

# 50. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium

September, 19-23, 2005

**Maschinenbau  
von Makro bis Nano /  
Mechanical Engineering  
from Macro to Nano**

**Proceedings**

Fakultät für Maschinenbau /  
Faculty of Mechanical Engineering

Startseite / Index:

<http://www.db-thueringen.de/servlets/DocumentServlet?id=15745>

## Impressum

- Herausgeber: Der Rektor der Technischen Universität Ilmenau  
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Peter Scharff
- Redaktion: Referat Marketing und Studentische Angelegenheiten  
Andrea Schneider
- Fakultät für Maschinenbau  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Kurtz,  
Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. med. (habil.) Hartmut Witte,  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard Linß,  
Dr.-Ing. Beate Schlütter, Dipl.-Biol. Danja Voges,  
Dipl.-Ing. Jörg Mämpel, Dipl.-Ing. Susanne Töpfer,  
Dipl.-Ing. Silke Stauche
- Redaktionsschluss: 31. August 2005  
(CD-Rom-Ausgabe)
- Technische Realisierung: Institut für Medientechnik an der TU Ilmenau  
(CD-Rom-Ausgabe) Dipl.-Ing. Christian Weigel  
Dipl.-Ing. Helge Drumm  
Dipl.-Ing. Marco Albrecht
- Technische Realisierung: Universitätsbibliothek Ilmenau  
(Online-Ausgabe) [ilmedia](#)  
Postfach 10 05 65  
98684 Ilmenau
- Verlag:  Verlag ISLE, Betriebsstätte des ISLE e.V.  
Werner-von-Siemens-Str. 16  
98693 Ilmenau

© Technische Universität Ilmenau (Thür.) 2005

Diese Publikationen und alle in ihr enthaltenen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt.

ISBN (Druckausgabe): 3-932633-98-9 (978-3-932633-98-0)  
ISBN (CD-Rom-Ausgabe): 3-932633-99-7 (978-3-932633-99-7)

Startseite / Index:

<http://www.db-thueringen.de/servlets/DocumentServlet?id=15745>

Christian Weber

## **Simulationsmodelle für Maschinenelemente als Komponenten mechatronischer Systeme**

### **ABSTRACT**

In diesem Beitrag wird gezeigt, wie man mit aus der Elektro- und Regelungstechnik bekannten Prinzipien und Methoden (Mehrpoltheorie) Modelle für die dynamische Funktionssimulation von mechanischen Komponenten („Maschinenelementen“) aufbauen kann. Diese Modelle können dann in übergreifende Simulationsmodelle mechatronischer Systeme eingebracht werden, um das Verhalten des Gesamtsystems mit einer einheitlichen „Sprache“ zu beschreiben und so dessen Entwicklungsprozeß einfacher und sicherer zu machen. Weiterhin wird gezeigt, daß eine solche Betrachtungsweise das Verständnis und die Beschreibung des Verhaltens der mechanischen Komponenten selbst erheblich erleichtern kann.

### **1. EINFÜHRUNG**

Erfolgreiche Produkte und Systeme sind in immer größerem Umfang „mechatronische Produkte und Systeme“, sind also geschickte Kombinationen von Komponenten aus den Domänen Mechanik/Maschinenbau, Hydraulik/Pneumatik, Elektrik/Elektronik sowie Informationsverarbeitung. Dies hat erhebliche Bedeutung für den Entwicklungsprozeß, die darin verwendeten Methoden und Werkzeuge sowie die ihnen zugrunde liegenden Modelle (siehe z.B. [VDI-2206]).

Ein Aspekt, der dabei an Bedeutung gewinnt, ist die Simulation des instationären („dynamischen“) Systemverhaltens: Diese muß auf domänenübergreifenden Modellen beruhen, bereits in frühen Phasen der Produkt-/Systementwicklung anwendbar sein und möglichst den gesamten Entwicklungsprozeß begleiten, d.h. „mitwachsen“ können. Hierbei erweisen sich wiederum gerade die mechanischen Komponenten („Maschinenelemente“) als besonders unzugänglich, weil deren instationäres Übertragungsverhalten im traditionellen mechanischen Entwicklungsprozeß häufig erst gegen Ende und anhand physikalisch-gegenständlicher und nicht abstrakter funktions-/verhaltensorientierter Modelle betrachtet wird.

Der vorliegende Beitrag zeigt, wie man aus der Elektro- und Regelungstechnik bekannte Verfahren der Modellbildung (auch) auf mechanische Komponenten anwenden kann, um folgende Vorteile zu erzielen:

- Einheitliche, domänenübergreifende Modellbildung
- Einsatz bereits in frühen Phasen der Produkt-/Systementwicklung
- Fließende Erweiterungsmöglichkeiten bezüglich der Komplexität der Modelle über den gesamten Entwicklungsprozeß hinweg
- Im Vergleich zur konventionellen Betrachtung zum Teil viel einfachere Erklärung des instationären Übertragungsverhaltens der (mechanischen) Komponenten selbst

Ausgangspunkt ist die sogenannte Mehrpoltheorie. Aufbauend hierauf werden entsprechende Grundlagen und Regeln für die Bildung von Simulationsmodellen formuliert und anhand verschiedener Beispiele erläutert (teilweise über den Bereich der mechanischen Komponenten hinaus). In der Zusammenfassung wird kritisch auf mögliche Modellierungsalternativen eingegangen (z.B. regelungstechnische Blockschaltbilder, Bond-Graphen), und es werden die Einbindungsmöglichkeiten in existierende Softwaresysteme zur Systemsimulation (z.B. MatLab/Simulink) diskutiert. Schließlich werden noch mögliche Konsequenzen für die Lehre im Fach Maschinenelemente angesprochen. Einen Teil der grundlegenden Zusammenhänge hat der Autor bereits vor vielen Jahren veröffentlicht [Weber-83, Weber-86, Weber-87, Weber-91]. Zur damaligen Zeit – als das Stichwort „Mechatronik“ noch nicht gebräuchlich war – waren jedoch die Anwendungen begrenzt, außerdem fehlten die Werkzeuge zur rechnerunterstützten Auswertung der Gleichungssysteme. Im vergangenen Jahr (2004) hat der Autor die Erkenntnisse aktualisiert und erheblich erweitert sowie in den Kontext der Beschreibung und Simulation des instationären („dynamischen“) Systemverhaltens mechatronischer Systeme gestellt.

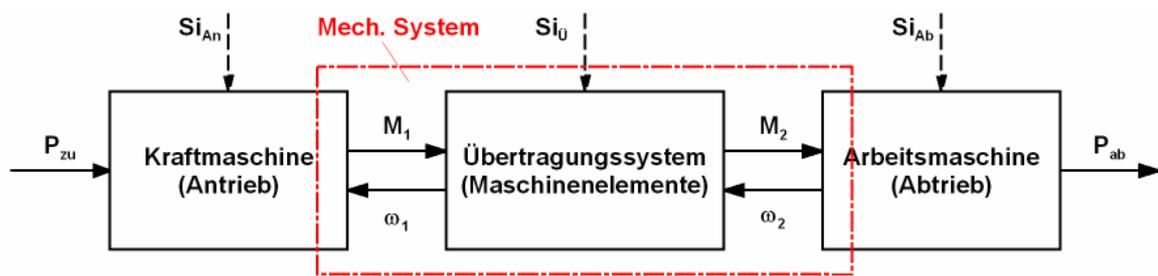
## **2. MASCHINENELEMENTE ALS LEISTUNGSÜBERTRAGER**

Die Maschinenelemente können als bewährte, häufig weitgehend standardisierte Lösungselemente (Baugruppen, Bauteile, Teile von Bauteilen) verstanden werden, die in mechanischen Produkten immer wieder vorkommende Funktionen realisieren [Weber/Vajna-97]. Zur Funktionserfüllung werden bestimmte physikalische Prinzipien genutzt (vorwiegend aus der Mechanik, aber auch aus anderen Domänen wie Strömungsmechanik und Thermodynamik), teilweise in vielfältiger Kombination. Wichtig im hier zu diskutierenden Zusammenhang ist nun, daß unter „Maschinenelemente“ hauptsächlich solche Lösungselemente verstanden werden, deren Zweck die Umsetzung mechanischer Energie bzw. die Übertragung mechanischer Leistung ist, d.h. die Umsetzung von Kräften und Bewegungen.

In diesem allgemeinen Sinne sind Maschinenelemente die konstitutiven Komponenten von Übertragungssystemen für mechanische Leistung, eingebaut zwischen einem oder mehreren Antrieben

(„Kraftmaschine“, „Erzeuger/Quelle mechanischer Leistung“) und einem oder mehreren Abtrieben („Arbeitsmaschine“, „Verbraucher/Senke mechanischer Leistung“). Der Begriff „mechanische Leistung“ muß dabei in seine beiden Basisgrößen zerlegt werden – jeweils eine Kraft- und eine Geschwindigkeitsgröße –, weil die Funktion gerade der verschiedenen Maschinenelementen anders gar nicht sinnvoll beschreiben läßt.

Für den einfachsten Fall, daß nur je ein An- und Abtrieb vorhanden ist, ergibt sich das allgemeine Blockschaltbild nach **Bild 1**.



**Bild 1:** Maschinenelemente als konstitutive Elemente von Übertragungssystemen für mechanische Leistung (hier: rotatorisch); einfachster Fall – je ein An- und Abtrieb, insgesamt ein statischer und ein kinematischer Freiheitsgrad

In Bild 1 sind einige weitere Erkenntnisse eingearbeitet, die einer Erläuterung bedürfen:

- Im Systemzusammenhang betrachtet, kann an jedem äußeren Anschluß eines mechanischen Systems („Welle“, sonstige „Schnittstelle“ zur Ein-/Ausleitung von Kräften und Bewegungen) nur *entweder* die Kraftgröße *oder* die Bewegungsgröße vorgegeben werden, d.h. im logisch-funktionalen Sinne unabhängige Eingangsgröße sein. Die jeweils andere Größe ergibt sich aus der Kennlinie bzw. dem Kennfeld des angeschlossenen Nachbarsystems.  
Diese Erkenntnis ist nicht neu, sie entspricht vielmehr der aus der Getriebetechnik bekannten Regeln bezüglich der *Freiheitsgrade* von Getrieben und Mechanismen: Ein Getriebe hat insgesamt so viele Freiheitsgrade wie äußere Wellen, an jeder Welle wird genau ein Freiheitsgrad gebunden [Müller-98]. Je nachdem, ob die Kraft- oder die Bewegungsgröße vorgegeben werden kann, spricht man von einem „statischen“ bzw. einem „kinematischen“ Freiheitsgrad. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Art der verfügbaren Freiheitsgrade (wie viele statische, wie viele kinematische?) von der Struktur des Übertragungssystems selbst abhängt.
- In Bild 1 gezeigt ist exemplarisch der häufige Fall, daß das Übertragungssystem je einen statischen und einen kinematischen Freiheitsgrad besitzt; es könnte sich beispielsweise um jede Art von Räder- und Umschlingungsgetriebe handeln, sofern Schlupf ausgeschlossen ist (entweder durch Wahl des Kraftübertragungsprinzips Formschluß oder – bei Reibschluß – durch geeignete Auslegung und Betriebsführung).

- Im Bereich der Maschinenelemente werden nicht immer gleichzeitig sowohl Kräfte als auch Bewegungen betrachtet. So konzentrieren sich weite Teile der Getriebe-/Mechanismenlehre auf die Betrachtung von Bewegungen (Kinematik), andererseits spielen z.B. bei den Verbindungselementen die (Relativ-) Bewegungen der Teilsysteme nur eine untergeordnete Rolle. Dies ist jedoch in dem allgemeinen Modell nach Bild 1 als Sonderfall enthalten, indem sich eine rein kinematische Betrachtung ergibt, wenn man alle Kraft-Eingänge gleich Null setzt, und indem der rein statische Fall durch Nullsetzen der Bewegungs-Eingänge entsteht.

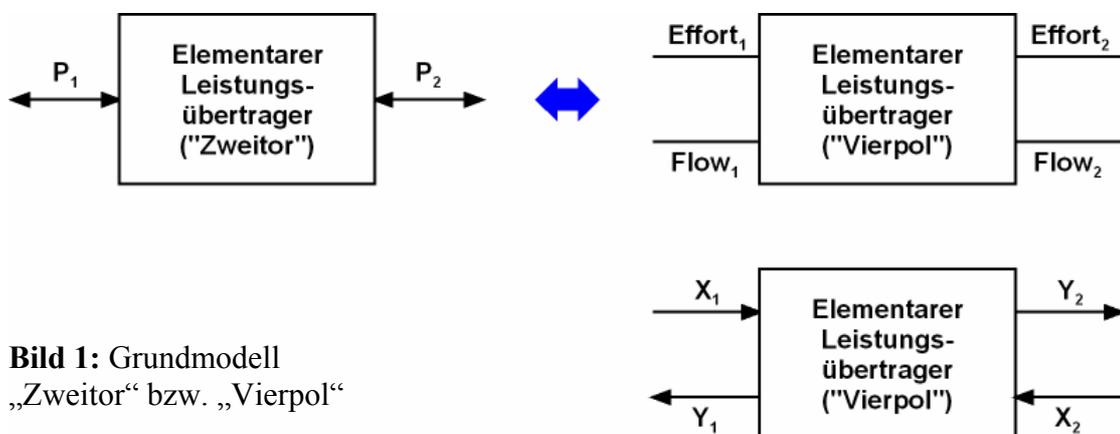
### 3. GRUNDLAGEN DER VIERPOL-/ MEHRPOLTHEORIE

#### 3.1 Grundmodell und Grundgleichungen

Mehrpole sind ein insbesondere in der Elektro- und Regelungstechnik seit längerem bekanntes Modellkonzept, um das Übertragungsverhalten von leistungsübertragenden Systemen mathematisch zu beschreiben [Oppelt-72].

Das elementare Grundmodell ist der Vierpol, **Bild 2**:

- Ein Vierpol besitzt zwei äußere Anschlüsse, an denen Leistung zu- oder abgeführt werden kann („Tore“, „Ports“, „Klemmen“ – aus mechanischer Sicht: „Wellen“).
- Jedem der beiden äußeren „Tore“ bzw. „Ports“ sind zwei physikalische Größen zugeordnet: eine sogenannte Potentialgröße („effort“) und eine Flußgröße („flow“). Somit gibt es insgesamt vier äußere Anschlußgrößen („Pole“), die dem Vierpol seinen Namen geben.
- Die Multiplikation der beiden zusammengehörigen Potential- und Flußgrößen ergibt die am jeweiligen „Tor“ oder „Port“ geführte Leistung.



**Bild 1:** Grundmodell „Zweitor“ bzw. „Vierpol“

Die Potential- und Flußgrößen („effort“ und „flow“) für die verschiedenen Leistungsarten (mechanisch, elektrisch, hydraulisch, ...) sind in **Tabelle 1** wiedergegeben. Dabei ist darauf hinzuweisen,

daß im Falle der mechanischen Leistungen hier die „anschauliche“ Zuordnung „Kraft/Drehmoment entspricht effort“ und „Geschwindigkeit/Winkelgeschwindigkeit entspricht flow“ gewählt wurde. Denkbar und physikalisch sogar korrekter wäre die umgekehrte Zuordnung „Kraft/Drehmoment = Änderung des (Dreh-) Impulses entspricht flow“ und „Geschwindigkeit entspricht effort“. Diese Unterscheidung ist zwar theoretisch von großem Interesse, spielt aber für die weitere Diskussion der Simulationsmodelle für Maschinenelemente im Rahmen dieses Beitrages keine Rolle, so daß auf nähere Erläuterungen verzichtet wird.

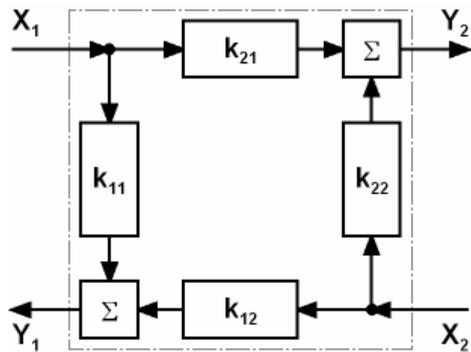
	Potential-, Flußgröße	Leistung	Arbeit
mechanisch/ translatorisch	$F, v$	$P_{\text{mech, tr}} = F \cdot v = F \cdot \frac{ds}{dt}$	$W_{\text{mech, tr}} = \int F \cdot v \cdot dt = \int F \cdot ds$
mechanisch/ rotatorisch	$M, \omega$	$P_{\text{mech, rot}} = M \cdot \omega = F \cdot \frac{d\phi}{dt}$	$W_{\text{mech, rot}} = \int M \cdot \omega \cdot dt = \int M \cdot d\phi$
elektrisch	$\Delta U, I$	$P_{\text{elektr}} = \Delta U \cdot I = \Delta U \cdot \frac{dQ}{dt}$	$W_{\text{elektr}} = \int \Delta U \cdot I \cdot dt = \int \Delta U \cdot dQ$
hydraulisch	$\Delta p, \dot{V}$	$P_{\text{hydr}} = \Delta p \cdot \dot{V} = \Delta p \cdot \frac{dV}{dt}$	$W_{\text{hydr}} = \int \Delta p \cdot \dot{V} \cdot dt = \int \Delta p \cdot dV$
oder:	$\left(\frac{\Delta p}{\rho}\right), \dot{m}$	$P_{\text{hydr}} = \frac{\Delta p}{\rho} \cdot \dot{m} = \frac{\Delta p}{\rho} \cdot \frac{dm}{dt}$	$W_{\text{hydr}} = \int \frac{\Delta p}{\rho} \cdot \dot{m} \cdot dt = \int \frac{\Delta p}{\rho} \cdot dm$
thermisch	$\Delta T, \dot{S}$	$P_{\text{therm}} = \Delta T \cdot \dot{S} = \Delta T \cdot \frac{dS}{dt}$	$W_{\text{therm}} = \int \Delta T \cdot \dot{S} \cdot dt = \int \Delta T \cdot dS$

**Tabelle 1:** Potential- und Flußgrößen („effort“ und „flow“) für verschiedene Leistungsarten<sup>1</sup>

Von den beiden physikalischen Größen an jedem leistungsführenden äußeren Anschluß kann nur eine im logisch-funktionalen Sinne Eingangsgröße sein (d.h. vom vor- oder nachgeschalteten System vorgegeben werden, X), die andere ist Ausgangsgröße (d.h. wird dem vor- bzw. nachgeschalteten System aufgeprägt, Y). Ob im konkreten Fall an einem bestimmten Anschluß die Potential- oder die Flußgröße Eingangsgröße ist und wie viele Potential- und Flußgrößen insgesamt Ein- bzw. Ausgänge sind, hängt von der Struktur des Übertragungssystems sowie von dessen Einbindung in den übergeordneten Systemzusammenhang ab.

In der Elektro- und Regelungstechnik üblich ist nun die Einschränkung auf ausschließlich lineare (bzw. „im Arbeitspunkt“ linearisierte) Zusammenhänge zwischen den äußeren und inneren Größen des durch den Vierpol beschriebenen Systems. Für den auf diese Weise definierten linearen Vierpol läßt sich nun die in **Bild 3** dargestellte generische Struktur angeben.

<sup>1</sup> „Effort“/„flow“ für mechanische Leistungen auch (und sogar physikalisch korrekter) in umgekehrter Zuordnung.



**Bild 3:** Generische Struktur eines linearen Vierpoles

Es sei darauf hingewiesen, daß die in Bild 3 gezeigte Struktur (sowie alle weiteren in diesem Beitrag vorgestellten Blockschaltbilder) in einem Punkt von den üblichen, aus der Regelungstechnik entlehnten Darstellungen abweicht: Die Summation/Überlagerung von Größen wird durch einen rechteckigen Kasten mit dem Symbol „ $\Sigma$ “ symbolisiert und

nicht

– wie in der Regelungstechnik – durch einen kleinen Kreis. Der Grund ist, daß Verwechslungen mit der dazu komplementären Verzweigung gleicher Größen vermieden werden sollen, auf die noch zurückzukommen ist (Abschnitt 4.2).

Das Übertragungsverhalten des generischen linearen Vierpoles nach Bild 3 läßt sich wie folgt in Formeln kleiden:

$$Y_1 = k_{11} \cdot X_1 + k_{12} \cdot X_2 \quad (1)$$

$$Y_2 = k_{21} \cdot X_1 + k_{22} \cdot X_2 \quad (2)$$

In Matrixdarstellung:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Es spricht nichts dagegen, von der Annahme linearer Übertragungsfunktionen abzugehen: In diesem Falle wären in den Gleichungen (1) und (2) die Übertragungskonstanten  $k_{ij}$  durch Funktionen  $f_{ij}(X_j)$  zu ersetzen (im Prinzip beliebige Funktionen: Polynome, trigonometrische Funktionen, ...). In diesem Fall ist eine Matrixdarstellung entsprechend Gleichung (3) aber nicht mehr möglich, da das Matrizenkalkül per Definition auf die Beschreibung linearer Zusammenhänge beschränkt ist.

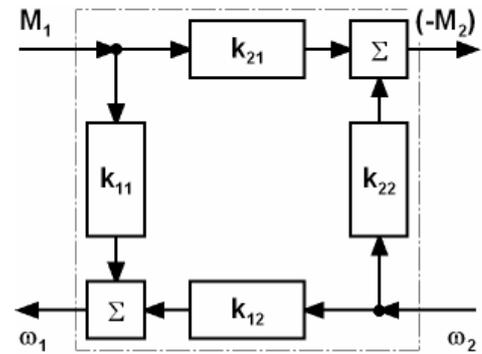
Im Bereich mechanischer Systeme werden des öfteren nicht-lineare Zusammenhänge benötigt (z.B. schon bei der Erfassung von Gleitreibung, gleichgültig ob „trockene“ Coulombsche oder „flüssige“ Newtonsche Gleitreibung). Dies soll im folgenden an entsprechender Stelle jeweils „ad hoc“ eingeführt werden; auf eine allgemeine Diskussion des nicht-linearen Falles sei aus Gründen der Kürze hier verzichtet. Weil jedoch nicht-lineare Zusammenhänge grundsätzlich erlaubt sein sollen, wird die in Gleichung (3) wiedergegebene Matrixdarstellung im folgenden nicht weiter benutzt.

### 3.2 Mechanische Vierpole

Aus dem allgemeinen Vierpol nach Bild 3 entsteht ein *mechanischer Vierpol* dadurch, daß man die nicht näher spezifizierten Ein- und Ausgangsgrößen ( $X_i, Y_j$ ) durch mechanische Größen, also durch Kraft- und Bewegungsgrößen ersetzt.

Für das in Bild 1 dargestellte mechanische System zur Übertragung rotatorischer mechanischer Leistung mit je einem An- und Abtrieb sowie mit je einem statischen und kinematischen Freiheitsgrad entsteht – weiter unter der Annahme ausschließlich linearer Übertragungsfunktionen – der in **Bild 4** dargestellte mechanische Vierpol.

**Bild 4:** Struktur eines linearen *mechanischen* Vierpoles (hier: Übertragung rotatorischer mechanischer Leistung)



Es sei darauf hingewiesen, daß in Bild 4 sowie in allen folgenden Blockschaltbildern bei allen Kraftgrößen, die logisch-funktional Ausgangsgrößen sind, ein Minuszeichen eingefügt wird. Dadurch wird sichergestellt, daß alle aus der Vierpolstruktur abgeleiteten Gleichungen automatisch „physikalisch korrekte“ Vorzeichen ergeben. Diese sind nämlich in der Mechanik traditionell so definiert, daß Kraftgrößen grundsätzlich als von den angeschlossenen Nachbarsystemen auf das jeweils betrachtete System wirkend angenommen werden (um dieses ins Kräftegleichgewicht zu bringen). Das könnte man aus der Sicht der Systemsimulation auch ganz anders machen, nämlich alle Kraftgrößen als auf das „in Pfeilrichtung“ liegende Teilsystem wirkend definieren. Dann würde man ebenfalls in sich schlüssige Gesamtbeschreibungen des Übertragungsverhaltens von Systemen erhalten, allerdings mit dem „Schönheitsfehler“, daß alle Kraftgrößen, die logisch-funktionale Ausgangsgrößen sind, gegenüber der gewohnten Konvention vertauschte Vorzeichen haben.

Unter Berücksichtigung dieser Vorzeichenregel erhält man für den in Bild 4 dargestellten mechanischen Vierpol anstelle der allgemeinen Gleichungen (1) und (2) folgende Formeln zur Beschreibung des (linearen) Übertragungsverhaltens (die der Gleichung (3) analoge Matrizendarstellung ist hier aus oben erläuterten Gründen weggelassen):

$$\omega_1 = k_{11} \cdot M_1 + k_{12} \cdot \omega_2 \quad (4)$$

$$(-M_2) = k_{21} \cdot M_1 + k_{22} \cdot \omega_2 \quad (5)$$

### 3.3 Vierpole mit verlustlosem Übertragungsverhalten

Anhand der Vierpolmodelle nach Bild 3 bzw. Bild 4 lassen sich nun einige allgemeine Fragen bezüglich des Verhaltens der beschriebenen Systeme studieren, ohne auf die Details der physikalischen oder gar gestalterischen Realisierung eingehen zu müssen. Eine der interessantesten Fragen ist: Wann ergibt sich ein Übertragungsverhalten ohne Leistungsverluste, und zwar unabhängig vom aktuellen Betriebszustand, d.h. für alle denkbaren Werte der Eingangsgrößen ( $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ ) bzw. im mechanischen Fall nach Bild 4 ( $\mathbf{M}_1, \omega_2$ )?

Im mechanischen Fall errechnen sich die Leistungen  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_2$  zu:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{M}_1 \cdot \omega_1 = \mathbf{M}_1 \cdot (\mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{k}_{12} \cdot \omega_2) \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{M}_2 \cdot \omega_2 = -(\mathbf{k}_{21} \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{k}_{22} \cdot \omega_2) \cdot \omega_2 \quad (7)$$

Wenn Verlustfreiheit gefordert wird, muß gelten:

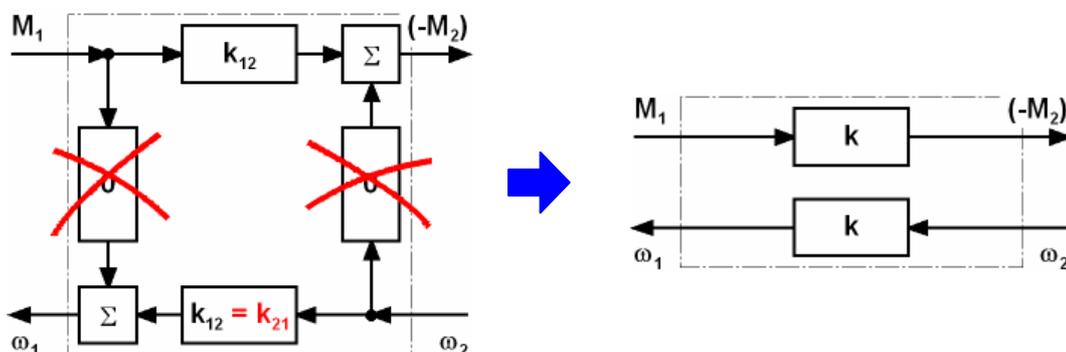
$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{M}_1^2 + (\mathbf{k}_{12} - \mathbf{k}_{21}) \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \omega_2 - \mathbf{k}_{22} \cdot \omega_2^2 = 0 \quad (8)$$

Wenn Gleichung (8) unabhängig vom aktuellen Betriebszustand, d.h. für alle denkbaren Werte der Eingangsgrößen ( $\mathbf{M}_1, \omega_2$ ) gelten soll, so geht dies nur, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\mathbf{k}_{11} = \mathbf{k}_{22} = 0 \quad (9)$$

$$(\mathbf{k}_{12} - \mathbf{k}_{21}) = 0 \quad (10)$$

Die beiden Bedingungen (9) und (10) machen interessanterweise eine unmittelbare Aussage über die „erlaubte“ innere Struktur von (linearen) Vierpolen (und damit auch über den erforderlichen Aufbau der entsprechenden realen Systeme!), wenn diese unter allen Bedingungen ein von Leistungsverlusten freies Übertragungsverhalten haben sollen: *Stets verlustfreie Leistungsübertrager müssen die Eingangsgrößen in zwei voneinander entkoppelten Zweigen in die Ausgangsgrößen überführen.* Bild 5 zeigt dies für den mechanischen Vierpol nach Bild 4 graphisch.



**Bild 5:** Struktur eines lineareren mechanischen Vierpoles (rotatorisch), der in allen Betriebszuständen ohne Leistungsverluste arbeitet

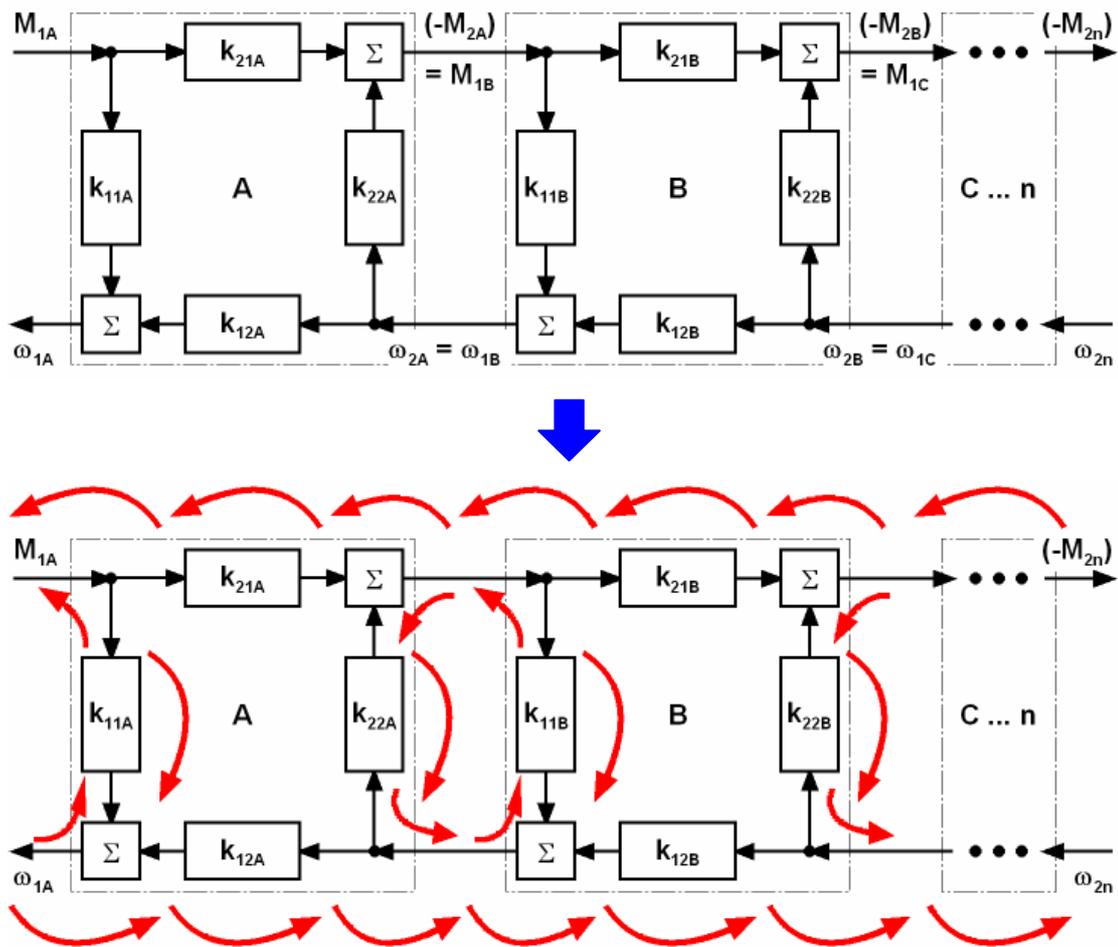
Aus der vorstehend erläuterten Überlegung zu verlustlosem Leistungsübertragungsverhalten ergeben sich einige interessante Konsequenzen:

- Leistungsübertragung mit gutem Wirkungsgrad über den gesamten Betriebsbereich hinweg ist keine primär durch die Physik vorgegebene Eigenschaft, sondern wird maßgeblich durch den inneren Aufbau des Systems beeinflusst.
- Es ist unmittelbar einsichtig, daß viele mechanische Leistungsübertrager (Maschinenelemente) tatsächlich einen Aufbau haben, der dem in Bild 5 gezeigten Ideal ähnelt: Alle zwangsläufigen Getriebe und Kupplungen übertragen näherungsweise die Kraftgrößen entkoppelt von den Bewegungsgrößen; die „statischen“ und die „kinematischen“ Aspekte lassen sich dementsprechend unabhängig voneinander betrachten.
- Auch das Umgekehrte gilt: In den Fällen, in denen Leistungsverluste vorkommen (oder sogar Teil des gewünschten Übertragungsverhaltens sind: z.B. Kupplungen oder Getriebe im Schlupfzustand, Bremsen) sind die statischen von den kinematischen Größen *nicht* entkoppelt. Dies wird im nachfolgenden Abschnitt näher untersucht.

### 3.4 Verkettung von Vierpolen

Vierpolmodelle lassen sich problemlos miteinander verketteten, **Bild 6 oben**. Zu beachten ist allerdings, daß selbst bei ausschließlich linearen Zusammenhängen zur Ermittlung der Gesamt-Übertragungsfunktionen *nicht* einfach die Übertragungsmatrizen nach Gleichung (3) multipliziert werden können, weil die beiden Ausgangsgrößen (allgemein:  $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$ ; im Fall des mechanischen Vierpols nach Bild 4:  $(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{M}_2)$ ) an *verschiedenen* Anschlüssen („Toren“, „Port“, „Wellen“) anliegen. Die Gesamt-Übertragungsfunktionen müssen vielmehr durch „Zurückrechnen“ der (an verschiedenen Anschlüssen anliegenden!) Ausgangsgrößen bis zu den (ebenfalls an verschiedenen Anschlüssen anliegenden!) Eingangsgrößen über die verschiedenen Elemente hinweg ermittelt werden, siehe Schema in **Bild 6 unten**.

Lediglich durch einen „mathematischen Trick“ – nämlich durch eine zwischengeschaltete Transformation aller miteinander verketteten Vierpolmodelle in Ersatzmodelle mit an allen Anschlüssen gleich gerichteten Größen und anschließende Rücktransformation – kann man es erreichen, die Verkettung durch eine Matrizenmultiplikation zu beschreiben (allerdings eben um den Preis, daß hin- und hertransformiert werden muß). Dies wurde bereits in [Feldmann-71] gezeigt und sei hier nicht im einzelnen erläutert.



**Bild 6:** Verkettung von Vierpolmodellen und Ermittlung der Gesamt-Übertragungsfunktionen (schematisch am Beispiel der Übertragung rotatorischer mechanischer Leistung)

### 3.5 Mehrpole

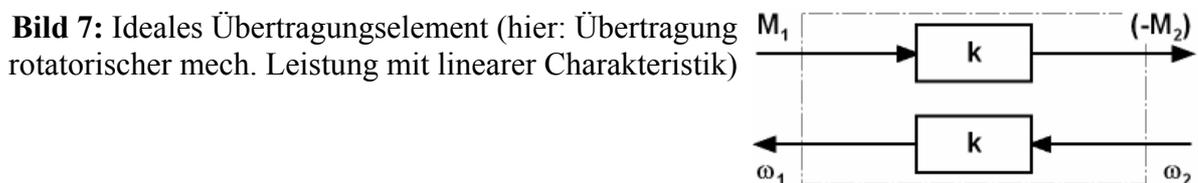
Aus den bisher betrachteten „Zweitoren“ bzw. „Vierpolen“, welche Systeme mit zwei äußeren Leistungs-, „Toren“, oder -, „Ports“ beschreiben, werden sogenannte „Mehrtore“ bzw. „Mehrpole“ dadurch, daß man weitere äußere Anschlüsse („Klemmen“, „Wellen“, ...) hinzufügt. So wäre beispielsweise ein Dreiwellengetriebe als „Dreitor“ oder „Sechspol“ zu beschreiben (drei äußere Wellen, insgesamt sechs statische und kinematische Ein- und Ausgangsgrößen). Für die Mehrpole gelten ähnliche Strukturen, Regeln und Beziehungen wie für die elementaren Vierpole. Hierauf sei an dieser Stelle nicht im einzelnen eingegangen; weiter unten wird zwar das Mehrpolmodell eines Umlaufgetriebes gezeigt, jedoch können die hierfür benötigten Grundlagen an entsprechender Stelle nachgetragen werden.

#### 4. ELEMENTTYPEN VON MEHRPOLMODELLEN

In Mehrpolmodellen (wie in jeder Art ähnlicher Modelle, siehe [Wellstead-79, Breedveld-84, Karnopp-00]) können nur drei Grundtypen von Elementen vorkommen, die in diesem Abschnitt eingeführt und erläutert werden sollen.

##### 4.1 Ideale Übertragungselemente

Ideale Übertragungselemente besitzen die Struktur eines verlustlosen, d.h. in zwei getrennte Zweige aufgeteilten Vierpoles (siehe Bild 5 rechts). In dem Fall, daß es sich um einen mechanischen (speziell rotatorische Leistung übertragenden) Vierpol handelt, daß in einem der beiden Zweige die Potentialgrößen und im anderen Zweig – getrennt davon – die Flußgrößen übertragen werden und daß die Übertragungscharakteristik linear ist, erhält man das in **Bild 7** wiedergegebene Modell.



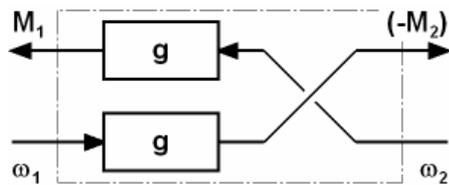
Elemente dieser Art werden in der Systemtheorie auch als „ideale Transformer“ oder kurz als „TF-Elemente“ bezeichnet. (Mechanische) Beispiele sind alle (verlustlos angenommenen) Kraftübersetzer, die stets auch gleichzeitig Bewegungsübersetzer sind, sowie alle zwangsläufigen (verlustlos angenommenen) Getriebe.

In dem Fall, daß nicht gleichartige Größen aneinander gekoppelt werden (wie in Bild 7: Drehmoment an Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit an Winkelgeschwindigkeit), sondern verschiedenartige (allerdings weiter unter der Prämisse, daß Potentialgröße mit Potentialgröße und Flußgröße mit Flußgröße verknüpft wird!), ist auch die Bezeichnung „idealer Transducer“ gebräuchlich. Beispiele aus dem mechanischen Bereich sind alle Umsetzer rotatorischer Größen in translatorische (also etwa Seilrollen oder Zahnstangengetriebe), sofern Verlustlosigkeit angenommen wird. Über die Mechanik hinaus wären etwa (verlustlos angenommene) hydrostatische Pumpen und Motoren Beispiele für ideale Transducer.

Aufgrund ihres verlustlosen Übertragungsverhaltens werden die idealen Übertragungselemente auch als „leistungserhaltende Zweitore“ oder „power-conserving two-ports“ klassifiziert.

Neben den Transformatoren und Transducern gibt allerdings noch eine weitere Klasse idealer Übertragungselemente, nämlich die sogenannten Gyrateure: Diese besitzen ebenfalls zwei vollständig entkoppelte Übertragungszweige, sie überführen allerdings die Potentialgröße des einen „Tores“ oder

„Ports“ in die Flußgröße des anderen. **Bild 8** stellt für den Bereich der Mechanik eine von zwei möglichen Gyratorschaltungen dar.



**Bild 8:** Vierpolmodell eines mechanischen Gyratoren (hier: Übertragung rotatorischer mechanischer Leistung, eine von zwei Möglichkeiten als Beispiel)

Während die Gyratoren insbesondere in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle spielen, kommen sie im Bereich der mechanischen Komponenten eher selten vor: Lediglich Kreisel („Gyroskope“) sind Beispiele für mechanische Gyratoren. Aus diesem Grund sei nicht weiter auf diese besondere Klasse der idealen Übertragungselemente eingegangen.

Durch Gleichungen ausgedrückt erhält man für die idealen (mechanischen) Übertragungselemente nach Bild 7 im linearen Fall das folgende Übertragungsverhalten:

$$(-M_2) = k \cdot M \quad (11)$$

$$\omega_1 = k \cdot \omega_2 \quad (12)$$

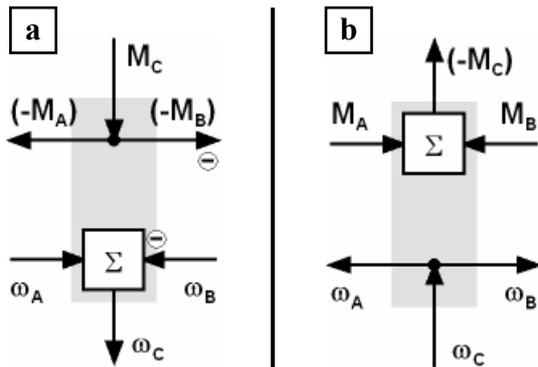
Es sei darauf hingewiesen, daß gerade bei den idealen Übertragungselementen auch nicht-lineare Beziehungen häufig vorkommen können (z.B. Polynome höheren Grades, sogar trigonometrische Funktionen).

## 4.2 Verzweigungselemente

Verzweigungselemente dienen dazu, mehr als zwei Anschlüsse („Tore“, „Ports“, „Wellen“) miteinander zu verbinden. Im elementaren Fall werden genau drei Anschlüsse gekoppelt, und zwar ohne zusätzliche Änderungen der übertragenen Größen. Für diese Art elementarer „Dreitoren“ bzw. „Sechspole“ gibt es genau zwei alternative Konzepte:

- a. Summation/Überlagerung der Flußgrößen bei konstanter Potentialgröße
- b. Summation/Überlagerung der Potentialgrößen bei konstanter Flußgröße

**Bild 9** zeigt links und rechts die entsprechenden Blockschaltbilder der elementaren Verzweigungen nach Konzept a bzw. b, hier für den Fall der Übertragung (rotatorischer) mechanischer Leistung. Die Summation/Überlagerung der Größen im einen Zweig (graphisch dargestellt durch einen rechteckigen Kasten mit dem Symbol „Σ“) ist untrennbar verbunden mit der Aneinanderkopplung dreier gleicher Größen im anderen Zweig (dargestellt durch den ausgefüllten Knotenpunkt). Um genau an dieser Stelle Verwechslungen zu vermeiden, wurde die von der Regelungstechnik abweichende Notation der Summations-/Überlagerungsglieder hier eingeführt.



**Bild 9:** Die zwei möglichen elementaren Verzweigungen (hier: Übertragung rotatorischer mechanischer Leistung);

- Summation/Überlagerung der Flußgrößen bei konstanter Potentialgröße;
- Summation/Überlagerung der Potentialgrößen bei konstanter Flußgröße

Die Summation/Überlagerung dreier Größen im einen Zweig erfordert die Vorgabe von zwei Größen – anders läßt sich die Summe nicht auswerten. Entsprechend erfordert die Aneinanderkopplung dreier gleicher Größen im anderen Zweig nur eine einzige Vorgabe – eben wegen der Identität aller drei Größen.

Daher haben Verzweigungen nach Konzept a (Bild 9a) im mechanischen Fall nur einen statischen, aber zwei kinematische Freiheitsgrade, im Gegensatz zu Verzweigungen nach Konzept b (Bild 9b), bei denen zwei statische, aber nur ein kinematischer Freiheitsgrad durch äußere Vorgaben gebunden werden müssen.

Die Abhängigkeit der Ausgangs- von den Eingangsgrößen läßt sich wie folgt in Formeln schreiben<sup>2</sup>:

$$\mathbf{a.} \quad (-M_A) = M_C = M_B \quad (13)$$

und

$$\omega_C = \omega_A - \omega_B \quad (14)$$

$$\mathbf{b.} \quad (-M_C) = M_A + M_B \quad (15)$$

und

$$\omega_A = \omega_B = \omega_C \quad (16)$$

Beispiele für eine Verzweigung nach Konzept a (Bild 9a) sind im mechanischen Bereich die Relativbewegung zweier Körper mit Kontaktkraft, in der Elektrik bzw. Hydraulik schlicht die Parallelschaltung dreier elektrischer/hydraulischer Maschinen.

Ein mechanisches Beispiel für eine Verzweigung nach Konzept b (Bild 9b) ist die Summe aller Kräfte/Momente am bewegten (starrten) Körper. Im Elektrischen bzw. Hydraulischen ist es die Reihenschaltung dreier elektrischer/hydraulischer Maschinen.

<sup>2</sup> Hinweis zu den Vorzeichen: Sowohl in den Blockbildern nach Bild 9 als auch in den Gleichungen (13) bis (16) sind die Vorzeichen entsprechend den in Abschnitt 3 erläuterten Vorzeichenregeln für Kraftgrößen als Ausgangsgrößen von mechanischen Systemen gewählt. Dies erfordert im Fall des Verzweigungselementes nach Konzept a (Bild 9a) aus formalen Gründen die Einführung der durch „ $\ominus$ “ gekennzeichneten Vorzeichenvertauschung.

Beide Verzweigungselementtypen nach Bild 9 sind „leistungserhaltend“ („power-conserving“), was nicht weiter verwundert, da sie – wie die Übertragungselemente nach Abschnitt 4.1 – zwei völlig entkoppelte Übertragungszweige besitzen.

Eine Verzweigung nach Konzept a (Bild 9a) wird in der Systemtheorie auch „0-junction“ genannt, Verzweigungen nach Konzept b (Bild 9b) heißen „1-junction“. Diese Bezeichnungen ergeben sich aus einer anderen als der hier dargestellten Modelliermethode, nämlich derjenigen der Bond-Graphen [Wellstead-79, Karnopp-00]. Im einzelnen sei hierauf nicht eingegangen.

Abschließend sei noch angemerkt, daß die vorstehend vorgestellten Verzweigungselemente bereits in den elementaren Vierpolmodellen nach den Bildern 3 und 4 vorgekommen sind, um an beiden Ausgängen die aus den beiden Eingangsgrößen resultierenden Einflußgrößen zu überlagern.

### 4.3 „Querkopplungen“

Als „Querkopplungen“ sollen solche Strukturelemente in Vierpol-/Mehrpolmodellen verstanden werden, die zusammengehörige Potential- und Flußgrößen (im mechanischen Fall: Kraft- und Bewegungsgrößen) direkt aneinanderkoppeln. Wie bereits im Abschnitt 3.3 diskutiert, kommt diesen Elementen eine besondere Bedeutung zu, denn sie sind die Ursache von (zumindest temporären) Leistungsverlusten.

Es gibt drei verschiedene Typen von „Querkopplungen“, die sich dadurch voneinander unterscheiden, daß sie Flußgrößen unterschiedlicher zeitlicher Ableitungen mit den Potentialgrößen verknüpfen.

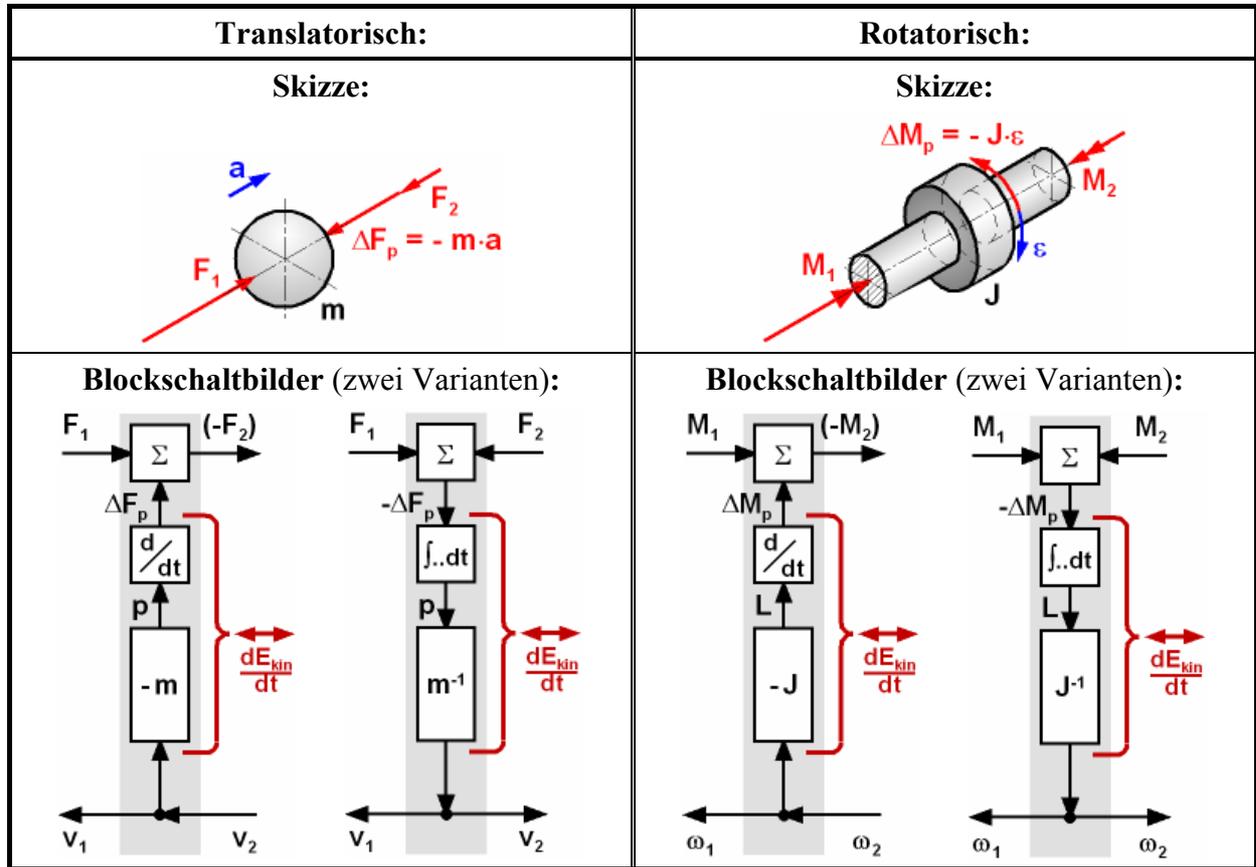
Im mechanischen Fall mit Kräften/Drehmomenten als Potentialgrößen und Geschwindigkeiten/Winkelgeschwindigkeiten als Flußgrößen (siehe hierzu auch die Anmerkung am Anfang von Abschnitt 3.1 sowie Fußnote 1) sind dies die folgenden möglichen Querkopplungen:

- a. Kopplung Beschleunigung/Winkelbeschleunigung (d.h. zeitliche Ableitung der Bewegungs[basis]größe Geschwindigkeit/Winkelgeschwindigkeit) an Kraft/Drehmoment: Erfassung von Kräften aus (Dreh-) Trägheiten.
- b. Direkte Kopplung Geschwindigkeit/Winkelgeschwindigkeit an Kraft/Drehmoment: Erfassung von Kräften aus Bewegungswiderständen (Reibungs-, Dämpferkräfte).
- c. Kopplung Weg/Winkel (d.h. Zeitintegral der Bewegungs[basis]größe Geschwindigkeit/Winkelgeschwindigkeit) an Kraft/Drehmoment: Erfassung von Kräften aus (Dreh-) Elastizitätswirkungen („Federkräften“).

Diese drei Typen von „Querkopplungen“ werden nachfolgend in Form von Blockschaltbildern und Gleichungen vorgestellt.

## Trägheitswirkungen

**Bild 10** zeigt für (mechanische) Querkopplungen des Typs a (Kopplung Beschleunigung/Winkelbeschleunigung an Kraft/Drehmoment) getrennt für den translatorischen und den rotatorischen Fall jeweils eine Prinzipskizze sowie die zugeordneten Vierpol-Blockschaltbilder<sup>3</sup>.



**Bild 10:** „Querkopplung“ Beschleunigung ↔ Kraft bzw. Winkelbeschleun. ↔ Drehmoment (jeweils Skizze und mögliche Vierpol-Blockschaltbilder)

Im Kern bewirkt die (Dreh-) Trägheit eine Kraft- bzw. Drehmomentdifferenz infolge der (Winkel-) Beschleunigung (= Ableitung der Geschwindigkeit/Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit). Je nach dem Vorzeichen der (Winkel-) Beschleunigung ist diese Differenz positiv oder negativ. Ist die (Winkel-) Beschleunigung gleich Null, so sind auch alle Trägheitskräfte/-drehmomente gleich Null. Ist die (Winkel-) Beschleunigung verschieden von Null und treten demzufolge von Null verschiedene Trägheitskräfte/-drehmomente auf, so summieren sich die außen an den Blochschtbildern nach Bild 10 anliegenden Leistungen  $P_1 = F_1 \cdot v_1$  und  $P_2 = F_2 \cdot v_2$  (translatorischer Fall) bzw.  $P_1 = M_1 \cdot \omega_1$  und  $P_2 = M_2 \cdot \omega_2$  (rotatorischer Fall) nicht mehr zu Null auf: Das System hat – je nach den Vorzeichen – Leistungsverluste oder -gewinne.

Energetisch erklärt sich das daraus, daß ein Teil der außen zugeführten Leistung (momentan) in eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung der kinetischen Energie umgewandelt wird (siehe entsprechende Pfeile an den Blockschaltbildern).

Die beiden in Bild 10 jeweils angegebenen Blockschaltbildvarianten ergeben sich aus dem von außen aufgeprägten Betriebszustand des Systems:

- Jeweils links ist der Fall angegeben, daß der momentane (Winkel-) Geschwindigkeitszustand von außen aufgeprägt wird. Wenn sich dieser ändert, führt das System infolge der (Dreh-) Trägheitswirkungen am Abtrieb (vorzeichenabhängig) mehr oder weniger Kraft bzw. Drehmoment als am Antrieb.
- Jeweils rechts ist der Fall gezeigt, daß dem System sowohl am Antrieb als auch am Abtrieb eine definierte Kraft bzw. ein definiertes Drehmoment von außen vorgegeben werden (z.B. Einstellen eines Arbeitspunktes der Kraftmaschine bei gegebenem Kraftbedarf der Arbeitsmaschine), daß zwischen beiden eine Differenz besteht (Kraft-/Drehmomentüberschuß oder -mangel) und daß diese Differenz infolge der (Dreh-) Trägheitswirkungen (vorzeichenabhängig) in eine (Winkel-) Beschleunigung bzw. Verzögerung umgesetzt wird, welche wiederum beiden außen angeschlossenen Nachbarsystemen aufgeprägt wird. In diesem Fall wird die „Querkopplung“ in umgekehrter Richtung durchlaufen; deshalb ist bisherige zeitliche Differentiation durch eine zeitliche Integration zu ersetzen.

Es ergeben sich für die Strukturen nach Bild 10, jeweils linke Variante, folgende Übertragungsgleichungen:

Translatorisch:

$$(-F_2) = F_1 + \Delta F_p = F_1 + \frac{dp}{dt} = F_1 + \frac{d}{dt}(-m \cdot v_2) \quad (17)$$

Rotatorisch:

$$(-M_2) = M_1 + \Delta M_p = M_1 + \frac{dL}{dt} = M_1 + \frac{d}{dt}(-J \cdot \omega_2) \quad (18)$$

Die Beziehungen für die eigentlichen Querkopplungen sind im Bereich der „klassischen“ (nicht-relativistischen) stets linear. In Sonderfällen können sich allerdings die Massen bzw. Drehträgheiten eines Systems mit der Zeit ändern (z.B. ein im Lauf der Zeit infolge des verbrauchten Kraftstoffes leichter werdendes Fahrzeug). Um diesem Rechnung zu tragen, muß das Differentiationsglied in den Strukturen nach Bild 10, jeweils linke Variante, *hinter* dem Glied für die Masse bzw. die Drehträgheit angeordnet werden. Oder physikalisch ausgedrückt: Die Kraft- bzw. Drehmomentdifferenz

---

<sup>3</sup> In den Blockbildern nach Bild 10 sowie allen folgenden Blockschaltbildern sind die Vorzeichen wieder entsprechend den in Abschnitt 3 erläuterten Vorzeichenregeln für Kraftgrößen als Ausgangsgrößen von mechanischen Sy-

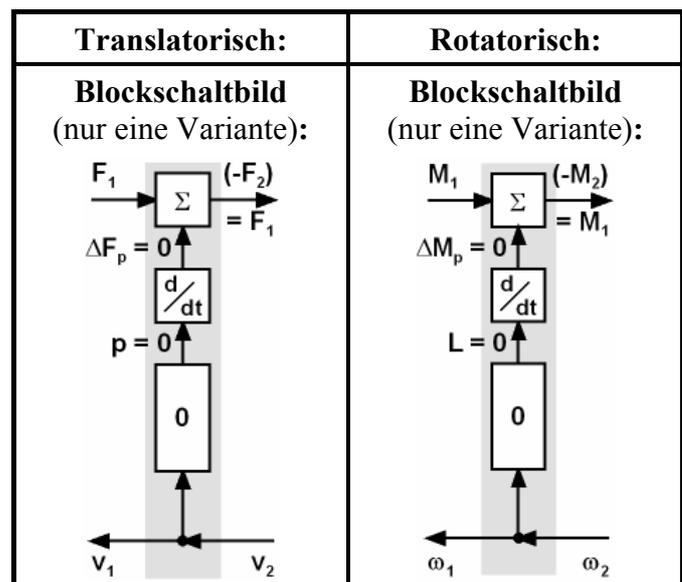
ergibt sich aus der zeitlichen Ableitung des Impulses bzw. Drehimpulses, *nicht* aus der Ableitung der Geschwindigkeit bzw. Winkelgeschwindigkeit bei konstanter (Dreh-) Trägheit.

Querkopplungselemente des in Bild 10 dargestellten Typs werden in der Systemtheorie als „I-Elemente“ bezeichnet (inertia). Sie sind im allgemeinen (instationären) Fall *nicht* „leistungserhaltend“, aber „energieerhaltend“ („energy-conserving“).

Bezüglich der Struktur sei noch angemerkt, daß die eigentlichen Querkopplungen (hier: Verknüpfung zwischen Geschwindigkeit/Winkelgeschwindigkeit und Kraft-/Drehmomentdifferenz) in der Systemtheorie auch gelegentlich als „Eintore“ bzw. „Zweipole“ bezeichnet werden. Für sich allein können sie allerdings nicht existieren; sie müssen vielmehr mit Hilfe von Verzweigungselementen – hier des Typs b nach Abschnitt 4.2 – mit äußeren Anschlüssen verbunden werden, so daß die Gesamtstruktur wieder ein „Zweitor“ bzw. „Vierpol“ ist.

Für die Querkopplungselemente nach Bild 10 existiert noch der abschließend in **Bild 11** dargestellte Sonderfall „masseloses bzw. drehträgheitsfreies System“, der durch die Bedingung  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$  bzw.  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  definiert ist.

**Bild 11:** Sonderfall „masseloses bzw. drehträgheitsfreies System“



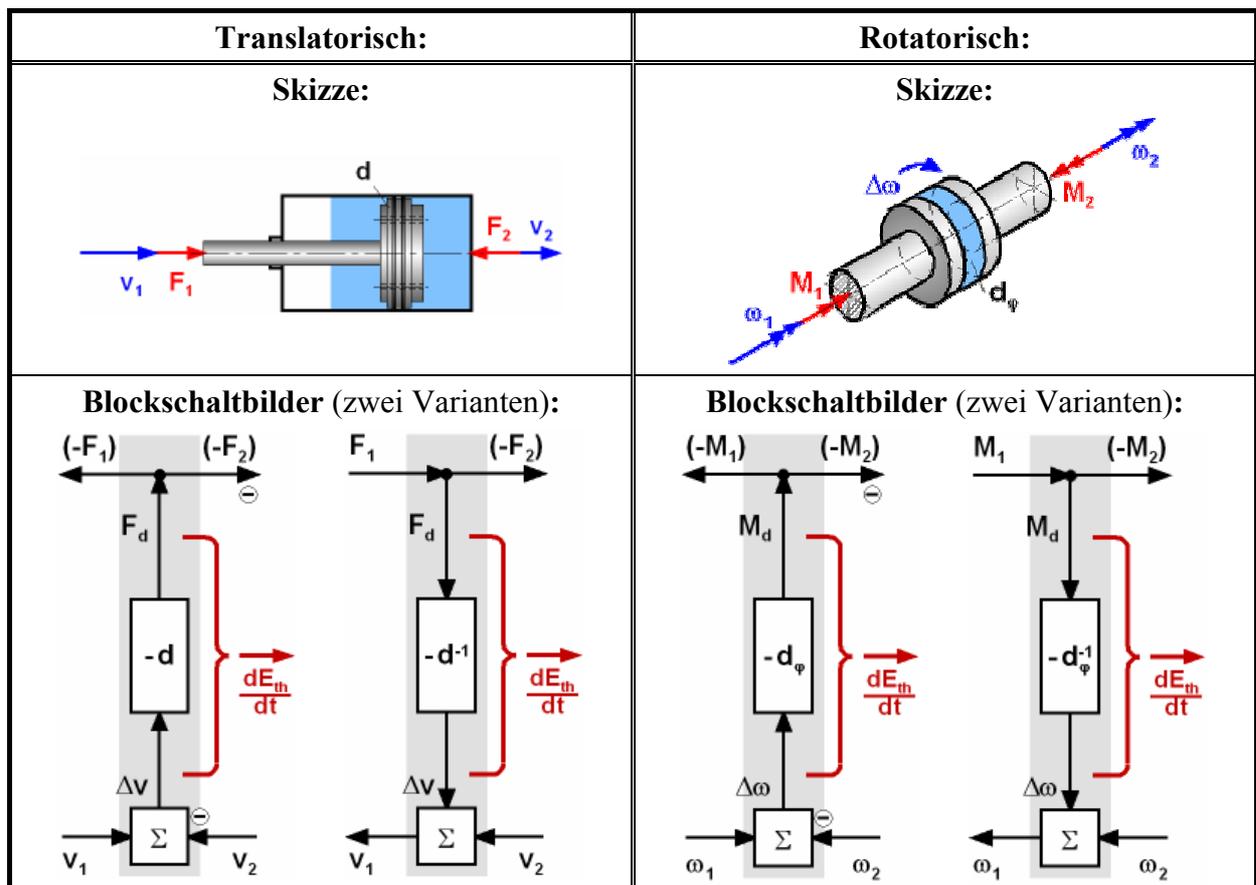
### (Bewegungs-) Widerstände

**Bild 12** zeigt für (mechanische) Querkopplungen des Typs b (direkte Kopplung Geschwindigkeit/Winkelgeschwindigkeit an Kraft/Drehmoment) getrennt für den translatorischen und den rotatorischen Fall jeweils eine Prinzipskizze sowie die zugeordneten Vierpol-Blockschaltbilder. Im Kern bewirkt der Bewegungswiderstand eine Kraft bzw. ein Drehmoment infolge einer (Winkel-) Geschwindigkeitsdifferenz bzw. umgekehrt.

An den äußeren Anschlüssen der Blockschaltbilder nach Bild 12 liegen zwar gleiche Kräfte bzw. Drehmomente an, jedoch sind die zugeordneten (Winkel-) Geschwindigkeiten verschieden. Die beiden äußeren Leistungen  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2$  (translatorischer Fall) bzw.  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1$  und  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{M}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$  (rotatorischer Fall) summieren sich nicht zu Null auf, das System hat Leistungsverluste. Energetisch erklärt sich das daraus, daß ein Teil der außen zugeführten Leistung in eine Wärmeleistung umgewandelt wird, wobei es sich hier um einen irreversiblen Prozeß handelt (siehe entsprechende Pfeile an den Blockschaltbildern).

Die beiden in Bild 12 jeweils angegebenen Blockschaltbildvarianten ergeben sich aus dem von außen aufgeprägten Betriebszustand des Systems:

- Jeweils links ist der Fall angegeben, daß dem System eine Geschwindigkeitsdifferenz von außen aufgeprägt wird. In diesem Fall reagiert die „Querkopplung“ mit einer Widerstandskraft, die auf beide äußere Anschlüsse zurückwirkt.
- Jeweils rechts ist der Fall gezeigt, daß die Kraft von außen aufgeprägt wird. Das System „gibt nach“ bzw. „rutscht durch“, d.h. es reagiert mit einer Differenz(winkel)geschwindigkeit zwischen An- und Abtrieb.



**Bild 12:** „Querkopplung“ Geschwindigkeit ↔ Kraft bzw. Winkelgeschw. ↔ Drehmoment (jeweils Skizze und mögliche Vierpol-Blockschaltbilder)

Es ergeben sich für die Strukturen nach Bild 12, jeweils linke Variante, für den linearen Fall folgende Übertragungsgleichungen:

Translatorisch:

$$(-F_2) = (-F_1) = F_d = (-\mathbf{d}) \cdot \Delta\mathbf{v} = (-\mathbf{d}) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad (19)$$

Rotatorisch:

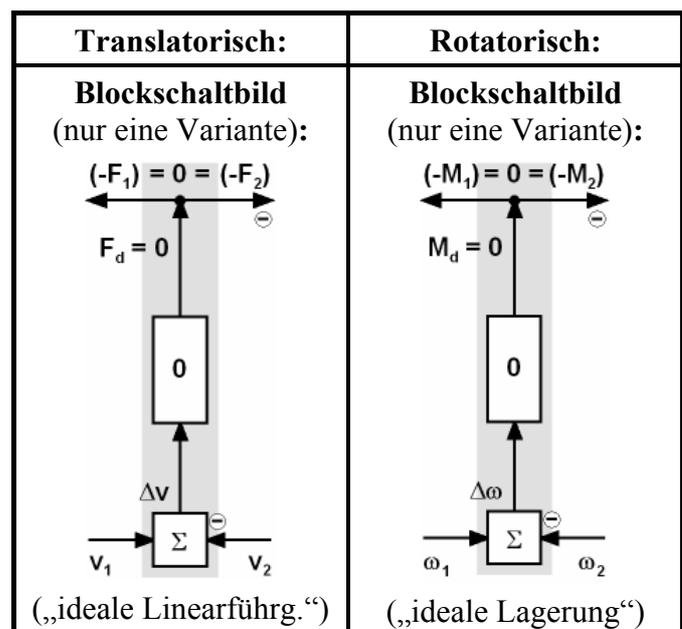
$$(-M_2) = (-M_1) = M_d = (-\mathbf{d}_\varphi) \cdot \Delta\omega = (-\mathbf{d}_\varphi) \cdot (\omega_1 - \omega_2) \quad (20)$$

Gerade bei den Widerstandkräften bzw. -drehmomenten kommt in der Realität ein lineares Verhalten kaum vor. Schon die einfache Coulombsche („trockene“) Gleitreibung als das häufigste Beispiel der Widerstandskraft im Bereich der Mechanik muß durch eine andere Funktion, nämlich die Signum-Funktion beschrieben werden. Die Newtonsche („flüssige“) Gleitreibung hat ein noch komplexeres Verhalten, das abhängig von den konkreten Geometrie-, Strömungs- und Betriebsbedingungen (z.B. Temperatur!) beschrieben werden muß. Daher sind das in den Gleichungen (19) und (20) wiedergegebenen linearen Beziehungen eher als theoretischer Sonderfall anzusehen und zur Beschreibung „realistischer“ Fälle durch geeignete nicht-lineare Beziehungen zu ersetzen.

Demgegenüber ist die elektrische Analogie, der elektrische Widerstand R, mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes mit guter Näherung linear zu beschreiben.

Querkopplungselemente des in Bild 12 dargestellten Typs werden in der Systemtheorie als „R-Elemente“ bezeichnet (resistance). Sie sind weder „leistungserhaltend“ noch „energieerhaltend“, vielmehr handelt es sich um „energiedissipierende Zweitore“ („energy-dissipating two-ports“).

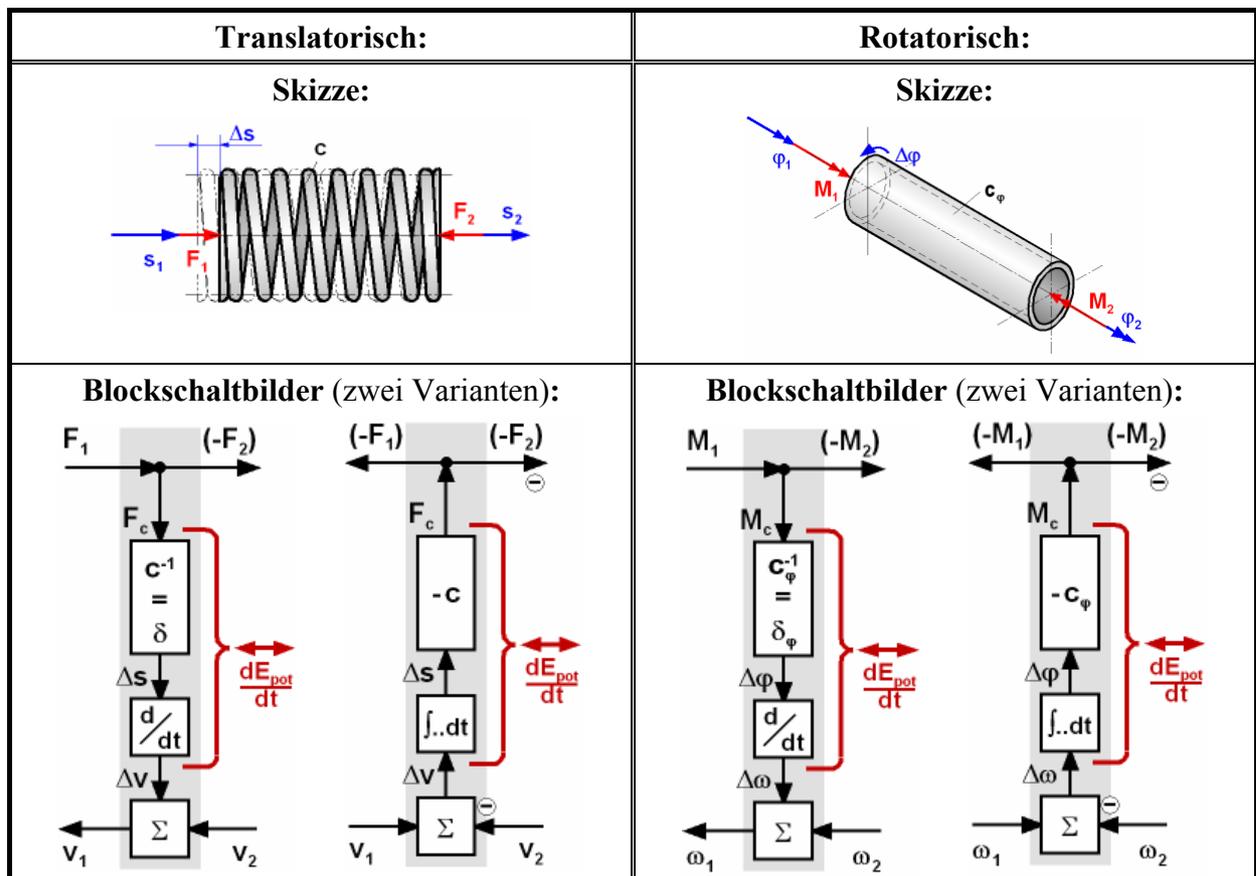
**Bild 13:** Sonderfall „widerstandslose Relativbewegung“



Für die Querkopplungselemente nach Bild 12 läßt sich der abschließend in **Bild 13** dargestellte Sonderfall „widerstandslose Relativbewegung“ angeben, den man auch als „ideale Linearführung“ bzw. „ideale Lagerung“ bezeichnen könnte. Dieser Sonderfall ergibt sich unter der Bedingung  $\mathbf{d}^{-1} = \mathbf{0}$  bzw.  $\mathbf{d}_{\varphi}^{-1} = \mathbf{0}$ .

### Elastizitätswirkungen („Federkräfte/-momente“)

**Bild 14** gibt für (mechanische) Querkopplungen des Typs c (Kopplung Weg/Winkel an Kraft/ Drehmoment) für den translatorischen und den rotatorischen Fall jeweils eine Prinzipskizze sowie die zugeordneten Vierpol-Blockschaltbilder wieder. Im Kern bewirkt die hierdurch abgebildete Elastizitätswirkung eine Relativverschiebung bzw. einen Relativwinkel zwischen An- und Abtrieb infolge einer äußeren Kraft bzw. eines äußeren Drehmomentes.



**Bild 14:** „Querkopplung“ Weg ↔ Kraft bzw. Winkel ↔ Drehmoment (jeweils Skizze und mögliche Vierpol-Blockschaltbilder)

An den äußeren Anschlüssen der Blochschtbilder nach Bild 14 liegen zwar gleiche Kräfte bzw. Drehmomente an, jedoch sind die zugeordneten (Winkel-) Geschwindigkeiten verschieden, wenn sich die elastischen Verschiebungen bzw. Winkel ändern. Dies wird induziert durch eine Änderung der äußeren Kraft bzw. des äußeren Drehmomentes.

Während derartiger Änderungen summieren sich die außen an den Blockschaltbildern nach Bild 10 anliegenden Leistungen  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2$  (translatorischer Fall) bzw.  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1$  und  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{M}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$  (rotatorischer Fall) nicht mehr zu Null auf: Das System hat – je nach den Vorzeichen – Leistungsverluste oder -gewinne.

Energetisch erklärt sich das daraus, daß ein Teil der außen zugeführten Leistung (momentan) in eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung der potentiellen Energie umgewandelt wird (siehe entsprechende Pfeile an den Blockschaltbildern).

Die beiden in Bild 14 jeweils angegebenen Blockschaltbildvarianten ergeben sich aus dem von außen aufgeprägten Betriebszustand des Systems:

- Jeweils links ist der Fall angegeben, daß dem System eine Kraft bzw. ein Drehmoment von außen aufgeprägt wird. In diesem Fall reagiert das System aufgrund seiner Elastizität mit einer Verschiebung bzw. mit einem Verdrehwinkel.
- Jeweils rechts ist der Fall gezeigt, daß von außen Bewegungen aufgeprägt werden. Sofern diese verschieden sind, muß das System die Differenz durch eine elastische Verformung auffangen (solange es nicht bricht). Die elastische Verformung determiniert die Kraft bzw. das Drehmoment, das hierzu von außen aufgebracht werden muß.

Es ergeben sich für die Strukturen nach Bild 14, jeweils linke Variante, für den linearen Fall folgende Übertragungsgleichungen:

Translatorisch:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + \frac{d}{dt}(\Delta \mathbf{s}) = \mathbf{v}_2 + \frac{d}{dt}(\mathbf{c}^{-1} \cdot \mathbf{F}_c) = \mathbf{v}_2 + \frac{d}{dt}(\mathbf{c}^{-1} \cdot \mathbf{F}_1) \quad (19)$$

Rotatorisch:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 + \Delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{d}{dt}(\Delta \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{d}{dt}(\mathbf{c}_\varphi^{-1} \cdot \mathbf{M}_c) = \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{d}{dt}(\mathbf{c}_\varphi^{-1} \cdot \mathbf{M}_1) \quad (20)$$

Die Gleichungen (19) und (20) sind oft auch in zeitlich integrierter Form sinnvoll. Die entsprechenden Formeln lauten:

Translatorisch:

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_2 + \Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_2 + \Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{c}^{-1} \cdot \mathbf{F}_c = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{c}^{-1} \cdot \mathbf{F}_1 \quad (21)$$

Rotatorisch:

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_2 + \Delta \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_2 + \Delta \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_2 + \mathbf{c}_\varphi^{-1} \cdot \mathbf{M}_c = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_2 + \mathbf{c}_\varphi^{-1} \cdot \mathbf{M}_1 \quad (22)$$

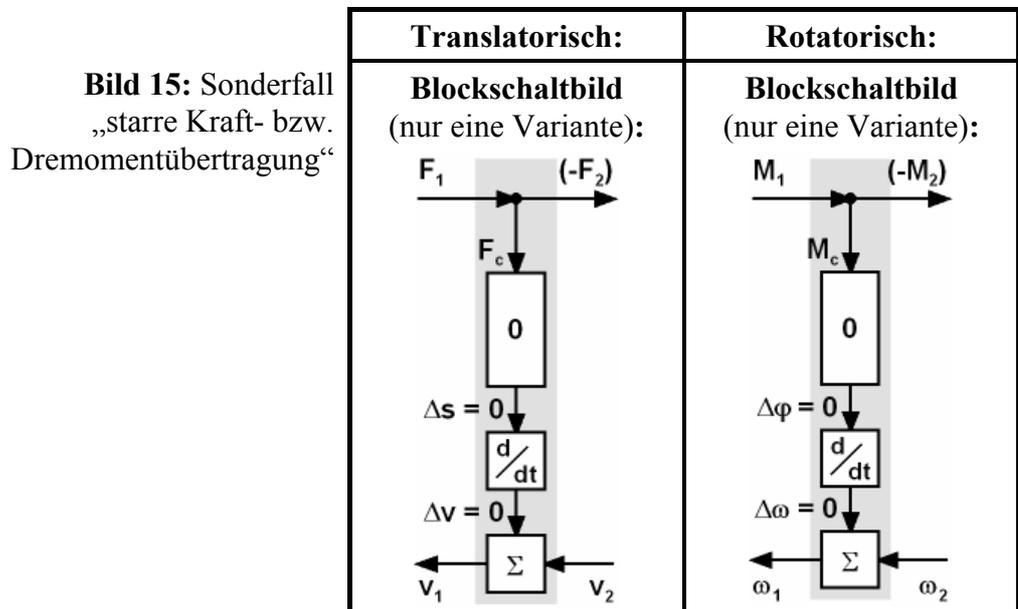
In den Gleichungen (21) und (22) sind die Größen  $\mathbf{s}_0$  bzw.  $\boldsymbol{\varphi}_0$  Integrationskonstanten (Ausgangsverschiebung bzw. Ausgangswinkel im Grundzustand).

Bei den Elastizitätswirkungen wird durch geeignete konstruktive Maßnahmen in der Realität vielfach ein mit guter Näherung lineares Übertragungsverhalten erreicht („lineare Federn“). Jedoch

kommen – gewollt oder ungewollt – auch häufig nicht-lineare elastische Effekte vor. In diesen Fällen sind die Übertragungsgleichungen (19) bis (21) durch geeignete nicht-lineare Beziehungen zu ersetzen.

Querkopplungselemente des in Bild 14 dargestellten Typs werden in der Systemtheorie als „C-Elemente“ bezeichnet (capacity). Wie die oben erläuterten „I-Elemente“ zur Beschreibung von Trägheitswirkungen sind sie nicht „leistungserhaltend“, jedoch „energieerhaltend“ („energy-conserving“).

Für die Querkopplungselemente nach Bild 14 gibt es schließlich noch den in **Bild 15** dargestellten Sonderfall „starre Kraft- bzw. Drehmomentübertragung“, definiert durch die Bedingung  $\mathbf{c}^{-1} = \mathbf{0}$  bzw.  $\mathbf{c}_\varphi^{-1} = \mathbf{0}$ .



#### 4.4 Zusammenfassung und ergänzende Bemerkungen

Mit dem im vorstehenden vorgestellten Fundus an Elementtypen können nun die Mehrpolmodelle von Maschinenelementen (und anderen, nicht notwendigerweise nur mechanischen) Systemen aufgebaut werden. Dazu werden die jeweils korrekten Grundtypen entsprechend der Struktur des zu modellierenden realen Systems aneinander gehängt.

Dabei können keine anderen als die vorgestellten Elementtypen auftreten, allerdings sind nicht-lineare Übertragungsgleichungen (gerade im Bereich der mechanischen Elemente) eher die Regel als die Ausnahme.

Die Gleichungen zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens des Gesamtsystems entstehen dann durch „Zurückrechnen“ der an den verschiedenen Anschlüssen anliegenden Ausgangsgrößen bis zu

den Eingangsgrößen über die (Übertragungsgleichungen der) verschiedenen Elemente hinweg, wie in Bild 6 bereits schematisch gezeigt.

Sofern in den „Querkopplungen“ Differentiations- oder Integrationselemente auftreten, erhält man für das Gesamtsystem Übertragungsdifferential- bzw. -integralgleichungen.

Einige ergänzende Bemerkungen mögen die vorgestellten Erkenntnisse abrunden:

- Alle vorstehend erläuterten Elementtypen und die damit zusammenhängenden Übertragungsgleichungen wurden für skalare Größen formuliert. Gerade zur Modellbildung mechanischer Systeme wäre alternativ auch eine vektorielle Formulierung möglich. Unter der Annahme ausschließlich linearer Beziehungen würden dazu in sämtlichen Gleichungen die Skalarprodukte durch Vektorprodukte ersetzt, die einfachen Summengleichungen würden zu Vektorsummen. Im einzelnen sei hierauf nicht eingegangen.
- Die vorstehend erläuterten Elementtypen haben einen generischen Charakter. Das bedeutet, daß allein die Kenntnis der Grundstrukturen dabei helfen kann, aus Teilinformationen über das Verhalten eines zu modellierenden Systems das vollständige Bild zu rekonstruieren. Beispiele:
  - Niemals können an dem gleichen äußeren Anschluß eines Systems sowohl die Potential- als auch die Flußgröße (in der Mechanik: sowohl die Kraft- als auch die Bewegungsgröße) als logisch-funktionale Eingangsgrößen vorgegeben werden. Wenn also festgestellt wird, daß an einem äußeren Anschluß eines mechanischen Systems die Kraft vorgegeben wird (Eingangsgröße), dann *muß* sich an diesem Anschluß der Bewegungszustand als logisch-funktionale Ausgangsgröße ergeben (und zwar als Funktion der Eingangsgrößen an den anderen Anschlüssen sowie des Systemverhaltens). Das gleiche gilt umgekehrt: Wird an einem äußeren Anschluß die Bewegungsgröße vorgegeben, dann folgt die an diesem Anschluß anliegende Kraftgröße als Ausgangsgröße. Für den Sonderfall, daß die Bewegungsgröße zu Null vorgegeben wird, ist dies im übrigen nichts anderes als das bekannte Konzept zur Ermittlung sogenannter Auflagerreaktionen.
  - Wenn in einem System an irgendeiner Stelle die „Übersetzung“ von Flußgrößen (mechanisch: Bewegungsgrößen) festgestellt wird, dann *muß* es entsprechend den in Abschnitt 4.1 vorgestellten Übertragungselementen (siehe Bild 7) parallel dazu eine Übersetzung der zugehörigen Potentialgrößen (Kraftgrößen) mit umgekehrter logischer Richtung und gleicher Übertragungsfunktion geben (und umgekehrt).
  - Wenn in einem System an einer bestimmten Stelle die Summation/Überlagerung dreier (oder auch mehrerer) Potentialgrößen (Kraftgrößen) festgestellt wird, dann sind entsprechend den in Abschnitt 4.2 erläuterten Verzweigungselementen (siehe Bild 9) die zugehörigen Flußgrößen (Bewegungsgrößen) zwingend gleich groß. Und natürlich umgekehrt: Wenn an einer

Stelle drei (oder mehr) Potential- oder Flußgrößen identisch aneinander gekoppelt sind, dann folgt daraus unmittelbar, daß sich die jeweils zugehörigen Fluß- bzw. Potentialgrößen aufsummieren.

Ein ganz konkretes Beispiel für diesen Fall ist die Ankopplung einer Meßapparatur: Will man etwa in einem Übertragungssystem für mechanische Leistung an irgendeiner Stelle die Kraft messen, so wird man die Meßapparatur (z.B. eine Kraftmeßdose) entsprechend Bild 9b in das System einkoppeln. Daraus folgt sofort, daß an der Kopplungsstelle den Bewegungen des Systems die Relativbewegungen (im Beispiel: die elastische Nachgiebigkeit der Kraftmeßdose) der Meßapparatur überlagert werden müssen. Dies wird häufig mit dem Hinweis vernachlässigt, daß die Rückkopplungen von Meßsystemen bewußt klein gehalten werden.

- Stellt man in einem System an irgendeiner Stelle Trägheitswirkungen fest, dann müssen sich diese entsprechend Bild 10 im instationären Fall als momentane Kraftgrößenverluste oder –gewinne äußern. Entsprechendes gilt beim Vorhandensein von Widerstandskräften, die untrennbar mit Relativ(winkel)geschwindigkeiten („Schlupf“) verbunden sind (siehe Bild 12). In ähnlicher Weise müssen sich schließlich Elastizitäten bei Kraft- bzw. Drehmomentänderungen in Form von momentanen Relativverschiebungen/-winkeln äußern (siehe Bild 14).

## **5. BEISPIEL „ZAHNRADGETRIEBE“**

In diesem Abschnitt werden das Aufstellen von Mehrpol-Blockschaltbildern und das Ableiten der daraus resultierenden (Differential-) Gleichungen zur Beschreibung des Gesamt-Übertragungsverhaltens am Beispiel des Zahnradgetriebes (speziell: Stirnradgetriebe) demonstriert. Das Zahnradgetriebe wurde als Beispiel gewählt, weil es zu den komplexeren Maschinenelementen zählt und weil (deswegen?) das instationäre („dynamische“) Verhalten – zumindest in der Grundausbildung im Fach Maschinenelemente – oft völlig ausgeklammert wird.

Um zu zeigen, daß eine Systemmodellierung nach den hier vorgestellten Prinzipien und Regeln im Detaillierungsgrad variabel ist, wird das Mehrpolmodell des Zahnradgetriebes durch Vernachlässigen bzw. Hinzufügen von Effekten und der sie beschreibenden Elemente schrittweise immer komplexer gemacht. Dabei soll auch deutlich werden, daß die hier vorgestellte Modellierungsmethode sogar bei der Betrachtung der Maschinenelemente selbst erhebliche Vorteile bringen kann, weil das Aufstellen der Blockschaltbilder sowie das Ableiten der daraus resultierenden (Differential-) Gleichungen zur Beschreibung des Gesamt-Übertragungsverhaltens zu erheblichen Anteilen rein schematisch (und ohne detaillierte Betrachtung der physikalisch-gegenständlichen Zusammenhänge) vorgenommen werden kann.

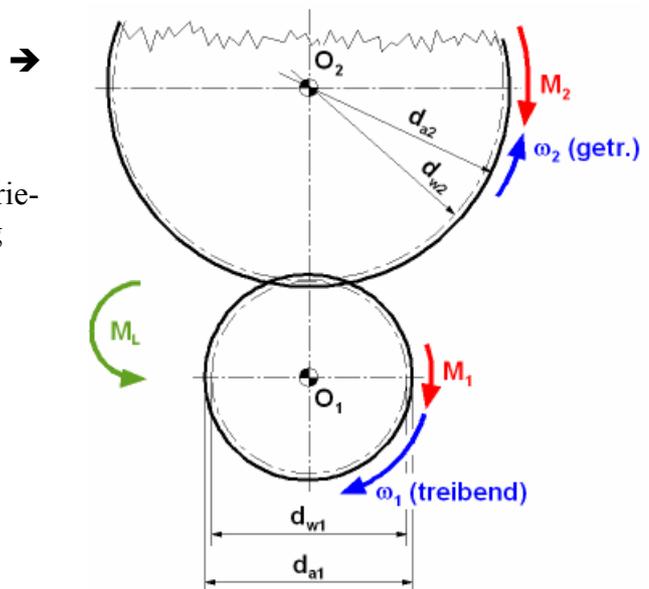
Gegen Ende wird außerdem die durchaus nicht triviale Frage der Lastverteilung bei leistungsverzweigten Getrieben diskutiert und es wird der Übergang vom Stand- zum Umlaufgetriebe betrachtet.

**Bild 16** zeigt als Einstieg die Skizze des zunächst zu untersuchenden einstufigen Stirnradgetriebes mit den für die Übertragungsfunktion wesentlichen Abmessungen und den Kraft- und Bewegungsgrößen an den äußeren leistungsführenden Anschlüssen (Wellen).

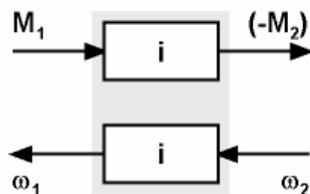
### 5.1 Globale Betrachtung

Ganz global kann man die gesamte Zahnradstufe nach Bild 16 als ein einziges Übertragungselement linearer Übertragungsfunktion (Übersetzung  $i$ ) auffassen. Die entsprechende Vierpolstruktur ist in **Bild 17** wiedergegeben.

**Bild 16:** Einstufiges Stirnradgetriebe, Skizze und Abmessungen



↓ **Bild 17:** Vierpol-Blockschaltbild des Getriebes nach Bild 16 bei globaler Betrachtung



Die Übertragungsgleichungen ergeben sich aus dem Blockschaltbild zu:

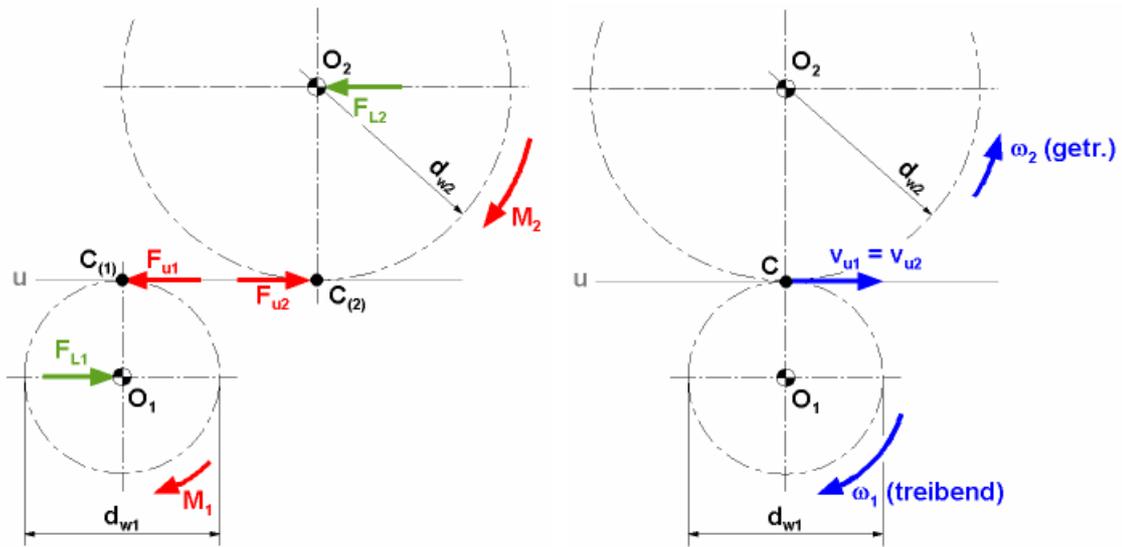
$$\omega_1 = i \cdot \omega_2 \quad (23)$$

$$(-M_2) = i \cdot M_1 \quad (24)$$

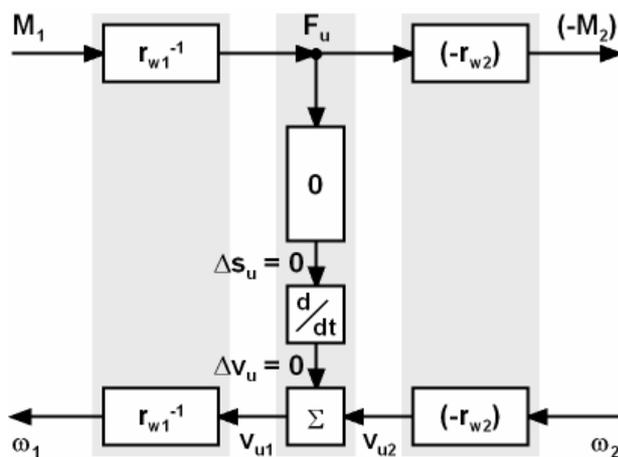
Die globale Betrachtung mag ausreichend sein, wenn die Zahnradstufe Komponente eines übergeordneten Systems ist. Wenn man jedoch das Verhalten des Maschinenelementes selbst untersuchen will, so muß man dessen innere Struktur weiter auflösen.

### 5.2 Starre Verzahnung, Betrachtung in Umfangsrichtung

Zu diesem Zweck zeigt **Bild 18** zunächst eine Skizze der Kraft- und Bewegungsverhältnisse im Inneren der Zahnradstufe, wie sie im Bereich der Maschinenelemente-Lehre üblich ist. Diese Betrachtung hebt zunächst auf die Kräfte und Geschwindigkeiten in Umfangsrichtung ( $\mathbf{u}$ ) ab.



**Bild 18:** Kraft- und Bewegungsverhältnisse im Inneren der Zahnradstufe nach Bild 16 (Betrachtung in Umfangsrichtung, starre Verzahnung)



**Bild 19:** Vierpol-Blockschaltbild des einstufigen Strinradgetriebes (Betrachtung in Umfangsrichtung, starre Verzahnung)

Das zugehörige Blockschaltbild ist in **Bild 19** wiedergegeben. Es besteht aus zwei idealen Übertragungselementen (Umformung der äußeren Drehmomente und Winkelgeschwindigkeiten in Umfangskräfte und -geschwindigkeiten durch die beiden Radkörper) sowie einem „Querkopplungselement“, welches die zunächst starr angenommene (beim Zahnradgetriebe formschlüssig realisierte) Kraftübertragung zwischen den beiden Rädern repräsentiert.

Die aus dem Blockschaltbild nach Bild 19 ableitbaren Übertragungsfunktionen lauten:

$$\omega_1 = \frac{1}{r_{w1}} \cdot v_{u1} = \frac{1}{r_{w1}} \cdot (v_{u2} + \Delta v_u) = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 \quad (25)$$

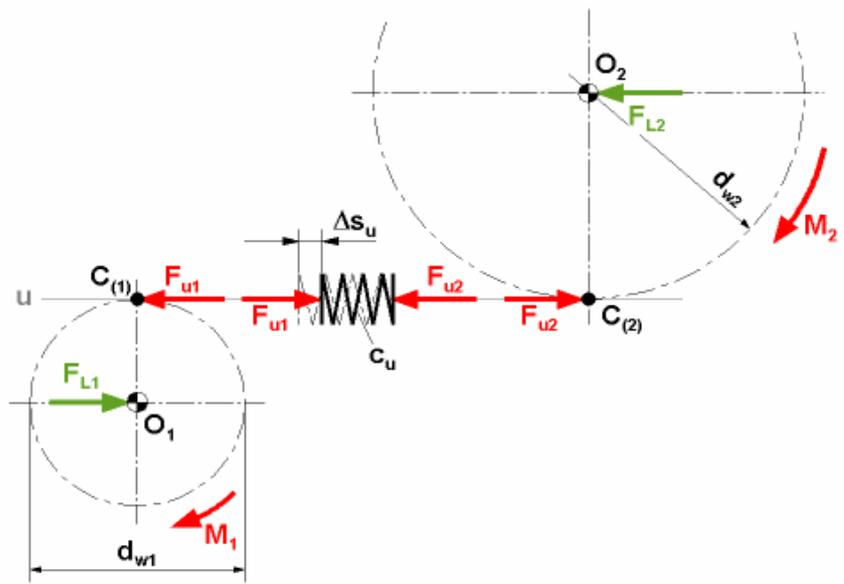
$$(-M_2) = (-r_{w2}) \cdot F_u = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot M_1 \quad (26)$$

### 5.3 Elastische Verzahnung, Betrachtung in Umfangsrichtung

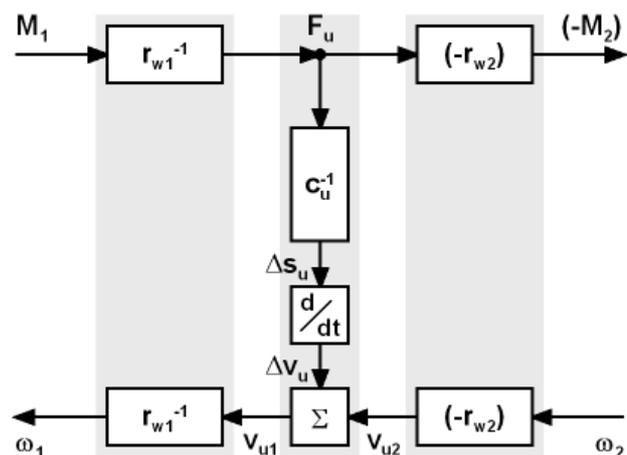
Es fällt nun leicht, die Annahme „starre Kraftübertragung“ durch eine – wie in der Realität – elastisch nachgiebige Kraftübertragung zwischen den beiden Rädern zu ersetzen. **Bild 20** zeigt hierzu eine Skizze (nur) der Kraftverhältnisse, **Bild 21** das entsprechend modifizierte Vierpol-Blockschaltbild. Die Betrachtung erstreckt sich weiterhin zunächst auf die Kräfte und Bewegungen in Umfangsrichtung.

Wichtig ist, daß der Übergang von der starren zur elastischen Verzahnung auf der Blockschaltbild-Ebene einfach durch Austausch der Querkopplung erfolgt (Ersatz der Querkopplung des Sonderfalles „starre Kraftübertragung“ nach Bild 15 links durch die allgemeinere Querkopplung des Typs „Elastizität“ nach Bild 14 links).

Anhand des Blockschaltbildes können nun die Übertragungsgleichungen ganz formal durch schrittweises „Zurückrechnen“ der an den beiden Anschlüssen anliegenden Ausgangsgrößen bis zu den Eingangsgrößen über die verschiedenen Elemente hinweg ermittelt werden – und zwar sehr viel einfacher, als dies durch Analyse der physikalisch-gegenständlichen Gegebenheiten möglich wäre<sup>4</sup>:



**Bild 20:** Kraftverhältnisse im Inneren der Zahnradstufe nach Bild 16 bei elastischer Verzahnung (Betrachtung in Umfangsrichtung)



**Bild 21:** Vierpol-Blockschaltbild des einstufigen Stirnradgetriebes (Betrachtung in Umfangsrichtung, elastische Verzahnung)

<sup>4</sup> Hier wie in allen folgenden Fällen wird das schrittweise Ermitteln der Übertragungsgleichungen dadurch veranschaulicht, daß die einzelnen Schritte des „Zurückrechnens“ durch die Vierpolstruktur durch eine entsprechende Gleichungskette explizit aufgezeigt werden.

$$\omega_1 = \frac{1}{r_{w1}} \cdot v_{u1} = \frac{1}{r_{w1}} \cdot (v_{u1} + \Delta v_u) = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}} \cdot \frac{d}{dt}(\Delta s_u) \quad (27)$$

$$= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c_u} \cdot F_u \right) = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}^2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{M_1}{c_u} \right)$$

$$(-M_2) = (-r_{w2}) \cdot F_u = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot M_1 \quad (28)$$

Weil die Vierpolstruktur nach Bild 21 erstmals ein Differentiationselement enthält, entsteht als Übertragungsgleichung erstmals eine Differentialgleichung (Gleichung (27) für die Bewegungsgrößen). Die Übertragungsgleichung (28) für die Kraftgrößen ist demgegenüber identisch mit derjenigen des zuvor dargestellten (Sonder-) Falles „starre Verzahnung“ (siehe Gleichung (26)).

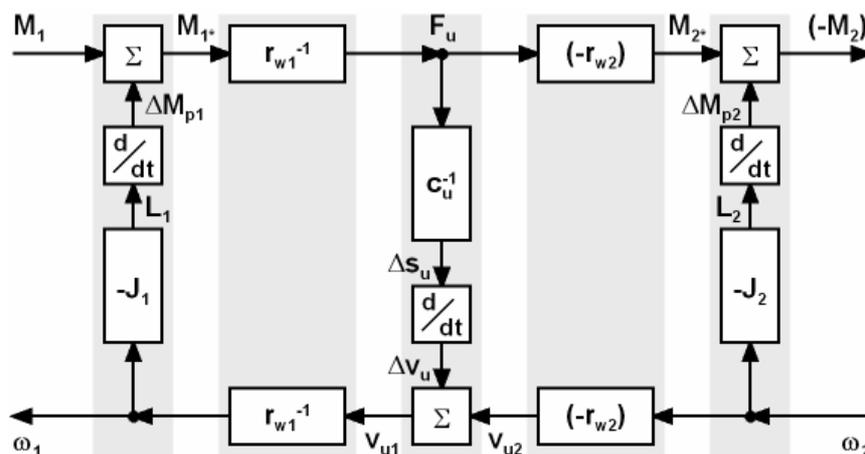
Es sei darauf hingewiesen, daß die (auf die Umfangsrichtung bezogene) Zahnfederrate  $c_u$  (bzw. die Nachgiebigkeit  $\delta_u = c_u^{-1}$ ) bei Zahnradgetrieben *keine* Konstante ist, sondern von der Eingriffsstellung und – unter Berücksichtigung der Bewegungen – damit von der Zeit abhängt. Deshalb gilt für den in Gleichung (27) auftretenden Differentialausdruck selbst bei zeitlich konstantem oder konstant angenommenem Antriebsdrehmoment  $M_1$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{M_1}{c_u} \right) \neq 0$$

Daraus resultiert eine in jedem Fall ungleichförmige („schwingende“) Übertragung der Bewegungen durch das Zahnradgetriebe mit elastischer Verzahnung.

#### 5.4 Elastische Verzahnung, Drehträgheiten, Betrachtung in Umfangsrichtung

In einem weiteren Detaillierungsschritt fällt es nun leicht, zusätzlich auch die Drehträgheiten der Räder mit zu berücksichtigen. Dazu werden entsprechende „Querkopplungen“ zur Berücksichtigung der Trägheitswirkungen (siehe Bild 10 rechts) in die Vierpolstruktur eingebaut. Es entsteht das in **Bild 22** gezeigte Blockschaltbild für eine Zahnradstufe mit Berücksichtigung sowohl der (auf die Umfangsrichtung bezogenen) Zahnfedersteifigkeiten als auch der Drehträgheiten der Räder.



**Bild 22:** Vierpol-Blockschaltbild des einstufigen Stirnradgetriebes (Betrachtung in Umfangsrichtung, elastische Verzahnung und Drehträgheiten der Räder berücksichtigt)

Im vorliegenden Fall sind die Verhältnisse bereits so komplex, daß die Herleitung der Übertragungsgleichungen des Gesamtsystems anhand des physikalisch-gegenständlichen Modells mit einiger Mühe verbunden wäre. Die hier präsentierte Methode des „Zurückrechnens“ durch das Blockschaltbild ist dagegen streng schematisch durchführbar, einfach und sicher:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{r_{w1}} \cdot v_{u1} = \frac{1}{r_{w1}} \cdot (v_{u2} + \Delta v_u) = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}} \cdot \frac{d}{dt} (\Delta s_u) & (29) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c_u} \cdot F_u \right) = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}^2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{M_1^*}{c_u} \right) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}^2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{M_1 + \Delta M_{p1}}{c_u} \right) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}^2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{M_1 + \frac{d}{dt} (-J_1 \cdot \omega_1)}{c_u} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-M_2) &= M_2^* + \Delta M_{p2} = (-r_{w2}) \cdot F_u + \frac{d}{dt} (J_2 \cdot \omega_2) & (30) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot M_1^* + \frac{d}{dt} (-J_2 \cdot \omega_2) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot (M_1 + \Delta M_{p2}) + \frac{d}{dt} (-J_2 \cdot \omega_2) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \left( M_1 + \frac{d}{dt} (-J_1 \cdot \omega_1) \right) + \frac{d}{dt} (-J_2 \cdot \omega_2)
\end{aligned}$$

Auch hierbei ist die (auf die Umfangsrichtung bezogene) Zahnfederrate  $c_u$  (bzw. die Nachgiebigkeit  $\delta_u = c_u^{-1}$ ) *keine* Konstante, sondern von der Eingriffsstellung und damit – infolge der Bewegungen – von der Zeit abhängig.

Gleichung (29) ist die Bewegungs(differential)gleichung. In umgestellter Form (alle Terme, welche die zu bestimmende Ausgangsgröße  $\omega_1$  oder zeitliche Ableitungen davon enthalten, auf eine Seite) und unter der Annahme, daß die Drehträgheiten der beiden Räder  $J_1$  und  $J_2$  konstant sind, lautet sie:

$$\omega_1 + \frac{J_1}{r_{w1}^2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c_u} \right) \cdot \frac{d}{dt} (\omega_1) + \frac{J_1}{r_{w1}^2 \cdot c_u} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\omega_1) = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}^2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{M_1}{c_u} \right) \quad (31)$$

Unter der gleichen Prämisse ( $J_1, J_2 = \text{const.}$ ) läßt sich die Kraft(differential)gleichung auswerten zu:

$$(-M_2) = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot M_1 - \frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot J_1 \cdot \frac{d}{dt} (\omega_1) - J_2 \cdot \frac{d}{dt} (\omega_2) \quad (32)$$

Die Bewegungsgleichung (31) ist eine inhomogene, nicht-lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $\omega_1$ . Sie muß zuerst gelöst werden; das Ergebnis  $\omega_1 = f(\omega_2, M_1)$  kann man dann in die Kraft(differential)gleichung (32) einsetzen, um deren Lösung ( $M_2 = f(\omega_2, M_1)$ ) zu ermitteln.

Auf die Lösung der angegebenen Differentialgleichungen sei nicht im Detail eingegangen, vielmehr sollen nur einige allgemeine Anmerkungen zu den zur Verfügung stehenden Lösungsverfahren gemacht werden:

- Am elegantesten wäre es, die angegebenen Differentialgleichungen „im Zeitbereich“ analytisch zu lösen. Dies ist im vorliegenden Fall (wie in den meisten technisch relevanten Fällen) allerdings nur unter erheblichen, unter Umständen sinnentstellenden Vereinfachungen möglich, z.B.: Konstantsetzung einzelner Eingangsgrößen (etwa  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{const.}$ ), Beschränkung auf sinusförmige Verläufe zeitlich veränderlicher Größen (sowohl Ein-/Ausgangsgrößen als auch zeitlich veränderliche Systemparameter wie hier  $\mathbf{c}_u$ ).
- Eine zweite Möglichkeit der analytischen Lösung ist die Nutzung der aus der der Regelungstechnik bekannten Laplace-Transformation (siehe z.B. [Merz/Jaschek-03]). Hierdurch gelingt es insbesondere, andere als sinusförmige zeitliche Verläufe der Ein- und Ausgangsgrößen zu betrachten, die allerdings streng genommen auch Idealisierungen sind (z.B. Sprungfunktionen oder sogenannte Dirac-Impulse an den Eingängen).
- Zunehmend werden die Differentialgleichungssysteme numerisch gelöst, entsprechende Unterstützungs-Software ist inzwischen fast schon Stand der Technik. Die numerische Lösung ist immer eine spezielle Lösung, die für ganz konkret vorgegebene Verläufe der Eingangsgrößen und, sofern diese zeitlich veränderlich sind, der Systemparameter die spezielle „Systemantwort“ (Ausgangsgrößenverläufe) liefert.
- Wenn aufgrund der Komplexität des Problems keine analytische Lösung gefunden werden kann und außerdem eine numerische Lösung nicht möglich oder erwünscht ist, so besteht die traditionelle Methode darin, so lange weitere Vereinfachungen vorzunehmen, bis ein analytisch lösbares Differentialgleichungssystem entsteht. Dies geht allerdings auf Kosten der Realitätsnähe, weil ja tatsächlich vorhandene Einflüsse ausgeklammert werden.

Im vorliegenden Fall würde beispielsweise die häufig getroffene Annahme  $\omega_2 = \mathbf{const.}$  den letzten Term auf der rechten Seite der Kraftgleichung (32) unmittelbar verschwinden lassen. Die Annahme  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{const.}$  bringt alleine nichts. Wenn aber zusätzlich statt mit der über dem Zahneingriff und damit über der Zeit veränderlichen Zahnfederkonstante  $\mathbf{c}_u$  mit einem zeitlichen Mittelwert  $\bar{\mathbf{c}}_u$  gerechnet wird, so wird in der Bewegungsgleichung (31) sowohl der mittlere Term auf der linken Seite als auch der letzte Term auf der rechten Seite gleich Null. Wenn man schließlich noch die zeitlichen Verläufe aller Größen auf sinusförmige Verläufe einschränkt, so können in dieser in mehreren Stufen vereinfachten Form die Gleichungen (31) und

(32) gelöst werden. Allerdings dürften die Lösungen nur noch relativ wenig mit der Realität zu tun haben.

### **5.5 Elastische Verzahnung, Drehträgheiten, Betrachtung in Zahnnormal- und -tangentialrichtung**

Die bisher angestellten Überlegungen zum Zahnradgetriebe enthalten noch eine gravierende Vereinfachung: In der Realität wird nämlich die Zahnkraft gar nicht in Umfangsrichtung übertragen, sondern senkrecht zu Zahnflanke in Richtung der Zahnnormalen. Zur Erfüllung des Verzahnungsgesetzes (siehe z.B. [Niemann/Winter-03]) ist in einem beliebigen Eingriffspunkt  $\mathbf{X}$  die Richtung der Zahnnormalen um den Eingriffswinkel  $\alpha_X$  gegenüber der Wälzgeraden gekippt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß im allgemeinen Fall beliebiger Verzahnungsgeometrien der Eingriffswinkel  $\alpha_X$  *nicht* konstant, sondern eine Funktion der Eingriffsstellung (der Lage des Punktes  $\mathbf{X}$  auf der Eingriffslinie) ist. Lediglich Evolventenverzahnungen (die allerdings mit Abstand am häufigsten vorkommen) haben einen über der gesamten Eingriffslinie konstanten Eingriffswinkel  $\alpha_X = \alpha_w = \text{const.}$

**Bild 23** zeigt die Skizze eines Stirnradgetriebes mit entsprechend geänderten Abmessungen sowie mit den Kraft- und Bewegungsgrößen an den äußeren leistungsführenden Anschlüssen (Wellen).

**Bild 24** erläutert die Kraft- und Bewegungsverhältnisse im Inneren der Getriebestufe detaillierter – vor allem die Zerlegung der Kräfte und Bewegungen in Komponenten in Zahnnormal- und -tangentialrichtung ( $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$ ).

Die Geometrieparameter  $\rho_{X1}$  und  $\rho_{X2}$  sind ein Maß für die Lage des aktuellen Eingriffspunktes  $\mathbf{X}$  und daher über dem Zahneingriff *nicht* konstant. Sie hängen über folgende geometrische Bedingung zusammen:

$$\frac{\rho_{X1} + \rho_{X2}}{r_{w1} + r_{w2}} = \sin \alpha_X \quad (33)$$

Um die weiter unten abgeleiteten (Differential-) Gleichungen zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens des Zahnradgetriebes allerdings nicht noch komplizierter werden zu lassen, wird im folgenden Beziehung (33) *nicht* weiter ausgewertet, sondern es werden die beiden eigentlich miteinander gekoppelten Geometrieparameter  $\rho_{X1}$  und  $\rho_{X2}$  in den Gleichungen stehen gelassen.

Im folgenden wird schrittweise gezeigt, wie man auf der Basis der Vierpol-Modellierung den Übergang von der vereinfachten Betrachtung in Umfangsrichtung zu einer Betrachtung normal und tangential zur Zahnflanke vollzieht. Ausgangspunkt ist das weiter oben in Bild 22 dargestellte Blockschaltbild des einstufigen Zahnradgetriebes mit Berücksichtigung der Drehträgheiten ( $\mathbf{J}_1$ ,  $\mathbf{J}_2$ ) und der Verzahnungselastizität ( $\mathbf{c}_u$ ), aber noch mit der Vereinfachung „Betrachtung in Umfangsrichtung“.



Zusätzlich zu den Trägheits- und Elastizitätswirkungen sind nun auch Widerstands-/Reibkräfte in Zahntangentialrichtung berücksichtigt werden: Dies ist der eigentliche Zugewinn beim Übergang von der vereinfachten Betrachtung in Umfangsrichtung zu einer Betrachtung normal und tangential zur Zahnflanke.

Dieser Übergang bedeutet, daß im Innern der Vierpolstruktur zwei getrennte Zweige für die Übertragung der Kraft- und Bewegungsgrößen vorhanden sein müssen – je einer für die Kräfte/Bewegungen in Normal- und in Tangentialrichtung.

Dazu sind zwei Verzweigungselemente in das Vierpol-Blockschaltbild einzubauen.

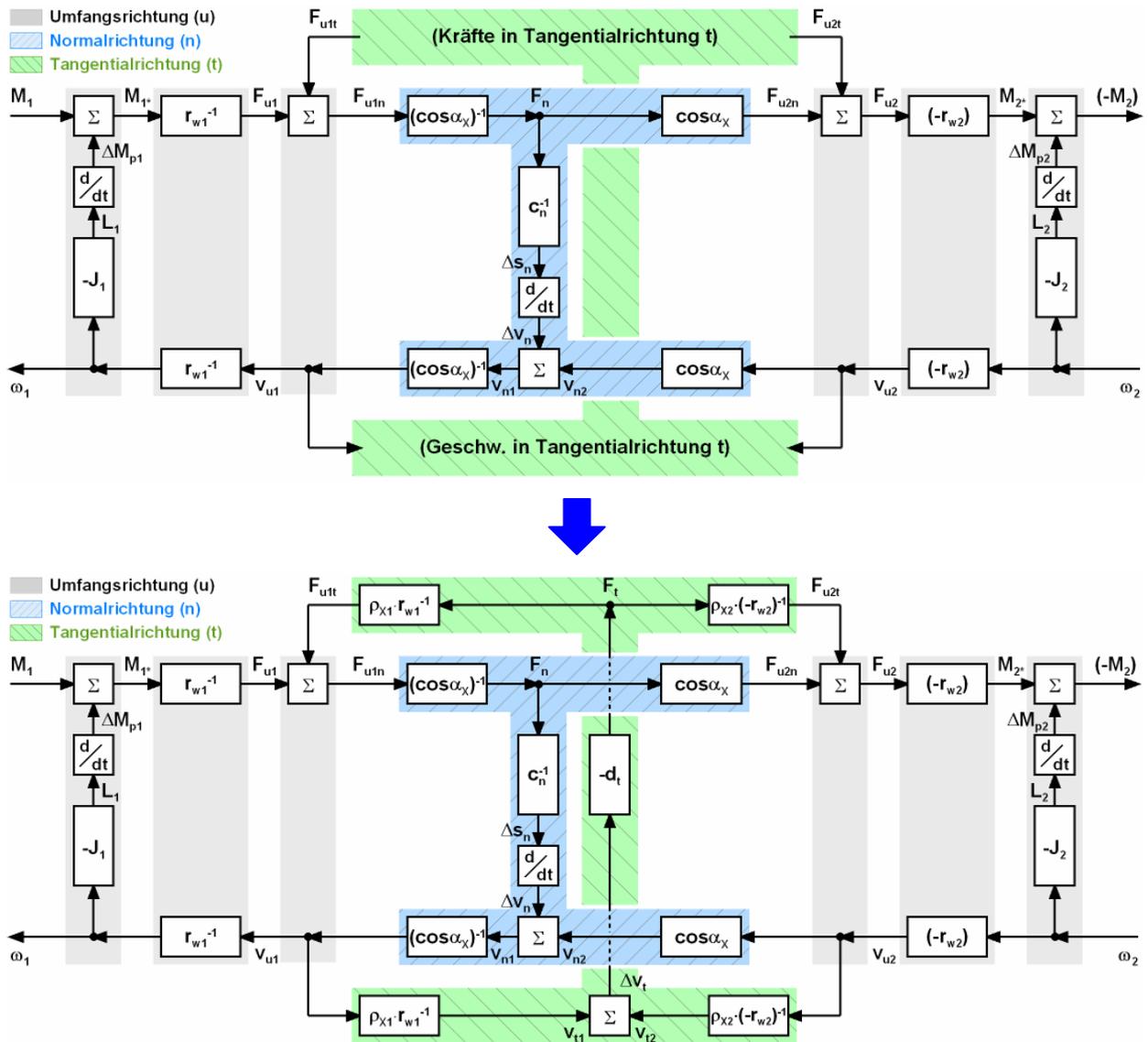
Da sich an den beiden Zahnflanken Normal- und Tangentialkräfte überlagern/aufsummieren, während der Geschwindigkeitszustand jeder Zahnflanke natürlich einheitlich sein muß, kann es sich nur um Verzweigungselemente des Typs „Summation/Überlagerung der Potentialgrößen bei konstanter Flußgröße“ (siehe Bild 9b) handeln.

In Richtung der Zahnnormalen findet die Kraftübertragung über eine Querkopplung des Typs „Elastizität“ statt, wie in den bisherigen Untersuchungen (siehe Bild 21 und Bild 22).

Als Zwischenstand erhält man aus den bisherigen Überlegungen das in **Bild 25 oben** dargestellte – noch unvollständige – Vierpol-Blockschaltbild. Es läßt sich anhand der Richtungen der – teilweise noch „offenen“ – Pfeile im Innern der Struktur erkennen, daß im Tangentialzweig eine Querkopplung des Typs „Bewegungswiderstände“ eingefügt werden muß.

Oder anders ausgedrückt: Die auf der Mehrpoltheorie basierenden Überlegungen zeigen, daß eine Betrachtung der Kräfte/Bewegungen in Normal- und in Tangentialrichtung ohne gleichzeitige Berücksichtigung von Widerstands-/Reibkräften in Zahntangentialrichtung gar nicht sinnvoll möglich ist!

Das Ergebnis ist in **Bild 25 unten** dargestellt. Die in die Querkopplung des Typs „Bewegungswiderstände“ eingesetzte Übertragungs-„Konstante“ ( $-\mathbf{d}_t$ ) ist dabei lediglich als Stellvertreter zu betrachten: Weder die Coulombsche („trockene“) Gleitreibung noch die Newtonsche („flüssige“) Gleitreibung und natürlich auch nicht die sich aus beiden Anteilen zusammensetzende Mischreibung kann man mittels einer linearen Funktion beschreiben.



**Bild 25:** Vierpol-Blockschaltbild des einstufigen Stirnradgetriebes (Betrachtung in Zahnnormal und -tangentialrichtung, elastische Verzahnung, Drehrträgheiten der Räder sowie Reibkräfte an der Verzahnung berücksichtigt); oben: Zwischenschritt, unten: endgültige Struktur

Das Vierpol-Blockschaltbild nach Bild 25 ist nun wieder in erster Linie dadurch interessant, daß sich aus ihm auf streng formalisiertem, relativ einfachem Wege die Übertragungsgleichungen des Systems ableiten lassen, wobei nachstehend erneut jeder Schritt des „Zurückrechnen“ der an den beiden Anschlüssen anliegenden Ausgangsgrößen bis zu den Eingangsgrößen über die verschiedenen Elemente hinweg gezeigt ist.

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{r_{w1}} \cdot v_{u1} = \frac{1}{r_{w1} \cdot \cos \alpha_X} \cdot v_{n1} = \frac{1}{r_{w1} \cdot \cos \alpha_X} \cdot (v_{n2} + \Delta v_n) & (34) \\
&= \frac{1}{r_{w1} \cdot \cos \alpha_X} \cdot \left( \cos \alpha_X \cdot v_{u2} + \frac{d}{dt} (\Delta s_n) \right) = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1} \cdot \cos \alpha_X} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{F_n}{c_n} \right) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1} \cdot \cos \alpha_X} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\cos \alpha_X} \cdot \frac{F_{u1n}}{c_n} \right) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1} \cdot \cos \alpha_X} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{F_{u1} + F_{u1t}}{\cos \alpha_X \cdot c_n} \right) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1} \cdot \cos \alpha_X} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{M_{1^*} + \rho_{X1} \cdot F_t}{\cos \alpha_X \cdot c_n \cdot r_{w1}} \right) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1} \cdot \cos \alpha_X} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{(M_1 + \Delta M_p) + \rho_{X1} \cdot F_t}{\cos \alpha_X \cdot c_n \cdot r_{w1}} \right) \\
&= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1} \cdot \cos \alpha_X} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{M_1 + \frac{d}{dt} (-J_1 \cdot \omega_1) + \rho_{X1} \cdot F_t}{\cos \alpha_X \cdot c_n \cdot r_{w1}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-M_2) &= M_2^* + \Delta M_{p2} = (-r_{w2}) \cdot F_{u2} + \frac{d}{dt} (-J_2 \cdot \omega_2) & (35) \\
&= (-r_{w2}) \cdot [F_{u2n} + F_{u2t}] + \frac{d}{dt} (-J_2 \cdot \omega_2) \\
&= (-r_{w2}) \cdot \left[ F_{u1n} - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \cdot F_t \right] + \frac{d}{dt} (-J_2 \cdot \omega_2) \\
&= (-r_{w2}) \cdot \left[ (F_{u1} + F_{u1t}) - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \cdot F_t \right] + \frac{d}{dt} (-J_2 \cdot \omega_2) \\
&= (-r_{w2}) \cdot \left[ \left( \frac{M_{1^*}}{r_{w1}} + \frac{\rho_{X2}}{r_{w1}} \cdot F_t \right) - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \cdot F_t \right] + \frac{d}{dt} (-J_2 \cdot \omega_2) \\
&= (-r_{w2}) \cdot \left[ \left( \frac{1}{r_{w1}} \cdot [M_1 + \Delta M_{p1}] + \frac{\rho_{X2}}{r_{w1}} \cdot F_t \right) - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \cdot F_t \right] + \frac{d}{dt} (-J_2 \cdot \omega_2) \\
&= (-r_{w2}) \cdot \left[ \left( \frac{1}{r_{w1}} \cdot \left[ M_1 + \frac{d}{dt} (-J_1 \cdot \omega_1) \right] + \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}} \cdot F_t \right) - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \cdot F_t \right] + \frac{d}{dt} (-J_2 \cdot \omega_2)
\end{aligned}$$

Gleichung (34) ist die Differentialgleichung zur Beschreibung der Bewegungsverhältnisse des einstufigen Stirnradgetriebes nach Bild 24 (d.h. bei getrennter Betrachtung Zahnnormal und -tangentialrichtung, mit elastischer Verzahnung, mit Drehträgheiten der Räder sowie mit Reibkräften an der Verzahnung); Gleichung (35) ist die entsprechende Kraft(differential)gleichung.

In beide ist aus Gründen der Übersichtlichkeit die Verknüpfung der Geometrieparameter  $\rho_{X1}$  und  $\rho_{X2}$  gemäß Gleichung (33) *noch nicht* eingesetzt.

Es ist in die Gleichungen (34) und (35) auch noch keine Übertragungsfunktion für die Widerstandskraft an den Zahnflanken (noch kein „Reibgesetz“) eingeflossen:

$$\text{Reibgesetz: } \mathbf{F}_t = f(\Delta \mathbf{v}_t) \quad (36)$$

$\Delta \mathbf{v}_t$  ist die tangentiale Gleitgeschwindigkeit. Sie kann man ebenfalls durch „Rückverfolgung“ aus dem Vierpol-Blockschaltbild nach Bild 25 ermitteln:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_t &= \mathbf{v}_{t1} + \mathbf{v}_{t2} = \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}} \cdot \mathbf{v}_{u1} - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \cdot \mathbf{v}_{u2} = \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha_X} \cdot \mathbf{v}_{n1} - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \cdot \mathbf{v}_{u2} \\ &= \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha_X} \cdot (\mathbf{v}_{n2} + \Delta \mathbf{v}_n) - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \cdot \mathbf{v}_{u2} \\ &= \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}} \cdot \mathbf{v}_{u2} + \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha_X} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{F}_n}{c_n} \right) - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \cdot \mathbf{v}_{u2} \\ &= \left[ \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}} - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \right] \cdot \mathbf{v}_{u2} + \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}^2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha_X} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{r_{w1} \cdot \mathbf{F}_{u1} + \rho_{X1} \cdot \mathbf{F}_t}{c_n \cdot \cos \alpha_X} \right) \\ &= (-r_{w2}) \cdot \left[ \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}} - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \right] \cdot \omega_2 + \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}^2 \cdot \cos \alpha_X} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{M_1 + \frac{d}{dt} (-J_1 \cdot \omega_1) + \rho_{X1} \cdot \mathbf{F}_t}{c_n \cdot \cos \alpha_X} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

In Gleichung (37) ist als erster Term das bekannte Ergebnis bei rein stationärer Betrachtung zu sehen (siehe etwa [Niemann/Winter-03]). Im hier betrachteten instationären Fall kommt jedoch ein zweiter Term hinzu, der überlagerte Einflüsse der im allgemeinen Fall zeitlich nicht konstanten äußeren und inneren Größen berücksichtigt. Etwas unangenehm ist, daß man eigentlich zuerst die Bewegungs(differential)gleichung (34) für das gesamte Getriebe lösen müßte, bevor man Gleichung (37) auswerten kann. Sehr unangenehm ist, daß darüber hinaus auch die Widerstands-/Reibkraft  $\mathbf{F}_t$  selbst noch in der Differentialgleichung (37) auftaucht, die ja eigentlich nur zu dem Zweck erstellt wurde, um eben diese Widerstands-/Reibkraft  $\mathbf{F}_t$  gemäß Gleichung (36) überhaupt bestimmen zu können.

Für die Bestimmung der Widerstands-/Reibkraft  $\mathbf{F}_t$  in Abhängigkeit von der tangentialen Gleitgeschwindigkeit  $\Delta \mathbf{v}_t$  (Gleichung (36)) wird im einfachsten Fall ein Ansatz entsprechend der Coulombschen („trockenen“) Gleitreibung eingesetzt [Niemann/Winter-03], in welchem Fall die Abhängigkeit von  $\Delta \mathbf{v}_t$  die mathematische Form einer Signum-Funktion hätte:  $\mathbf{F}_t$  wäre betragsmäßig konstant, würde aber mit dem Vorzeichenwechsel von  $\Delta \mathbf{v}_t$  ebenfalls das Vorzeichen wechseln (was sich im übrigen in dem entsprechenden Differentialausdruck in Gleichung (34) gar nicht darstellen ließe!). Die Verhältnisse werden deutlich komplexer, wenn man von der Newtonschen („flüssigen“) Gleitreibung oder von Mischreibung ausgeht. Im Rahmen dieses Beitrages (dessen Hauptfokus nicht auf der Erforschung der Reibungsverhältnisse von Verzahnungen liegt) wird hierauf nicht weiter eingegangen.

Wenn man – wie schon zuvor – davon ausgeht, daß sich die Drehträgheiten nicht ändern ( $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2 = \mathbf{const.}$ ), und die Gleichungen (34) und (35) wieder so umgestellt, daß alle Terme der Ausgangsgrößen ( $\omega_1, \mathbf{M}_2$ ) und deren zeitliche Ableitungen auf eine Seite stehen, erhält man:

$$\omega_1 + \frac{J_1}{r_{w1}^2 \cdot \cos \alpha_X} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\cos \alpha_X \cdot c_n} \right) \cdot \frac{d}{dt} (\omega_1) + \frac{J_1}{r_{w1}^2 \cdot \cos^2 \alpha_X \cdot c_n} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\omega_1) \quad (38)$$

$$= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}^2 \cdot \cos \alpha_X} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{M_1}{\cos \alpha_X \cdot c_n} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho_{X1} \cdot F_t}{\cos \alpha_X \cdot c_n} \right) \right]$$

$$(-M_2) = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot M_1 - \frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot J_1 \cdot \frac{d}{dt} (\omega_1) - r_{w2} \cdot \left[ \frac{\rho_{X1}}{r_{w1}} - \frac{\rho_{X2}}{r_{w2}} \right] \cdot F_t - J_2 \cdot \frac{d}{dt} (\omega_2) \quad (39)$$

Wie weiter oben schon angemerkt, gilt im (häufigen) Sonderfall der Evolventenverzahnung:

$$\text{Evolventenverzahnung: } \alpha_X = \alpha_w = \mathbf{const.} \quad (40)$$

Für Evolventenverzahnungen vereinfacht sich daher die Bewegungs(differential)gleichung (38) weiter zu:

$$\omega_1 + \frac{J_1}{r_{w1}^2 \cdot \cos^2 \alpha_w} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c_n} \right) \cdot \frac{d}{dt} (\omega_1) + \frac{J_1}{r_{w1}^2 \cdot \cos^2 \alpha_w \cdot c_n} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\omega_1) \quad (41)$$

$$= -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \cdot \omega_2 + \frac{1}{r_{w1}^2 \cdot \cos^2 \alpha_w} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{M_1}{c_n} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho_{X1} \cdot F_t}{c_n} \right) \right]$$

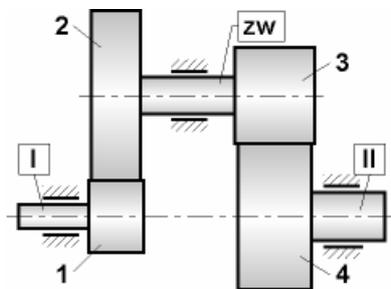
Erneut sei auf die Lösung der Differentialgleichungen nicht eingegangen.

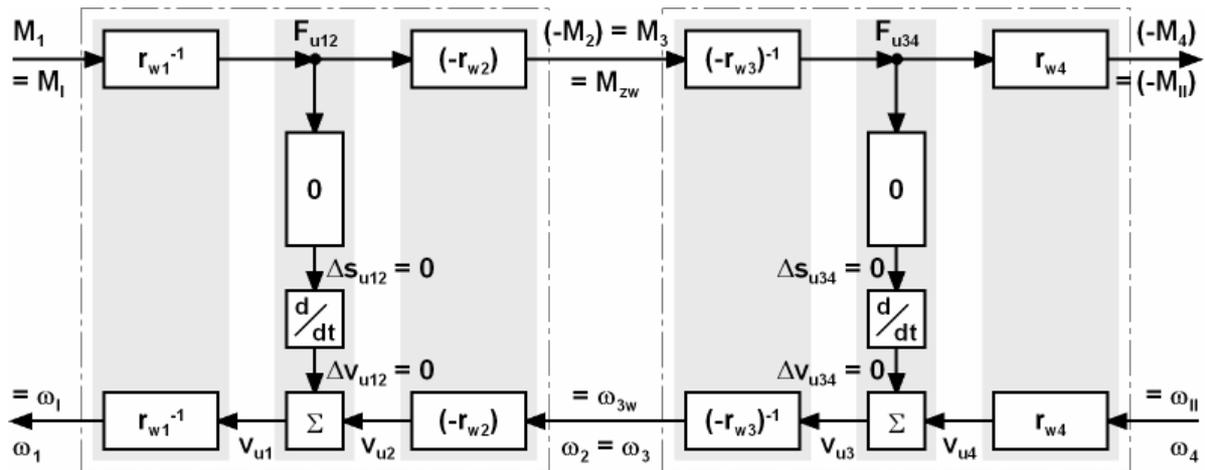
## 5.6 Mehrstufige Getriebe und Getriebe mit innerer Leistungsverzweigung

Häufig werden mehrere Zahnradtriebbestufen hintereinander gehängt, beispielsweise um große Übersetzungen zu realisieren oder bestimmte Achsabstandsbedingungen zu erfüllen. **Bild 26** zeigt eine vereinfachte Skizze, **Bild 27** das damit korrespondierende Vierpol-Blockschaltbild.

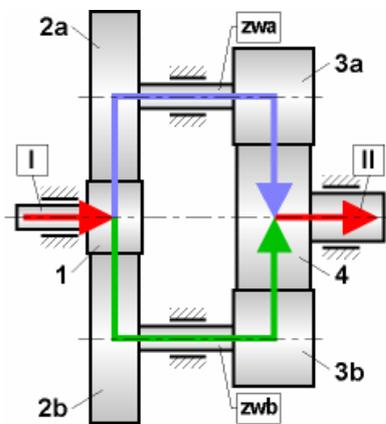
**Bild 26:** Zweistufiges Strinradgetriebe, Skizze

Es sei darauf hingewiesen, daß das Vierpol-Blockschaltbild nach **Bild 27** wieder zu der sehr stark vereinfachten Betrachtung mit starren Verzahnungen und ohne Berücksichtigung der Drehträgheiten der Räder zurückkehrt (siehe Bild 19 für den einstufigen Fall). Der Grund ist, daß im vorliegenden Abschnitt andere Effekte angesprochen werden sollen, für die Elastizitäts- und Trägheitswirkungen zunächst unerheblich sind.





**Bild 27:** Vierpol-Blockschaltbild des zweistufigen Stirnradgetriebes nach Bild 26 (Betrachtung in Umfangsrichtung, starre Verzahnungen, ohne Drehträgheiten)

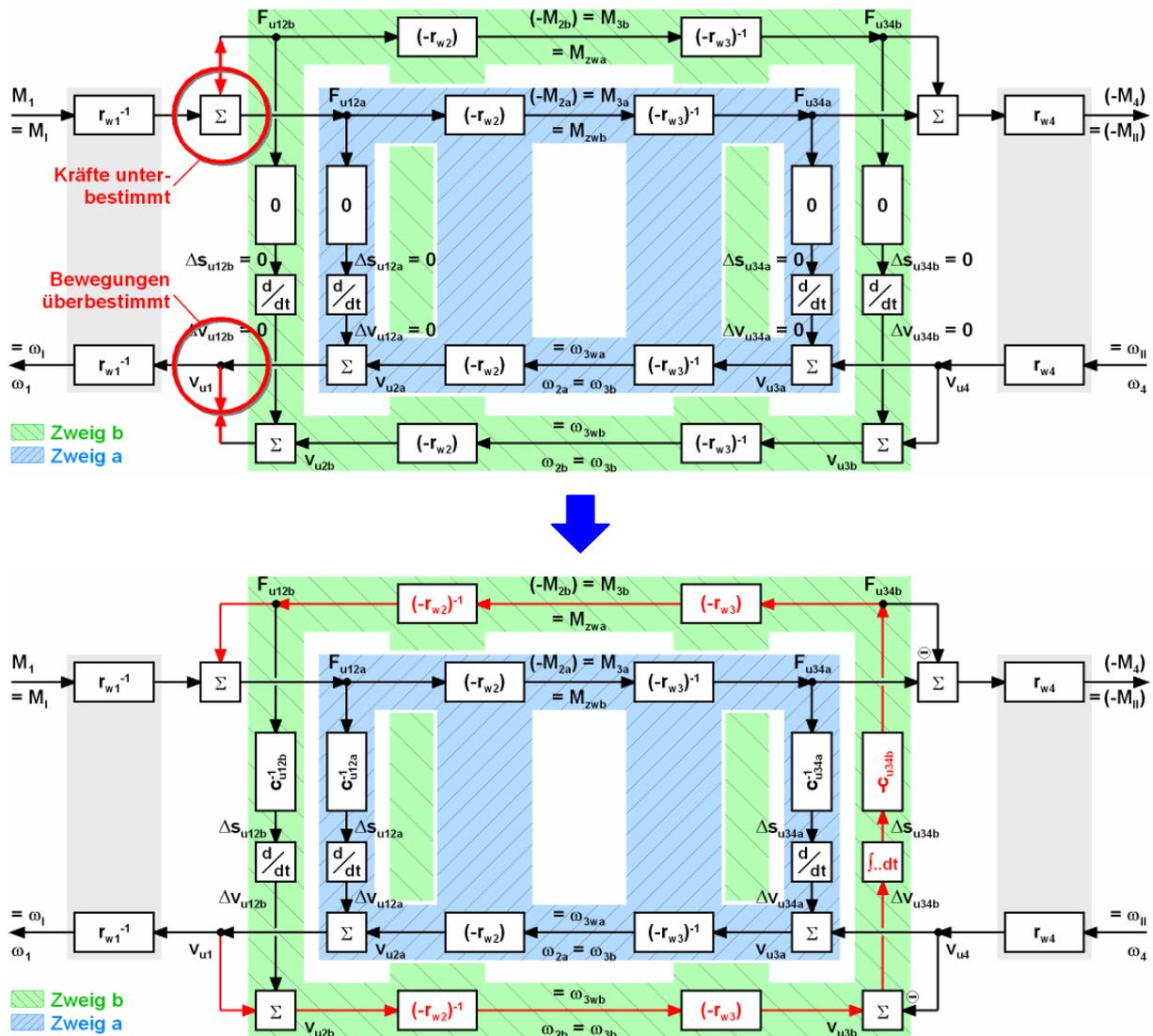


Ausgehend von dem in Bild 26 skizzierten zweistufigen Getriebe ist in **Bild 28** eine Lösung mit innerer Leistungsverzweigung skizziert. Grund für solche Lösungen sind in der Regel hohe zu übertragende Drehmomente/Kräfte, die auf zwei (gegebenenfalls mehr) parallelen Wegen übertragen werden sollen.

**Bild 28:** Zweistufiges Stirnradgetriebe mit Leistungsverzweigung, Skizze

Wenn man nun versucht, das Vierpol-Blockschaltbild entsprechend zu erweitern, so muß man zur Abbildung der zwei parallelen Übertragungswege zwei Verzweigungselemente des Typs „Summation/Überlagerung der Potentialgrößen bei konstanter Flußgröße“ (siehe Bild 9b) in die Ausgangsstruktur nach Bild 27 einbauen.

Wie in **Bild 29 oben** gezeigt, führt dies – unter der Prämisse „starre Verzahnungen“! – jedoch zu einer Vierpol-Struktur, in der sich die Pfeilrichtungen nicht „schließen“: Eines der beiden zur Abbildung der Leistungsverzweigung eingeführten Krafte-Summationsglieder hat eine logisch-funktionale Eingangsgröße zu wenig („statisch unterbestimmt“ oder „statisch unbestimmt“), dafür hat der zugehörige Geschwindigkeits-Verzweigungspunkt eine Eingangsgröße zu viel („kinematisch überbestimmt“).



**Bild 29:** Vierpol-Blockschaltbild des zweistufigen Stirnadgetriebes mit Leistungsverzweigung nach Bild 28 (Betrachtung in Umfangsrichtung, ohne Drehträgheiten); oben: starre Verzahnungen (mit Markierung der logisch-funktionalen Fehler); unten: alle Zahneingriffe elastisch (logisch-funktionale Fehler beseitigt)

Dieser logisch-funktionale Fehler ist im Bereich der Maschinenelemente (der mechanischen Komponenten überhaupt) natürlich wohlbekannt<sup>5</sup>: Die undefinierte Lastverteilung tritt in allen Fällen auf, in denen eine Kraft auf mehreren parallelen Wegen unter der Annahme starrer Übertragungselemente übertragen werden soll (Verteilung der Kraft auf mehrere Paßfedern, die Flanken eines Vielnutprofils, auf mehrere Niete, auf mehrere Klauen von Kupplungen, auf mehrere parallel laufende Riemen, ...).

<sup>5</sup> Bei den anderen Leistungs-/Energiearten gibt es analoge Fälle: So ist bei Übertragung hydraulischer Leistung über mehrere Leitungen unklar, wie sich die Volumenströme verteilen, wenn man inkompressible und widerstandsfreie Strömung annimmt. Das gleiche gilt für die Elektrik: Die Verteilung der Stromstärken auf mehrere Leitungen ist unklar, wenn man Induktionswirkungen und Leitungswiderstände vernachlässigt.

Neu ist allerdings die Erkenntnis, daß die Vierpol-Blockschaltbilder dies unmittelbar aufzeigen, wenn man die Richtungen der von außen vorgegebenen Ein- und Ausgangsgrößen mit den Richtungen der seitens der Strukturelemente benötigten inneren Ein- und Ausgänge vergleicht (letztlich „Zählen“ der Anzahl der Ein- und Ausgänge unter Berücksichtigung der Elementverschaltungen). In der Realität wie im Vierpol-Blockschaltbild kann der Fehler nur dadurch „in Ordnung gebracht“ werden, daß mindestens so viele Querkopplungen, wie statische Unterbestimmtheiten (und kinematische Überbestimmtheiten) vorhanden sind, durch den Typ „elastische Kraftübertragung“ nach Bild 14 links (und nicht als Querkopplungen des Sonderfalles „starre Kraftübertragung“ nach Bild 15 links) in das Vierpol-Blockschaltbild eingefügt werden.

Im hier diskutierten Beispiel erfolgt dies dadurch, daß alle vier Zahneingriffe elastisch angenommen werden, **Bild 29 oben**.

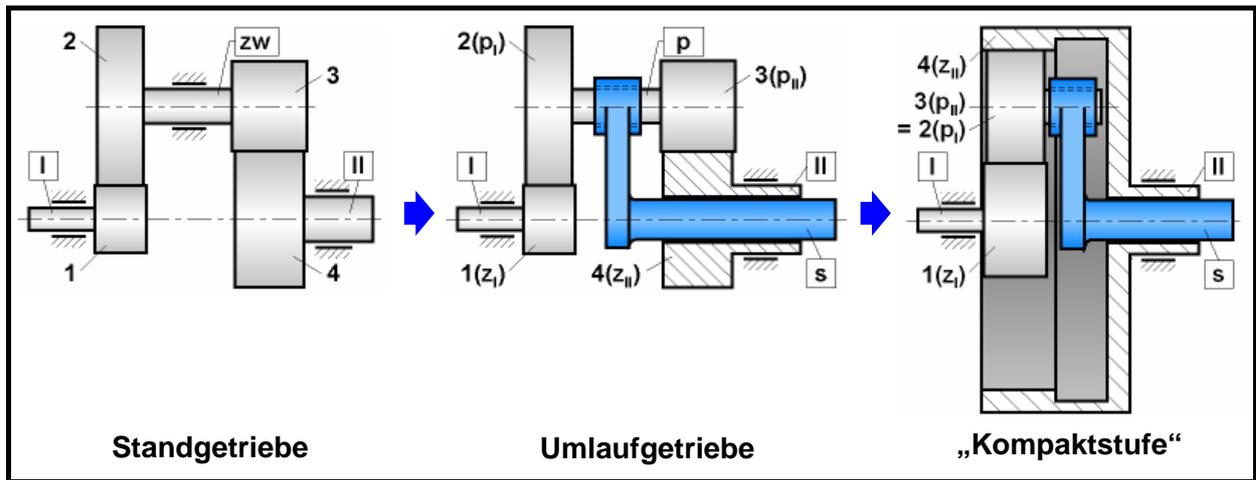
Hier geht es nur darum aufzuzeigen, daß die in diesem Beitrag vorgestellte, auf der Mehrpoltheorie basierende Methode der Erstellung von Simulationsmodellen für Maschinenelemente Informationen über solche Probleme bereits auf abstrakt-formaler Ebene (durch „Zählen“ von Ein- und Ausgangsgrößen) liefert, ohne daß in eine detaillierte Analyse auf physikalisch-gegenständlicher Ebene nötig ist. Daher sei auf die weitere rechnerische Behandlung dieses Falles (Aufstellen der Übertragungsgleichungen) hier verzichtet.

### 5.7 (Zahnrad-) Umlaufgetriebe

Aus dem zweistufigen Stirnradgetriebe nach Bild 26 kann man sehr anschaulich den Übergang zum Umlaufrädergetriebe vollziehen, **Bild 30**. Dies geschieht dadurch, daß man die bisher stillstehenden Teile des Getriebes (das „Gehäuse“, in dem die Wellen I und II sowie die Zwischenwelle zw gelagert sind) beweglich („umlauffähig“) macht und mittels einer dritten Welle – der sogenannten Stegwelle  $s$  – nach außen führt [Müller-98].

Die Räder 1 und 4 werden nun als „Zentralräder“ bezeichnet, ihre Wellen I und II entsprechend als „Zentralradwellen“. Die Zwischenwelle  $zw$  wird zur „Planetenradwelle“  $p$ , die durch sie verbundenen Räder 2 und 3 sind die „Planetenräder“  $p_1$  und  $p_2$ . Sie drehen sich nach wie vor um ihre Achse, jedoch läuft diese selbst mit Steg-Winkelgeschwindigkeit um.

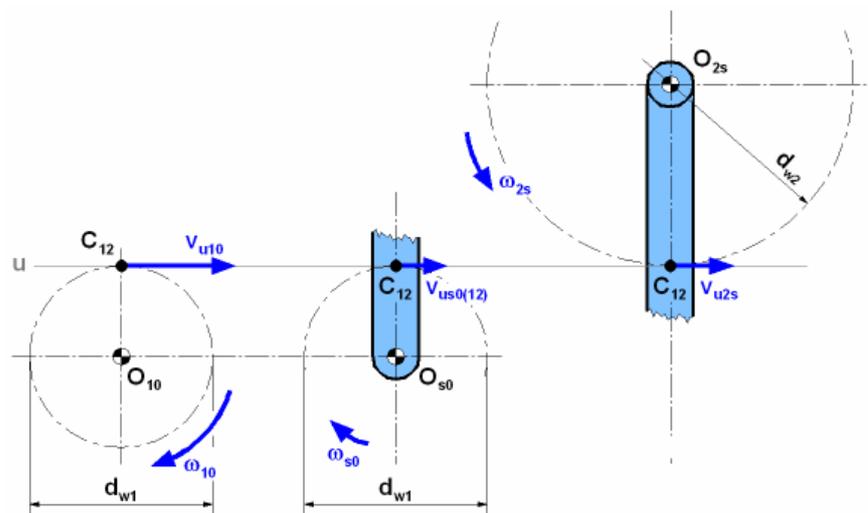
Wird eine der beiden Stirnradstufen in ein Innenzahnradpaar umgewandelt und wird außerdem der Durchmesser der Planetenräder  $p_1$  und  $p_2$  gleich groß gewählt, so entsteht in einem weiteren Schritt die bekannte Planetenrad-Kompaktstufe (Bild 30 rechts). Sie wird an dieser Stelle nur der Vollständigkeit halber erwähnt, für die hier anzustellenden Überlegungen spielt es keine Rolle, von welcher Bauform des Umlaufrädergetriebes ausgegangen wird.



**Bild 30:** Übergang zum Umlaufrädernetriebe

Der Übergang zum Umlaufrädernetriebe bringt einen zusätzlichen kinematischen Freiheitsgrad in das System<sup>6</sup>. Die Geschwindigkeitsverhältnisse sind für den Zahneingriff zwischen den Rädern 1 und 2 in **Bild 31** detaillierter dargestellt.

**Bild 31:**  
Geschwindigkeitsverhältnisse beim Umlaufrädernetriebe (hier Zahneingriff 12, Zahneingriff 34 analog)



Die Umfangsgeschwindigkeit des Zentralrades 1 gegenüber dem stillstehenden

Bezugssystem („0“)  $v_{u10}$  setzt sich nun additiv aus der Umfangsgeschwindigkeit des Steges gegenüber dem Bezugssystem  $v_{us0}$  und der Umfangsgeschwindigkeit aus der Relativdrehung des Rades 2 gegenüber dem Steg  $v_{u2s}$  zusammen:

$$v_{u10} = v_{us0(12)} + v_{u2s} \quad (41)$$

mit:  $v_{u10} = \omega_{10} \cdot r_{w1}$

$$v_{us0(12)} = \omega_{s0} \cdot r_{w1}$$

$$v_{u2s} = \omega_{2s} \cdot (-r_{w2})$$

<sup>6</sup> Dies Aussage ist nur bedingt korrekt: Streng genommen besitzt auch das Standgetriebe diesen kinematischen Freiheitsgrad, er ist nur mit dem Sonderfall der „Null-Geschwindigkeit“ belegt.

Analog gilt für das Räderpaar 3, 4:

$$\mathbf{v}_{u40} = \mathbf{v}_{us0(34)} + \mathbf{v}_{u3s} \quad (42)$$

$$\text{mit: } \mathbf{v}_{u40} = \boldsymbol{\omega}_{40} \cdot \mathbf{r}_{w4}$$

$$\mathbf{v}_{us0(34)} = \boldsymbol{\omega}_{s0} \cdot \mathbf{r}_{w4}$$

$$\mathbf{v}_{u3s} = \boldsymbol{\omega}_{3s} \cdot (-\mathbf{r}_{w3})$$

Um das Mehrpol-Blockschaltbild des Umlaufrädergetriebes zu entwickeln, kann man wieder von dem Blockschaltbild für das zweistufige (Stand-) Getriebe nach Bild 27 ausgehen<sup>7</sup>. In dieses müssen gemäß Gleichung (41) und (42) zwei Verzweigungselemente eingebaut werden, und zwar solche des Typs „Summation/Überlagerung der Flußgrößen bei konstanter Potentialgröße“ (siehe Bild 9a), **Bild 32 oben**. Die beiden zunächst „offenen“ Geschwindigkeitspfeile werden sodann über den Steg selbst verknüpft, letztlich also über ein weiteres Verzweigungselement, diesmal allerdings eines des Typs „Summation/Überlagerung der Potentialgrößen bei konstanter Flußgröße“ (siehe Bild 9b), zusammengeführt, **Bild 32 unten**.

Insgesamt entsteht ein Sechspol-Blockschaltbild, entsprechend den drei äußeren leistungsführenden Wellen des Umlaufrädergetriebes. Zwei der insgesamt drei Eingangsgrößen sind Winkelgeschwindigkeiten (zwei kinematische Freiheitsgrade), die dritte ist ein Drehmoment (ein statischer Freiheitsgrad).

Wie schon in allen zuvor gezeigten Beispielen ist das für das Umlaufrädergetriebe gewonnene Mehrpol-Blockschaltbild nach Bild 32 hauptsächlich dadurch interessant, daß sich aus ihm sehr leicht die Übertragungsgleichungen des Systems ableiten lassen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_I &= \frac{1}{r_{w1}} \cdot \mathbf{v}_{u10} = \frac{1}{r_{w1}} \cdot [\mathbf{v}_{us0(12)} + \mathbf{v}_{u1s}] = \frac{1}{r_{w1}} \cdot [\mathbf{r}_{w1} \cdot \boldsymbol{\omega}_{s0} + (\mathbf{v}_{u2s} + \Delta\mathbf{v}_{u12s})] \\ &= \boldsymbol{\omega}_{s0} + \left(-\frac{r_{w2}}{r_{w1}}\right) \cdot \frac{1}{(-r_{w3})} \cdot \mathbf{v}_{u3s} = \boldsymbol{\omega}_{s0} + \left(-\frac{r_{w2}}{r_{w1}}\right) \cdot \frac{1}{(-r_{w3})} \cdot [\mathbf{v}_{u4s} + \Delta\mathbf{v}_{u34s}] \\ &= \boldsymbol{\omega}_{s0} + \left(-\frac{r_{w2}}{r_{w1}}\right) \cdot \frac{1}{(-r_{w3})} \cdot [\mathbf{r}_{w4} \cdot \boldsymbol{\omega}_{II} - \mathbf{r}_{w4} \cdot \boldsymbol{\omega}_{s0}] \\ &= \boldsymbol{\omega}_{s0} + \left(-\frac{r_{w2}}{r_{w1}}\right) \cdot \left(-\frac{r_{w4}}{r_{w3}}\right) \cdot [\boldsymbol{\omega}_{II} - \boldsymbol{\omega}_{s0}] \end{aligned} \quad (43)$$

<sup>7</sup> Auch hier wird die stark vereinfachte Betrachtung mit starren Verzahnungen und ohne Berücksichtigung der Drehträgheiten der Räder beibehalten.

$$(-M_s) = M_{s12} - M_{s34} = r_{w1} \cdot F_{u12} - r_{w4} \cdot F_{u34} = \frac{r_{w1}}{r_{w1}} \cdot M_I - \frac{r_{w4}}{(-r_{w3})} \cdot M_3 \quad (44)$$

$$= M_I - \left( -\frac{r_{w4}}{r_{w3}} \right) \cdot (-r_{w2}) \cdot F_{u12}$$

$$= \left[ 1 - \left( -\frac{r_{w4}}{r_{w3}} \right) \cdot \left( -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \right) \right] \cdot M_I$$

$$(-M_{II}) = r_{w4} \cdot F_{u34} = \left( -\frac{r_{w4}}{r_{w3}} \right) \cdot M_3 = \left( -\frac{r_{w4}}{r_{w3}} \right) \cdot (-r_{w2}) \cdot F_{u12} \quad (45)$$

$$= \left( -\frac{r_{w4}}{r_{w3}} \right) \cdot \left( -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \right) \cdot M_I$$

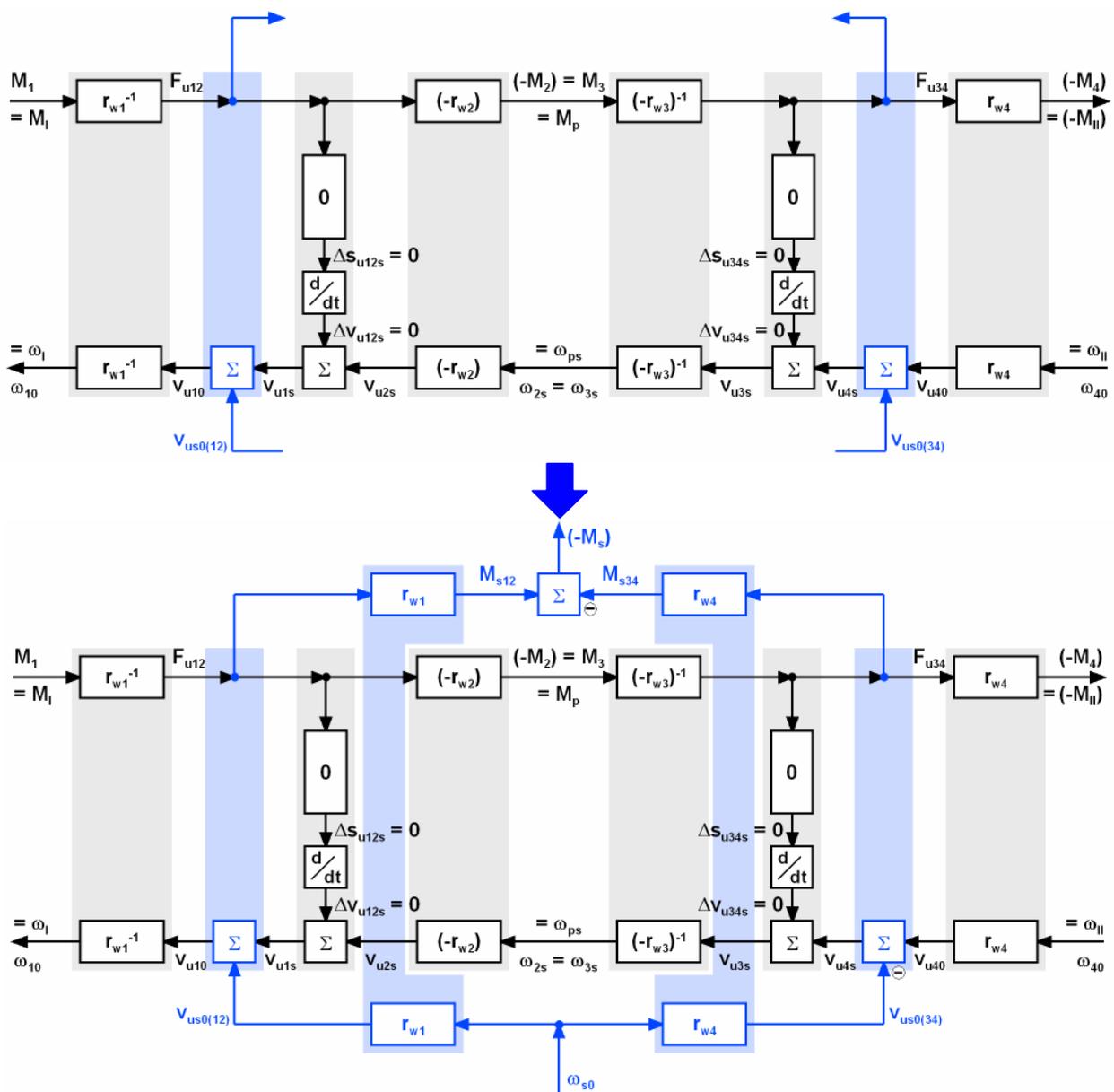


Bild 32: Mehrpol-Blockschaltbild des Umlafrädergetriebes

Gleichung (43) ist die Geschwindigkeitsgleichung, mit der in Abhängigkeit der beiden Eingangswinkelgeschwindigkeiten (hier willkürlich angenommen:  $\omega_{II}$ ,  $\omega_{s0}$ ) die dritte Winkelgeschwindigkeit (hier:  $\omega_I$ ) errechnet werden kann. Sie kann leicht umgeformt werden zur sogenannten Willis-Formel [Müller-98], welche die Grundgleichung für den Bewegungszustand von Umlaufgetrieben ist:

$$\frac{\omega_I - \omega_{s0}}{\omega_{II} - \omega_{s0}} = i_0 \quad (46)$$

$$\text{mit: } i_0 = \left( -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} \right) \cdot \left( -\frac{r_{w4}}{r_{w3}} \right) \text{ „Standübersetzung“} \quad (47)$$

Die Gleichungen (44) und (45) geben an, wie man aus einem als Eingangsgröße vorgegebenen Drehmoment (hier:  $M_I$ ) die beiden anderen Drehmomente (hier:  $M_{II}$ ,  $M_s$ ) ermitteln kann. Unter Nutzung des Geometrieparameters  $i_0$  („Standübersetzung“) nach Gleichung (47) kann man auch schreiben:

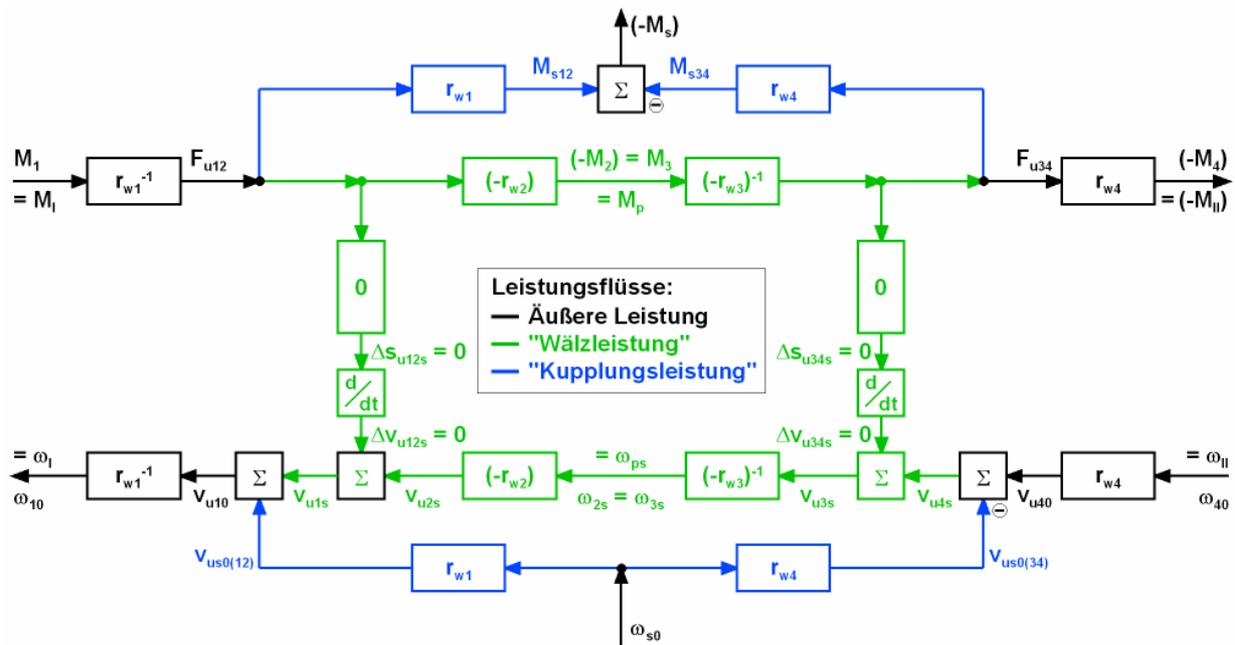
$$(-M_s) = [1 - i_0] \cdot M_I \quad (48)$$

$$(-M_{II}) = i_0 \cdot M_I \quad (49)$$

Oder insgesamt:

$$M_I + M_{II} + M_s = 0 \quad (50)$$

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß das Mehrpol-Blockschaltbild des Umlaufrädergetriebes nach Bild 32 die beiden unterschiedlichen Wege, auf denen die äußeren Leistungen im Innern des Getriebes übertragen werden (beim Zahnrad-Umlaufgetriebe: „Wälzleistung“ über die Verzahnungen und „Kupplungsleistung“ infolge der Stegdrehung), durch entsprechende Strukturzweige unmittelbar anschaulich macht, **Bild 33**. Die Leistung an jeder Stelle läßt sich aus dem Blockschaltbild ermitteln, indem man die jeweils zusammengehörigen Kraft- und Geschwindigkeitsgrößen miteinander multipliziert. Im Ergebnis kommen natürlich die bekannten Zusammenhänge heraus (siehe z.B. [Müller-98]), worauf im einzelnen nicht eingegangen werden soll.



**Bild 33:** Leistungsflüsse im Inneren des Zahnrad-Umlaufgetriebes

### 5.8 Zusammenfassung und ergänzende Bemerkungen

Die recht ausführliche Diskussion des Beispiels „Zahnradgetriebe“ sollte demonstrieren, wie die im vorangegangenen Abschnitt 4 erläuterten Prinzipien und Methoden zur Erstellung und Auswertung von Mehrpol-Blockschaltbildern im Bereich der mechanischen Komponenten, insbesondere der Maschinenelemente, angewandt werden können. Dabei sollte vor allem deutlich werden,

- daß sich auf der Basis eines vorhandenen Mehrpol-Blockschaltbildes die Übertragungsgleichungen eines Systems nach streng formalen, im Kern relativ einfachen Kriterien ableiten lassen (bei komplexen Zusammenhängen sogar wesentlich einfacher, als dies anhand der sonst üblichen Analyse physikalisch-gegenständlicher Modelle möglich ist),
- daß die auf diesem Wege erzielten Resultate oft vollständiger sind als bei konventioneller Betrachtung, bei der oft Vereinfachungen a priori hineingesteckt werden (müssen), und
- daß die Aufstellung der Blockschaltbilder, deren Existenz Voraussetzung zur Anwendung der hier gezeigten Vorgehensweise ist, nach relativ einfachen Prinzipien und Regeln erfolgt (siehe hierzu auch die Anmerkungen am Ende von Abschnitt 4).

Die einzige Voraussetzung ist, daß man sich etwas in die logisch-funktionale Denkweise des gesamten Ansatzes eingewöhnen muß. Dies hält der Autor aber eher für einen Vorteil als für einen Nachteil, weil eine solche etwas abstraktere Herangehensweise zur übergreifenden Behandlung mechanischer Systeme ohnehin erforderlich ist [VDI-2206].

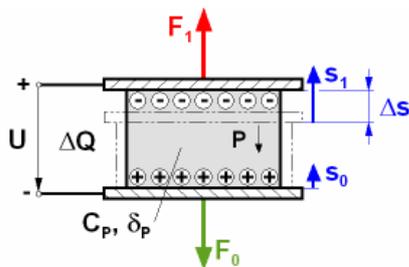
## 6. WEITERE BEISPIELE

In ähnlicher Weise, wie es im vorangegangenen Abschnitt 5 für das Beispiel „Zahnradgetriebe“ gezeigt wurde, lassen sich auch für beliebige weitere mechanische Komponenten Mehrpolmodelle erstellen und auswerten. Für einen großen Teil der „klassischen“ Maschinenelemente hat der Autor entsprechendes Material bereits erarbeitet, hauptsächlich um es in der (entsprechend erweiterten) Maschinenelemente-Lehre zu verwenden.

Die Anwendung des Ansatzes beschränkt sich allerdings nicht nur auf mechanische Komponenten; vielmehr besteht der Anspruch ja gerade darin, eine einheitliche, domänenübergreifende Modellbildungsmethode zu entwickeln. Dies wurde an verschiedenen Beispielen aus den Bereichen Hydraulik/Mechanik sowie Elektrik/Mechanik auch schon erprobt.

Zum Abschluß soll eines dieser Beispiele noch kurz erläutert werden, nämlich die Erstellung eines Mehrpolmodells für Piezoelemente. Dabei wird der Übersichtlichkeit halber nur der longitudinale Piezoeffekt berücksichtigt, außerdem werden vereinfachend nur lineare (bzw. im Arbeitspunkt linearisierte) Übertragungskennlinien zugrunde gelegt.

**Bild 34** zeigt die Skizze eines Piezoelementes, wobei der sogenannte direkte Effekt dargestellt ist („Sensorwirkung“). Das Piezoelement ist remanent polarisiert, ausgehend von diesem Grundzustand ( $P_0$ ) bewirkt eine äußere Kraft  $F$  eine Ladungsverschiebung  $\Delta Q$ . Ebenso ist das Anlegen einer äußeren elektrischen Spannung  $U$  mit einer Verschiebung  $\Delta s$  verknüpft.



**Bild 34:** Piezoelement, Skizze

Wenn man dieses Verhalten in ein Vierpolmodell übersetzt, so erhält man zunächst das in **Bild 35a** gezeigte Blockschaltbild. Es berücksichtigt allerdings weder die Elastizität des Piezoelementes auf der mechanischen Seite noch dessen kapazitives Verhalten auf der elektrischen Seite. Fügt man entsprechende „Querkopplungen“ ein (siehe Abschnitt 4.3, Elastizitätswirkungen), so erhält man das in **Bild 35b** dargestellte Ergebnis.

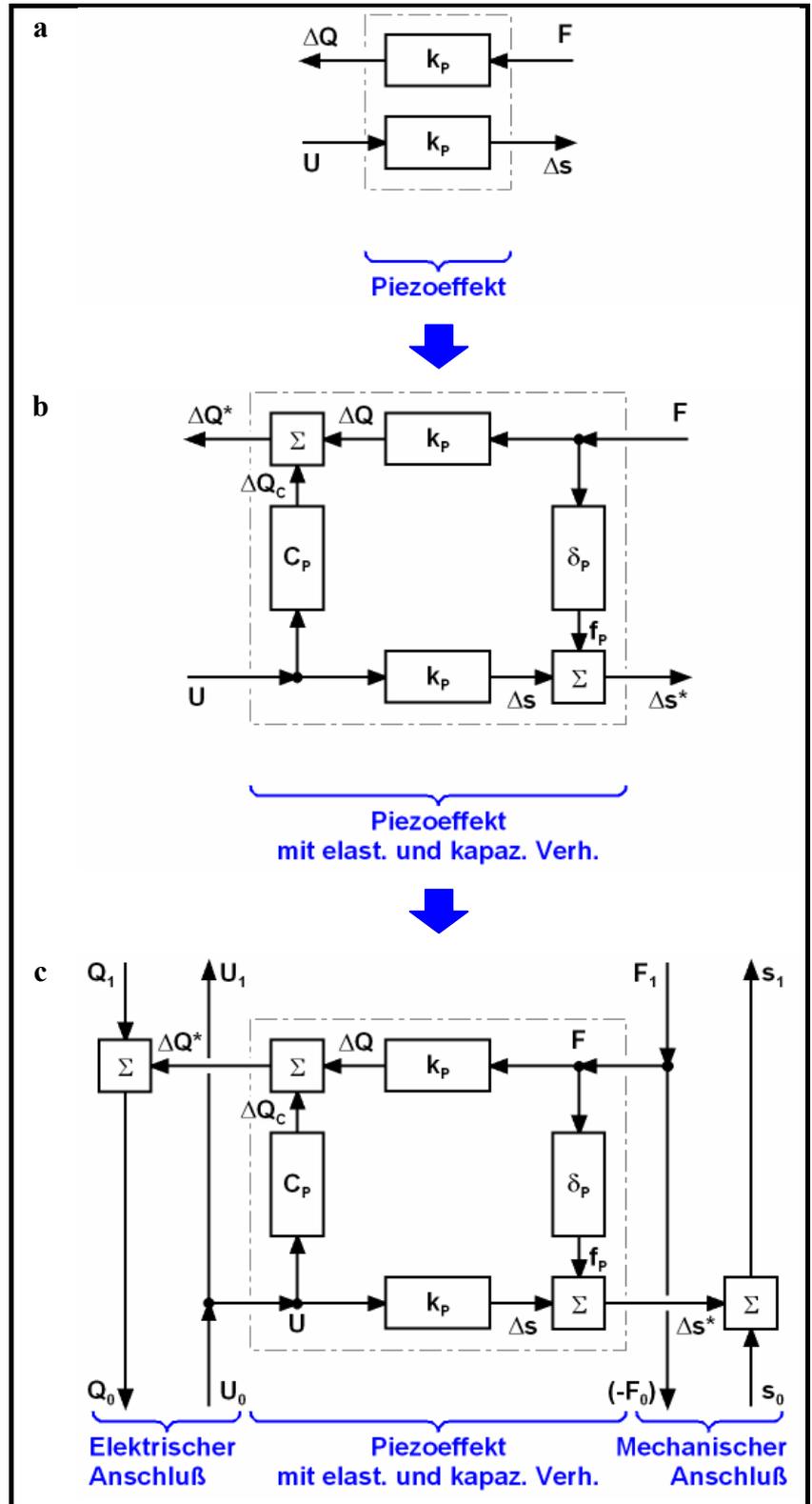
Nun fehlt noch die Anbindung des Piezoelementes an die äußere Umgebung, sowohl auf der mechanischen als auch auf der elektrischen Seite:

- Auf der mechanischen Seite überlagert sich die (Relativ-) Verschiebung des Elementes  $\Delta s$  einer an einem äußeren mechanischen Anschluß vorgegebenen Eingangsverschiebung  $s_1$ . Das Element muß auf der mechanischen Seite also mit Hilfe einer Strukturverzweigung des Typs „Summation/Überlagerung der Flußgrößen bei konstanter Potentialgröße“ (siehe Bild 9a) an die äußere (mechanische) Umgebung angekoppelt werden.

- Auf der elektrischen Seite überlagert sich die (relative) Ladungsverschiebung  $\Delta Q^*$  einer an einem äußeren elektrischen Anschluß vorgegebenen Ladungsverschiebung  $Q_1$ . Das Element muß auf der elektrischen Seite also mit Hilfe einer Strukturverzweigung des gleichen Typs, nur übersetzt auf den elektrischen Fall, angekoppelt werden.

Das Ergebnis der Überlegungen, einen elektromechanischen Achtpol, zeigt **Bild 35c**.

**Bild 35:**  
Mehrpole-Blockschaltbild des  
Piezoelementes nach Bild 34  
(Herleitung in drei Schritten)

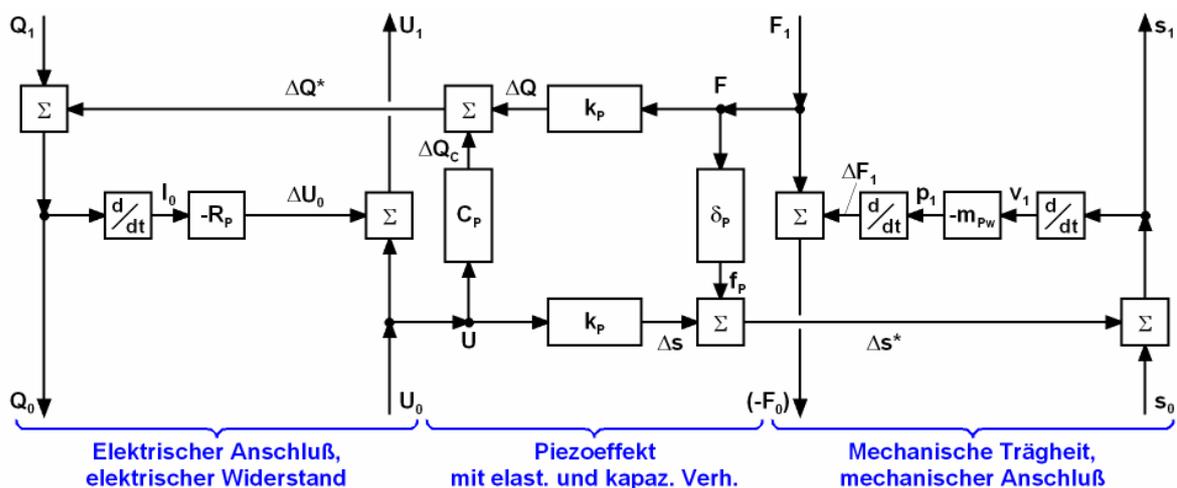


Ausgehend von dem Vierpol-Blockschaltbild nach Bild 35c können nun die Übertragungsfunktionen des (in seine mechanische und elektrische Umgebung eingebundenen) Piezoelementes ermittelt werden. Unter den eingangs genannten Voraussetzungen, daß nur der longitudinale Effekt berücksichtigt wird und linear(isierte) Übertragungscharakteristiken zugrunde gelegt werden, ergibt sich:

$$Q_0 = Q_1 + \Delta Q^* = Q_1 + k_P \cdot F_1 + C_P \cdot U_0 \quad (50)$$

$$s_1 = s_0 + \Delta s^* = s_0 + k_P \cdot U_0 + \delta_P \cdot F_1 \quad (51)$$

Die Überlegungen kann man nun noch ausbauen in Richtung auf den instationären Betrieb des Piezoelementes. Dazu muß auf der mechanischen Seite der Mehrpolstruktur nach Bild 35 eine weitere „Querkopplung“ des Typs „Trägheitswirkung“ (siehe Bild 10) eingebaut werden. Auf der elektrischen Seite rufen Ladungsänderungen (= Stromflüsse) infolge des elektrischen Widerstandes einen Spannungsabfall hervor; dies wird durch Einbau einer Querkopplung des Typs „Widerstände“ (siehe Bild 12) auf der elektrischen Seite berücksichtigt. Das Ergebnis ist in **Bild 36** gezeigt.



**Bild 36:** Mehrpol-Blockschaltbild des Piezoelementes für den instationären Betrieb

Aus dem Mehrpol-Blockschaltbild nach Bild 36 ergeben sich durch „Zurückrechnen“ der an den verschiedenen Anschlüssen anliegenden Ausgangsgrößen bis zu den Eingangsgrößen über die (Übertragungsgleichungen der) verschiedenen Elemente hinweg folgende Beziehungen:

$$s_1 = s_0 + k_P \cdot U_0 + \delta_P \cdot F_1 \quad (52)$$

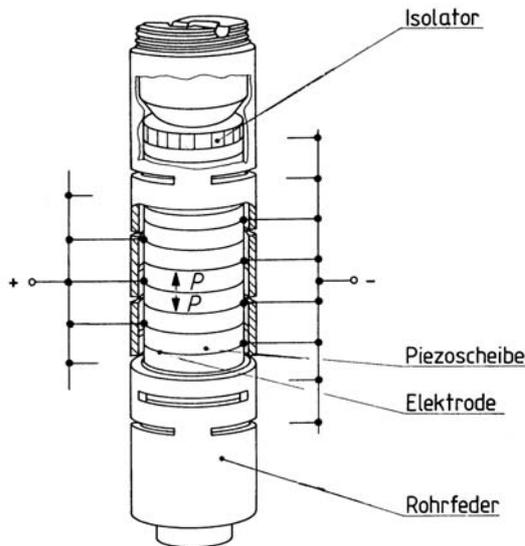
$$(-F_0) = F_1 + \Delta F_1 = F_1 + \frac{d}{dt} \left( (-m_{PW}) \cdot \frac{d}{dt} (s_1) \right) = F_1 - m_{PW} \cdot a_1 \quad (53)$$

$$Q_0 = Q_1 + k_P \cdot F_1 + C_P \cdot U_0 \quad (54)$$

$$U_1 = U_0 + \Delta U_0 = U_0 - R_P \cdot \frac{d}{dt} (Q_0) = U_0 - R_P \cdot I_0 \quad (55)$$

Die erzielten Ergebnisse entsprechen im wesentlichen denen aus der aktuellen Forschung [Kuhnen-01], sie sind hier jedoch durch konsequente Anwendung der Regeln der Mehrpoltheorie entstanden.

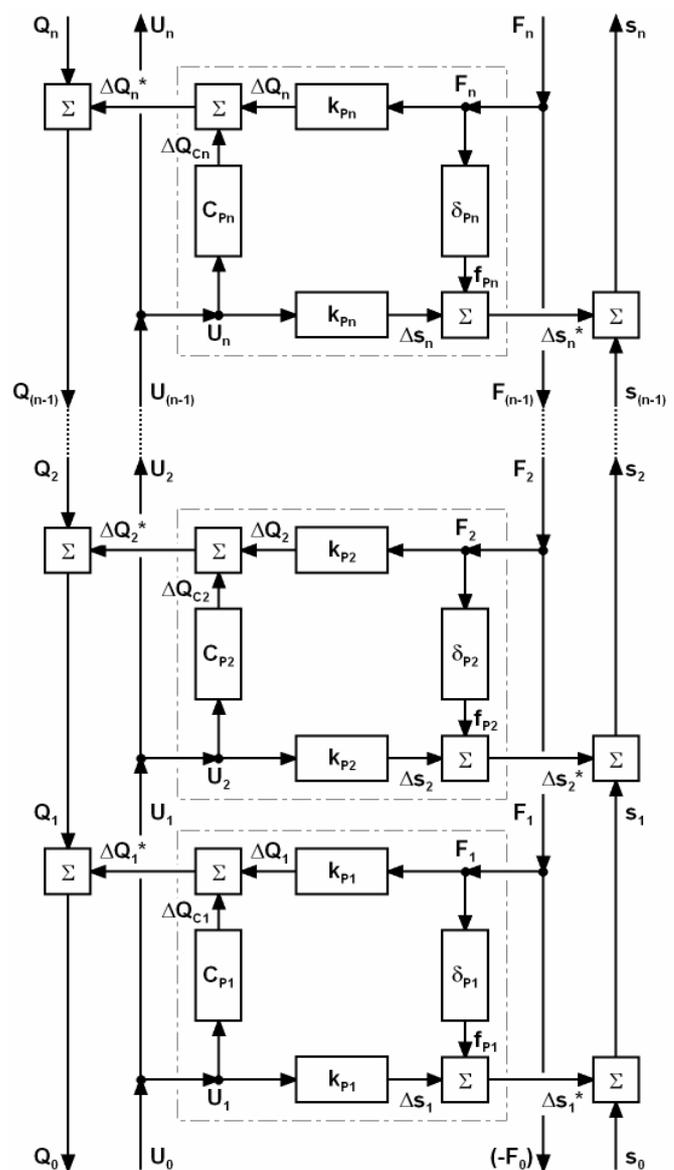
Das vorstehend am sogenannten direkten Piezoeffekt Gezeigte kann man analog für dessen Umkehrung durchführen, den sogenannten inversen Effekt („Aktorwirkung“). Auch kann man mit Hilfe der gewonnenen Blockschaltbilder die üblichen Spezialfälle betrachten, etwa das Arbeiten eines Piezoelementes gegen eine konstante oder eine linear wegabhängige Last (siehe [Janocha-91]). Im einzelnen soll die hier nicht aufgegriffen werden.



← Bild 37: Piezo-Stapeltranslator, Skizze

↓ Bild 38: Mehrpol-Blockschaltbild des Piezo-Stapeltranslators nach Bild 37

Zum Schluß soll nur noch dargestellt werden, wie sich der sogenannte Stapeltranslator in Form eines Mehrpol-Blockschaltbildes darstellt. Im Stapeltranslator sind mehrere Piezoelemente miteinander gekoppelt, und zwar auf der mechanischen Seite durch eine Reihen- und auf der elektrischen Seite durch eine Parallelschaltung. Bild 37 zeigt einen Stapeltranslator als Skizze, in Bild 38 ist das entsprechende Mehrpol-Blockschaltbild dargestellt (ebenfalls direkter Effekt, „Sensorwirkung“). Wie sich daraus ergibt, werden die Piezoelemente sowohl auf der mechanischen Seite durch mehrere Verzweigungen des Typs „Summation/Überlagerung der Flußgrößen bei konstanter Potentialgröße“ (siehe Bild 9a) miteinander gekoppelt.



## 7. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUßFOLGERUNGEN

Der vorliegende Beitrag hat versucht aufzuzeigen, wie man auf der Grundlage der aus der Elektro- und Regelungstechnik bekannten Mehrpoltheorie Modelle von mechanischen, aber auch von gekoppelten elektromechanischen Komponenten erstellen kann. (Aus Platzgründen nicht gezeigt wurden Beispiele aus dem Bereich Hydraulik/Mechanik.) Aus diesen lassen sich auf streng formalisiertem, relativ einfachem Wege die Gleichungen zur Beschreibung des (dynamischen) Übertragungsverhaltens der betreffenden Systeme ableiten.

Die Schlußfolgerungen des Autors nach einigen Erfahrungen auf diesem Gebiet sind:

- Es lassen sich (relativ einfache) Regeln angeben, welche die Erstellung, Umformung und auch Überprüfung von Mehrpol-Blockschaltbildern erleichtern/ermöglichen.
- Bei vollständiger Betrachtung (d.h. Kraft- *und* Geschwindigkeitsgrößen) sind die Ergebnisse mit denen der in Mechanik/Maschinenbau sonst üblichen Betrachtungen identisch (teilweise sogar exakter, weil implizite Annahmen „sichtbar“ gemacht werden).
- Für alle Maschinenelemente lassen sich „typische“ Mehrpol-Blockschaltbilder angeben.
- Mehrpolmodelle für mechanische (und andere) Komponenten sind „skalierbar“, d.h. sie können durch Hinzunehmen oder Weglassen von Effekten an verschiedene Anwendungsszenarien angepaßt werden (von stark vereinfachter, „globaler“ bis zu in allen Einzelheiten detaillierter Betrachtung)<sup>8</sup>.
- Alle üblicherweise anhand physikalisch-gegenständlicher Modelle studierten Phänomene sind erklärbar (z.B.: Begriff „Freiheitsgrad“, strukturelle und physikalische Ursachen von Leistungsverlusten, Lastverteilung bei verzweigter Kraftübertragung, ...) – und dies oft einheitlicher und einfacher als anhand (einer Vielzahl) physikalisch-gegenständlicher Modelle.
- Nicht-lineares Verhalten – in Mechanik/Maschinenbau besonders wichtig – kann berücksichtigt werden. Allerdings ist dann die mathematisch einfache Matrizendarstellung zur formalen Beschreibung der Vierpole nicht anwendbar.

Die zusammenfassende Schlußfolgerung des Autors ist: Mehrpolmodelle sind eine mögliche einheitliche Basis zur Modellierung (und anschließenden Simulation) mechatronischer Systeme.

Wenn man nach Alternativen fragt, dann werden auf der einen Seite regelungstechnische Blockschaltbilder [Isermann-99, Nordmann/Birkhofer-03] und auf der anderen Seite sogenannte Bond-Graphen [Wellstead-79, Breedveld-84, Karnopp-00] genannt und gelegentlich auch deutlich favorisiert.

---

<sup>8</sup> Zur systematischen Vereinfachung von Mehrpolstrukturen lassen sich relativ einfache Regeln angeben, die aus Platzgründen im vorliegenden Beitrag aber nicht dargestellt sind.

Hierzu ist anzumerken, daß die regelungstechnischen Blockschaltbilder mit den hier gezeigten Mehrpolmodellen eng verwandt sind. Sie unterliegen allerdings nicht den gleichen strengen Prinzipien und Regeln, sondern es können als nicht relevant erachtete Strukturzweige weggelassen werden (z.B. Weglassen des kompletten Kraftzweiges einer Struktur, wenn die Kräfte betragsmäßig klein und daher vernachlässigbar sind). Dadurch gibt es keine Garantie der Vollständigkeit derartiger Strukturen, was bei detaillierter Betrachtung von Systemen und Komponenten zu Schwierigkeiten führen kann.

Für die Bond-Graphen gelten allerdings sehr wohl ähnliche strenge Regeln wie für die hier diskutierten Mehrpolmodelle; sie können daher mit der gleichen Stringenz auf gleiche Aufgabenstellungen angewandt werden und liefern letztlich gleiche (und gleich vollständige) Ergebnisse. Beide Darstellungen lassen sich ineinander überführen, worauf hier nicht im einzelnen eingegangen sei. Der Unterschied besteht allerdings darin, daß die Bond-Graphen-Methode auf den Begriff „Leistung“ abhebt und konsequenterweise deren Basisgrößen (Potential- und Flußgrößen) lediglich als Attribute der jeweiligen Leistung führt. Dies findet der Autor gerade im Bereich der mechanischen Komponenten irritierend, einerseits weil die „klassische“ Herangehensweise in der Mechanik gerade auf der getrennten und expliziten Betrachtung der Kraft- und der Bewegungsgrößen beruht und andererseits, weil sich die Funktionen gerade der mechanischen Komponenten auf der Ebene des Begriffes „Leistung“ oft gar nicht sinnvoll erklären läßt. Er hält deswegen in der Mechanik die Mehrpoldarstellungen im Vergleich zu den Bond-Graphen für die besser passende und weniger gewöhnungsbedürftige Darstellung (auch und gerade auch mit Blick auf die Lehre).

Die Betrachtung von Mehrpol-Blockschaltbildern für mechanische (und andere) Komponenten sowie die darauf basierende Ableitung der Übertragungs(differential)gleichungen sind kein Selbstzweck, sondern Voraussetzung und Grundlage für eine Systemsimulation mit Rechnerunterstützung. Dazu müssen die Gleichungen/Gleichungssysteme in die entsprechenden Programme übertragen, hier gegebenenfalls noch umgeformt und dann (numerisch) gelöst werden.

Dies ist allerdings nach gegenwärtigem Stand nicht immer ohne Probleme: So gibt es – abhängig vom gewählten Simulationsprogramm – die Notwendigkeit, die aus den Mehrpolmodellen in der Regel in differentieller Form herauskommenden Gleichungen in eine Integralformulierung umzuwandeln<sup>9</sup>.

Der Grund ist ein simpler: In der Simulation werden häufig die Systemantworten auf Sprungfunktionen der Eingangsgrößen untersucht. Daraus ergibt sich das Problem, daß man über eine Sprung-

---

<sup>9</sup> Das gilt vor allem für die weit verbreiteten Mathematikprogramme wie MatLab/Simulink. Bei sogenannten objekt-orientierten Systemen wie Modelica besteht diese Notwendigkeit offenbar nicht – allerdings hat der Autor dies noch nicht im einzelnen untersucht.

funktion zwar „hinwegintegrieren“ kann (man erhält in diesem Falle eine Rampe), aber nicht „hinwegdifferenzieren“ (Anstieg Unendlich).

Eine umfassende Lösung dieses Problems besteht nach dem Wissen des Autors noch nicht, jedoch laufen – vor allem mit Blick auf die Lehre im gemeinsamen Fach „Mechatronische Elemente und Systeme“ – in Kooperation mit dem Institut für Systemtheorie und Regelungstechnik der Universität des Saarlandes (Prof. Dr. techn. Andreas Kugi) entsprechende Diskussionen.

Zum Schluß seien noch einige Anmerkungen zur Lehre im Fach Maschinenelemente gemacht:

Der Autor ist davon überzeugt, daß sich die Zukunft der Maschinenelemente-Lehre in die vom sogenannten Heiligenberger Manifest [AKME-97] bereits im Jahr 1997 vorgezeichnete Richtung bewegen muß. Dazu gehört es, die „klassischen“ Maschinenelemente als (die Funktion oft sogar dominierende) Komponenten mechatronischer Systeme aufzufassen.

Daraus ergibt sich nicht nur die Notwendigkeit, den Begriff „Maschinenelemente“ künftig weiter zu fassen als bisher, d.h. insbesondere auf elektrische und hydraulische Komponenten bzw. auf Sensoren und Aktoren auszudehnen, sondern auch der dringende Bedarf, geeignete und möglichst domänenübergreifende Modelle für die (dynamische) Simulation in die Lehre einzuführen. Zudem sollten die Grundlagen der Systemsimulation begleitend zu der (erweiterten) Maschinenelemente-Lehre bereits im Grundstudium vermittelt und (gerade!) auf die mechanischen Komponenten angewendet werden.

Hierzu sind an einzelnen Hochschulen (allen voran an der TU Darmstadt [Nordmann/Birkhofer-03]) bereits erste Schritte erfolgt; auch an der Universität des Saarlandes wurde das Fach entsprechend umgestellt und wird – ähnlich wie in Darmstadt – seit dem Wintersemester 2004/ 2005 unter der neuen Bezeichnung „Mechatronische Elemente und Systeme“ vom Autor gemeinsam mit einem Kollegen aus der Systemtheorie und Regelungstechnik gelesen (Prof. Dr. techn. Andreas Kugi). Der Autor hält die in diesem Beitrag vorgestellten, auf der Mehrpoltheorie basierenden Prinzipien und Methoden der Modellerstellung für gut geeignet, insbesondere auf dem Gebiet der mechanischen Komponenten / Maschinenelemente die Brücke zwischen der traditionellen Betrachtungsweise und der Welt der Systemsimulation zu schlagen. Deshalb wurde ein Teil der Zusammenhänge bereits in die Lehre eingeführt (auch wenn, wie einige Ansätze weiter oben dargestellt, der Übergang in die rechnerunterstützte Simulation noch nicht ganz problemlos klappt).

Natürlich kostet dies zusätzlichen Aufwand und zusätzliche Zeit. Es entsteht aber auch zusätzlicher Gewinn: Dieser beschränkt sich allein darauf, daß die Maschinenelemente-Lehre überhaupt um „mechatronikgerechte“ Simulationsmodelle ergänzt wird. Wie der vorliegende Beitrag versuchte aufzuzeigen, entsteht vielmehr auch für das Fach Maschinenelemente selbst ein Gewinn, indem die in den Maschinenelementen anzutreffenden logisch-funktionalen und physikalischen Erscheinungen

wesentlich systematischer und oft vollständiger (d.h. mit weniger vereinfachenden Annahmen und mit mehr Überblick) erklärt werden können, als dies mit den üblichen traditionellen Ansätzen und Methoden möglich ist.

### **Literaturhinweise:**

- [AKME-97] Arbeitskreis Maschinenelemente-Lehre (AKME): Heiligenberger Manifest – Anforderungen und Lösungsansätze für eine zukunftsorientierte Lehre auf dem Gebiet der Maschinenelemente (herausgegeben von A. Albers und H. Birkhofer). Institut für Maschinenelemente und Kraftfahrzeugbau der Universität Karlsruhe (TH) und Institut für Maschinenelemente und Konstruktionslehre der TU Darmstadt 1997.
- [Breedveld-84] Breedveld, P.C.: Physical Systems Theory in Terms of Bond Graphs. Ph.D. Thesis, University of Twente 1984.
- [Feldmann-71] Feldmann, D.G.: Untersuchung des dynamischen Verhaltens hydrostatischer Antriebe. Dissertation TU Hannover 1971.
- [Isermann-99] Isermann, R.: Mechatronische Systeme. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1999.
- [Janocha-91] Janocha, H.: Aktoren. Springer-Verlag 1991.
- [Karnopp-00] Karnopp, D.C.; Margolis, D.L.; Rosenberg, R.C.: System Dynamics (3. Auflage). John Wiley & Sons, New York 2000.
- [Kuhnen-01] Kuhnen, K.: Inverse Steuerung piezoelektrischer Aktoren mit Hysterese-, Kriech und Superpositionsoperatoren. Dissertation Universität des Saarlandes, Saarbrücken 2001.
- [Merz/Jaschek-03] Merz, L.; Jaschek, H.: Grundkurs der Regelungstechnik (14. Auflage). Oldenbourg-Verlag, München 2003.
- [Müller-98] Müller, H.W.: Die Umlaufgetriebe (2. Auflage). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1998.
- [Niemann/Winter-03] Niemann, G.; Winter, H.: Maschinenelemente, Band II (2. Auflage, korrigiert). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2003.
- [Nordmann/Birkhofer-03] Nordmann, R.; Birkhofer, H.: Maschinenelemente und Mechatronik, Bd. I & II. Shaker-Verlag, Aachen 2003.
- [Oppelt-72] Oppelt, W.: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge (5. Auflage). Verlag Chemie, Weinheim, 1972.
- [VDI-2206] VDI-Richtlinie 2206: Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme. Verein Deutscher Ingenieure, Düsseldorf 2004.
- [Weber/Vajna-97] Weber, C.; Vajna, S.: A New Approach to Design Elements (Machine Elements). 11th International Conference on Engineering Design 1997 (ICED 97), Tampere/Finland. Schriftenreihe „Workshop-Design-Konstruktion“, WDK 25: Proceedings of ICED 97 (herausgegeben von A. Riitahuhta), Vol. 3, S. 685-690. Tampere University of Technology 1997.
- [Weber-83] Weber, Christian: Systematik der hydrostatischen und der Riemen-Stellkoppelgetriebe nach Kriterien des methodischen Konstruierens. Dissertation Ruhr-Universität Bochum 1983. Schriftenreihe des Instituts für Konstruktionstechnik, Heft 83.6.
- [Weber-86] Weber, Christian: Ein Beitrag zur integralen Betrachtungsweise von methodischem Konstruieren und Maschinenelementen. Schriftenreihe „Workshop-Design-Konstruktion“, WDK 14: Methodisches Konstruieren der Maschinenelemente (herausgegeben von V. Hubka), S. 78-102. Heurista-Verlag, Zürich 1986.
- [Weber-87] Weber, Christian: Neue Aspekte der Analyse und Synthese dynamischer Prozesse auf der Basis der Konstruktionsmethodik – gezeigt am Beispiel „Automatischer Blockierverhinderer für Kraftfahrzeug-Bremssysteme“. Konstruktion 39 (1987) 10, S. 391-400.
- [Weber-91] Weber, Christian: Ableitung von Rechenmodellen für mechanische Systeme aus Funktionsstrukturen und Gleichungen physikalischer Effekte. 8th International Conference on Engineering Design 1991 (ICED 91), Zürich/Schweiz 27.-29.08.1991. Schriftenreihe „Workshop-Design-Konstruktion“, WDK 20: Proceedings of ICED 91 (herausgegeben von V. Hubka), Vol. 2, S. 873-884. Heurista-Verlag, Zürich 1991.
- [Wellstead-79] Wellstead, P.E.: Physical System Modelling. Academic Press, London 1979.

### **Autorenangabe:**

Prof. Dr.-Ing. Christian Weber  
Universität des Saarlandes, Konstruktionstechnik/CAD  
Postfach 15 11 50, D – 66041 Saarbrücken  
Tel.: +49 / (0)681 / 302 - 3075  
Fax: +49 / (0)681 / 302 - 4858  
E-mail: weber@cad.uni-saarland.de