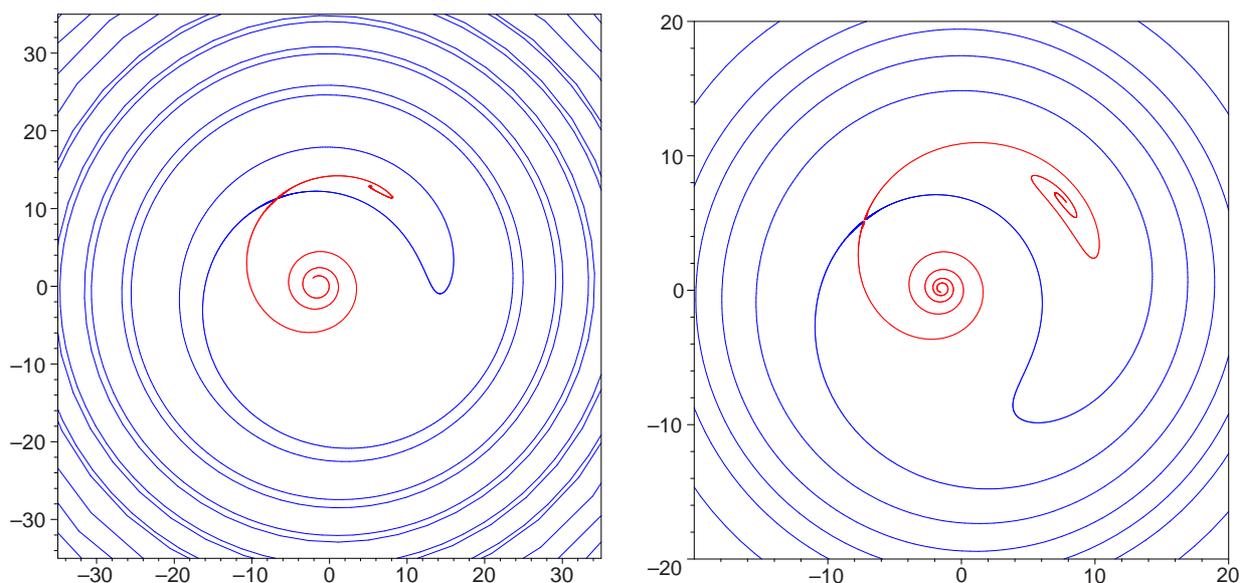


Abbildung 7: Invarianzkurven des gemittelten Duffing-Systems mit $\gamma = 0.005$ (links) und $\gamma = 0.01$ (rechts)

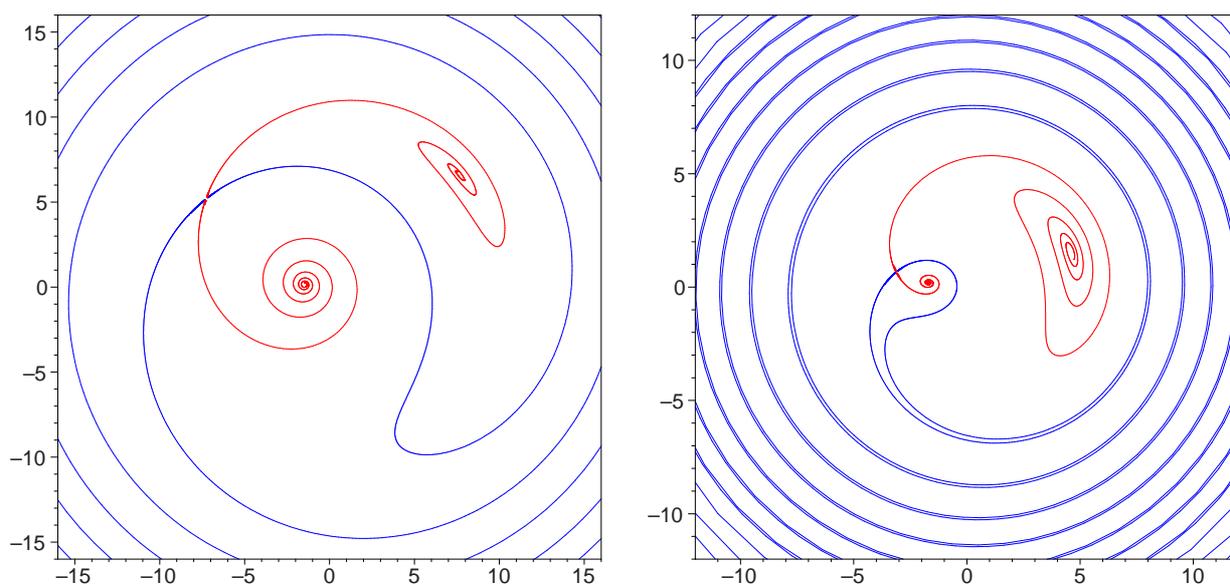


Abbildung 8: Invarianzkurven des gemittelten Duffing-Systems mit $\gamma = 0.02$ (links) und $\gamma = 0.05$ (rechts)

2.3 Ein subharmonisch erregter Oszillator von Ch. Hayashi

Wir betrachten nun den subharmonisch erregten Oszillator vom Duffing-Typ

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x} + x^3 = B \cos(3t) \quad (32)$$

mit den Parameterwerten $\kappa = 0.2$ und $B = 3.2$, der in [6] behandelt wird. Gesucht sind periodische Lösungen $x(t)$ der Periode $T = 2\pi$, die als dreifach subharmonisch bezeichnet werden. Eine Zeittransformation auf $[0, 2\pi]$ ist hier nicht erforderlich. Um auf die Standardform zu kommen, notieren wir die DGL mit $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ als System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \kappa x_2 + x_1^3 + B \cos(3t). \end{aligned} \quad (33)$$

Die allgemeine Lösung des harmonischen Oszillators mit periodischer Inhomogenität

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + B \cos(3t) \end{aligned} \quad (34)$$

lässt sich leicht mit den beliebigen reellen Konstanten z_1 und z_2 zu

$$\begin{aligned} x_1^0(t) &= z_1 \cos t + z_2 \sin t + w \cos(3t) \\ x_2^0(t) &= -z_1 \sin t + z_2 \cos t - 3w \sin(3t) \end{aligned} \quad (35)$$

ermitteln, wobei wir mit dem speziellen Ansatz

$$x_1^{inh}(t) = w \cos(3t), \quad x_2^{inh}(t) = -3w \sin(3t)$$

für die inhomogene DGL die Konstante $w = -B/8$ erhalten.

Nun verfahren wir wie im ersten Beispiel, indem wir die Konstanten z_1, z_2 als t -abhängige Funktionen $z_1(t)$ und $z_2(t)$ einführen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z_1(t) \cos t + z_2(t) \sin t + w \cos(3t) \\ x_2(t) &= -z_1(t) \sin t + z_2(t) \cos t - 3w \sin(3t), \end{aligned} \quad (36)$$

diesen Ansatz in (33) einsetzen und nach den Ableitungen \dot{z}_1, \dot{z}_2 der Amplitudenfunktionen z_1, z_2 umstellen:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -\psi(x(t), t) \sin t \\ \dot{z}_2(t) &= \psi(x(t), t) \cos t. \end{aligned} \quad (37)$$

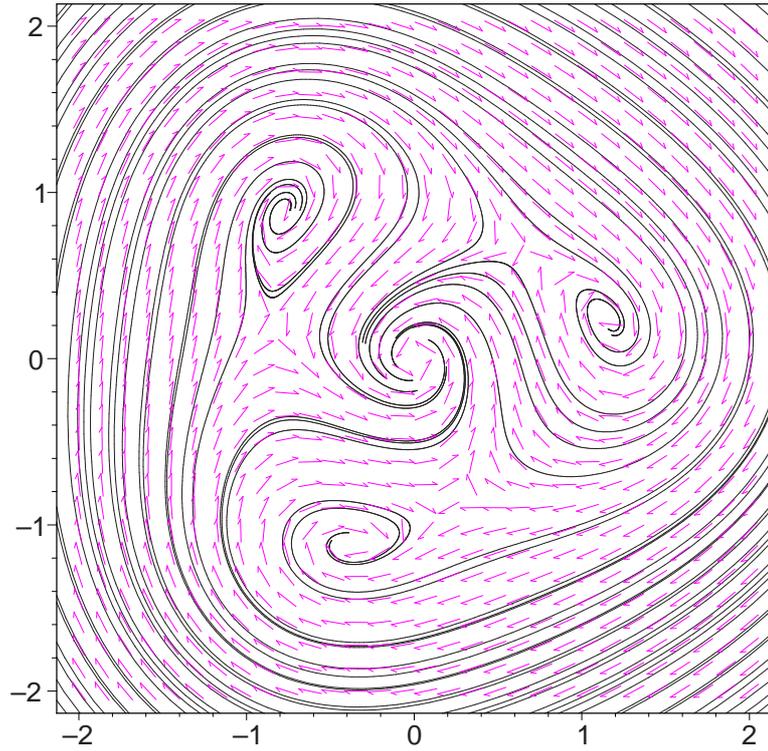
Darin ist

$$\psi(x, t) := -\kappa x_2 + x_1 - x_1^3 + B \cos(3t), \quad x = (x_1, x_2), \quad (38)$$

womit wir die gewünschte *Lagrangesche Standardform*

$$\dot{z} = f(z, t) \quad \text{mit} \quad z := (z_1, z_2) \quad \text{und} \quad f(z, t) := \begin{pmatrix} -\psi(x, t) \sin t \\ \psi(x, t) \cos t \end{pmatrix} \quad (39)$$

erhalten haben.

Abbildung 9: Richtungsfeld und Phasenportrait in (z_1, z_2) -Koordinaten

Das *formal gemittelte System* $\dot{z} = F(z)$ gewinnen wir wiederum mittels Integration der rechten DGL-Seiten

$$F_j(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(z, t) dt, \quad j = 1, 2, \quad (40)$$

allerdings nun in der etwas aufwändigeren Form

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{1}{4}\kappa z_1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{512}B^2\right) z_2 + \frac{3}{16}z_2(z_1^2 + z_2^2) + \frac{3}{128}B \cdot 2z_1z_2 \\ \dot{z}_2 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{512}B^2\right) z_1 - \frac{1}{4}\kappa z_2 - \frac{3}{16}z_1(z_1^2 + z_2^2) + \frac{3}{128}B(z_1^2 - z_2^2). \end{aligned} \quad (41)$$

Mit den gegebenen Parameterwerten $\kappa = 0.2$ und $B = 3.2$ erhalten wir die 7 Gleichgewichtslagen (Fixpunkte) des autonomen Systems mit den Eigenwerten der Jacobimatrix $D_z F(z)$

$$\begin{aligned} z^1 &= (0, 0) & \text{mit } \lambda_{1,2}^1 &= -0.050000 \pm 0.190000i, \\ z^2 &= (-0.3780161260, -1.123638052) & \text{mit } \lambda_{1,2}^2 &= -0.050000 \pm 0.300056i, \\ z^3 &= (0.2090249060, -0.8587878615) & \text{mit } \lambda_{1,2}^3 &= (-0.282237, 0.182237), \\ z^4 &= (1.162107161, 0.2344474580) & \text{mit } \lambda_{1,2}^4 &= -0.050000 \pm 0.300056i, \\ z^5 &= (-0.8482445575, 0.2483730521) & \text{mit } \lambda_{1,2}^5 &= (-0.282237, 0.182237), \\ z^6 &= (0.6392196515, 0.6104148094) & \text{mit } \lambda_{1,2}^6 &= (-0.282237, 0.182237), \\ z^7 &= (-0.7840910350, 0.8891905944) & \text{mit } \lambda_{1,2}^7 &= -0.050000 \pm 0.300056i. \end{aligned}$$

Das Richtungsfeld und ausgewählte Orbits werden in Abb. 9 und Abb. 10 im Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$ dargestellt. Senken vom Fokustyp sind offenbar die Punkte z^1, z^2, z^4, z^7 ,

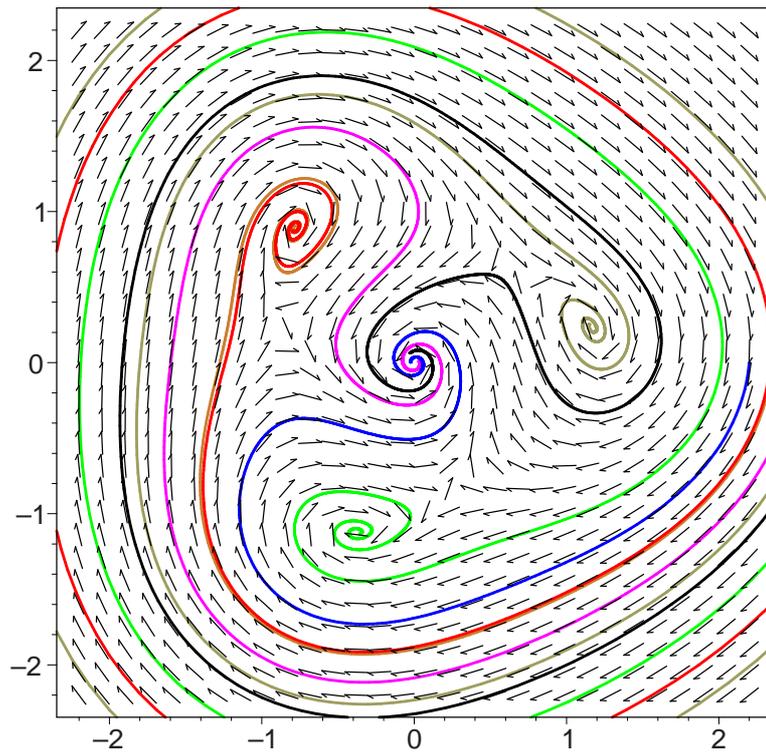


Abbildung 10: Richtungsfeld und Phasenportrait in (z_1, z_2) -Koordinaten; die Farbdarstellung zeigt den Verlauf einzelner Orbits besser an

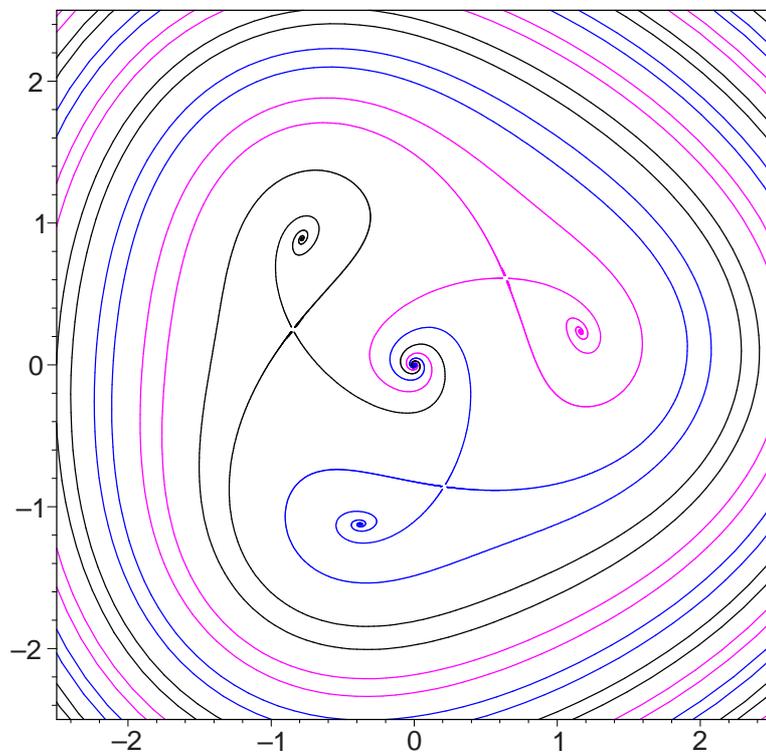


Abbildung 11: Invarianzkurven des gemittelten Duffing-Oszillators 2 mit $\kappa = 0.2$ und $B = 3.2$

während z^3, z^5, z^6 sattelartig sind. Zu jedem der 3 Sattelpunkte z^i , $i = 3, 5, 6$, ermitteln wir die normierten Eigenvektoren η_u^i für den instabilen Unterraum und η_s^i für den stabilen Unterraum. Damit lassen sich mit Algorithmus 8 die instabilen Mannigfaltigkeiten W_u^i und die stabilen Mannigfaltigkeiten W_s^i bestimmen. In Abb. 11 werden diese Invarianzkurven für den Sattel z^3 in Blau, für z^5 in Schwarz und für z^6 in Magenta dargestellt. Die Einzugsbereiche der stabilen Fokuspunkte z_2, z_4, z_7 lassen sich damit leicht nach außen verfolgen, während $z_1 = (0, 0)$ diese streifenartigen Bereiche voneinander trennt.

Für diese Anwendung stellen wir vergleichsweise die in Abschnitt 4.2 mit der Poincaré-Methode erzeugte Darstellung (vgl. Abb. 12) dar. Hier lässt sich eine qualitative Überein-

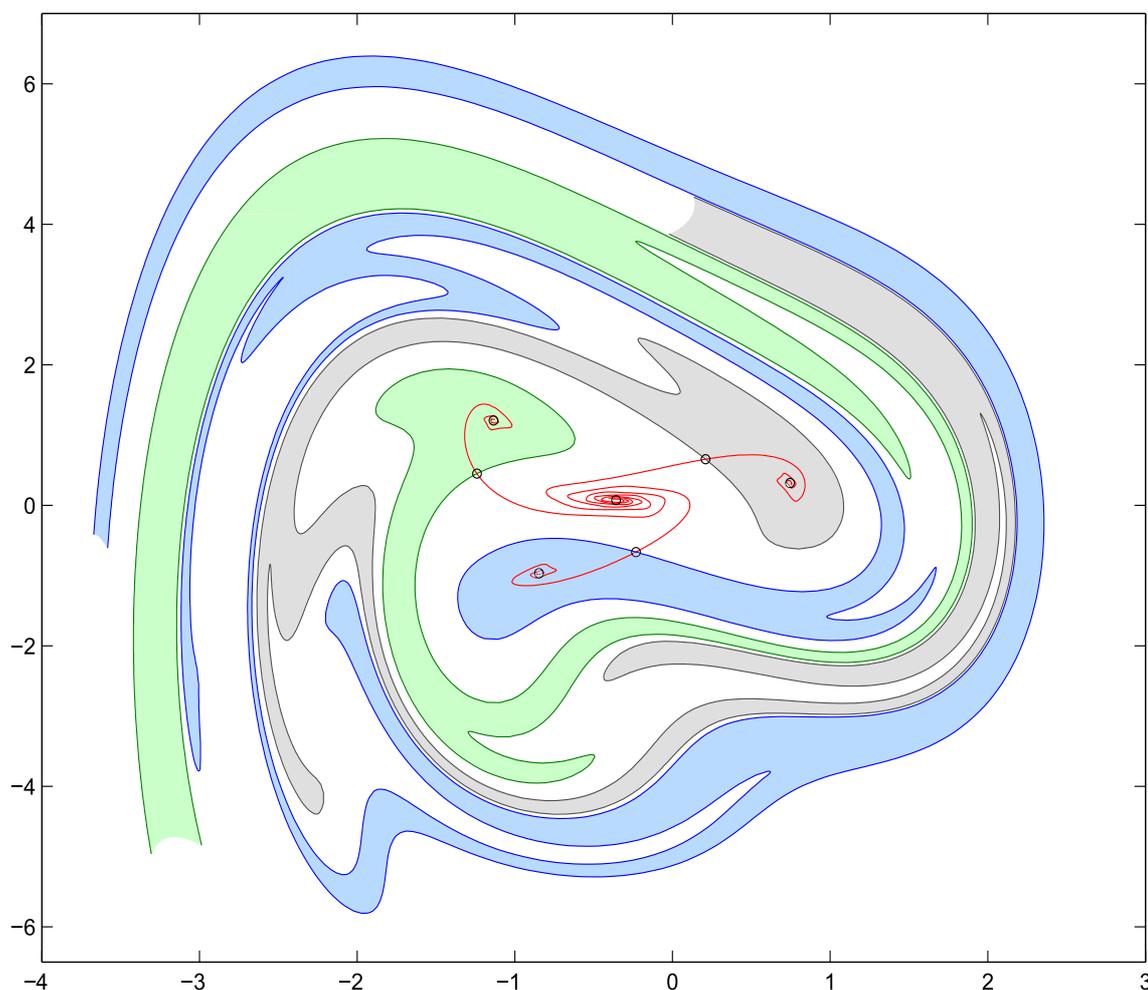


Abbildung 12: Stroboskop-Abbildung des Duffing-Systems 2 mit $\kappa = 0.2$ und $B = 3.2$; die Einzugsbereiche wurden schraffiert

stimmung im zentralen Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$ erkennen, wobei die wirklichen Einzugsbereiche nun offenbar wesentlich komplizierter strukturiert sind.

Variiert man den Parameter κ , so liefert unsere Methode für festes $B = 3.2$ die Abbildungen 13 und 14, die eine Vergrößerung der Einzugsbereiche der drei stabilen Fokuspunkte z_2, z_4, z_7 bei abnehmendem κ erkennen lassen. Auch hier sind weitere Parameterstudien zu empfehlen.

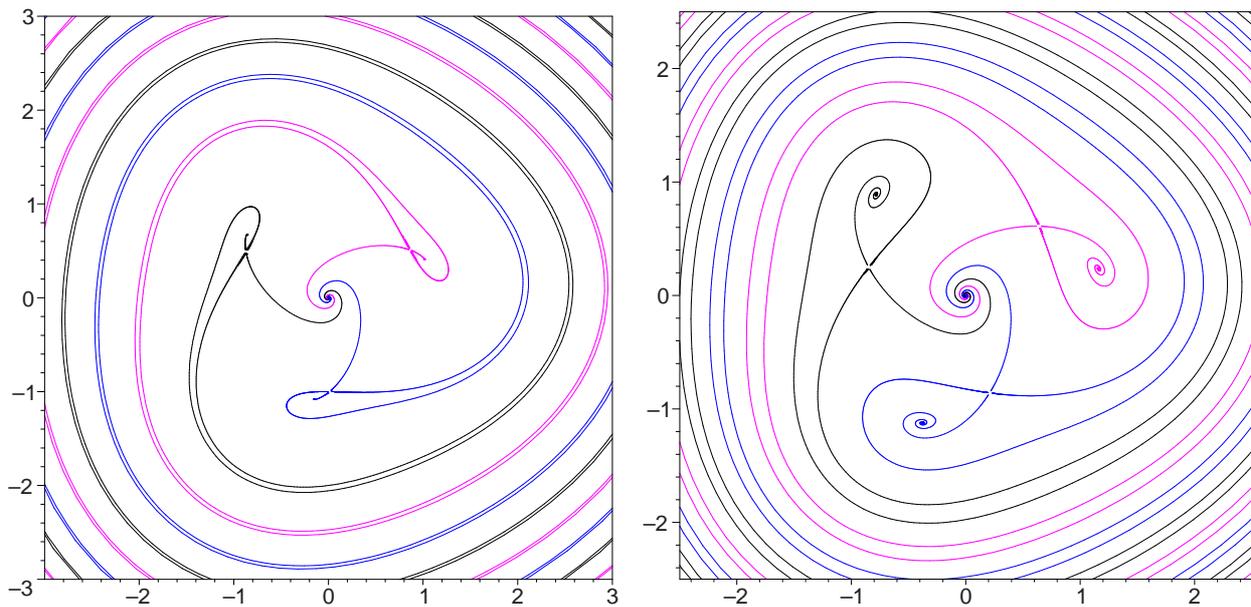


Abbildung 13: Invarianzkurven des gemittelten Duffing-Oszillators 2 mit $\kappa = 0.3$, $B = 3.2$ (links) und mit $\kappa = 0.2$, $B = 3.2$ (rechts)

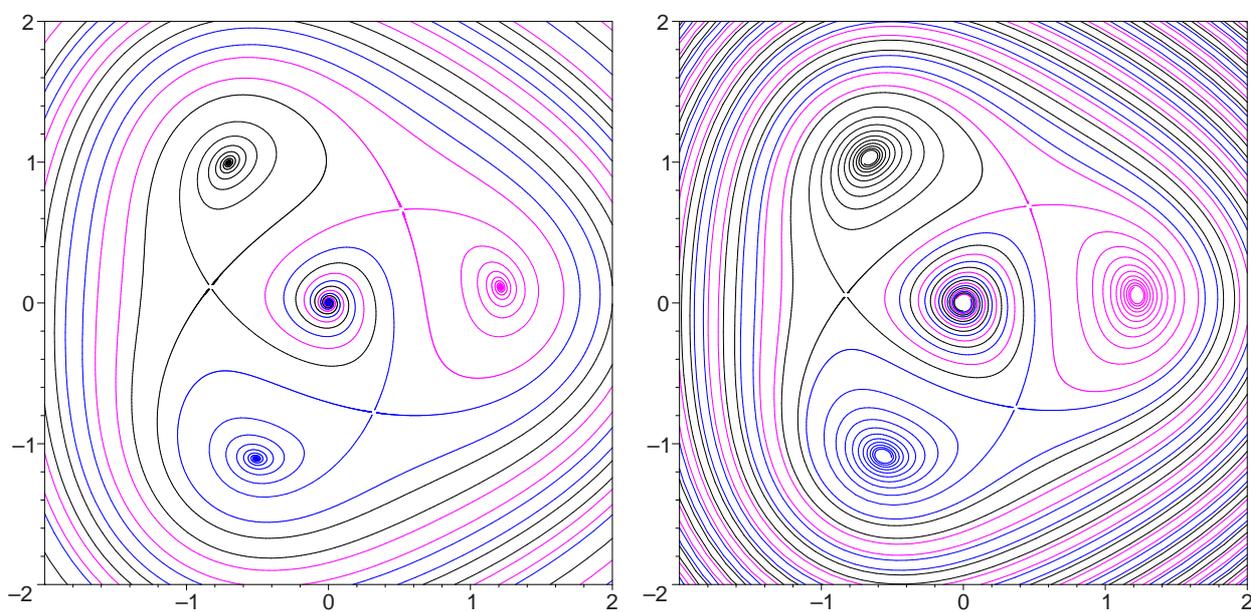


Abbildung 14: Invarianzkurven des gemittelten Duffing-Oszillators 2 mit $\kappa = 0.1$, $B = 3.2$ (links) und mit $\kappa = 0.05$, $B = 3.2$ (rechts)

2.4 Der Ferroresonanz-Stabilisator von E. Philippow

Für den nichtlinearen parallelen Ferroresonanzkreis als Grundstromkreis der Elektroenergie-technik leiten E. Philippow und W. Büntig in [16] unter vereinfachenden Bedingungen⁹ die einfache Modellgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^n = -\Gamma \cos t \quad \text{mit positiven Parametern } \alpha, \beta, \Gamma, \delta \quad (42)$$

her. Die Nichtlinearität $\psi(x) = \alpha x + \beta x^n$ beschreibt darin die Magnetisierungs-Kennlinie des Kernmaterials des Transformators, wofür wegen eines ‐ausgeprägten Knickes‐ anstelle von $n = 3$ nunmehr ein Polynom 9. Grades mit $n = 9$ und $\alpha = 0.65$, $\beta = 0.75$ angesetzt wird. Mit diesem Ansatz genügt der Ferroresonanz-Stabilisator dem System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -(\delta y_2 + \alpha y_1 + \beta y_1^n + \Gamma \cos t) \end{aligned} \quad (43)$$

für die Funktionen $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$. Die Periodendauer der gesuchten Lösungen ist $T = 2\pi$, weshalb wir sofort zur periodischen Standardform

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\sin t \left((1 - \alpha)(z_1 \cos t + z_2 \sin t) - \beta(z_1 \cos t + z_2 \sin t)^9 \right. \\ &\quad \left. - \delta(-z_1 \sin t + z_2 \cos t) - \Gamma \cos t \right) \\ \dot{z}_2 &= \cos t \left((1 - \alpha)(z_1 \cos t + z_2 \sin t) - \beta(z_1 \cos t + z_2 \sin t)^9 \right. \\ &\quad \left. - \delta(-z_1 \sin t + z_2 \cos t) - \Gamma \cos t \right) \end{aligned}$$

übergehen können. Formale Mittelung über $[0, 2\pi]$ ergibt schließlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{1}{2}\delta z_1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha)z_2 + \frac{63}{64}\beta(z_1^6 z_2^3 + z_1^2 z_2^7) + \frac{63}{256}\beta(z_1^8 z_2 + z_2^9) + \frac{189}{128}\beta z_1^4 z_2^5 \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{2}(1 - \alpha)z_1 - \frac{1}{2}\delta z_2 - \frac{63}{64}\beta(z_1^3 z_2^6 + z_1^7 z_2^2) - \frac{63}{256}\beta(z_1^9 + z_1 z_2^8) - \frac{189}{128}\beta z_1^5 z_2^4 - \frac{1}{2}\Gamma. \end{aligned} \quad (44)$$

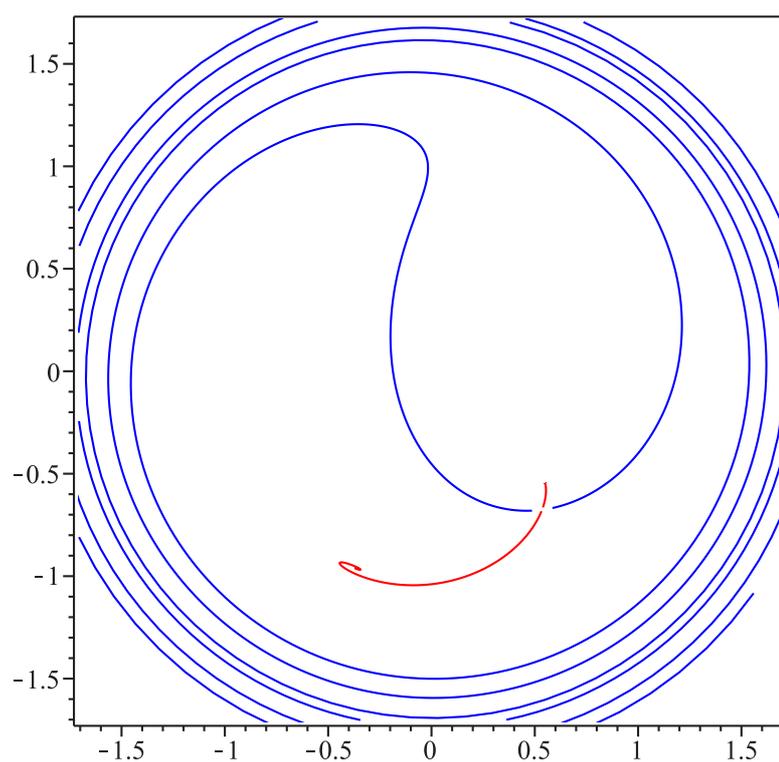
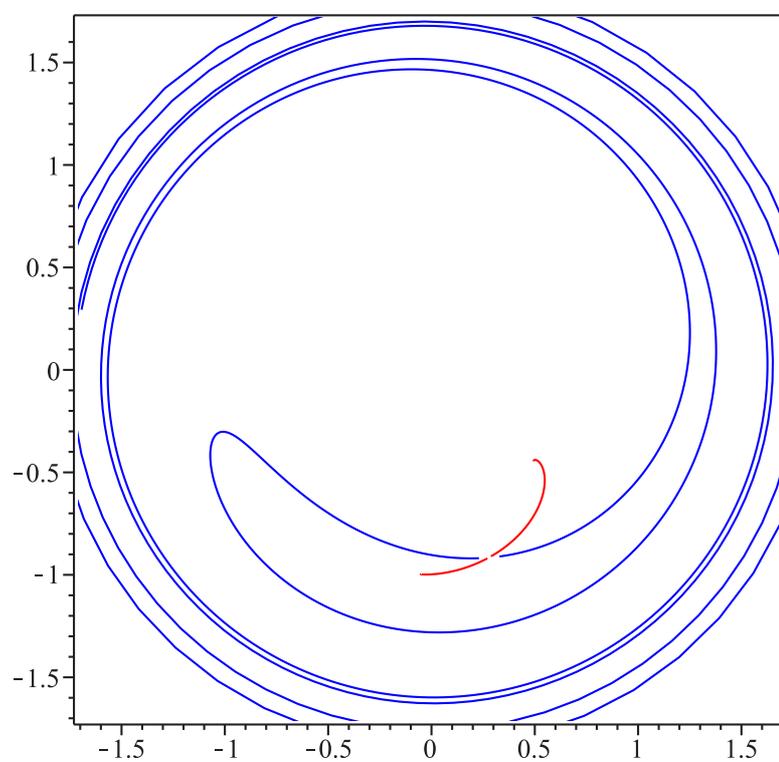
Der Parameter für die Dämpfung erhält den festen Wert $\delta = 0.3$ und die normierte Erregungsamplitude sei vorerst $\Gamma = 0.33$. Mit diesen Zahlenwerten erhalten wir die 3 Gleichgewichtslagen des autonomen Systems mit den Eigenwerten der Jacobimatrix $D_z F(z)$

$$\begin{aligned} z^1 &= (-0.3640024266, -0.9623132710) & \text{mit } \lambda_{1,2}^1 &= -0.150000 \pm 0.329253i, \\ z^2 &= (0.5358812366, -0.6738196280) & \text{mit } \lambda_{1,2}^2 &= (-0.347313, 0.0473133), \\ z^3 &= (0.5499925307, -0.5471336089) & \text{mit } \lambda_{1,2}^3 &= (-0.230470, -0.0695292). \end{aligned}$$

Offenbar ist z^1 ein stabiler Fokus, z^3 dagegen ein stabiler Knoten. Für den Sattelpunkt z^2 ermitteln wir die normierten Eigenvektoren η_u für den instabilen Unterraum und η_s für den stabilen Unterraum. Mit Algorithmus 8 gewinnen wir daraus die Invarianzkurven W_u und W_s , die in Abb. 15 dargestellt werden.

Bei Reduzierung der Erregungsamplitude auf den Wert $\Gamma = 0.30$ besitzt das gemittelte System ebenfalls die 3 Gleichgewichte z^1, z^2 und z^3 . Allerdings wird der Fixpunkt z^3 nun

⁹Ursprünglich entsteht eine DGL 3. Ordnung, die sich bei Vernachlässigung des Leitungswiderstandes auf die angegebene DGL 2. Ordnung reduziert.

Abbildung 15: Gemittelter Ferroresonanz-Stabilisator mit $\delta = 0.3$ und $\Gamma = 0.33$ Abbildung 16: Invarianzkurven des gemittelten Ferroresonanz-Stabilisators mit $\delta = 0.3$ und $\Gamma = 0.30$

ebenfalls ein stabiler Fokus wie z^1 , während z^2 weiterhin ein Sattelpunkte ist. Algorithmus 8 liefert nun die in Abb. 16 dargestellten Invarianzkurven W_u und W_s . Offensichtlich hat sich mit der Typveränderung auch der Einzugsbereich von z^3 auf Kosten von z^2 stark vergrößert. Es bleibt die Frage offen, inwieweit Aussagen über das gemittelte System – z.B. in der Umgebung von Bifurkationspunkten – auch für das Originalsystem (63) gültig sind. Vergleichen wir dazu Abb. 15 mit der Anwendung der Poincaré-Methode aus Abschnitt 4, so lässt die mit Algorithmus 14 gewonnene Abb. 17 bereits erkennen, dass derartige Rückschlüsse mit erheblicher Vorsicht zu treffen sind. Zudem stellte sich heraus, dass mit der Mittelungs-

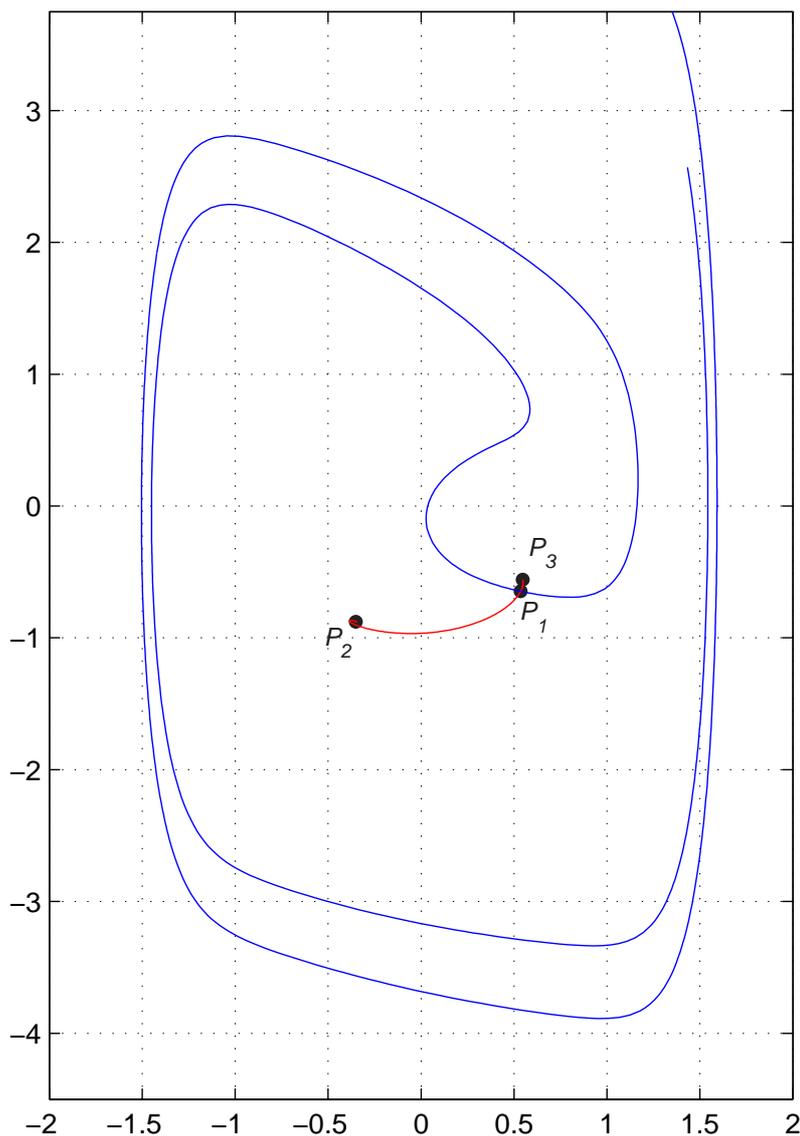


Abbildung 17: Invarianzkurven des Ferroresonanz-Stabilisators für $\delta = 0.3$, $\Gamma = 0.33$, erhalten mit der Poincaré-Methode aus Abschnitt 4

methode für größere Parameterwerte $\Gamma = 1.9, 2.0, 3.0, 4.5$ keine Sattelpunkte – und damit keine Invarianzkurven – bestimmt werden konnten. Dies gelang jedoch mit der nachfolgend vorgestellten Poincaré-Methode.

3 Approximation mittels Poincaré-Methode

Alternativ zur Mittelungsmethode soll nun die Approximation der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten einer periodischen Lösung rein numerisch erfolgen. Dazu benutzen wir die Poincaré-Abbildung, die diese Approximation auf den Poincaré-Schnitt Σ reduziert, der in Abb. 1 dargestellt wird.

3.1 Die Poincaré-Abbildung

Die Poincaré-Abbildung stellt ein wesentliches Hilfsmittel dar, um Existenz, Stabilität und Verzweigungen periodischer Lösungen zu untersuchen und zugleich das Lösungsverhalten geometrisch zu veranschaulichen. So wird z.B. in [12] diese Abbildung genutzt, um Grenzzyklen einer autonomen DGL nachzuweisen. Wir wollen deshalb die Konstruktion und die Eigenschaften dieser wichtigen Abbildung kurz behandeln. Dazu betrachten wir das autonome System

$$\dot{x} = f(x), \quad f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (45)$$

mit glattem Vektorfeld $f \in C^r(D), r \geq 2$, und dem damit erzeugten Fluss $\varphi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dieses System soll einen Grenzzyklus $\varphi_t(x_0)$ der Periode $T > 0$ besitzen, der keine Gleichgewichtslage ist. Es gelte die Anfangsbedingung $\varphi_0(x_0) = x_0$. Wir legen nun, wie

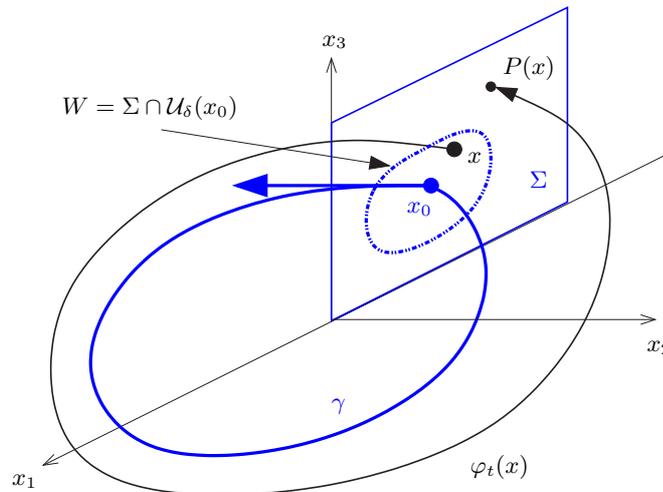


Abbildung 18: Poincaré-Abbildung mit Ebene Σ in \mathbb{R}^3

in Abbildung 18 dargestellt, eine Hyperebene Σ durch x_0 , die senkrecht auf dem Orbit $\gamma = \{\varphi_t(x_0)\}$ steht und betrachten Lösungen $\varphi_t(x)$, die an Punkten $x \in \Sigma$ aus einer δ -Umgebung $W = \Sigma \cap \mathcal{U}_\delta(x_0)$ starten. Liegt x hinreichend nahe bei x_0 , so ist zu erwarten, dass $\varphi_t(x)$ die Hyperebene ebenfalls nahe x_0 in einem Punkt $P(x)$ schneiden wird. Die Abbildung $x \mapsto P(x)$ wurde von *Henri Poincaré*¹⁰ bereits 1881 eingeführt und später nach ihm benannt. Die Existenz und stetige Differenzierbarkeit dieser Abbildung wird z. B. in [15] nachgewiesen. Die benötigte Rückkehr-Zeit $\tau(x)$ hat folgende Eigenschaft:

¹⁰ Mit epochalen Werken zu mathematischen Methoden der Himmelsmechanik gilt Jules Henri Poincaré (1854–1912) als einer der herausragenden Mathematiker und theoretischen Astronomen unserer Zeit und zugleich als Pionier der Theorie dynamischer Systeme.

Satz 10 *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f \in C^1(D)$. Die periodische Lösung $\varphi_t(x_0)$ habe die Periode T und der durch diese Lösung definierte Orbit γ liege in D .*

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x_0)^T(x - x_0) = 0\} \quad (46)$$

beschreibt die zu γ orthogonale Hyperebene bei x_0 . Dann existieren ein $\delta > 0$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $\tau(x)$, definiert und stetig differenzierbar für alle x aus einer δ -Umgebung $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, so dass $\tau(x_0) = T$ ist und $\varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$ für alle $x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$ gilt.

Die Rückkehr-Zeit $\tau(x)$ ist also diejenige Zeit, die ein bei $x \in W$ beginnender Orbit $\varphi_t(x)$ benötigt, um wieder in Σ anzukommen. Diese Zeit $\tau(x)$ hängt im Allgemeinen vom Startpunkt x ab und muss nicht identisch mit der Periode T von γ sein. Allerdings konvergiert $\tau(x) \rightarrow T$ für $x \rightarrow x_0$. Die lokal definierte eindeutige Abbildung $P : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $W = \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap \Sigma$ und

$$P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x) \quad (47)$$

heißt *lokale Poincaré-Abbildung* (auch: *first return map*) für den Orbit γ an der Stelle x_0 . Folgende Eigenschaften lassen sich für die Abbildung P nachweisen:

- $P \in C^1(W)$. Falls f sogar analytisch in D ist, so ist auch P analytisch in W .
- P hat eine stetig differenzierbare inverse Abbildung P^{-1} ; damit ist P ein C^1 -Diffeomorphismus (d. h. eine C^1 -Funktion mit C^1 -Inverser).
- $x \in \Sigma$ ist ein Fixpunkt von P , d. h. $P(x) = x$ genau dann, wenn $\varphi_t(x)$ ein periodischer Orbit von (46) ist.

Der Begriff der Poincaré-Abbildung lässt sich auch auf solche periodische Orbits verallgemeinern, die auf Mannigfaltigkeiten verlaufen (vgl. dazu [12]). Poincaré-Abbildungen können auch ohne Bezug auf einen periodischen Orbit konstruiert werden. Existiert beispielsweise eine Hyperebene $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, die

- von jeder Lösungskurve $\{\varphi_t(x)\}$ transversal geschnitten wird und
- zu jedem $x \in \Sigma$ einen Rückkehrpunkt $\varphi_t(x) \in \Sigma$, $t > 0$, besitzt,

so definiert Σ einen globalen Poincaré-Schnitt, und die Abbildung $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ mit

$$P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x), \quad x \in \Sigma,$$

ist eine *globale Poincaré-Abbildung* mit der Rückkehrzeit $\tau(x)$. Zur Anwendung notieren wir periodisch erregte DGL-Systeme als autonome DGL

$$\dot{x} = f(x, \theta), \quad \dot{\theta} = 1, \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1. \quad (48)$$

Der Phasenraum wird dann durch die zylindrische Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ beschrieben, wobei $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}(\text{mod } T)$ als zirkuläre Komponente die T -Periodizität des Vektorfeldes f in θ widerspiegelt. Für dieses Problem kann man nun den globalen Poincaré-Schnitt

$$\Sigma = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \mid \theta = \theta_0\}$$

definieren, da wegen $\dot{\theta} = 1$ alle Lösungen Σ transversal schneiden (vgl. Abb. 19). Die Poincaré-Abbildung $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ wird nun definiert durch

$$P(x_0) = \pi\varphi_T(x_0, \theta_0), \quad (49)$$

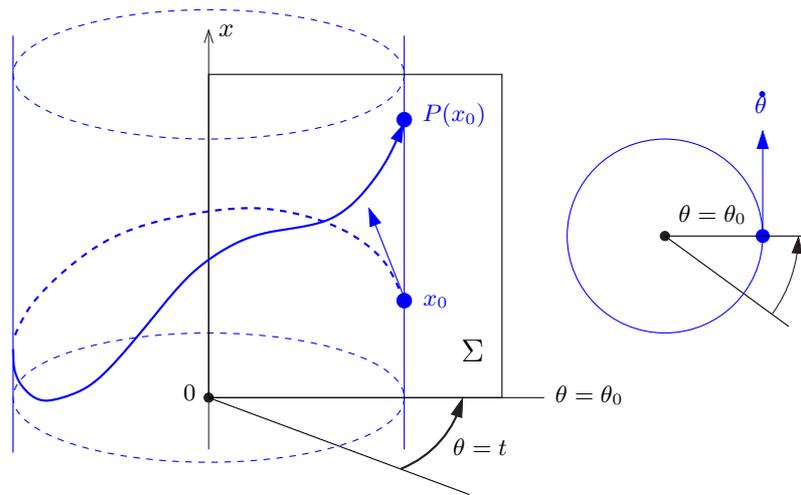


Abbildung 19: Stroboskop-Abbildung

worin φ_t der Fluss von (48) ist und π seine Projektion auf die x -Komponente bedeutet. Offenbar ist die Zeit zwischen zwei Abbildungspunkten stets gleich T für alle $x \in \Sigma$. Wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\theta_0 = 0$ und bezeichnen die Projektion des Flusses auf die x -Komponente mit $\psi_t(x) := \pi\varphi_t(x, 0)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, so kommen wir zur *Stroboskop-Abbildung*¹¹ $P : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$P(x) = \psi_T(x) = \pi\varphi_T(x, 0).$$

Die k -te Iteration der stroboskopischen Abbildung liefert den Systemzustand zur Zeit $t_0 + kT$, d. h. das System wird periodisch „beleuchtet“. Unter den getroffenen Voraussetzungen ist diese eindeutige Abbildung für alle x in einer Umgebung $\mathcal{U}_\rho(x_0) \subset D$ des Punktes $x_0 = x^*(0)$ definiert.

Bemerkung 11 Mittels der Poincaré-Abbildung P lassen sich oft Konvergenz- und Stabilitätsaussagen für Fixpunktaufgaben in \mathbb{R}^n , z. B. Fixpunktsätze, anwenden. Denn zu $k \in \mathbb{Z}$ bedeutet die k -fache Anwendung der Poincaré-Abbildung auf ein $x \in D$ den Übergang vom betrachteten zeitkontinuierlichen dynamischen System $DS_1 = (\mathbb{R}, D, \varphi_t)$ zu einem zeitdiskreten System $DS_2 = (\mathbb{Z}, D, \psi_k)$ mit

$$\psi_k(x) := P^k(x) = P(P \cdots P(P(x)) \cdots), \quad x \in D, k \in \mathbb{Z}.$$

Der Übergang von DS_1 zum zeitdiskreten System DS_2 transformiert insbesondere

- T -periodische Lösungen $\varphi_t(x_0)$ in Fixpunkte x_0 von P
- m -fach subharmonische Lösungen, d. h. mT -periodische Lösungen mit $m \in \mathbb{N}, m > 1$, in m -periodische Orbits von DS_2 sowie
- quasi-periodische Lösungen von DS_1 mit 2 Basisfrequenzen in geschlossene Invarianzkurven. von DS_2 ■

¹¹Stroboskop (griech.): optisches Gerät zum Beobachten und Messen rasch ablaufender Vorgänge (z. B. Drehzahlmessung) mit Hilfe eines periodisch unterbrochenen Lichtstrahls.

Die numerischen Verfahren werden nachfolgend zur Ermittlung stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten für periodisch erregte Systeme der Dimension 2 entwickelt. Damit kann wegen der vorgegebenen Lösungsperiode T die leicht zu bestimmende Stroboskop-Abbildung als Poincaré-Abbildung P eingesetzt werden. Die Verfahrensbeschreibungen vereinfachen sich dadurch gegenüber dem n -dimensionalen Fall und lassen sich zudem leicht veranschaulichen.

Alle nachfolgenden Überlegungen können jedoch auch auf autonome Systeme der Dimension 3 übertragen werden, wobei die numerische Ermittlung der Poincaré-Abbildung aufwändiger wird. In [12], Kap. 6.3.3. wird dazu ein effizienter Algorithmus vorgestellt.

Für dynamische Systeme höherer Dimension sind die Verfahren ebenfalls anwendbar, falls die zu bestimmende Mannigfaltigkeit eindimensional ist. Mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten erfordern wesentlich höheren Aufwand, wie in [12], Kap. 5.2.4. dargestellt wird. Einen exzellenten Überblick zu aktuellen Entwicklungen bietet die Arbeit [10].

3.2 Sattelpunktbestimmung

Ausgangspunkt der Verfolgung der Mannigfaltigkeiten ist die Ermittlung von sattelartigen Fixpunkten x^* der Poincaré-Abbildung P . Dazu können übliche Newton-ähnliche Verfahren zu Lösung des Nullstellenproblems

$$f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad f(x) := P(x) - x \quad (50)$$

eingesetzt werden. Eine Übersicht findet man in [12], Kap. 5.1. Die meisten Nullstellenverfahren sind *lokal konvergent*, da unter geeigneten Voraussetzungen (Glattheit, Regularität) stets eine Konvergenz Umgebung S der Nullstelle x^* der Funktion f existiert. Über die Lage und Größe der Umgebung S ist in praxi meist nichts bekannt. Die Menge $S(x^*)$ aller Startwerte x_0 , für die das jeweils betrachtete Verfahren gegen die gesuchte Nullstelle x^* konvergiert, bildet den *Einzugsbereich von x^** . Um ihn zu vergrößern, kann man zur Bestimmung der Nullstelle x^* von f auch das zugehörige Minimierungsproblem

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \|f(x)\|^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Min!} \quad \text{über} \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (51)$$

mit der Euklidischen Norm $\|x\|$ betrachten. Gesucht ist dann eine Minimalstelle x^* mit $\psi(x^*) = 0$. Ausgehend von einer k -ten Lösungsnäherung x_k lässt sich der neue Wert $x_{k+1} = x_k + d_k$ mit der Newton-Richtung (bei Minimierungsverfahren auch „Such-Richtung“ genannt) $d_k = -f'(x_k)^{-1}f(x_k)$ ermitteln und anschließend kontrollieren, ob die *einfache Abstiegsbedingung*

$$\psi(x_{k+1}) < \psi(x_k)$$

für die Funktion ψ erfüllt ist. Andernfalls kann man den Korrekturvektor d_k mit einem Faktor $\tau_k \in (0, 1]$ dämpfen und mit dem zurückgesetzten Testpunkt

$$x_{k+1} = x_k + \tau_k \cdot d_k \quad \text{mit} \quad d_k = -f'(x_k)^{-1}f(x_k) \quad (52)$$

die Abstiegsbedingung erneut überprüfen. Nach eventuell weiteren erforderlichen Reduzierungen $\tau_k := \tau_k \cdot \alpha$ mit dem fest gewählten Skalierungsfaktor $\alpha \in (0, 1)$ liefert der erste akzeptierte τ_k -Wert den *Dämpfungsfaktor* des sogenannten *gedämpften Newton-Verfahrens*

(52). Häufig wird eine sukzessive Halbierung mit $\alpha = 0.5$ vorgenommen. Bei Minimierungsverfahren hat es sich bewährt, diese einfache Abstiegsbedingung durch eine Bedingung für *hinreichenden Abstieg*

$$\psi(x_{k+1}) < (1 - 2\delta\tau_k) \psi(x_k) \quad \text{mit einer Konstanten } \delta \in (0, \frac{1}{2}) \quad (53)$$

zu ersetzen. Offenbar ist $1 - 2\delta\tau_k \in (0, 1)$, wobei Werte $\delta = 10^{-2}, 10^{-4}$ üblich sind. Der erste τ_k -Wert, mit dem diese Bedingung erfüllt ist, liefert ein gedämpftes Newton-Verfahren (52) mit der sogenannten *Armijo-Regel* (53), die in Algorithmus 12 implementiert wird. Das Hauptziel, den Einzugsbereich von x^* zu vergrößern, kann mit dem gedämpften Newton-Verfahren oft erreicht werden. Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ ein im Allgemeinen großer vorgegebener Bereich, so ist das Iterationsverfahren *global konvergent auf S*, falls es für jeden Startpunkt $x_0 \in S$ gegen einen Fixpunkt x^* in S konvergiert.

Algorithmus 12 (Fixpunkt-Bestimmung)

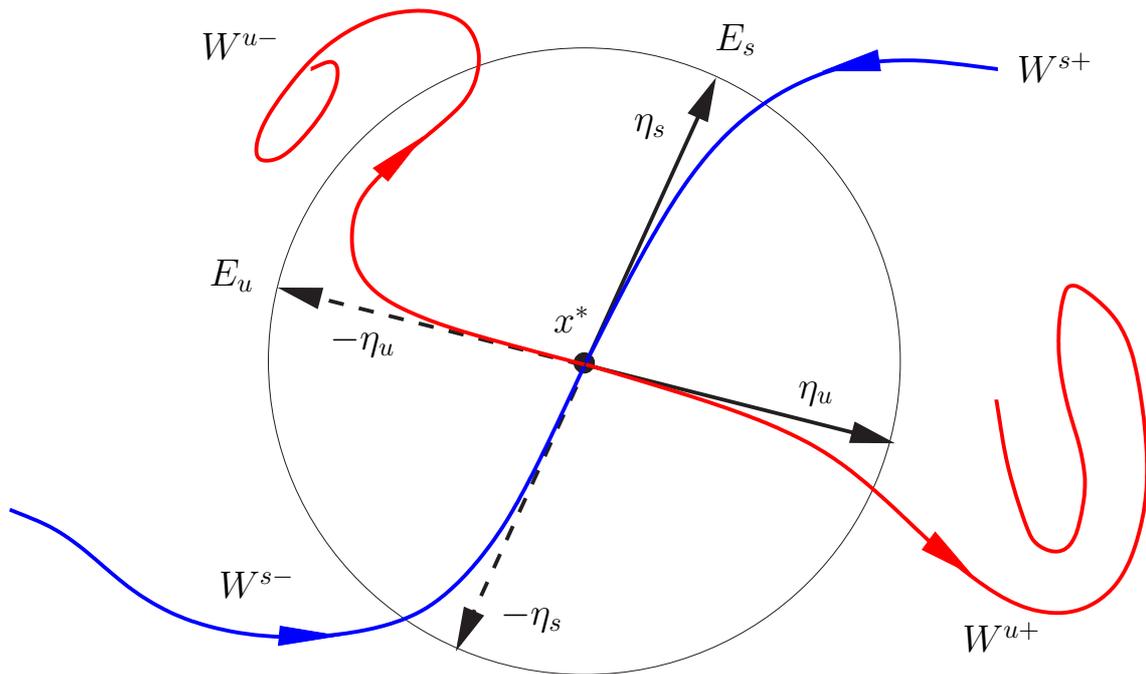
Function $[x, M] = \text{newton}(P, DP, x_0, \text{tolabs}, \text{tolrel})$

1. Berechne $x = x_0$, $\text{tol} := \text{tolrel} \cdot \|P(x)\| + \text{tolabs}$
2. Wähle Konstanten $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $\alpha \in (0, 1)$ und $\lambda := 1$
3. Wiederhole solange $\|P(x) - x\| > \text{tol}$
 1. Wähle $\lambda := \min(\lambda/\alpha, 1)$
 2. Berechne Jacobi-Matrix $DP(x)$
 3. Berechne Newton-Richtung d aus $[DP(x) - I] \cdot d = -P(x) + x$
 4. Berechne Testpunkt $y := x + \lambda d$
 5. Wiederhole solange $\|P(y) - y\|^2 > (1 - 2\delta\lambda)\|P(x) - x\|^2$
 1. Reduziere $\lambda := \lambda \cdot \alpha$
 2. Berechne Testpunkt $y := x + \lambda d$
 6. Aktualisiere $x := y$
4. Beende mit x , $M = DP(x)$

Wir passen nun das dort für Gleichgewichtslagen vorgestellte *gedämpfte Newton-Verfahren* (52) an die spezielle Funktion

$$f(x) := P(x) - x \quad \text{mit Ableitung} \quad F(x) := DP(x) - I, \quad \text{Einheitsmatrix } I \quad (54)$$

an und bestimmen den Fixpunkt x^* und die Jacobi-Matrix $M = DP(x^*)$ mit Algorithmus 12. Mit den reellen Eigenwerten λ_s, λ_u von M liegt ein Sattelpunkt x^* vor, wenn $|\lambda_s| < 1$ und $|\lambda_u| > 1$ gilt. In allen anderen (reellen bzw. konjugiert komplexen) Fällen ist x^* ungeeignet und der Algorithmus erneut mit einem geeigneteren Anfangsvektor x_0 zu starten. Die zugehörigen normierten Eigenvektoren bezeichnen wir entsprechend mit η_s und η_u . Sie

Abbildung 20: Eigenvektoren und Invarianzkurven zum Sattelpunkt x^*

spannen den stabilen Unterraum $E^s = \{\alpha \cdot \eta_s \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ und den instabilen Unterraum $E^u = \{\alpha \cdot \eta_u \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ auf. In Abbildung 20 werden E^s und E^u zusammen mit den invarianten Mannigfaltigkeiten dargestellt. Mit W^{u+} wird nun die in Richtung η_u verlaufende Teilkurve und mit W^{u-} die in entgegengesetzte Richtung $-\eta_u$ weglaufernde Kurve bezeichnet. Analoges gilt für W^{s+} und W^{s-} bezüglich der Richtungen η_s und $-\eta_s$.

3.3 Numerische Kurvenverfolgung

Wir bestimmen zuerst punktweise W^{u+} mit dem Eigenpaar (λ_u, η_u) . Dasselbe Vorgehen kann dann auch für W^{u-} auf Grundlage von $(\lambda_u, -\eta_u)$ angewendet werden. Falls λ_u negativ ist, so erfolgt bei Anwendung von P ein Hin- und Herspringen der Bildpunkte $x_{i+1} = P(x_i)$ von W^{u+} auf W^{u-} . Wir vermeiden dieses Problem, wenn wir die 2-periodische Abbildung $x_{i+1} = P^2(x_i) = P(P(x_i))$, $i = 1, 2, 3, \dots$ anstelle von P benutzen, was bei der Stroboskop-Abbildung die Periodendauer $2T$ bedeutet. Analoges gilt für den Eigenwert λ_s , so dass wir nun für die Poincaré-Abbildung P ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass die Eigenwerte der Bedingung $\lambda_u > 1$ und $0 < \lambda_s < 1$ genügen.

Startprozedur Die berechnete Abbildungsfolge (x_i) wird mittels $x_{i+1} = P(x_i)$ berechnet. Nehmen wir an, dass für einen Abbildungspunkt x_i der Vektor $x_i - x^*$ in E^u liegt. Dann erhalten wir in erster Näherung für den Bildpunkt x_{i+1}

$$x_{i+1} - x^* = P(x_i) - x^* = DP(x^*)(x_i - x^*) = \lambda_u(x_i - x^*), \quad (55)$$

womit sich der Abstand zum Fixpunkt x^* bei jeder Anwendung von P um den Faktor $\lambda_u > 1$ vergrößert. Selbst bei einem moderaten Eigenwert $\lambda_u = 10$ liegen so die Abbildungspunkte x_i nach wenigen Abbildungen extrem weit auseinander.

Aus diesem Grund starten wir mit p Startpunkten x_1, \dots, x_p die innerhalb eines gegebenen (kleinen) Radius r_l in Richtung von η_u liegen. Folgende drei Eigenschaften werden für diese Startpunkte angenommen:

1. Die Punkte x_i bilden eine geometrische Folge in E^u , d.h. $x_i - x^* = \alpha^i \beta \eta_u$
2. x_p hat den Abstand r_l von x^* , d.h. $x_p - x^* = r_l \eta_u$
3. Der $(p+1)$ -te Punkt ist Abbild von x_1 , d.h. $x_{p+1} = P(x_1)$.

Die letzte Forderung garantiert, dass zwischen den Urbildpunkten x_i und ihren zugehörigen Bildpunkten $P(x_i)$ keine Lücke auftritt. r_l ist so zu wählen, dass der Abstand zwischen den

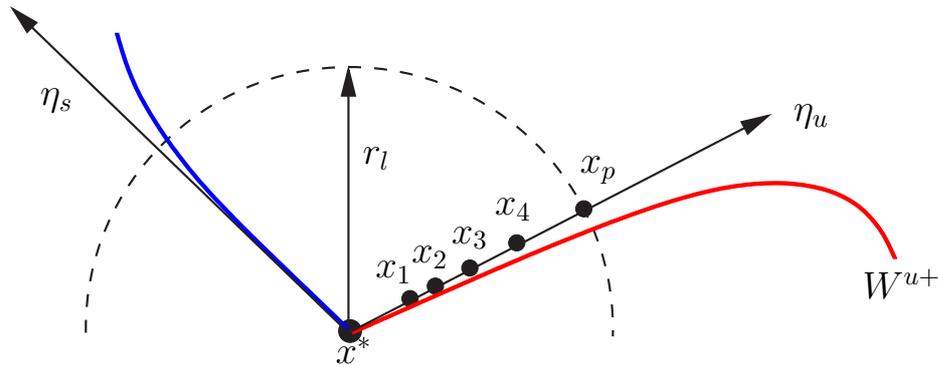


Abbildung 21: Verteilung der Startpunkte x_1, \dots, x_p auf η_u

Schnittpunkten des Eigenvektors η_u und der Invarianzkurve W^{u+} mit $\mathcal{K}_{r_l}(x^*)$ nicht zu groß wird. Des Weiteren dürfen die Punkte x_1, \dots, x_p nicht zu nahe am Fixpunkt x^* liegen, da sonst die Fortsetzung von W^{u+} anfangs stagniert. Abbildung 21 verdeutlicht die gesuchte Verteilung der p Startpunkte x_1, \dots, x_p .

Aus den Eigenschaften 1 und 2 erhält man sofort $\alpha^p \beta = r_l$; die Eigenschaften 1 und 3 liefern zusammen mit (55)

$$x_{p+1} - x^* = \alpha^{p+1} \beta \eta_u = \eta_u \alpha \beta \eta_u,$$

woraus sich $\alpha = \lambda_u^{1/p}$ und $\beta = r_l / \lambda_u$ ergibt. Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in Eigenschaft 1 erhalten wir für die p Startpunkte die bereits in der Arbeit [21] angegebene Formel

$$x_i = x^* + \frac{r_l}{\lambda_u^{p-i}} \eta_u, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (56)$$

Diese p Startpunkte werden in einer Liste $L = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ gespeichert. Die Fortsetzung von W^{u+} beginnt mit der numerischen Integration der p Startpunkte über die Periodendauer T . Die erhaltenen p Bildpunkte $P(x_i)$ liegen aufgrund der Invarianz von W^{u+} unter der Abbildung P wieder auf W^{u+} und werden an das Listenende von L angehängt. Die numerische Integration kann mit jedem Standardverfahren mit adaptiver Schrittweitensteuerung erfolgen. Hier wurde ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 5 implementiert. Die neu berechneten Punkte $P(x_i)$ dienen anschließend als neue Startpunkte für eine weitere

Fortsetzung - den Punkten $P(P(x_i)) = P^2(x_i)$, welche wieder auf W^{u+} liegen. Diese Vorgehensweise wird fortgesetzt bis eine Abbruchbedingung für die Zahl der Abbildungen erfüllt ist oder der Benutzer die Berechnung abbricht. Abbildung 22 verdeutlicht die Berechnungsweise.

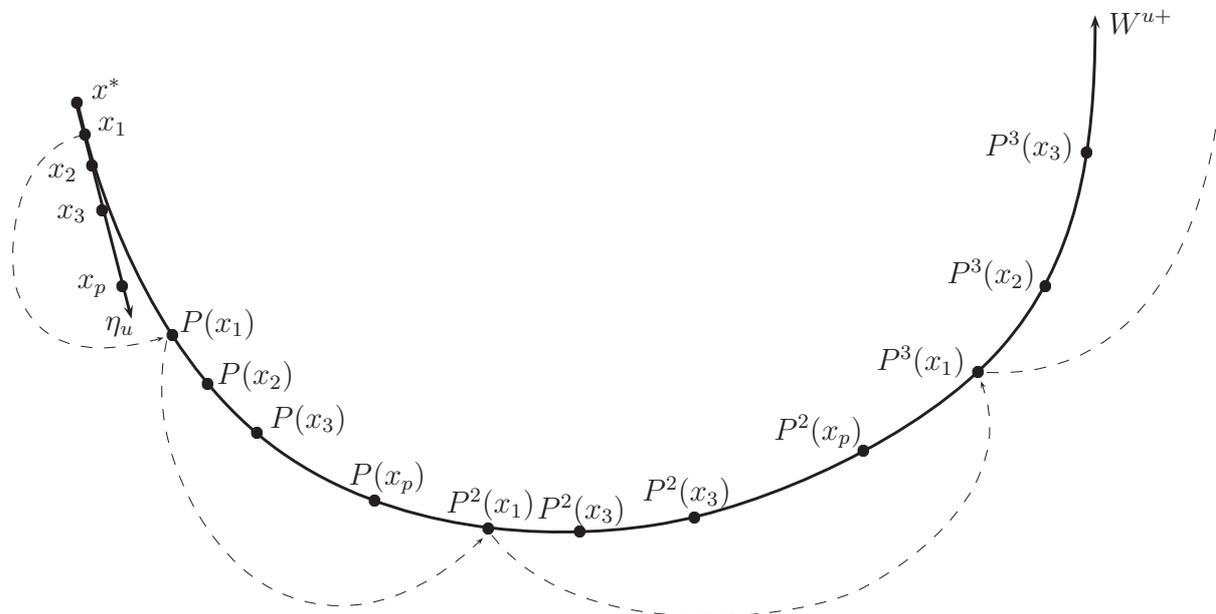


Abbildung 22: Numerische Fortsetzung von W^{u+}

Beispiel 13 (Ein parametrisch erregtes Pendel nach Leven u.a.)

Diese Differentialgleichung aus [11] stammt aus der Mechanik und wird durch eine periodische Oszillation parametrisch erregt. Realisierbar ist dies durch ein Pendel mit einem sich periodisch veränderndem Aufhängepunkt. Durch Umformung ergibt sich folgendes System

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -(by_2 + \sin y_1 + a\lambda \cos(\omega t) \sin y_1) \end{aligned}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\cos y_1 + a\lambda \cos(\omega t) \cos y_1) & -b \end{pmatrix}$$

und $a, b, \omega, \lambda \in \mathbb{R}$. Für $a = 0.6$, $b = 0.005$, $\omega = 3.5$ und $\lambda = 3.0$ wurde der Sattelpunkt mittels Algorithmus 12 mit den Eigenwerten λ_u, λ_s berechnet (vgl. Tab. 1). ■

	Startwerte	x_1^*	x_2^*	λ_u	λ_s	Klassifikation
P_1	-3.0 1.0	-3.14159	$2.178 \cdot 10^{-10}$	5.45676	0.18162	Sattelpunkt

Tabelle 1: Berechnungen zu Beispiel 16

An diesem Beispiel wurde die Startprozedur und die Fortsetzung erprobt. In Abbildung 23 sehen wir das Resultat der Berechnungen. Nahe x^* (schwarzer Punkt rechts) liegen die Startpunkte sehr dicht beieinander. Bei weiterer Fortsetzung entfernen sich wegen des Eigenwertes

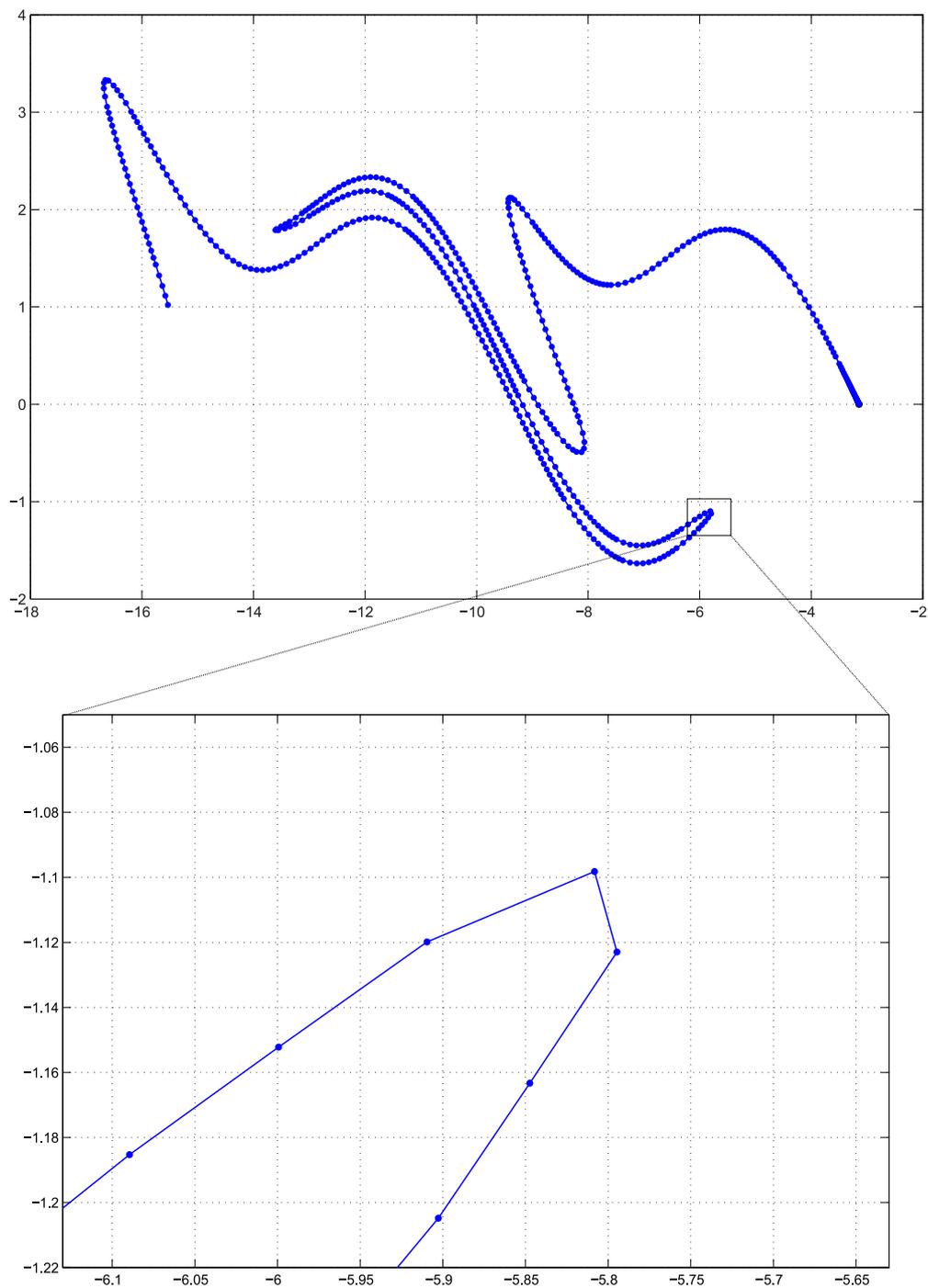


Abbildung 25: Beispiel 16 mit Abstands- und ohne Winkeltest (mit Vergrößerung)

der Verbindung bestimmt und in die Liste L eingefügt. Diese lineare Interpolation erwies sich in allen Anwendungen als hinreichend genau. Der damit berechnete Abbildungspunkt $P(x_z)$ kann anschließend ebenfalls zwischen $P^j(x_k)$ und $P^j(x_{k+1})$ gespeichert werden. Anschließend wird der Abstandstest mit diesen drei Punkten wiederholt. Abbildung 24 verdeutlicht den Einfügeprozess. Wie sich dieser Test auf die Invarianzkurve des Beispiels 16 auswirkt, zeigt die Abbildung 25. Die Punkte haben einen deutlich geringeren Abstand zueinander und die Kurve überschneidet sich nicht mehr selbst. Die scharfen Spitzen sind ebenfalls nicht mehr

zu sehen. Erst in der Vergrößerung ist zu erkennen, dass an den „Spitzen“ noch immer nicht hinreichend viele Punkte eingefügt worden sind. Dafür ist ein weiterer Test nötig.

Winkeltest Betrachten wir die drei aufeinander folgenden Punkte $P^j(x_k)$, $P^j(x_{k+1})$ und $P^j(x_{k+2})$ in Abbildung 26, so lassen sich die Vektoren

$$a = P^j(x_k) - P^j(x_{k+1}) \quad \text{und} \quad b = P^j(x_{k+2}) - P^j(x_{k+1}) \quad (57)$$

leicht berechnen. Damit erhalten wir den Winkel φ bei $P^j(x_{k+1})$ gemäß

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} \quad \text{mit Skalarprodukt } (a, b).$$

Damit dieser Winkel φ hinreichend nahe bei 180° liegt, fordern wir $135^\circ < \varphi < 225^\circ$, was der Bedingung

$$-0.707107 > \cos \varphi = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} \quad (58)$$

entspricht. Damit wird die explizite Berechnung des Winkels φ vermieden. Ist diese Bedingung verletzt, so wird zwischen die Urbilder $P^{j-1}(x_k)$ und $P^{j-1}(x_{k+1})$ der Punkt x_{z_1} und zwischen $P^{j-1}(x_{k+1})$ und $P^{j-1}(x_{k+2})$ der Punkt x_{z_2} eingefügt. Anders als beim Abstandstest erwies sich hier eine lineare Interpolation als nicht ausreichend genau, so dass eine kubische Spline-Interpolation¹² vorgenommen werden musste. Die Bildpunkte $P(x_{z_1})$ und $P(x_{z_2})$

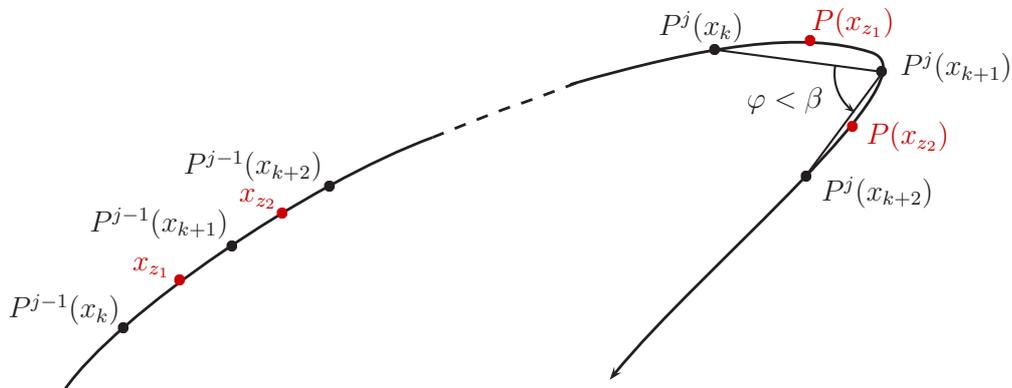


Abbildung 26: Das Einfügen von $P(x_{z_1})$ und $P(x_{z_2})$ durch den Winkeltest

werden dann als Zwischenpunkte, wie in Abbildung 26 verdeutlicht, zwischen $P^j(x_k)$ und $P^j(x_{k+1})$ bzw. zwischen $P^j(x_{k+1})$ und $P^j(x_{k+2})$ in die Punktliste L eingefügt.

In Abbildung 27 sehen wir die Auswirkungen des Abstands- und Winkeltests auf das Beispiel 16. In der Vergrößerung ist deutlich zu erkennen, dass im Bereich der Spitze zahlreiche Punkte eingefügt wurden. Durch geeignete Wahl der Schranke in (58) kann so eine hinreichend dichte Abstützung der Kurve bei starker Krümmung erreicht werden.

Bestimmung von $W^{u^-}(x^*)$ und $W^s(x^*)$ Zur Approximation der zweiten Teilkurve $W^{u^-}(x^*)$ wird $-\eta_u$ als Eigenvektor zum Eigenwert λ_u an Stelle von η_u benutzt. Um die stabile Mannigfaltigkeit $W^s(x^*)$ zu ermitteln, kann in der DGL theoretisch die Zeit t durch $-t$ substituiert werden und für dieses System wiederum die eindimensionale instabile Mannigfaltigkeit

¹²Der kubische Parameterspline kann leicht mittels des MATLAB-Befehls *spline* ermittelt werden.

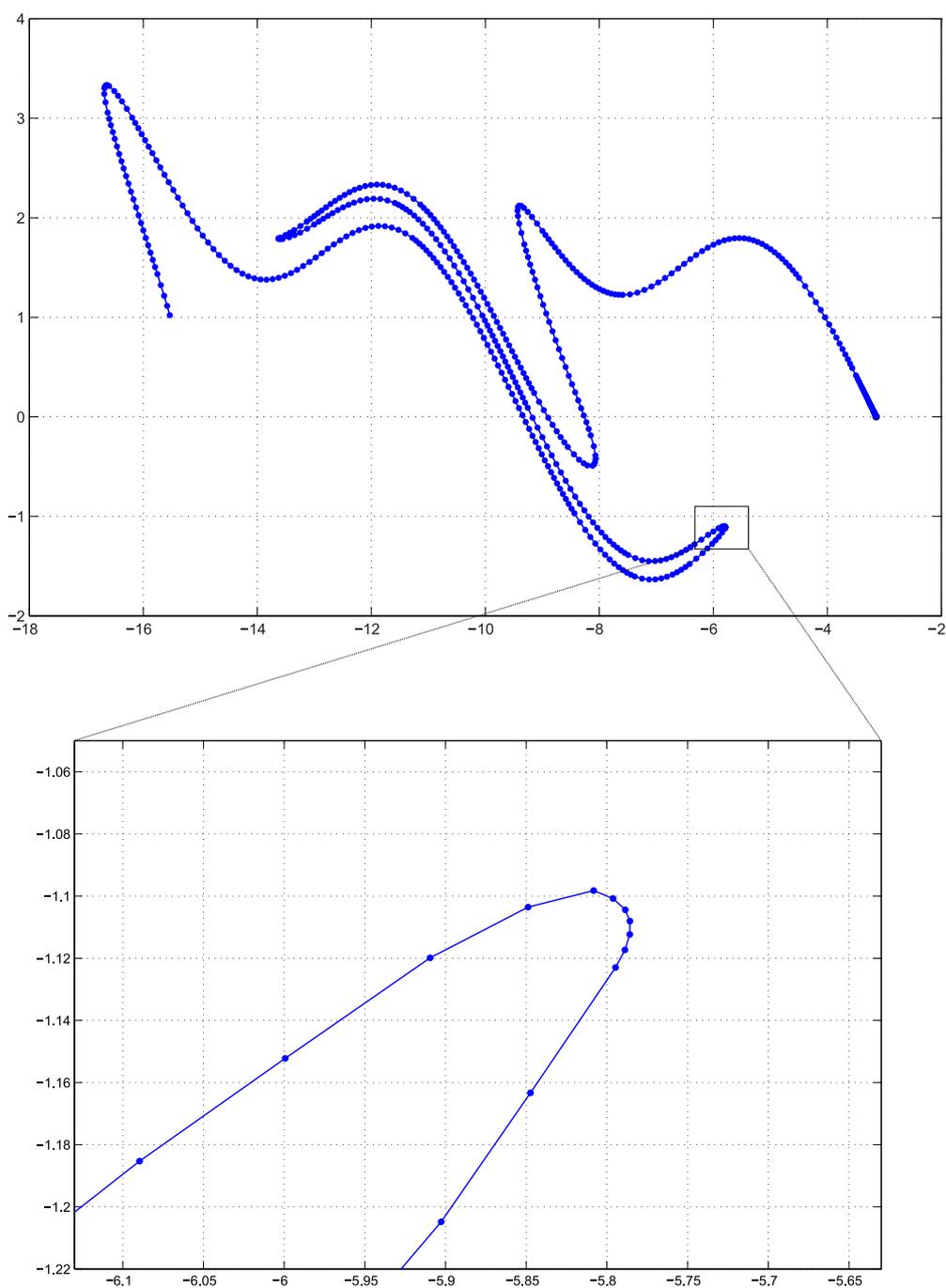


Abbildung 27: Beispiel 16 mit Abstands- und Winkeltest (mit Vergrößerung)

$W^u(x^*)$ verfolgt werden. Um Doppelberechnungen zu vermeiden, werden allerdings in praxi die Invarianzkurven $W^{s^+}(x^*)$ und $W^{s^-}(x^*)$ am Originalsystem durch Integration in negative Zeitrichtung bis zum Zeitpunkt $-T$ approximiert. Wegen $|\lambda_s| < 1$ wird der Eigenwert $1/\lambda_s$ zur Kurvenberechnung benutzt. Analog zu den instabilen Mannigfaltigkeiten wird nun der Eigenvektor η_s zur Ermittlung von $W^{s^+}(x^*)$ und $-\eta_s$ für $W^{s^-}(x^*)$ bereitgestellt. Damit können alle 4 Teilkurven zu $W^u(x^*)$ und $W^s(x^*)$ nach einheitlichem Algorithmus ermittelt werden.

3.4 Der Fortsetzungs-Algorithmus

Bei der Implementierung des numerischen Verfahrens sind folgende Teilaufgaben zu lösen:

- Fixpunktbestimmung und -analyse: Berechnung des Sattelpunktes x^* , der Eigenwerte λ_u und λ_s und der normierten Eigenvektoren η_u und η_s
- Behandlung negativer Eigenwerte
- Fallunterscheidung zur Behandlung der 4 Teilkurven:
 - Instabile Invarianzkurve $W^u(x^*)$: Integration in positive Zeitrichtung bis T und Rechnung mit dem Eigenpaar (λ_u, η_u) bzw. $(\lambda_u, -\eta_u)$
 - Stabile Invarianzkurve $W^s(x^*)$: Integration in negative Zeitrichtung bis $-T$ und Rechnung mit dem Eigenpaar $(1/\lambda_s, \eta_s)$ bzw. $(1/\lambda_s, -\eta_s)$

Algorithmus 14 (Invarianzkurven-Fortsetzung)

Function $[x^*, L_1, L_2, L_3, L_4] = \text{kurven}(P, DP, x_0, \text{tol}, \varepsilon, \beta_{\min}, r_l, p_{\max})$

1. Fixpunktbestimmung:
Bestimme Fixpunkt x^* und Mododromiematrix M mit Algorithmus 12 bei gegebener Startnäherung x_0 und Toleranz $\text{tol} = \text{tolabs} = \text{tolrel}$.
2. Eigenwerte und -vektoren:
Bestimme λ_u und λ_s und die normierten Eigenvektoren η_u und η_s von M .
Falls $\lambda_u < 0$, so setze $T := 2T$ und $\lambda_u := \lambda_u^2$, $\lambda_s := \lambda_s^2$.
3. Fallunterscheidung:
 1. $W^{u+}(x^*)$: Integration mit $t > 0$ bis T mit dem Eigenpaar (λ_u, η_u)
 2. $W^{u-}(x^*)$: Integration mit $t > 0$ bis T mit dem Eigenpaar $(\lambda_u, -\eta_u)$
 3. $W^{s+}(x^*)$: Integration mit $t < 0$ bis $-T$ mit dem Eigenpaar $(1/\lambda_s, \eta_s)$
 4. $W^{s-}(x^*)$: Integration mit $t < 0$ bis $-T$ mit dem Eigenpaar $(1/\lambda_s, -\eta_s)$
4. Startprozedur:
Bestimme p Startpunkte x_k zu Radius $r_l > 0$ und lege Liste $L = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ mit $P^0(x_k) := x_k$ an. Setze $j := 1$.
5. Wiederhole solange $p < p_{\max}$:
 1. Berechne die Bildpunkte $P^j(x_k)$ aus den Urbildpunkten $P^{j-1}(x_k)$ und hänge sie an die Liste L an.
 2. Abstandstest mit Maximalabstand $\varepsilon > 0$ und Einfügen von Punkten
 3. Winkeltest mit Minimalwinkel $\beta_{\min} < 180^\circ$ und Einfügen von Punkten
 4. Falls Abbruch durch Nutzer, so break.
 5. $j := j+1$
6. Beende mit x^* und den 4 Punktlisten L_1, L_2, L_3, L_4

- Startprozedur für die Teilkurve: Auswahl der p Startpunkte x_k und Anlegen der Liste $L = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$
- Berechnung der Bildpunkte $P^j(x_k)$: Anwendung der Poincaré-Abbildung P auf die Urbildpunkte $P^{j-1}(x_k)$
- Abstands- und Winkeltest: Einfügen von Punkten auf der Teilkurve und schrittweise Interpolation weiterer Punkte, bis Abstands- und Winkeltest erfüllt sind
- Abbruchbedingung: Abbruch der Fortsetzung durch den Benutzer oder wenn eine maximale Anzahl p_{max} von Listenpunkten erreicht ist.

Zur Berechnung des Sattelpunktes x^* und der Abbildungspunkte $P^j(x_k)$ wird ein stabiler und zugleich effizienter DGL-Löser benötigt, der in der in positiver und negativer Zeitrichtung zuverlässig arbeitet.

Der Gesamtalgorithmus 14 wurde vom Autor in einer ersten Form bereits in den Arbeiten [4] und [20] implementiert und angewendet. Die nunmehr in MATLAB 7.1 vorliegende Version aus [19] besitzt eine interaktive Grafik, mit deren Hilfe der Nutzer die Entwicklung jeder der 4 Teilkurven verfolgen und ggf. abbrechen kann. Sämtliche berechneten Werte werden in einer Protokolldatei gespeichert und stehen zur Visualisierung zur Verfügung.

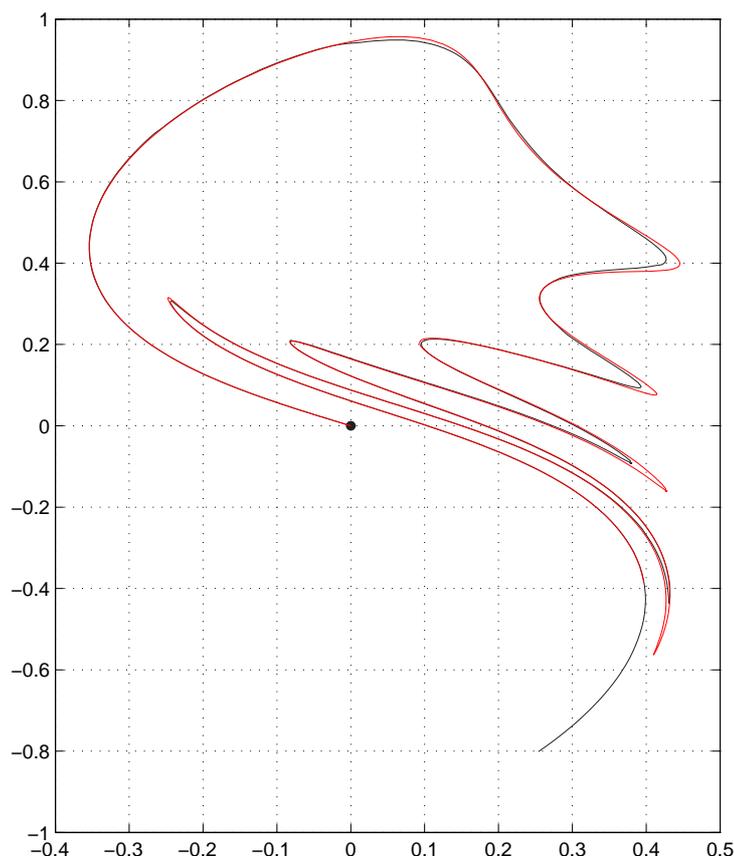


Abbildung 28: Invarianzkurve mit $tol = 10^{-3}$ (schwarz) und mit $tol = 10^{-12}$ (rot)

Aus der Darstellung von Algorithmus 14 wird ersichtlich, dass neben der Fixpunktnäherung x_0 folgende Verfahrensparameter vom Benutzer verändert werden können:

- tol absolute und relative Toleranz des MATLAB-Solvers `ode45`
- ε maximaler Abstand zwischen den Punkten der Invarianzkurven
- β_{min} minimaler Winkel zwischen drei aufeinander folgenden Punkten
- r_l Radius des Kreises um den Fixpunkt x^* , in dem die Startpunkte liegen
- p_{max} maximale Anzahl an Punkten pro Teilkurve.

Da der Erfolg des Verfahrens wesentlich durch diese Parameter bestimmt wird, sollen nachfolgend Hinweise zu ihrer passenden Wahl gegeben und an einem Beispiel veranschaulicht werden.

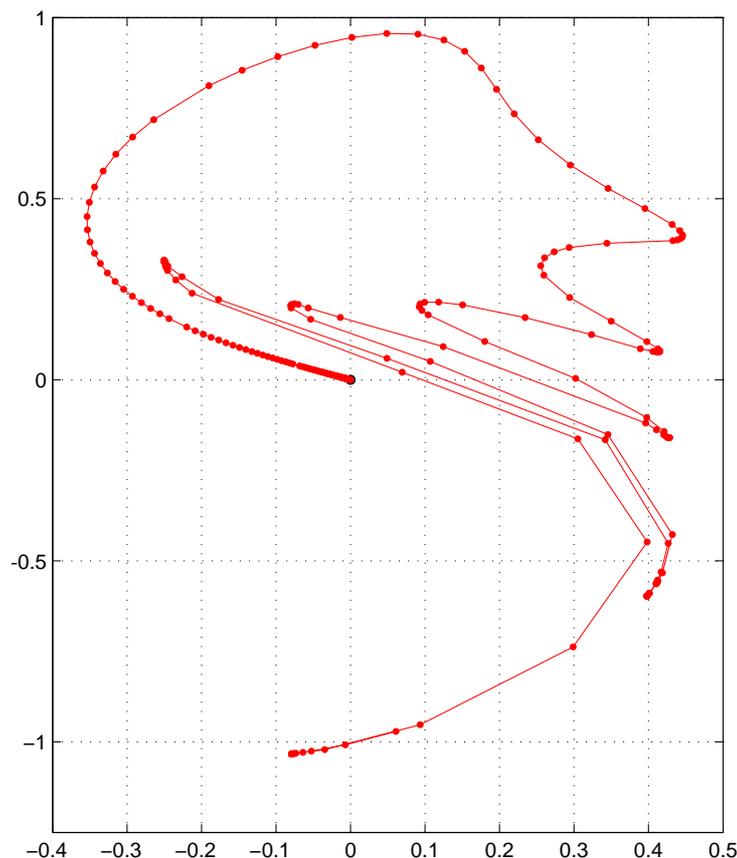


Abbildung 29: Invarianzkurve mit $\varepsilon = 0.5$

Beispiel 15 (Ein parametrisch erregtes Pendel nach Homburg u.a.)

Dieses Beispiel für ein parametrisch erregtes Pendel wird in [9] behandelt. Das System 1. Ordnung hat die Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -(\alpha^2 + \beta \cos t)(y_1 + y_1^3). \end{aligned}$$

Die zugehörige Jacobi-Matrix lautet

$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha^2 + \beta \cos t)(1 + 3y_1^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha = 0.5$ und $\beta = 0.2$ lässt sich $P_1 = (0.0, 0.0)$ als Sattelpunkt ermitteln. Wir variieren nun die genannten Parameter und beobachten nachfolgend die Ergebnisse. ■

Die Toleranz tol des DGL-Solvers erweist sich als wesentlich für die Genauigkeit der berechneten Kurven. In Abbildung 28 wurden die Berechnungen für eine Teilkurve des Beispiels 17 mit $tol = 10^{-3}$ und mit $tol = 10^{-12}$ durchgeführt. Die erheblichen Genauigkeitsunterschiede in den “Spitzen“ sind gut sichtbar. Zwar waren die Darstellungen bei einer kleinen Toleranz von $tol = 10^{-12}$ stets genauer, die Berechnung dauerten jedoch wesentlich länger. Aus diesem Grund wurden für die weiteren Berechnungen die mittlere Genauigkeit von $tol = 10^{-6}$ gewählt.

Der Abstand ε zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten sollte so klein sein, dass in der Darstellung eine optisch glatte Kurve erhalten wird. In Abbildung 29 sieht man, was passiert, wenn ε zu groß gewählt wurde. Im weiteren Fortschritt der Berechnungen liegen die Punkte zu weit auseinander und die Kurve wird eckig gezeichnet. Deshalb wird ε mit $\frac{1}{50}$ der Größe des Ausgabefensters belegt und es entstehen ansehnliche Resultate (siehe z.B. Abbildung 36).

Vom Winkel β_{min} hängt die Glattheit der gezeichneten Kurven wesentlich ab. Sind starke Krümmungen in der Invarianzkurve vorhanden, so werden diese besser dargestellt, wenn β_{min} größer gewählt wird. Abbildung 30 zeigt den Unterschied zwischen einem minimalem Winkel $\beta_{min} = 90^\circ$ und dem gewählten Standardwert von $\beta_{min} = 135^\circ$. Bei dem Wert $\beta_{min} = 135^\circ$ wurden mehr Punkte eingefügt und die Rundung damit besser zur Geltung gebracht.

Der Radius r_l : Wie in Abschnitt 3.3 bereits erwähnt, ist die Wahl von r_l wichtig für die Startpunkte. In Abbildung 31 wurde $r_l = 10^{-6}$ einmal sehr klein und andererseits $r_l = 0.05$ sehr groß gewählt. Für $r_l = 10^{-6}$ stagniert die Berechnung zunächst am Fixpunkt x^* . Die Punkte der Invarianzkurve liegen bei x^* extrem dicht beieinander. Im Unterschied dazu liegen für $r_l = 0.05$ schon die Startpunkte weit von x^* entfernt. Entsprechend schnell erfolgt die Berechnung der Invarianzkurve. Als Standardwert wurde r_l mit $\frac{1}{150}$ der Größe des Ausgabefensters initialisiert.

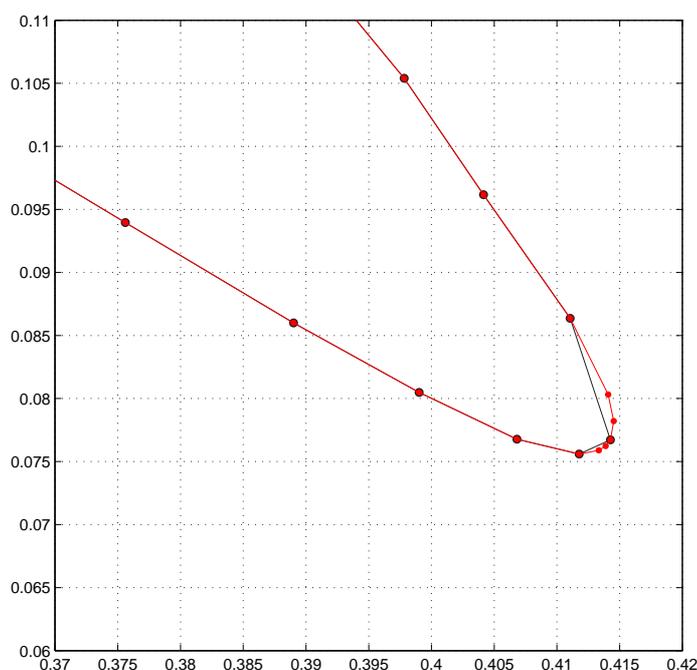


Abbildung 30: Vergrößerter Ausschnitt der Invarianzkurven mit $\beta_{min} = 90^\circ$ (schwarz) und $\beta_{min} = 135^\circ$ (rot)

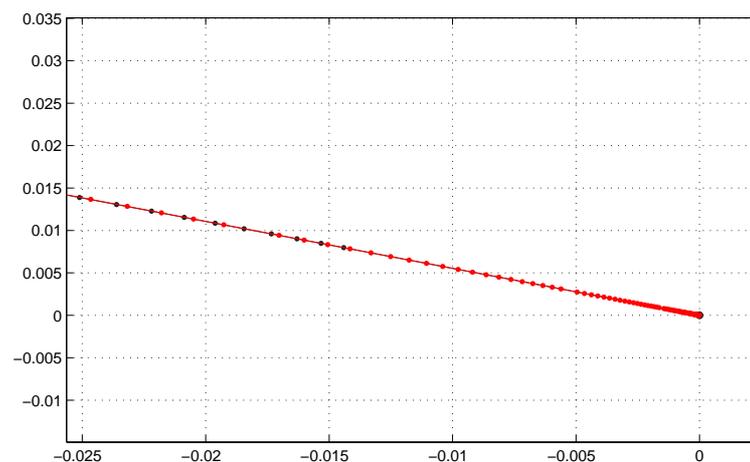


Abbildung 31: Die ersten Punkte der Invarianzkurven für $r_l = 0.05$ (schwarz) und für $r_l = 10^{-6}$ (rot)

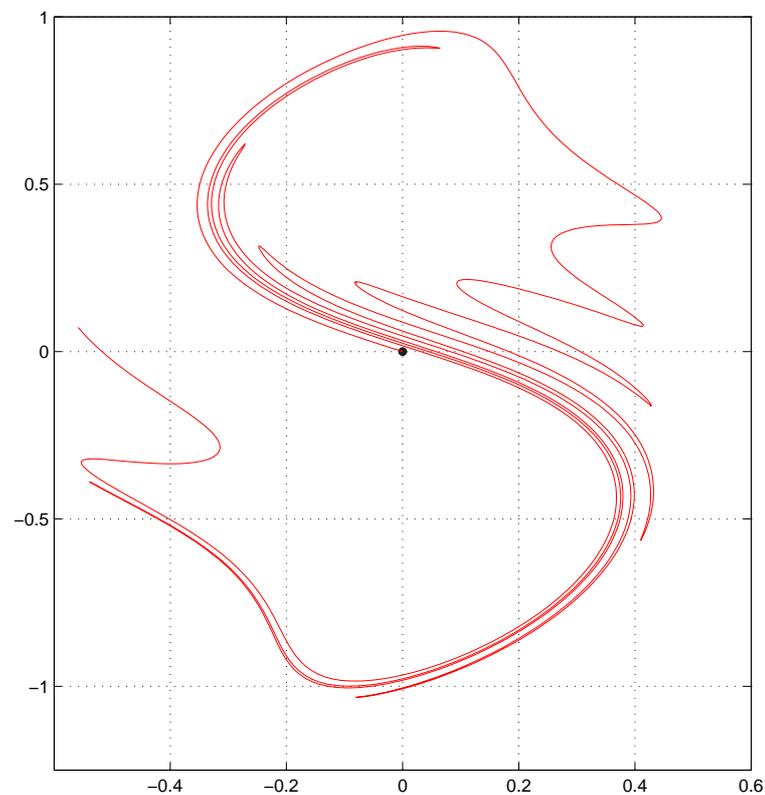


Abbildung 32: Invarianzkurve für $p_{max} = 1000$

Die Anzahl p_{max} gibt die maximale Anzahl der Punkte an, welche im neuen Startpunktvektor gespeichert werden. Je größer diese Zahl ist, desto weiter wird die Invarianzkurve verfolgt. Dies verursacht allerdings auch längere Berechnungen. Der Standardwert liegt bei $p_{max} = 300$. Für $p_{max} = 1000$ ist das Ergebnis in Abbildung 32 zu sehen.

3.5 Vergleich der Integrationsverfahren

Zur Lösung der auftretenden Anfangswertprobleme bietet MATLAB eine Reihe hochentwickelter numerischer Verfahren ("Löser") an. Neben den expliziten Runge-Kutta-Verfahren

`ode23`, `ode45` sind dies die beiden impliziten Einschrittverfahren `ode23s`, `ode23t` und die Familien linearer Mehrschrittverfahren `ode113`, `ode15s`. Die implementierten Lösungsverfahren sind:

<code>ode45</code>	Eingebettetes explizites Runge-Kutta-(4,5)-Verfahren von Dormand-Prince (guter Standardlöser für einfache DGL, Ordnung = 5)
<code>ode23</code>	Eingebettetes explizites Runge-Kutta-(2,3)-Verfahren von Bogacki & Shampine (evtl. bei groben Toleranzen, Ordnung = 3)
<code>ode113</code>	PECE-Verfahren von Adams-Bashforth-Moulton variabler Ordnung (effizienter Löser bei aufwändigen DGL, Ordnungen = 1–13)
<code>ode23s</code>	Linear-implizites Rosenbrock-(2,3)-Verfahren für steife DGL (guter Standardlöser für einfache DGL, Ordnung = 3)
<code>ode23t</code>	Trapezregel mit Extrapolation für moderat-steife DGL (als Alternative bei geringer Genauigkeitsforderung, Ordnung = 3)
<code>ode23tb</code>	Trapezregel mit BDF2-Formel gekoppelt, für steife DGL (als Alternative bei geringer Genauigkeitsforderung, Ordnung = 3)
<code>ode15s</code>	NDF-Verfahren variabler Ordnung bzw. optional BDF-Verfahren für steife DGL (effizienter Löser bei aufwändigen DGL, Ordnungen = 1–5)

Für alle auftretenden Berechnungen wurde der Standardlöser `ode45` von Dormand-Prince verwendet, der auf einem eingebetteten Runge-Kutta-Paar der Ordnungen (4,5) beruht. Da wir von nicht-steifen DGL ausgehen, sollen die verfügbaren expliziten Verfahren kurz verglichen werden.

Das Einschrittverfahren `ode23` basiert auf dem eingebetteten Runge-Kutta-Verfahren der Ordnungen (2,3). Mit der Standard-Toleranz $tol = 10^{-6}$ liefert es qualitativ gleichwertige Ergebnisse zu `ode45`, wie dies in Abbildung 34 dargestellt wird. Bei einer Vergleichsrechnung mit `ode45` benötigte es jedoch die doppelte Zeit zur Bestimmung einer Invarianzkurve. Um zeitlich gleiche Ergebnisse zu erzielen, musste die Toleranz auf $tol = 10^{-3}$ gesetzt werden. Dies verursacht allerdings Verschlechterungen in der Genauigkeit der Invarianzkurven-Berechnung, wie in Abbildung 33 zu erkennen ist.

Dem Code `ode113` liegt im Gegensatz zu `ode45` und `ode23` die Klasse der Adams-Bashforth-Moulten-(PECE)-Verfahren der Ordnungen 1–13 zugrunde. Sowohl zeitlich, als auch qualitativ gesehen liefert es gleichwertige Ergebnisse zu `ode45`. In Abbildung 34 ist dies ebenfalls dargestellt. Erst in starker Vergrößerung werden kleine Unterschiede zwischen `ode45`, `ode23` und `ode113` sichtbar (vgl. [19]).

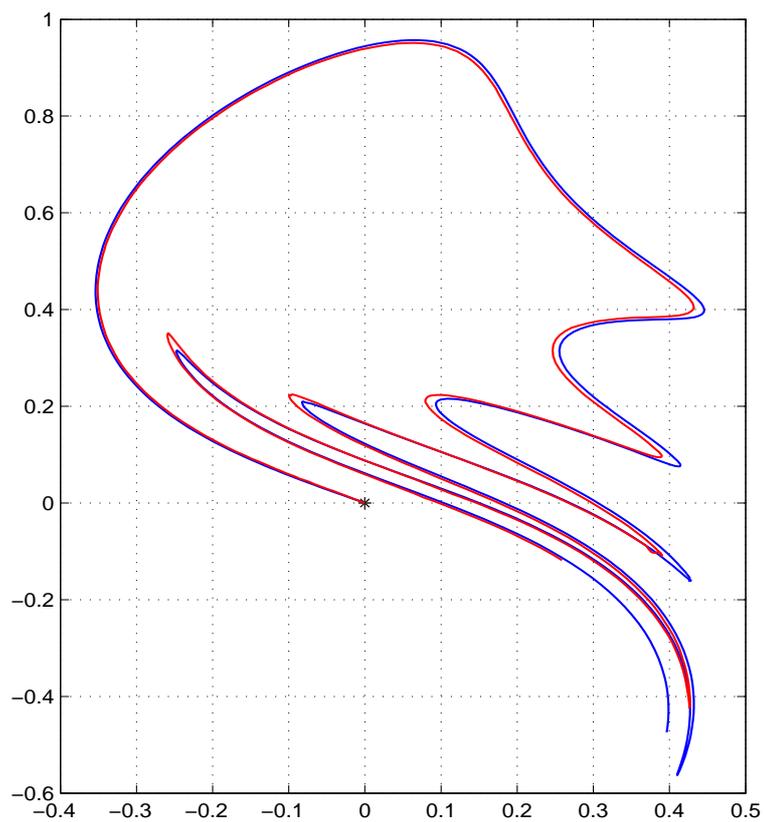


Abbildung 33: Invarianzkurve berechnet mit *ode23* für $tol = 10^{-3}$ (rot) und $tol = 10^{-6}$ (blau)

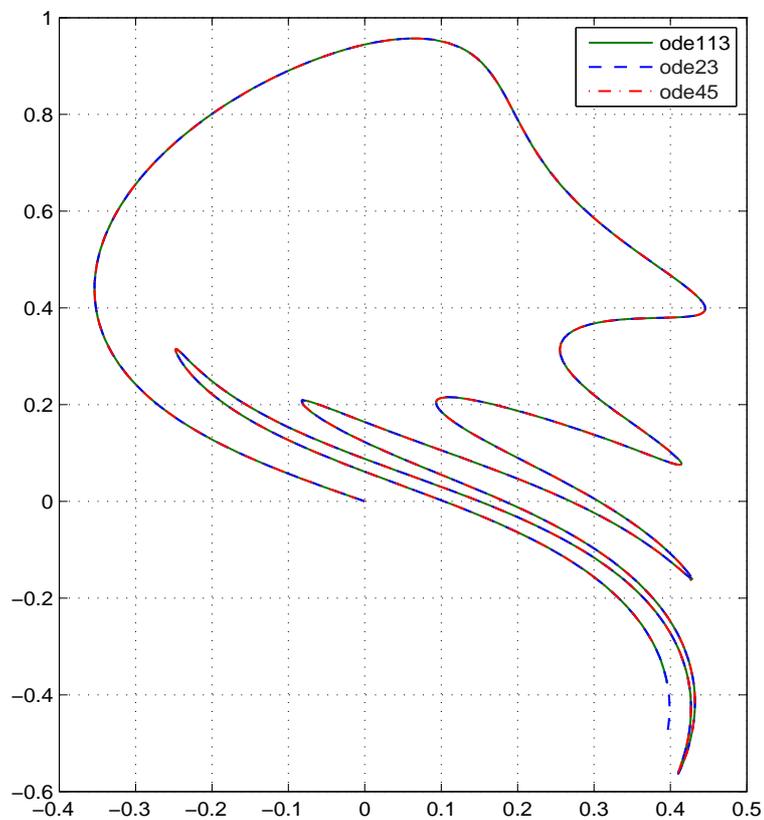


Abbildung 34: Invarianzkurve berechnet mit *ode113* (grün), *ode23* (blau) und *ode45* (rot)

4 Anwendungen des Fortsetzungs-Algorithmus

Das in Algorithmus 14 realisierte numerische Verfahren **kurven** wird nun zur Ermittlung stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten für periodisch erregte DGL angewendet.

4.1 Parametrisch erregtes Pendel

Zuerst untersuchen wir die bereits im vorigen Abschnitt eingeführten Gleichungen aus den Literaturen [9] und [11].

Beispiel 16 (Parametrisch erregtes Pendel aus [11])

Diese Differenzialgleichung 2. Ordnung wird als System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -(by_2 + \sin y_1 + a\lambda \cos(\omega t) \sin y_1) \end{aligned}$$

mit den Parameterwerten $a = 0.6$, $b = 0.005$, $\omega = 3.5$ und $\lambda = 3.0$ notiert. Mit Algorithmus 14 wird zuerst der Sattelpunkt $P_1 = (-3.14159, 2.178 \cdot 10^{-10}) \approx (-\pi, 0)$ der Stroboskop-Abbildung mit Periodendauer $T = 2\pi/\omega = 1.795195802051310\dots$ bis auf eine Genauigkeit von 10^{-6} bestimmt.

Wegen der charakteristischen Multiplikatoren $\lambda_u = 5.45676$ und $\lambda_s = 0.18162$ ist P_1 vom Satteltyp. In Abb. 35 ist die berechnete instabile Mannigfaltigkeit $W^u(P_1)$ in Rot, die stabile Mannigfaltigkeit $W^s(P_1)$ in Blau dargestellt. Mit den eingebauten Tests treten nun auch bei den extremen ‘‘Schwingungen‘‘ der Mannigfaltigkeiten keinerlei Probleme auf. ■

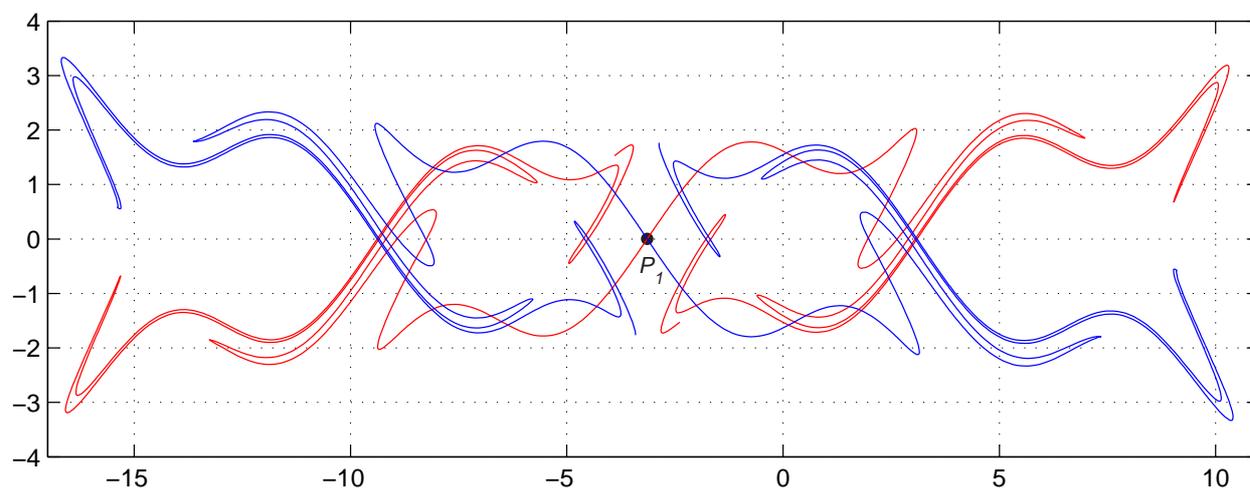


Abbildung 35: Die Invarianzkurven des parametrisch erregten Pendels aus [11]

Beispiel 17 (Ein parametrisch erregtes Pendel aus [9])

Dieses Beispiel für ein parametrisch erregtes Pendel hat die Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -(\alpha^2 + \beta \cos t (y_1 + y_1^3)). \end{aligned}$$

Für $\alpha = 0.5$ und $\beta = 0.2$ wurde $P_1 = (0.0, 0.0)$ als Sattelpunkt der Stroboskop-Abbildung P mit Periodendauer $T = 4\pi$ ermittelt. Mit den charakteristischen Multiplikatoren $\lambda_u = 3.4352$ und $\lambda_s = 0.29110$ wurde Algorithmus 14 gestartet und lieferte in negativer Eigenvektor-Richtung die Abb. 36. Entsprechend der Theorie über homokline Orbits erkennt man gut,

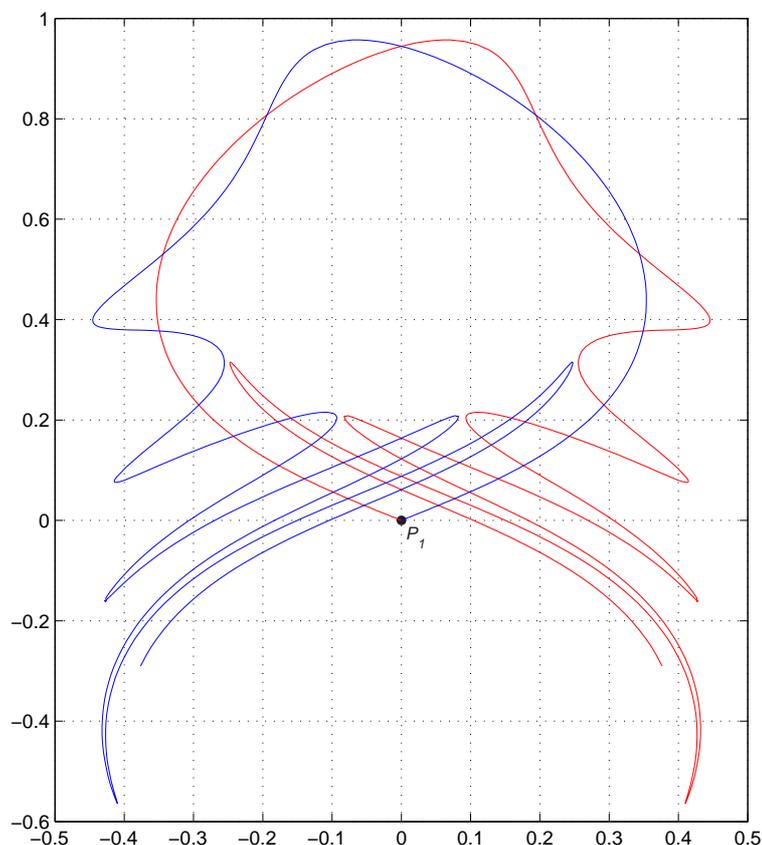


Abbildung 36: $W^u(P_1)$ in Rot und $W^s(P_1)$ in Blau in negativer Eigenvektor-Richtung mit $\alpha = 0.5$ und $\beta = 0.2$

dass sich $W^u(P_1)$ und $W^s(P_1)$ unendlich oft schneiden, wenn sie sich nur in einem Punkt $x^s \neq x^*$ schneiden.

In Abbildung 37 wurden die Invarianzkurven $W^u(P_1)$ und $W^s(P_1)$ des Homburg-Pendels in beide Richtungen dargestellt, was allerdings wegen der Symmetrie des Systems zu keiner informativeren Darstellung führte. ■

4.2 Oszillatoren vom Duffing-Typ

Als weiteres Standardbeispiel wollen wir nun den bereits mit der Mittelungsmethode untersuchten Duffing-Oszillator (20) betrachten, der u.a. in [5] ausführlich behandelt wird.

Beispiel 18 (Periodisch erregter Duffing-Oszillator)

Der Duffing-Oszillator genüge der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x} + x + \gamma x^3 = \cos(\eta t), \quad (59)$$

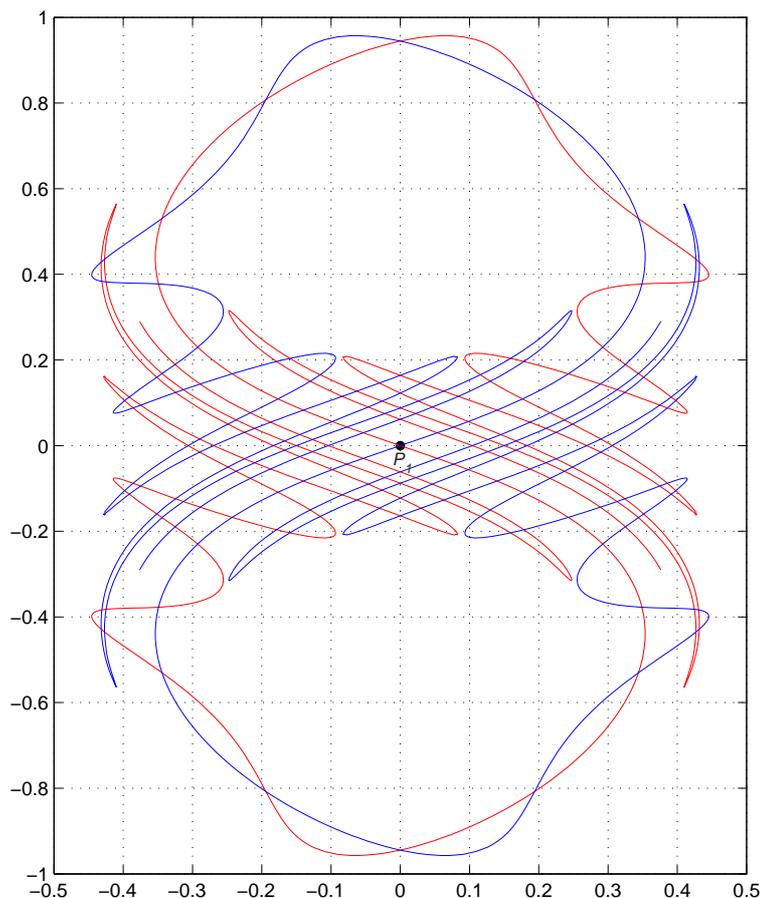


Abbildung 37: $W^u(P_1)$ in Rot und $W^s(P_1)$ in Blau mit $\alpha = 0.5$ und $\beta = 0.2$

worin κ die Dämpfung und η die Frequenz der Anregung des Systems bezeichnet. Durch γ wird die nichtlineare rücktreibende Kraft charakterisiert. Mit $y_1 := x$ und $y_2 := \frac{\dot{x}}{\eta}$ ergibt sich das System 1. Ordnung

$$\dot{y}_1 = \eta y_2, \quad \dot{y}_2 = \frac{1}{\eta} \{-\kappa \dot{x} - x - \gamma x^3 + \cos(\eta t)\}$$

und daraus

$$\dot{y}_1 = \eta y_2, \quad \dot{y}_2 = -\kappa y_2 - \frac{1}{\eta} y_1 - \frac{\gamma}{\eta} y_1^3 + \frac{1}{\eta} \cos(\eta t). \quad (60)$$

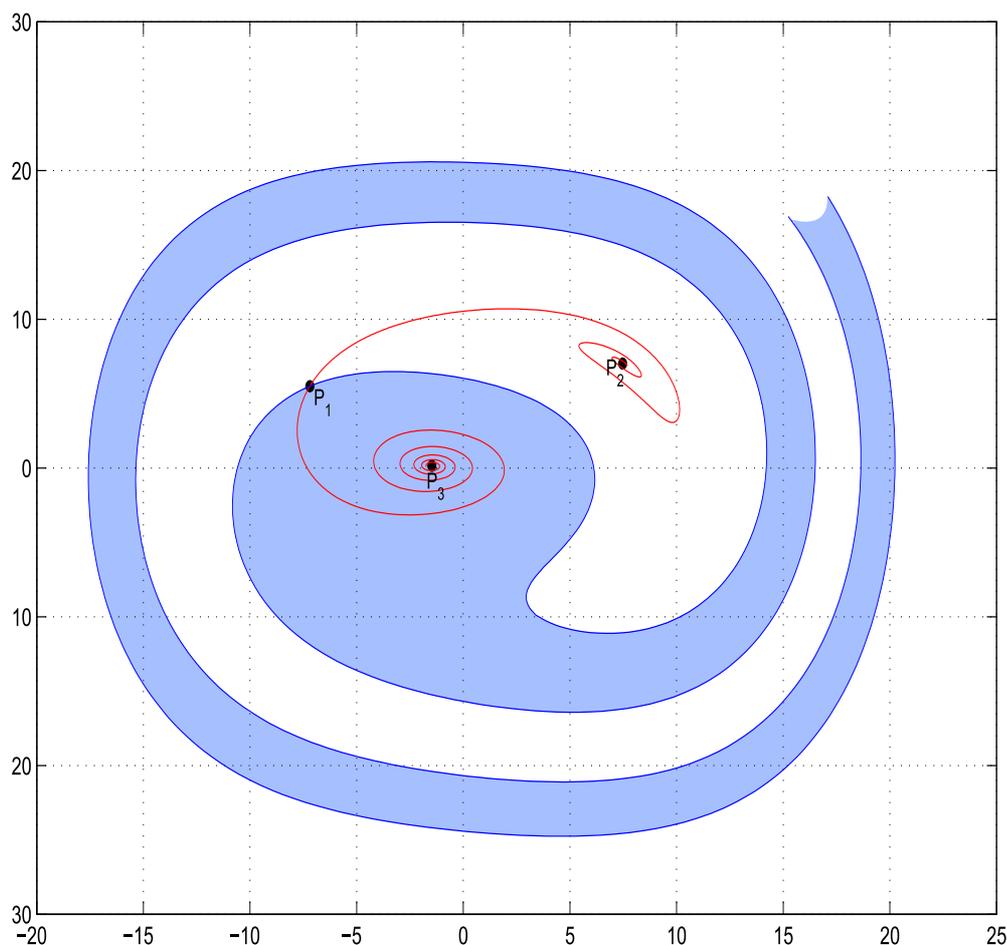
Die zugehörige Jacobi-Matrix lautet

$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ -\frac{1+3\gamma y_1^2}{\eta} & -\kappa \end{pmatrix}.$$

Zu den Parameterwerten $\kappa = 0.05$, $\gamma = 0.01$ und $\eta = 1.3$ und der Stroboskop-Abbildung P mit Periodendauer $T = 2\pi/\eta = 4.833219467061220\dots$ liefert Algorithmus 14 die drei Fixpunkte, wobei $P_1 = (-7.20, 5.50)$ als Sattelpunkt und $P_2 = (7.47, 7.02)$, $P_3 = (-1.47, 1.42)$ als stabile Fokuspunkte des Systems gemäß Tabelle 2 identifiziert wurden. In Abbildung 38 sind diese Punkte und die zu P_1 gehörigen Kurven $W^u(P_1)$ in Rot und $W^s(P_1)$ in Blau zu

	Startwerte	x_1^*	x_2^*	λ_1	λ_2	Klassifikation
P_1	-7.0 5.0	-7.19555	5.49626	0.50832	1.54490	Sattelpunkt
P_2	7.0 7.0	7.47447	7.02360	0.74166	$\pm 0.48504i$	stabiler Fokus
P_3	-2.0 1.0	-1.47137	0.14243	0.17462	$\pm 0.86881i$	stabiler Fokus

Tabelle 2: Berechnungen zu Abbildung 38

Abbildung 38: Duffing-System mit $\kappa = 0.05$, $\gamma = 0.01$ und $\eta = 1.3$

sehen. Die Separatrix $W^s(P_1)$ trennt die beiden Einzugsbereiche der stabilen Fixpunkte. Der blau schraffierte Bereich zeigt den Einzugsbereich des stabilen Fixpunktes P_3 .

Im Vergleich mit der Mittelungsmethode lässt Abb. 39 die bereits erwähnte gute Übereinstimmung im betrachteten Bereich $[-20, 20] \times [-20, 20]$ erkennen.

Abbildung 40 zeigt die mit Parameterwerten $\kappa = 0.05$, $\gamma = 0.005$ und $\eta = 1.3$ ermittelten Invarianzkurven. Der Sattelpunkt verlagert sich zu $P_1 = (-7.20, 5.50)$, die stabilen Fixpunkte sind nun $P_2 = (7.47, 7.02)$ und $P_3 = (-1.47, 1.42)$. ■

In [6] analysiert C. Hayashi neben dem Duffing-Oszillator (59) auch eine Reihe subharmonisch erregter Schwingungssysteme vom Duffing-Typ. Wir betrachten hier exemplarisch das in Abschnitt 2 vorgestellte 3-fach subharmonische System.

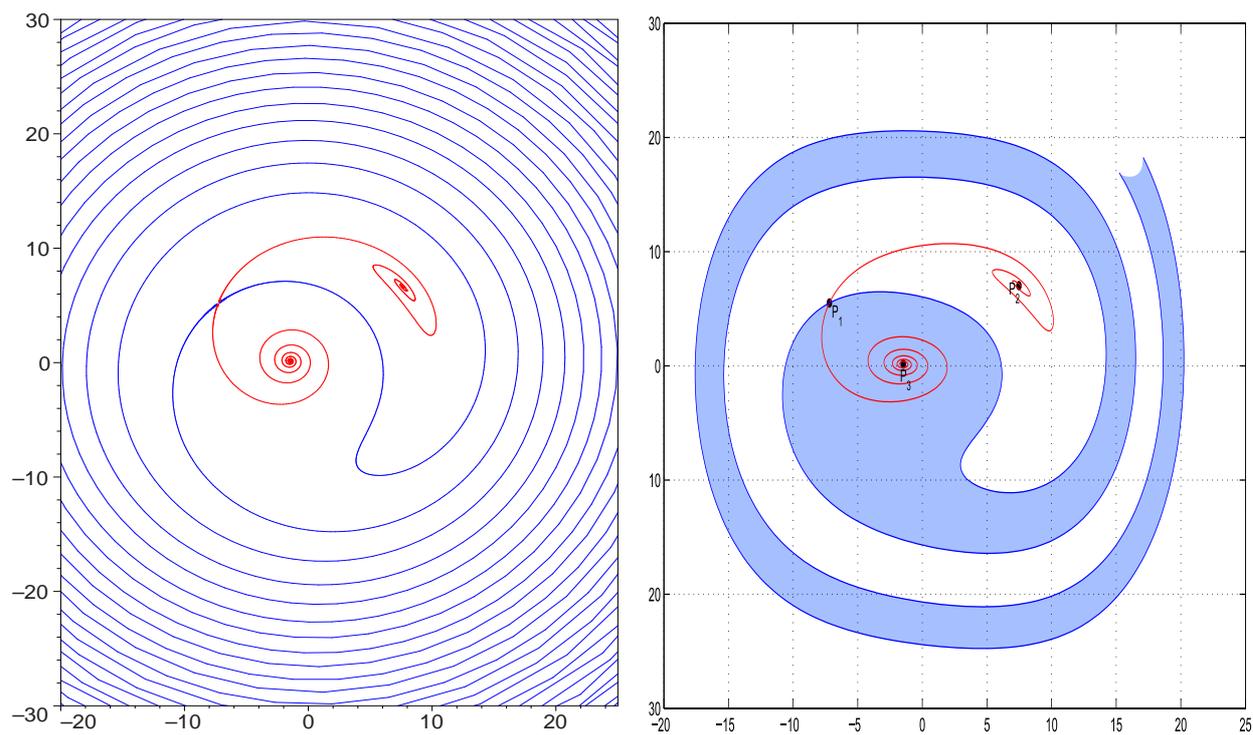


Abbildung 39: Invarianzkurven des gemittelten Duffing-Systems (links) und Stroboskop-Abbildung mit Einzugsbereichen der stabilen periodischen Lösungen (rechts) für $\gamma = 0.01$

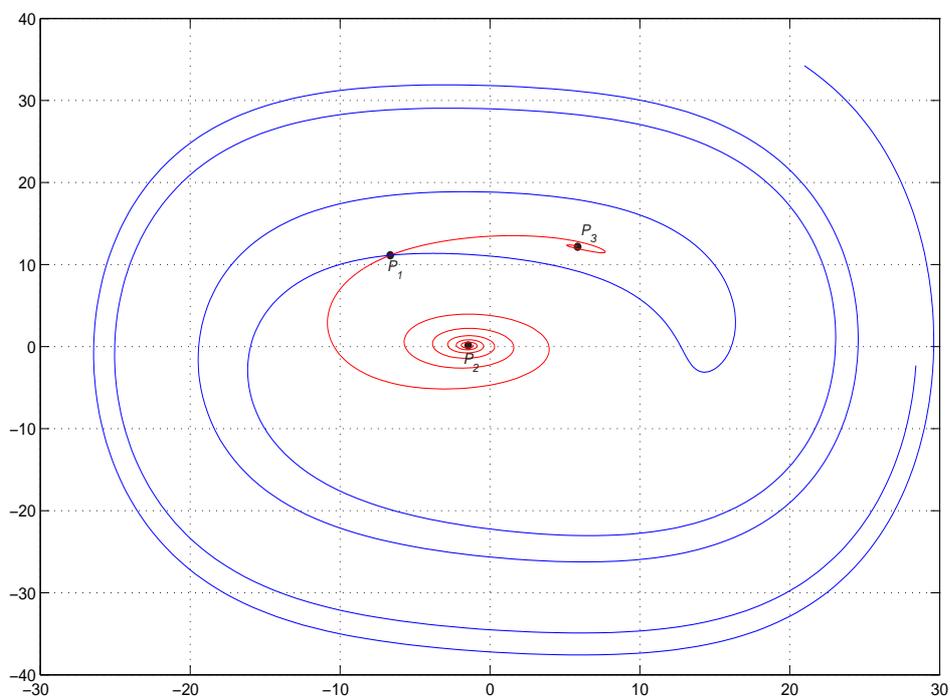


Abbildung 40: Duffing-System mit $\kappa = 0.05$, $\gamma = 0.005$ und $\eta = 1.3$

Beispiel 19 (Subharmonisch erregter Duffing-Oszillator)

Dieser Duffing-Oszillator genügt der Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B \cos(3t), \quad (61)$$

wofür in [6], S. 210ff, die Parameterwerte $k = 0.2$ und $B = 3.2$ angegeben werden. Um die periodischen Lösungen der Periodendauer $T = 2\pi$ zu ermitteln, notieren wir die DGL als System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -ky_2 - y_1^3 - B \cos(3t) \end{aligned}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3y_1^2 & -k \end{pmatrix}.$$

Algorithmus 14 liefert insgesamt sieben Fixpunkte P_1, P_2, \dots, P_7 , deren Koordinaten und

	Startwerte	x_1^*	x_2^*	λ_1	λ_2	Klassifikation
P_1	-0.36 0.07	-0.35792	0.07262	-0.48021	$\pm 0.23239i$	stabiler Fokus
P_2	0.74 0.32	0.74576	0.31951	-0.52250	$\pm 0.10772i$	stabiler Fokus
P_3	-0.85 -0.97	-0.84704	-0.96790	-0.52250	$\pm 0.10772i$	stabiler Fokus
P_4	-1.14 1.21	-1.13569	1.20778	-0.52250	$\pm 0.10772i$	stabiler Fokus
P_5	-0.23 -0.66	-0.23178	-0.66475	0.03506	8.11846	Sattelpunkt
P_6	-1.24 0.45	-1.24029	0.45162	0.03506	8.11846	Sattelpunkt
P_7	0.21 0.66	0.21004	0.65569	8.11846	0.03506	Sattelpunkt

Tabelle 3: Berechnungen für Abbildung 41

charakteristische Multiplikatoren in Tabelle 3 angegeben sind. P_5, P_6 und P_7 sind vom Sattelpunkttyp, während die übrigen Fixpunkte stabile Fokuspunkte darstellen. Zu jedem der drei Sattelpunkte wurden die instabilen und stabilen Invarianzkurven $W^u(P_i)$ und $W^s(P_i)$, $i = 5, 6, 7$, bestimmt. Die Einzugsbereiche der stabilen Fixpunkte sind in Abbildung 41 in verschiedenen Farben schraffiert.

Die in Abschnitt 2 mit den gleichen Parameterwerten angewandte formale Mittelungsmethode führte auf Abbildung 11. Im Vergleich beider Abbildungen sind die Einzugsbereiche der stabilen Fokuspunkte wieder zu erkennen. Allerdings "idealisiert" die Mittelung diese Gebiete, während die Poincaré-Abbildung ein realistischeres Bild liefert. ■

4.3 Der Ferroresonanz-Stabilisator von E. Philippow

Auf den nichtlinearen parallelen Ferroresonanzkreis aus Abschnitt 2 wollen wir nun ebenfalls die Poincaré-Methode anwenden. Die Modellgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^n = -\Gamma \cos t \quad (62)$$

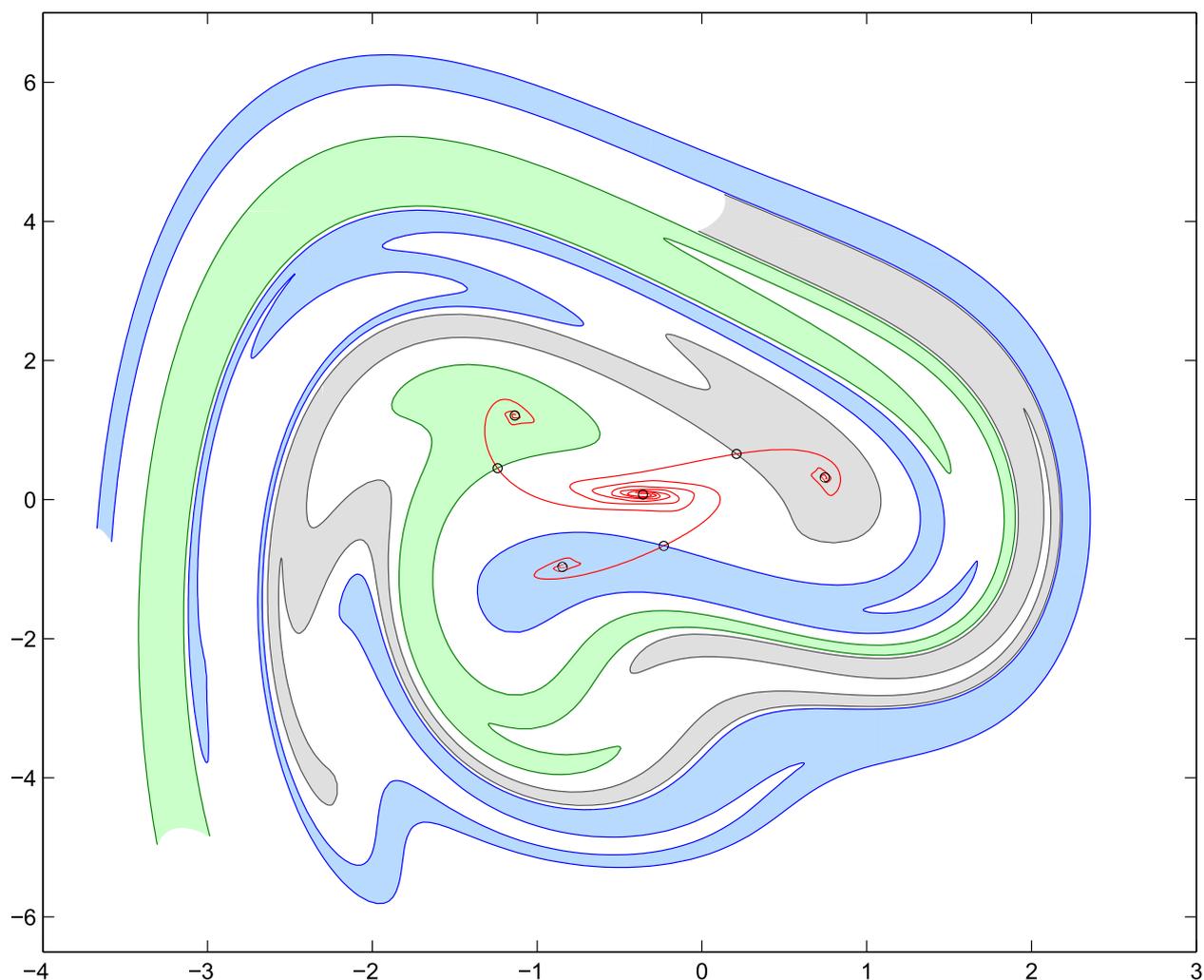


Abbildung 41: Subharmonisch erregter Duffing-Oszillator (61) mit $k = 0.2$ und $B = 3.2$

wird dazu auf das System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -(\delta y_2 + \alpha y_1 + \beta y_1^n + \Gamma \cos t); \end{aligned}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta n y_1^{n-1}) & -\delta \end{pmatrix}$$

transformiert. In diesem System sollen die Parameter für die Dämpfung δ und die normierte Erregungsamplitude Γ variiert werden. Die restlichen Parameter erhalten dabei die festen Werte $n = 9$, $\alpha = 0.65$ und $\beta = 0.75$.

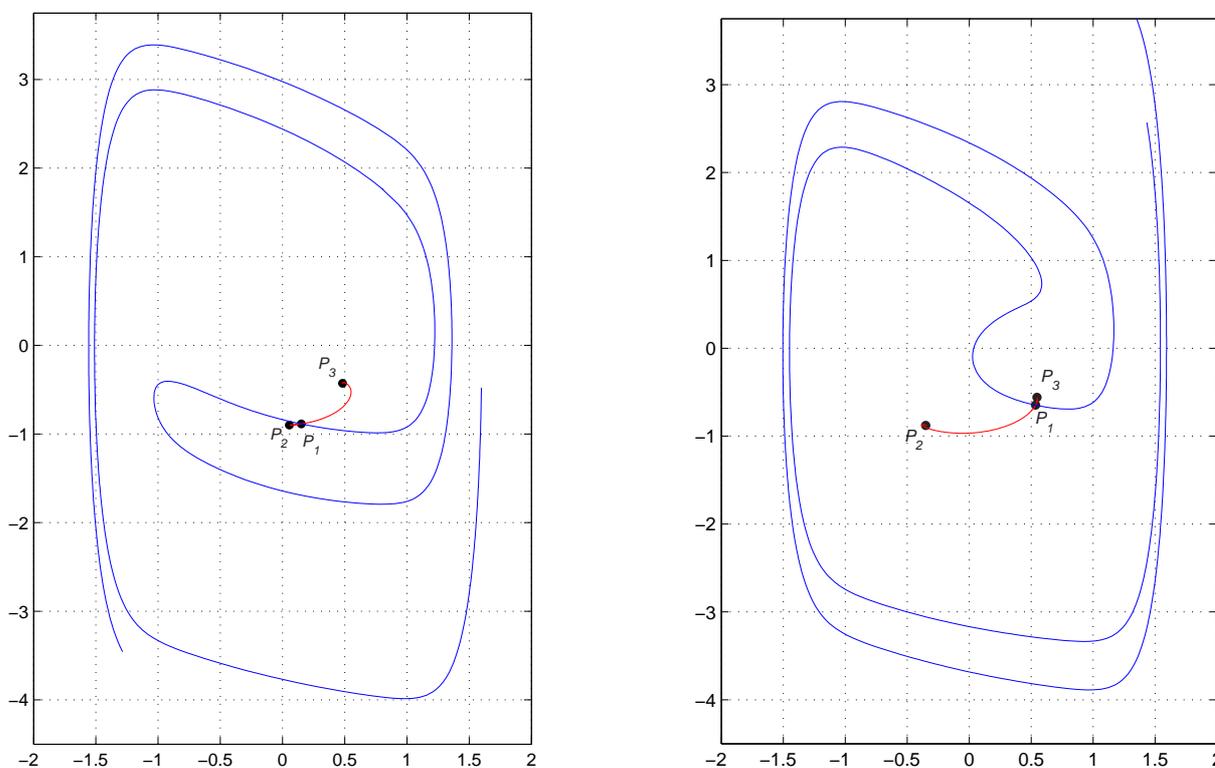
Wir untersuchen System (63) zuerst bei festem $\delta = 0.3$ und erhalten die Zahlen in den Tabellen 4 und 5. Die Abbildungen 42 zeigen die Invarianzkurven des Sattelpunktes P_1 für kleine Werte von Γ . In Abbildung 42 links liegen die Fixpunkte bei $P_1 = (0.15, -0.87)$, $P_2 = (0.05, -0.87)$ und $P_3 = (0.48, -0.43)$. Die Lösung P_3 besitzt dabei den größeren Einzugsbereich gegenüber P_2 . Für Abbildung 42 rechts sind die Fixpunkte $P_1 = (0.54, -0.65)$,

	Startwerte	x_1^*	x_2^*	μ_1	μ_2	Klassifikation
P_1	0.2 -0.8	0.15109	-0.88632	1.12173	0.13536	Sattelpunkt
P_2	0.1 -1.0	0.05406	-0.89918	0.86852	0.17482	stabiler Knotenpunkt
P_3	0.5 -0.5	0.48264	-0.42870	$0.18454 \pm 0.34319i$		stabiler Fokuspunkt

Tabelle 4: Berechnungen zu Abbildung 42 links

	Startwerte	x_1^*	x_2^*	μ_1	μ_2	Klassifikation
P_1	0.6 -0.7	0.53527	-0.64704	0.12097	1.25517	Sattelpunkt
P_2	-0.4 -1.0	-0.35115	-0.87813	$0.04143 \pm 0.38745i$		stabiler Fokuspunkt
P_3	0.5 -0.5	0.54702	-0.55845	0.21205	0.71604	stabiler Knotenpunkt

Tabelle 5: Berechnungen für Abbildung 42 rechts

Abbildung 42: Invarianzkurven des Ferroresonanz-Stabilisators für $\delta = 0.3$, $\Gamma = 0.292$ (links) sowie $\delta = 0.3$, $\Gamma = 0.33$ (rechts)

$P_2 = (-0.35, -0.88)$ und $P_3 = (0.55, -0.56)$. Die Periodendauer beträgt in beiden Abbildungen $T = 2\pi$. Hier hat sich die Größe der Einzugsbereiche von P_2 und P_3 deutlich erkennbar umgekehrt, was für die technische Ausführung von Bedeutung sein dürfte.

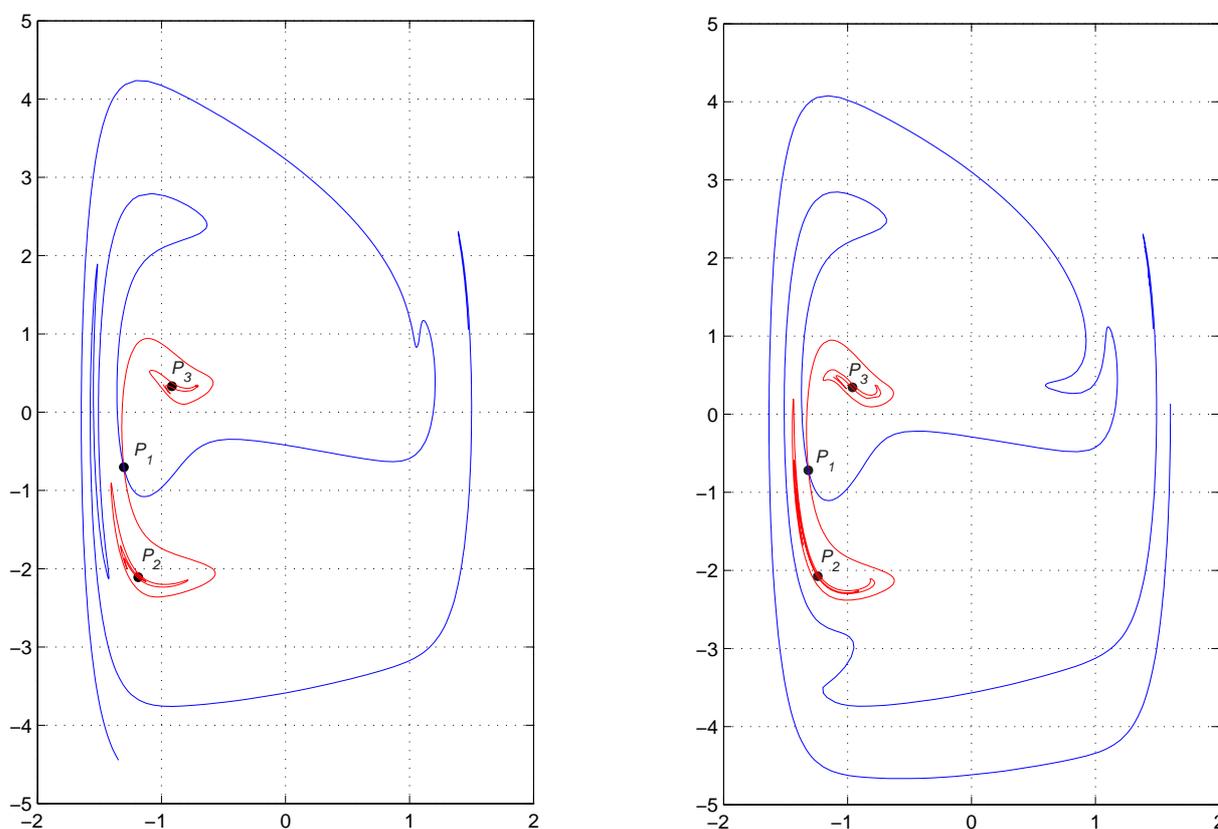
Nun sollen die Invarianzkurven des Systems für größere Werte von Γ bei festem Dämpfungsparameter $\delta = 0.15$ bestimmt werden. Die Rechnungen liefern die Fixpunkte in den Tabellen 6 und 7. In Abbildung 43 (links) liegt der Sattelpunkt bei $P_1 = (-1.30, -0.70)$ und die beiden stabilen Fixpunkte bei $P_2 = (-1.19, -2.11)$ und $P_3 = (-0.91, 0.33)$. Im Vergleich

	Startwerte	x_1^*	x_2^*	μ_1	μ_2	Klassifikation
P_1	-1.3 -0.7	-1.30417	-0.70377	0.15164	2.56963	Sattelpunkt
P_2	-1.2 -2.1	-1.18779	-2.10820	-0.44936	-0.86715	stabiler Knotenpunkt
P_3	-1.0 0.2	-0.91605	0.33181	-0.44936	-0.86715	stabiler Knotenpunkt

Tabelle 6: Berechnungen für Abbildung 43 links

	Startwerte	x_1^*	x_2^*	μ_1	μ_2	Klassifikation
P_1	-1.32 -0.72	-1.31612	-0.71829	0.14055	2.77232	Sattelpunkt
P_2	-1.24 -2.07	-1.24015	-2.07460	-0.27445	-1.41978	Sattelpunkt
P_3	-0.96 0.34	-0.95989	0.34424	-0.27445	-1.41978	Sattelpunkt

Tabelle 7: Berechnungen für Abbildung 43 rechts

Abbildung 43: Invarianzkurven des Ferroresonanz-Stabilisators für $\delta = 0.15$, $\Gamma = 1.9$ (links) sowie $\delta = 0.15$, $\Gamma = 2.0$ (rechts)

zu Abbildung 42 sieht man eine deutliche Veränderung der Invarianzkurven.

Die linke Abbildung 43 ähnelt der Abbildung 43 (links), allerdings besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden. Alle drei Punkte $P_1 = (-1.32, -0.72)$, $P_2 = (-1.24, -2.07)$ und $P_3 = (-0.96, 0.34)$ sind nun Sattelpunkte. Das bedeutet, dass von jedem dieser Punkte stabile und instabile Invarianzkurven berechnet werden können. Aus Gründen der Übersichtlichkeit und zum Vergleich mit Abbildung 43 (links) wurde darauf verzichtet und nur für P_1 die Invarianzkurven ermittelt. Im übrigen existieren weitere Fixpunkte für das System mit

den Parameterwerten $\delta = 0.15$ und $\Gamma = 2.0$, welche in [16] berechnet wurden. Bei beiden Abbildungen 43 lag wiederum die Periode $T = 2\pi$ zugrunde.

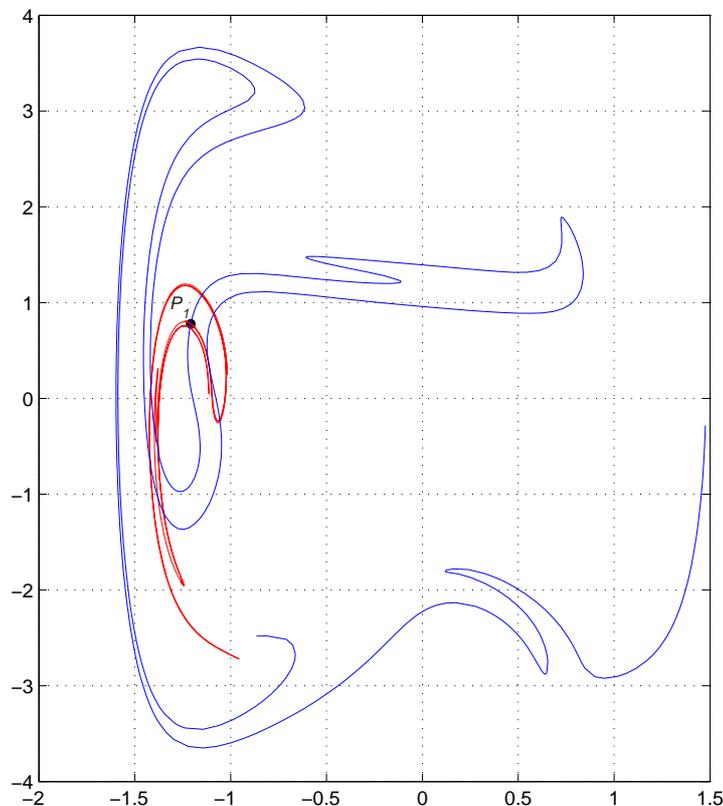


Abbildung 44: Invarianzkurven des Ferroresonanzstabilisators für $\delta = 0.15$ und $\Gamma = 3.0$

Die beiden Abbildungen 44 und 45 zeigen die Invarianzkurven für die Werte $\delta = 0.15$ und große Amplituden $\Gamma = 3.0$ bzw. $\Gamma = 4.5$. In Abbildung 44 ist der Sattelpunkt $P_1 = (-1.21, 0.78)$ und in Abbildung 45 der Sattelpunkt $P_1 = (-0.13, 1.26)$ sowie der stabile Fixpunkt $P_2 = (-0.44, 0.55)$ gezeichnet. Aufgrund von Bifurkationen verdoppelt sich die Periode auf $T = 4\pi$. Die Invarianzkurven unterscheiden sich deswegen deutlich von denen der bisherigen Abbildungen 42 und 43. Die in Abbildung 44 erkennbare Überschneidung der

	Startwerte	x_1^*	x_2^*	μ_1	μ_2	Klassifikation
P_1	-1.2 0.8	-1.20810	0.77821	12.21353	0.01243	Sattelpunkt

Tabelle 8: Berechnungen für Abbildung 44

	Startwerte	x_1^*	x_2^*	μ_1	μ_2	Klassifikation
P_1	-0.1 1.2	-0.13207	1.26736	0.02362	6.42902	Sattelpunkt
P_2	-0.4 0.5	-0.44352	0.55243	$-0.38208 \pm 0.07650i$		stabiler Fixpunkt

Tabelle 9: Berechnungen für Abbildung 45

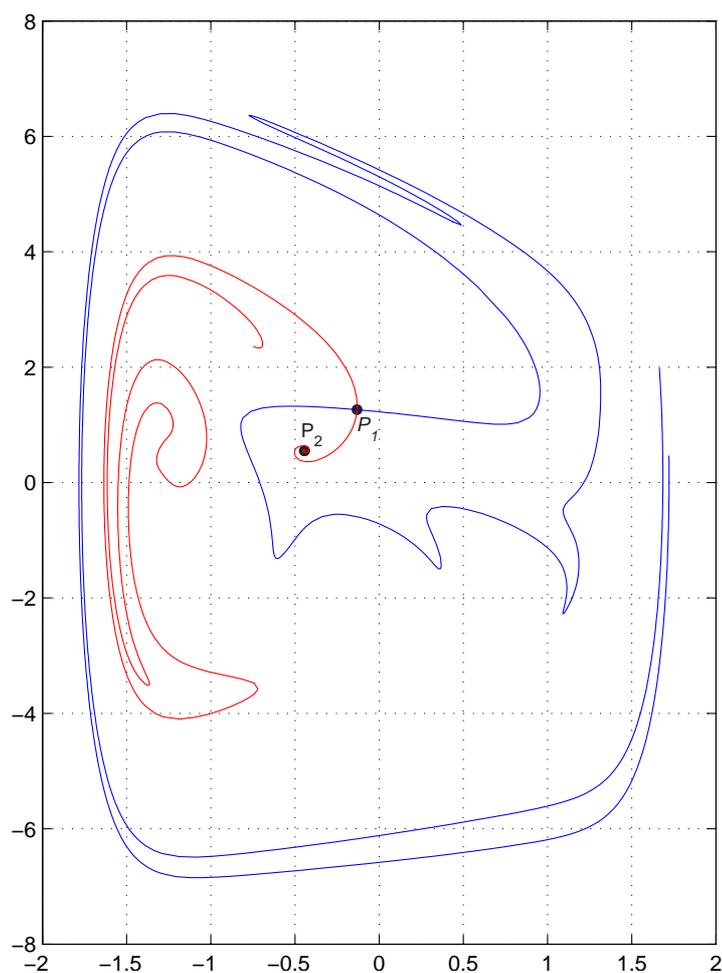


Abbildung 45: Invarianzkurven des Ferroresonanzstabilisators für $\delta = 0.15$ und $\Gamma = 4.5$

stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit könnte zur Detektierung chaotischen Verhaltens genutzt werden; hier sind weitere Untersuchungen angebracht.

5 Schlussfolgerungen

Um die Einzugsbereiche (Bassins) stabiler periodischer Lösungen zu bestimmen, bietet sich die Approximation der Ränder dieser Bassins an. Ausgehend von sattelartigen Lösungen werden deren stabile und instabile Mannigfaltigkeiten numerisch bestimmt und grafisch dargestellt.

Die beiden skizzierten Zugänge, die wir zur besseren Unterscheidung als *Mittelungsmethode* und *Poincaré-Methode* bezeichnet haben, wurden anhand verschiedener Anwendungsfälle miteinander verglichen. Dabei haben wir uns durchweg auf den ebenen Fall beschränkt und periodisch erregte zweidimensionale Systeme betrachtet, wofür die zu ermittelnden stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eindimensional sind. Weiterhin wurde hinreichende Glätte aller auftretenden Funktionen vorausgesetzt und keine fraktalen Einzugsgebiete sind zugelassen. Die Anwendung der vorgestellten Algorithmen auf interessante Schwingungssysteme lässt für beide Zugänge folgende *Schlussfolgerungen* zu:

- Die rein numerische Poincaré-Methode ist fast universell auf Systeme 1. Ordnung

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

mit in t periodischem Vektorfeld f anwendbar. Dagegen erfordert die analytisch-numerische Mittelungsmethode eine periodische Standardform mit kleinem Parameter ε , wodurch ihre *Anwendbarkeit* stark eingeschränkt wird (vgl. dazu den Ferroresonanz-Stabilisator von E. Philippow in Abschnitt 2.4) bzw. (wie bei den parametrisch erregten Pendelgleichungen in Abschnitt 4.1) überhaupt nicht möglich ist.

- Mit der Poincaré-Methode wird das originale System in ein *diskretes dynamisches System* überführt, für das die Fixpunkte analysiert und die invarianten Mannigfaltigkeiten $W^u(x^*)$ und $W^s(x^*)$ punktweise bestimmt werden. Dies ist zusammen mit den Interpolationsprozessen in Fortsetzungsalgorithmus 14 numerisch aufwändig realisiert worden. Die Mittelungsmethode generiert ein autonomes *kontinuierliches dynamisches System*, für das die invarianten Mannigfaltigkeiten $W^u(x^*)$ und $W^s(x^*)$ leicht als Lösung von Anfangswertproblemen mit Standardsoftware berechnet werden können.
- Andererseits sind die Resultate der Poincaré-Methode exakt bis auf numerische Diskretisierungs- und Abbruchfehler, die zudem hinreichend klein gemacht werden können. Anders verhält es sich bei der Mittelungsmethode: Das gemittelte DGL-System spiegelt das Verhalten der Mannigfaltigkeiten meist nur qualitativ richtig wider, woran eine hohe *numerische Präzision* bei der Bestimmung der Invarianzkurven nichts mehr ändern kann.

Die wesentlich höhere *Aussagekraft* der Poincaré-Methode wird z.B. im Vergleich der Abbildungen 11 und 12 zum subharmonisch erregten Oszillator von C. Hayashi recht deutlich. Der Preis dafür ist die geringe Effizienz dieser Methode:

Um für den periodisch erregten Duffing-Oszillator aus Beispiel 5 die Abbildung 6 zu erzeugen, benötigte die Mittelungsmethode mit MAPLE 8 einschließlich der Generierung des gemittelten Systems und der Grafikerstellung lediglich 3.26 Sekunden. Obwohl mit den schnellen Numerik-Lösern von MATLAB 7.1 gerechnet, verbrauchte die Poincaré-Methode hingegen für dasselbe System (vgl. dazu Abb. 40 ohne Schraffur) etwa 92 Sekunden, also mehr als die *25-fache Rechenzeit!* Ähnliche Beobachtungen ergaben sich auch bei anderen Zeitvergleichen¹³.

Das Ziel weiterer Untersuchungen sollte demzufolge in einer *Ansatzmethode* als “verbesserte Mittelungsmethode“ bestehen, die

- auf die originale DGL anwendbar ist,
- eine bessere Approximation der stabilen Mannigfaltigkeit garantiert,
- aber auch weiterhin analytisch-numerisch ausführbar ist.

Danksagung: Für die in der Diplomarbeit [19] durchgeführten Computerrechnungen möchte der Autor insbesondere Frau Dipl.-Math. S. Schlutter danken, die Algorithmus 14 aus PASCAL in MATLAB übertragen, verbessert und an den angeführten Beispielen erprobt hat.

¹³Sämtliche Rechnungen erfolgten auf einem PC mit einer CPU Pentium M 1.60 GHz.

Literatur

- [1] Abraham, R.H.; Shaw, C.D.: *Dynamics - The Geometry of Behavior, Part Tree: Global Behavior*. 4th printing, Aerial Press, Santa Cruz, California 1989
- [2] Argyris, J.; Faust, G.; Haase, M.; Friedrich, R.: *Die Erforschung des Chaos*. 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg 2010
- [3] Bogoljubov, N.N.; Mitropolski, J.A.: *Asymptotische Methoden in der Theorie der nicht-linearen Schwingungen*. Akademie-Verlag, Berlin 1965
- [4] Büntig, W.G.; Vogt, W.: *Non-linear Basic Circuits for Modelling Energetic Systems, Non-Linear Electromagnetic Systems*. ISO Press Amsterdam, 1998, S.531-534
- [5] Guckenheimer, J.; Holmes, P.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences 42. Springer-Verlag, New York 1983
- [6] Hayashi, Ch.: *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. First Princeton Printing, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1985
- [7] Hoffmann A., Marx B., Vogt W.: *Mathematik für Ingenieure. Band 1: Lineare Algebra, Analysis – Theorie und Numerik*, Pearson Studium, München 2005
- [8] Hoffmann A., Marx B., Vogt W.: *Mathematik für Ingenieure. Band 2: Vektoranalysis, Integraltransformationen, Differenzialgleichungen, Stochastik – Theorie und Numerik*, Pearson Studium, München 2006
- [9] Homburg, A.J.; Osinga, H.M.; Vegter, G.: *On the computation of invariant manifolds of fixed points*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, vol. 46, 1995, S. 171-187
- [10] Krauskopf, B.; Osinga, H.M.; Doedel, E.J. u.a.: *A survey of methods for computing (un)stable manifolds of vector fields*, Preprint, Mai 2004
- [11] Leven, R. W.; Koch, B. P.; Pompe, B.: *Chaos in dissipativen Systemen*, 2. Auflage, Akademie Verlag, Leipzig 1994
- [12] Marx, B.; Vogt, W.: *Dynamische Systeme – Theorie und Numerik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2010
- [13] Mickens, R.E.: *Oscillations in Planar Dynamic Systems*, World Scientific, Singapore 1996
- [14] Parker, T. S.; Chua L. O.: *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, New York 1989
- [15] Perko, L.: *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York 1991
- [16] Philippow, E. S.; Büntig, W. G.: *Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme der Elektrotechnik*, Carl Hanser Verlag, München 1992

-
- [17] Sanders, J. A.; Verhulst, F.: *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York 1985
- [18] Schilder, F.: *Numerische Approximation quasiperiodischer invarianter Tori unter Anwendung erweiterter Systeme*, Dissertation an der TU Ilmenau, 136 S., Ilmenau 2004
- [19] Schlutter, S.: *Numerische Fortsetzung stabiler und instabiler Invarianzkurven von Poincaré-Abbildungen dynamischer Systeme*, Diplomarbeit an der TU Ilmenau, Ilmenau 2008
- [20] Vogt, W.: *Numerical Simulation of Nonlinear Circuits – Periodic and Quasi-periodic Responses*, Berichte des IZWR, Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Vol. 1, 2003, S.73 - 87
- [21] Wegener, R.: *Globale Analyse von Differentialgleichungen, die Stabilisierungsverhalten beschreiben*, Diplomarbeit an der TH Ilmenau, Ilmenau 1985
- [22] Wiggins, S.: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York 1990