

Untersuchung turbulenter thermischer Konvektion in kartesischen Geometrien mittels DNS und LES

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
DOKTOR-INGENIEUR
(DR.-ING.)

vorgelegt der
Fakultät für Maschinenbau der
Technischen Universität Ilmenau
von

Matthias Kaczorowski
geboren am 26. Juni 1980
in Osnabrück

1. Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Claus Wagner
2. Gutachter:	Univ.-Prof. Dr. rer. nat. André Thess
3. Gutachter:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. Heinz Herwig

Eingereicht am:	13. Januar 2009
Verteidigt am:	5. November 2009

urn:nbn:de:gbv:ilm1-2009000379

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des HGF-Projektes „Virtuelles Institut – thermische Konvektion“ am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Göttingen.

Mein besonderer Dank gebührt dabei Claus Wagner sowie meinen Kollegen Olga Shishkina und Andrei Shishkin, die alle in den verschiedenen Phasen der Doktorarbeit auf ihre Art und Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

- Claus Wagner durch den steten Ansporn während der Promotion, aber auch für die vielen Freiheiten in Bezug auf die Arbeit. Außerdem möchte ich mich dafür bedanken, dass er mir die Möglichkeit eröffnet hat, mich über die Promotion hinaus im Rahmen des STF China Programms mit der turbulenten thermischen Konvektion zu befassen.
- Olga Shishkina durch ihre Unterstützung bei der Weiterentwicklung des Programms, insbesondere durch die Implementierung der Einflussmatrix-Technik, und die gute Zusammenarbeit während meiner Zeit am DLR.
- Andrei Shishkin durch die Erklärung der mathematischen Zusammenhänge und der Hilfe bei der Implementierung des Poissonlösers für geschlossene kartesische Geometrien.

Desweiteren möchte ich auf universitärer Seite besonders bei bei André Thess für seine Hilfsbereitschaft auf dem Weg zur Promotion bedanken.

Vor allem möchte ich mich bei Araceli Fernandez Palés, Bernd Wagner, Greta Richter, Karen Mulleners, Paula Galindo Cifre und Rémy Reynaud für die kleinen Ausbrüche aus dem Alltag bedanken, die mich so manchen Stress haben vergessen lassen.

Göttingen, im Dezember 2008

Matthias Kaczorowski

Kurzfassung

Untersuchung turbulenter thermischer Konvektion in kartesischen Geometrien mittels DNS und LES.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der thermischen Konvektion hinsichtlich der Rayleigh-Abhängigkeit charakteristischer Bereiche des Strömungsfeldes wie den Grenzschichten, den thermischen *Plumes* und dem Kernvolumen mithilfe von DNS und LES. Die Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) der thermischen Dissipationsraten zeigt drei markante Bereiche, die dem turbulenten Hintergrund (Bulk), den *Plumes* / Mischungsschichten und der konduktiven Unterschicht zugeordnet werden können. Mit steigender Rayleigh-Zahl (Ra) wird die Dynamik des Kernvolumens zunehmend von den Grenzschichten entkoppelt, was sich u.a. in einer schwindenden Korrelation der turbulenten Fluktuationen von Temperatur und Geschwindigkeit niederschlägt. Damit wird das von Castaing *et al.* (1989) skizzierte Verhalten weicher und harter Turbulenz bestätigt.

Es wird außerdem gezeigt, dass die thermische Dissipation in der konduktiven Unterschicht zunehmend von den turbulenten Fluktuationen bestimmt wird und somit eine von den *Plumes*/Mischungsschichten grundverschiedene Dynamik aufweist. Es wird daher vorgeschlagen, den Ansatz von Grossmann & Lohse (2004) zur Aufteilung der thermischen Dissipationsraten so zu erweitern, dass diesem Verhalten Rechnung getragen wird. Der Vergleich dreier unterschiedlicher Geometrien (periodische, quaderförmige und kubische Zelle) ergibt, dass die Strömungsfelder bei geringen Rayleigh-Zahlen signifikante Unterschiede aufweisen, sich mit steigender Rayleigh-Zahl aber einander annähern, was sich sowohl in den Beiträgen der charakteristischen Bestandteile des Strömungsfeldes zur Wärmeübertragung als auch in der Skalierung der Nusselt-Rayleigh-Beziehung widerspiegelt. Abschließend wird die turbulente Rayleigh-Bénard-Konvektion ($Ra = 3,5 \times 10^5$) mit der thermischen Mischkonvektion ($Ar = 1$) verglichen. Hieraus folgt, dass sich die Strukturbildung bei der Mischkonvektion signifikant ändert. Die *Plumes* sind bei gleicher Rayleigh-Zahl kleiner und zahlreicher. Zudem wird die Position der Ablösung des Zuluftstrahls von der Decke stark von der Wechselwirkung mit den *Plumes* beeinflusst und der konvektive Wärmestrom weist im Auslass eine Oszillation auf. Diese Beobachtung ist in qualitativer Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen. Ein Vergleich der thermischen Dissipationsraten von Rayleigh-Bénard- und Mischkonvektion zeigt, dass sich der Einfluss des Zuluftstrahls vorwiegend auf die großskaligen Strukturen, nicht jedoch auf die kleinskaligen Mischungsvorgänge auswirkt.

Abstract

Investigation of turbulent thermal convection in Cartesian geometries by means of DNS and LES.

The subject of the present work is the investigation of thermal convection in terms of the Rayleigh dependency of the different characteristic features of the flow field like the boundary layers, the thermal plumes and the core region by means of DNS and LES. Analysis of the probability density function (PDF) of the thermal dissipation rates shows that they reflect three distinct regions that can be assigned the turbulent background, the plumes / mixing layers and the conductive sublayer. With increasing Rayleigh number (Ra) the dynamics of the core volume and the boundary layers are increasingly decoupled, which among other things is reflected by a decreasing correlation between the turbulent fluctuations of the temperature and the velocity field. This is considered to confirm the behaviour of soft and hard turbulence sketched by Castaing *et al.* (1989).

Furthermore it is shown that thermal dissipation rates within the conductive sublayer are increasingly dominated by turbulent fluctuations, and therefore show an entirely different behaviour than the plumes / mixing layers. Consequently, it is proposed to extend the ansatz by Grossmann & Lohse (2004) to separate the thermal dissipation rates to account for this behaviour. The comparison of three different geometries (periodic, rectangular and cubic cell) shows that the flow fields exhibit significant differences at low Rayleigh numbers, but the differences narrow with increasing Rayleigh number. This behaviour is reflected by the contributions of the characteristic features of the flow field as well as the scaling of the Nusselt-Rayleigh relation.

Finally, the turbulent Rayleigh-Bénard convection ($Ra = 3.5 \times 10^5$) is compared with thermal mixed convection ($Ar = 1$). It is observed qualitatively that the structure formation in mixed convection differs significantly: for the same Rayleigh number smaller and a larger number of thermal plumes are observed. It is found that the location of separation of the wall jet is strongly affected by the interaction with the thermal plumes and the convective heat flux through the outflow boundary is oscillating. This behaviour is in qualitative agreement with experimental results. A comparison of the thermal dissipation rates of Rayleigh-Bénard and mixed convection shows that the influence of the incoming jet predominantly affects the large-scale structures rather than the small-scale mixing processes.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	viii
Abbildungsverzeichnis	xii
Tabellenverzeichnis	xv
1 Einleitung	1
1.1 Hintergrund	1
1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit	2
2 Theoretische Grundlagen	5
2.1 Mathematische Beschreibung von Strömungen	5
2.2 Turbulente Strömungen	8
3 Grundlagen zur Rayleigh-Bénard-Konvektion	11
3.1 Strömungszustände	13
3.2 Nusselt-Rayleigh-Beziehung	17
3.3 Grenzschichten	23
3.4 Boussinesq-Approximation	27
3.5 Bolgiano-Skalierung	31
4 Numerisches Verfahren	33
4.1 Simulationsmethoden	33
4.2 Diskretisierung	34

4.3	Rand- und Anfangsbedingungen	41
4.4	Auflösung des Rechenraums	43
4.5	Feinstrukturmodellierung (LES)	51
4.6	Parallelisierung	55
5	Dynamik der Strömung bei RB-Konvektion in der period. Zelle	61
5.1	Grenzschichtdicken	63
5.2	Vergleich thermischer und viskoser Dissipationsraten	69
5.3	Auswertung der turbulenten Fluktuationen	72
6	Wärmeübertragung bei RB-Konvektion in der period. Zelle	79
6.1	Thermische Dissipation in der Grenzschicht	87
6.2	Verhalten der Kernregion	89
6.3	Wärmeübertragung durch die thermischen Plumes	92
7	Thermische Konvektion in geschlossenen kartesischen Zellen	97
7.1	Globale Struktur der Strömungsfelder	97
7.2	Vergleich der Wärmetransporteigenschaften	101
7.3	Einfluss der Messposition	115
8	Mischkonvektion in einer geschlossenen quaderförmigen Zelle	119
8.1	Grundlagen zur thermischen Mischkonvektion	120
8.2	Globales Verhalten des Strömungsfeldes	123
8.3	Analyse der thermischen Dissipationsraten	128
9	Abschließende Bemerkungen	131
9.1	Schlussfolgerungen	131
9.2	Zusammenfassung	133
9.3	Ausblick	136
A	Simulationsparameter	139

Inhaltsverzeichnis

vii

Literaturverzeichnis

143

Nomenklatur

$A_{i,a}$	$i = 1,2$; Least-square Fit Koeffizienten in (6.2)
B	Breite der Zelle
B_i	$i = 1,2$; Least-square Fit Koeffizienten in (6.1)
C	Einflussmatrix
D_{x_i}	Differentiationsoperator in x_i -Richtung
E	Einheitsmatrix
$E(k)$	Energie der Wellenzahl k
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Fourier-Transformation
H	Höhe der Zelle
K	Wölbung
\mathcal{Nu}	Nusselt-Zahl $\mathcal{Nu} \equiv \langle \hat{w}\hat{T} \rangle_{t,A} - \langle \partial\hat{T}/\partial\hat{z} \rangle_{t,A} / (\Delta\hat{T}/\hat{H})$
$P(x)$	Wahrscheinlichkeit von x
Pr	Prandtl-Zahl $Pr \equiv \hat{\nu}/\hat{\kappa}$
Q	Quellterm der Poissongleichung für den Druck
Ra	Rayleigh-Zahl $Ra \equiv \hat{\alpha}\hat{g}\hat{H}^3\Delta\hat{T}/(\hat{\kappa}\hat{\nu})$
Re_l	Reynolds-Zahl $Re \equiv \hat{U}_l\hat{l}/\hat{\nu}$
S	Schiefe
\hat{T}	(dimensionsbehaftete) Temperatur
$\Delta\hat{T}$	(dimensionsbehaftete) Temperaturdifferenz zwischen Heiz- und Kühlplatte $\Delta\hat{T} = \hat{T}_{decke} - \hat{T}_{boden}$
U	charakteristische Geschwindigkeit
ΔV_i	Volumenelement i
*	rotationsfreies Geschwindigkeitsfeld
$\langle \cdot \rangle$	räumliche Mittelung oder Filterung
c_p	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
e_i	innere Energie
e_{ges}	Gesamtenergie
f	Volumenkraft

x

Nomenklatur

g	Erdbeschleunigung
h	geometrische Länge
k	Wellenzahl
k	turbulente kinetische Energie
ℓ	integrale Längenskala
l	Längenskala turbulenter Strukturen
\mathbf{n}	Normalenvektor
p	Druck
q	Wärmestrom durch Wärmeleitung
s_{ij}	Scherratentensor
t	Zeit (time)
ts	Zeitschritt (time step)
u_i	$i = 1,2,3$; Geschwindigkeitskomponente (u, v, w)
x	Gitterkoordinate

INDIZES

θ	Temperaturfeld
A	Ebene, Fläche (Area)
a	Auftrieb
bg	Hintergrund (background)
bl	Grenzschicht (boundary layer)
$boden$	Werte an der Heizplatte
$bulk$	Bulk
$decke$	Werte an der Kühlplatte
i,j,k	Index zur Bezeichnung der Koordinatenrichtung
$krit$	kritisch, Bifurkation
m	auf das arithmetische Mittel von Heiz- und Kühlplattentemperatur bezogene Größen
max	Maximum
par	parallele Simulation
pl	Plume
rms	rms-Wert einer Erhaltungsgröße ϕ
t	Zeit (time)
u	Geschwindigkeitsfeld
V	Volumen
$wand$	Werte an den (lateralen) Wänden

ABKÜRZUNGEN

FFT	Schnelle Fourier-Transformation (Fast Fourier Transformation)
-----	---

FV	Finite-Volumen
GS	Grenzschicht
LDA	Laser-Doppler-Anemometrie
LSC	groß-skalige Konvektionsrolle (Large Scale Circulation)
PDF	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Probability Density Function)
PIV	Partikelbild-basierte Geschwindigkeitsfeldmessung (Particle Image Velocimetry)
SVM	Trennung der Variablen Methode (Separation of Variables Method)
TLC	temperatursensitive Flüssigkristalle (Thermochromic Liquid Crystals)
WCT	verbrauchte Istzeit (Wall Clock Time)

GRIECHISCHE BUCHSTABEN

α	thermischer Expansionskoeffizient
β	Skalierungsexponent der Nusselt-Rayleigh-Beziehung
χ	Verhältnis der Temperaturgefälle in den thermischen Grenzschichten
δ_x	Grenzschichtdicke
δ_{ij}	Kroneckersymbol
ϵ	Dissipationsrate
ε	relativer Fehler; Toleranzbereich
η_b	Batchelor-Längenskala
η_k	Kolmogorov-Längenskala
Γ	Seitenverhältnis der Zelle
γ	Skalierungsexponent der Nusselt-Prandtl-Beziehung
κ	Temperaturleitfähigkeit
λ	Wärmeleitfähigkeit
μ	dynamische Viskosität
ν	kinematische Viskosität
ω	Strahlungsenergie
ϕ	beliebige Erhaltungsgröße des Strömungsfeldes
ψ	Pseudo-Druck der Poissongleichung
ρ	Dichte des Fluids
θ	(dimensionslose) Temperatur
ζ	auf $\langle \epsilon_\theta \rangle_V$ normierte thermische Dissipationsrate

ANDERE SYMBOLE

-	zeitlicher Mittelwert
$\hat{}$	dimensionsbehaftete Größe

- ~ transformierte Größe
- ' turbulente Schwankung

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung eines Energiespektrums	10
3.1	Phasendiagramm der Strömungszustände nach Krishnamurti	14
3.2	Schattenaufnahmen laminarer <i>Plumes</i>	15
3.3	Illustration weicher und harter turbulenter Konvektion . . .	20
3.4	Mittlere Temperaturprofile für OB- und NOB-Konvektion .	29
4.1	Schematische Darstellung des versetzten Gitters	36
4.2	Schematische Darstellung der Konvektionszellen	41
4.3	Geometrie für die Berechnung gemischter Konvektion . . .	42
4.4	Netzkonvergenzstudie: $\mathcal{Ra} = 8,75 \times 10^4$	45
4.5	Netzkonvergenzstudie: $\mathcal{Ra} = 4,38 \times 10^5$	46
4.6	Auflösung des Rechengebietes bei turbulenter RB-Konvektion	48
4.7	Einfluss der Grenzschichtauflösung auf die θ -profile	52
4.8	Einfluss der GS-Auflösung auf die stat. Momente	53
4.9	Aufteilung des Rechengebietes auf die Rechenkerne	56
4.10	Skalierung des parallelen Programms	58
5.1	Instantane Temperaturfelder der periodischen Zelle	62
5.2	Zeitliche Änderung der Strömung	64
5.3	$\bar{\theta}$ - und θ_{rms} -Profile in der periodischen Zelle	67
5.4	Vergleich der Grenzschichtdicken	68
5.5	Vergleich numerisch und experimentell ermittelter Daten . .	70

5.6	Vergleich numerisch und experimentell ermittelter Daten . . .	71
5.7	Mittlere turbulente kin. und therm. Dissipationsraten	73
5.8	Verhältnis von $\overline{(\partial u'_i/\partial x_j)^2}/\overline{(\partial \theta'/\partial x_i)^2}$	74
5.9	Kinetische und thermische Energiespektren	75
5.10	Turbulente Energie als Funktion des Wandabstandes ($k = 8$)	76
5.11	Zeitliches Mittel der Korrelation der turb. Fluktuationen . . .	77
6.1	PDFs der therm. Dissipationsraten der periodischen Zelle . . .	80
6.2	Beispielhafte Verteilung der thermischen Dissipationsraten . .	84
6.3	Skizze der thermischen <i>Plumes</i>	85
6.4	Visualisierung der thermischen Dissipationsraten	85
6.5	Instantane PDFs von ϵ_θ für den Bereich III	88
6.6	Zeitreihe des Exponenten B_2	90
6.7	PDFs der Kernregion	93
6.8	Zeitreihe der Wölbung K der Kernregion-PDFs	94
7.1	Instantane Temperaturfelder der geschlossenen Zellen	99
7.2	Quader: Mittleres Geschwindigkeitsfeld	102
7.3	Quader: Geschwindigkeitsfluktuationen	103
7.4	Quader: Mittlere Temperaturverteilung	104
7.5	Quader: Temperaturfluktuationen	105
7.6	Würfel: Mittleres Geschwindigkeitsfeld	106
7.7	Würfel: Geschwindigkeitsfluktuationen	107
7.8	Würfel: Mittlere Temperaturverteilung	108
7.9	Würfel: rms-Werte der Temperatur	109
7.10	Einfluss der Geometrie auf die Wärmeübertragung	111
7.11	Vergleich der Fluktuationen des Exponenten B_2	116
7.12	Temperaturprofile in der quaderförmigen Zelle	117
8.1	Instantane Temperaturfelder in RB- und Mischkonvektion . . .	125
8.2	Zeitliches Verhalten von $\langle u\theta \rangle_{auslass}$	126

8.3	Wandschubspannungen $\tau_{ii} _{wand} = 0$ auf Decke und Boden .	127
8.4	Vgl. der therm. Dissip. in RB- und Mischkonvektion	129
8.5	Vgl. der PDFs der Kernregion in RB- und Mischkonvektion .	130

Tabellenverzeichnis

3.1	Stoffeigenschaften von Luft bei $\hat{T}_m = 40^\circ\text{C}$	28
4.1	Gitterstudie der periodischen Zelle	44
4.2	Untersuchungen zur Grenzschichtauflösung	50
4.3	Skalierung auf dem HLRB2	59
5.1	Simulationsergebnisse der periodischen Zelle	65
6.1	Stat. Auswertung der PDFs der therm. Dissipationsraten . .	86
6.2	Beiträge der Bereiche a bis c und I bis III	96
7.1	Simulationsergebnisse der geschlossenen Zellen	100
7.2	Vergleich der Exponenten der Nu - Ra -Beziehung	111
7.3	Beiträge der Bereiche a bis c und I bis III (kubische Zelle) . .	112
7.4	Beiträge der Bereiche a – c und I – III (quaderförmige Zelle) .	113
A.1	Simulationsparameter für die periodische Zelle	140
A.2	Simulationsparameter für die quaderförmige Zelle	141
A.3	Simulationsparameter für die kubische Zelle	142

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Hintergrund

Die Übertragung von Wärme ist sowohl in der Natur als auch bei einer Vielzahl von technischen Anwendungen von fundamentaler Bedeutung. In der Natur vorkommende Strömungen sind z.B. in den Ozeanen, der Atmosphäre oder im Erdmantel. Darüber hinaus spielt sie auch bei einer Vielzahl von technischen Anwendungen wie Schmelzen, der Kühlung von Bauteilen oder der Klimatisierung von Räumen eine große Rolle. Gegenüber der Wärmeleitung ist die konvektive Wärmeübertragung sehr viel effektiver, weshalb sie die in Natur und Technik am häufigsten vorkommende Strömungsform ist. Konvektiver Wärmeaustausch kann dabei sowohl durch thermische als auch erzwungene Konvektion oder durch Konzentrationsgradienten induziert werden.

Thermische Konvektion tritt überall dort auf, wo ein dem Schwerfeld ausgesetztes Fluid einen durch eine Temperaturdifferenz induzierten Dichtegradienten aufweist. Als Beispiel aus der Natur sei hier auf thermale Winde in der Atmosphäre, die über warmen Landmassen aufsteigen, hingewiesen. Bedingt durch die Temperaturdifferenz, entstehen im Fluid Dichtegradienten, infolge derer die erwärmte Luftmasse solange aufsteigt, bis sie die von ihr transportierte Wärme an die kältere Umgebung abgegeben hat. Aufgrund ihrer einfachen geometrischen Anordnung ist die Rayleigh-Bénard (RB) Konvektion, bei der sich ein Fluid zwischen zwei ebenen horizontalen Platten befindet, von denen die Untere geheizt und die Obere gekühlt wird, ein geeignetes Modellsystem für grundlegende Untersuchun-

gen der in thermischer Konvektion auftretenden Phänomene. Wie in Kapitel 3 dargelegt wird, spielen die thermischen *Plumes* eine nicht zu vernachlässigende Rolle bei der theoretischen Beschreibung der RB-Konvektion. Allerdings ist ihre Wechselwirkung mit den thermischen Grenzschichten und ihr Beitrag zur thermischen Dissipation noch nicht hinreichend verstanden.

Erzwungene Konvektion bezeichnet im Allgemeinen Transportvorgänge, die von einem Druckgradienten hervorgerufen werden. Dieses Phänomen ist ebenfalls in der Atmosphäre zu finden. Anhand dieses Beispiels wird deutlich, dass in vielen Fällen eine Überlagerung von thermischer und erzwungener Konvektion auftritt. Diese wird üblicherweise als gemischte Konvektion bezeichnet und ist nicht nur auf meteorologischen, sondern auch auf wesentlich kleineren Skalen, z.B. bei Belüftungssystemen, zu finden. Für die Art der sich ausbildenden Strömung spielt das Kräfteverhältnis resultierend aus thermischer und erzwungener Konvektion eine entscheidende Rolle. Bei meteorologischen Systemen hat zudem die von der Rotation des Systems hervorgerufene Corioliskraft einen entscheidenden Einfluss auf das Verhalten der Strömung. Die bei der gemischten Konvektion auftretenden Wechselwirkungen zwischen der erzwungenen und der thermischen Konvektion machen diese Strömung zu einem sehr komplexen System, das in weiten Teilen noch nicht verstanden ist.

Die vorliegende Arbeit befasst sich zunächst mit der Analyse der RB-Konvektion. Hierbei werden charakteristische Bereiche des Strömungsfeldes, wie die Grenzschichten, *Plumes* und das Kernvolumen in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl und unter dem Einfluss verschiedener Geometrien untersucht. Unterschiede zwischen RB- und gemischter Konvektion werden anhand der sog. belüfteten Rayleigh-Bénard-Konvektion exemplarisch an einem Beispiel dargelegt. Auf diese Weise wird der Einfluss der Zuluftstrahlen auf die zuvor für die RB-Konvektion untersuchten Mischungsvorgänge analysiert.

1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit

Fragestellungen

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der turbulenten RB-Konvektion in quaderförmigen Geometrien, wobei das Hauptaugenmerk dem Einfluss

der thermischen *Plumes* auf die Wärmeübertragung gilt, wobei ebenfalls der Einfluss auf die Grenzschichten, sowie den Kernbereich des Fluids untersucht wird. Im Speziellen werden in dieser die folgenden Fragestellungen näher beleuchtet:

- Wie beeinflussen die Seitenwände der Konvektionszelle das Verhalten der charakteristischen Bereiche der thermischen Konvektionsströmung bzw. die Wärmeübertragung?
- Gibt es eine kritische Rayleigh-Zahl ab der der Einfluss der Geometrie auf die Dynamik der *Plumes* bzw. die Wärmeübertragung vernachlässigbar ist?
- Welche globalen Strömungsstrukturen treten in den drei untersuchten kartesischen Geometrien auf und wie ist ihr zeitliches Verhalten bzw. ihre Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl?
- In welchen Gebieten treten die größten/kleinsten Wechselwirkungen zwischen dem Temperatur- und dem Geschwindigkeitsfeld auf und wie ändern sich diese mit der Rayleigh-Zahl?
- Welchen Beitrag leisten die einzelnen charakteristischen Bereiche des Strömungsfeldes zur Gesamtwärmeübertragung und wie ändern sie sich in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl bzw. der Geometrie?
- Inwieweit stimmen die die numerischen Ergebnisse mit theoretischen Vorhersagen der einschlägigen Theorien überein bzw. wie lassen sich die Theorien verbessern?
- Wie beeinflusst der Zuluftstrahl bei der gemischten Konvektion die Wärmeübertragung in der Zelle und wie verhalten sich die thermischen *Plumes* dabei?

Gliederung

Zunächst erfolgt in Kapitel 2 eine kurze Einführung in die mathematische Beschreibung von Kontinuumsströmungen sowie eine Charakterisierung turbulenter Strömungen. Danach wird in Kapitel 3 ein Überblick über die Rayleigh-Bénard-Konvektion gegeben, in dem für diese Arbeit relevante Forschungsergebnisse zusammengefasst werden. Kapitel 4 erläutert das numerische Verfahren der dieser Arbeit zugrundeliegenden DNS/LES.

Außerdem werden die Anforderungen an die Auflösung des Rechengebietes und die parallele Effizienz des Programms analysiert.

In Kapitel 5 werden die Wechselwirkungen zwischen dem Temperatur- und dem Geschwindigkeitsfeld vom Einsetzen der turbulenten Konvektion bis zur vollturbulenten Konvektion untersucht. Kapitel 6 befasst sich mit den Wärmetransportvorgängen der Rayleigh-Bénard-Konvektion, insbesondere mit dem Beitrag der verschiedenen Teile des Strömungsfeldes zur mittleren Wärmeübertragung des Fluids.

Der Einfluss des Seitenverhältnisses der Geometrie (lange periodische Zelle, quaderförmige Zelle und Würfel) auf die groß-skaligen Strömungsstrukturen und die Temperaturprofile in turbulenter RB-Konvektion wird in Kapitel 7 dargestellt. Außerdem wird die Auswirkung des Seitenverhältnisses auf die Rayleigh-Abhängigkeit der thermischen Dissipationsraten untersucht.

Abschließend wird in Kapitel 8 die gemischte turbulente Konvektion diskutiert. Nach einem kurzen Überblick über die thermische Mischkonvektion wird der Einfluss der Zuluftstrahlen auf die thermische Konvektion exemplarisch anhand der Ergebnisse einer DNS untersucht. Abschließend werden in Kapitel 9 die Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen dieser Arbeit gegeben.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

2.1 Mathematische Beschreibung von Strömungen

Sofern alle relevanten Skalen der Strömung sehr viel größer sind als die mittlere freie Weglänge der Moleküle des Fluids, kann das Fluid als Kontinuum betrachtet werden. Zur Beschreibung eines Fluidpaketes, das kleiner ist als die kleinsten relevanten Skalen des Systems, können die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie entsprechend den Gesetzen der Mechanik und der Thermodynamik formuliert werden. Aus der Massenerhaltung ergibt sich nach Schmitt & Friedrich (1982) unter Verwendung der Summationskonvention die folgende Gleichung ($\hat{\cdot}$ bezeichnet eine dimensionsbehaftete Größe)

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{\rho}\hat{u}_i)}{\partial \hat{x}_i} = 0 \quad (2.1)$$

und für die Impulsgleichungen, die sog. *Navier-Stokes*-Gleichungen

$$\frac{\partial(\hat{\rho}\hat{u}_i)}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{\rho}\hat{u}_i\hat{u}_j)}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} - \frac{\partial \hat{s}_{ij}}{\partial \hat{x}_j} = \hat{\rho}\hat{f}_i. \quad (2.2)$$

Der Quellterm $\hat{\rho}\hat{f}_i$ entspricht bei thermischer Konvektion den Auftriebskräften, die von den Dichtegradienten hervorgerufen werden, während \hat{s}_{ij} den Scherratentensor definiert. Polifke & Kopitz (2005) formulieren die Energiegleichung in allgemeiner Form, die sich wie folgt schreiben lässt:

$$\frac{\partial(\hat{\rho}\hat{e}_{ges})}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{\rho}\hat{u}_j\hat{e}_{ges})}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial(\hat{u}_j\hat{p})}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{q}_j}{\partial \hat{x}_j} - \frac{\partial \hat{s}_{ij}\hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} = \hat{\omega} + \hat{\rho}\hat{f}_i\hat{u}_i, \quad (2.3)$$

wobei $\hat{e}_{ges} \equiv \hat{e}_i + \frac{\hat{u}_i \hat{u}_i}{2}$ die Gesamtenergie, gegeben durch die spezifische innere und die kinetische Energie ist. Allerdings kann der Wärmeeintrag durch die kinetische Energie und die Scherung des Fluids bei den hier betrachteten Konvektionsströmungen vernachlässigt werden. Die Quellterme $\hat{\omega}$ und $\hat{\rho} \hat{f}_i \hat{u}_i$ auf der rechten Seite stellen den Energieeintrag durch Absorption von Strahlung und die Arbeitsleistung der Volumenkraft dar, welche bei der folgenden Betrachtung ebenfalls vernachlässigt werden.

Die Gleichungen (2.1) – (2.3) lassen sich unter gewissen Annahmen weiter stark vereinfachen:

- lineare Abhängigkeit der Scherspannung vom Geschwindigkeitsgradienten (Newtonsches Fluid): $\hat{s}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i})$
- der durch Wärmeleitung zugeführte Wärmestrom wird durch das Fourier-Gesetz $\hat{q}_i = -\hat{\kappa} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}_i}$ beschrieben
- es handelt sich um ein ideales Gas
- Annahme der Gültigkeit der Boussinesq-Approximation (§ 3.4).

Somit ergeben sich die Erhaltungsgleichungen in Boussinesq-Formulierung (Boussinesq 1903), welche sich durch Inkompressibilität sowie temperaturunabhängige Stoffwerte auszeichnen (siehe Gray & Giorgini 1976). Aufgrund der oben beschriebenen Annahmen sind Impuls- und Energiegleichung ausschließlich über den Auftriebsterm in (2.7) miteinander gekoppelt. Durch Einführung geeigneter Referenzgrößen lassen sich die Gleichungen normieren. In diesem Fall werden die Breite \hat{B} der Zelle, die Auftriebsgeschwindigkeit $\hat{u}_a = (\hat{\alpha} \hat{g} \hat{H} \Delta \hat{T})^{1/2}$, die Temperaturdifferenz $\Delta \hat{T}$ zwischen den beiden isothermen Platten und die arithmetisch gemittelte Fluidtemperatur $\hat{T}_m = (\hat{T}_{decke} + \hat{T}_{boden})/2$ gewählt. Die dimensionslose Länge, Geschwindigkeit, Druck, Temperatur und Zeit ergeben sich dann zu

$$x_i = \frac{\hat{x}_i}{\hat{B}}, \quad u_i = \frac{\hat{u}_i}{\hat{u}_a}, \quad p = \frac{\hat{p}}{\hat{\rho} \hat{u}_a^2}, \quad (2.4)$$

$$\theta = \frac{\hat{T} - \hat{T}_m}{\Delta \hat{T}} \quad \text{und} \quad t = \frac{\hat{t} \hat{u}_a}{\hat{B}}, \quad (2.5)$$

so dass man ein dimensionsloses Gleichungssystem (2.6) – (2.8) erhält.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \theta \delta_{3i} \quad \text{und} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i}, \quad (2.8)$$

wobei δ_{3i} das Kroneckersymbol ist (Auftriebskräfte wirken nur in der vertikalen Richtung). Die dimensionslose kinematische Viskosität ν und die dimensionslose Temperaturleitfähigkeit κ sind gegeben durch

$$\nu = \sqrt{\frac{\mathcal{P}r}{\Gamma^3 \mathcal{R}a}} \quad \text{und} \quad \kappa = \sqrt{\frac{1}{\Gamma^3 \mathcal{R}a \mathcal{P}r}},$$

wobei $\Gamma = \hat{B}/\hat{H}$ das Seitenverhältnis der Zelle beschreibt und die Prandtl-Zahl $\mathcal{P}r$ und die Rayleigh-Zahl $\mathcal{R}a$ gegeben sind durch

$$\mathcal{P}r \equiv \hat{\nu}/\hat{\kappa} \quad \text{bzw.} \quad (2.9)$$

$$\mathcal{R}a \equiv \hat{\alpha} \hat{g} \hat{H}^3 \frac{\Delta \hat{T}}{\hat{\kappa} \hat{\nu}}. \quad (2.10)$$

Die Prandtl-Zahl beschreibt somit das Verhältnis der kinematischen Viskosität zur Temperaturleitfähigkeit des Fluids und die Rayleigh-Zahl ist eine dimensionslose Kennzahl für das Verhältnis von Auftriebs- zu viskosen und diffusiven Kräften. Durch Einführung zeitlich gemittelter Größen $\bar{\phi}$ für die

$$\phi' \equiv \phi - \bar{\phi}, \quad \text{mit} \quad \bar{\phi}' \equiv 0 \quad (2.11)$$

gilt, erhält man aus (2.1) – (2.3) die RANS Gleichungen. Allerdings entstehen in den Gleichungen (2.2) und (2.3) auf diese Weise zusätzliche Terme – die Reynoldsspannungen $\overline{u'_i u'_j}$ und der turbulente Wärmestrom $\overline{u'_i \theta'}$. Die Berechnung dieser Terme wird im Allgemeinen als Schließungsproblem bezeichnet, da diese mithilfe eines statistischen Turbulenzmodells modelliert werden müssen. Diese Modellierung stellt die größte Herausforderung bei der numerischen Lösung der RANS Gleichungen dar. Da RANS Simulationen in dieser Arbeit nicht weiter behandelt werden, soll hier nur auf das sehr umfassende Werk von Wilcox (2004) zur statistischen Turbulenzmodellierung verwiesen werden.

Abschließend soll nicht unerwähnt bleiben, dass für das Gleichungssys-

tem (2.6) und (2.7) bisher nur sehr wenige analytische Lösungen für laminare Strömungen, wie z.B. der ebenen Kanalströmung oder der Rohrströmung, existieren. Die Existenz einer Lösung für die vollständigen Navier-Stokes Gleichungen ist bisher mathematisch nicht bewiesen.

2.2 Turbulente Strömungen

Turbulente Strömungen entstehen durch Anfachung von Instabilitäten und zeichnen sich durch ein unregelmäßiges Strömungsverhalten der *Fluidteilchen*¹ und eine Vielzahl von räumlichen und zeitlichen Skalen aus. Insbesondere das unregelmäßige Verhalten der turbulenten Strömungen führt dazu, dass diese im Vergleich zu laminaren Strömungen nur durch statistische Ansätze reproduzierbar quantifiziert werden können. Üblicherweise werden die turbulenten Größen in wahrscheinlichkeitsverteilte Schwankungen um einen statistischen Mittelwert wie in (2.11) aufgeteilt.

Die im Folgenden skizzierten theoretischen Ansätze beruhen auf der Annahme homogener isotroper Turbulenz. Wesentliche Beiträge zur theoretischen Beschreibung turbulenter Strömungen werden von Kolmogorov (1941) und Richardson (1922) geliefert, die das Fundament der Energiekaskade bilden. Das Modell der Energiekaskade beruht auf der Vorstellung, dass kinetische Energie von großen auf kleine Strukturen übertragen wird, bis sie von den kleinsten Skalen dissipiert wird. Anschaulich lässt sich durch Einführung einer mit den charakteristischen Eigenschaften einer Skala l gebildeten Reynolds-Zahl $Re_l \equiv \hat{U}_l \hat{l} / \hat{\nu}$ (\hat{U}_l und \hat{l} sind die charakteristische Geschwindigkeit und Größe der Skala und Re_l ist ein Maß für das Verhältnis von Trägheits- zu viskosen Kräften) zeigen, dass viskose Effekte bei großen Strukturen mit $Re_l \gg 1$ keinen signifikanten Einfluss haben, während sie die kleinsten Strukturen der Größe η_k für die $Re_{\eta_k} \approx 1$ gilt dominieren. Allerdings ist diese Modellvorstellung unvollständig, da intermittent auch Energie von den kleinen zu den großen Skalen übertragen wird. Dieser Prozess wird in der Literatur als *back-scattering* bezeichnet.

Zerlegt man die kinetische Energie $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ eines Strömungsfeldes

¹Als Fluidteilchen werden im Sinne eines Kontinuumsfluides Volumenelemente mit Abmessungen kleiner als die kleinsten relevanten turbulenten Skalen angesehen.

mithilfe einer Fourier-Transformation

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{f(x)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\mathbf{k}x} dx$$

und trägt die spektrale Verteilung der kinetischen Energie als Funktion der Fouriermoden \mathbf{k} auf, erhält man ein Wellenzahlspektrum. In Abbildung 2.1 ist schematisch ein Wellenzahlspektrum mit seinen charakteristischen Bereichen dargestellt, wie es auch später in § 5.3 für verschiedene Rayleigh-Zahlen analysiert wird. Die Wellenzahlen der Fourier-Transformation werden dabei mit Strukturen einer bestimmten physikalischen Länge oder Skala assoziiert. Für den Trägheitsbereich mit $\ell \gg l \gg \eta_k$ lässt sich anhand einer Dimensionsanalyse unter der Annahme, dass viskose Effekte auf Skalen dieser Größenordnung keinen signifikanten Einfluss haben und die spektrale Energie nur von der mittleren turbulenten kinetischen Dissipationsrate $\overline{\epsilon_{u'}} = \overline{\epsilon_u} - \overline{\epsilon_u}$, mit $\epsilon_u \equiv 2\nu s_{ij} s_{ij}$, und der Wellenzahl \mathbf{k} abhängt, zeigen, dass

$$E(\mathbf{k}) \sim k^{-5/3}, \quad (2.12)$$

was als Kolmogorov- oder 5/3-Gesetz bezeichnet wird. Die Kolmogorov-Skala η_k , bei der die turbulente kinetische Energie dissipiert wird, ist durch

$$\eta_k \equiv \frac{\nu^{1/4}}{\overline{\epsilon_{u'}}^{3/4}} \quad (2.13)$$

definiert. Sie ist ausschließlich von der kinematischen Viskosität des Fluids und der mittleren Dissipation turbulenter kinetischer Energie $\overline{\epsilon_{u'}}$ abhängig. Die integrale Längenskala ℓ definiert die energiereichsten Skalen des turbulenten Strömungsfeldes und ist definiert als (vgl. Wilcox 2004)

$$\ell(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{3}{16} \int_0^{\infty} \frac{R_{ii}(\mathbf{x}, t, |\mathbf{r}|)}{k(\mathbf{x}, t)} dr.$$

Hierbei ist

$$R_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{r}) = \overline{u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)}$$

die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion zwischen den beiden Punkten \mathbf{x} und $(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ zum Zeitpunkt t . Über das Verhältnis dieser beiden Skalen lässt sich die für DNS benötigte Auflösung abschätzen. Setzt man die für homogene isotrope Turbulenz übliche Abschätzung $\overline{\epsilon_{u'}} \equiv \frac{\partial k}{\partial t} \approx \frac{|\mathbf{u}'|^2}{\ell/|\mathbf{u}'|}$ (siehe z.B. Kerr

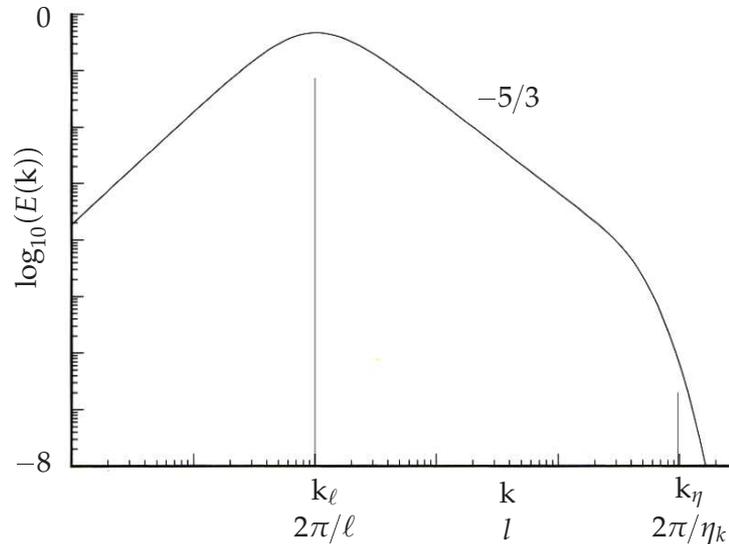


ABBILDUNG 2.1: Schematische Darstellung eines doppelt-logarithmisch aufgetragenen Energiespektrums. Eingezeichnet sind die integrale Längenskala k_ℓ , die Kolmogorov-Skala k_η und der Trägheitsbereich mit der Skalierung $E(k) \sim k^{-5/3}$ (adaptiert von Pope 2003).

1996) und setzt sie in (2.13) ein, so erhält man

$$\frac{\ell}{\eta_k} \approx \mathcal{Re}_\ell^{3/4}. \quad (2.14)$$

Die Anzahl der Gitterpunkte einer DNS skaliert daher mit $(\ell/\eta_k)^3 \approx \mathcal{Re}_\ell^{9/4}$, was die enormen Anforderungen an die Rechen- und Speicherkapazitäten von DNS bei hohen Reynolds-Zahlen erklärt, wobei der durch einen kleineren Zeitschritt hervorgerufene gestiegene Bedarf an Rechenzeit noch nicht berücksichtigt ist. Die Anforderungen an die Auflösung werden in § 4.4 in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl diskutiert.

Kapitel 3

Grundlagen zur Rayleigh-Bénard-Konvektion

Die Rayleigh-Bénard-Konvektion geht auf das von Henri Bénard durchgeführte Experiment zur Untersuchung der Wärmeübertragungseigenschaften eines von unten geheizten Fluides (Fett) zwischen zwei freien Rändern (siedendes Wasser unten und Luft oben) zurück (Bénard 1901); die Schichtdicke betrug 0,81 mm bei einem Durchmesser von 20 cm. Wenig später untersuchte Lord Rayleigh (Rayleigh 1916) das Einsetzen der Konvektion mittels linearer Stabilitätsanalyse und ersetzte in diesem Zuge die freien Ränder des Bénard-Experimentes durch feste Ränder, so dass die thermische Konvektion einer dünnen Fluidschicht zwischen zwei horizontalen Platten als Rayleigh-Bénard-Konvektion bezeichnet wird. Allerdings wird der Begriff der Rayleigh-Bénard-Konvektion in der Literatur in der Regel weiter gefasst und bezieht sich ohne geometrische Einschränkungen allgemein auf thermische Konvektionsströmungen, die von einem vertikalen Temperaturgradienten hervorgerufen werden.

Hundert Jahre nach Bénards Experiment existiert inzwischen eine umfassende Theorie (Grossmann & Lohse 2004, Vgl. § 3.2) zur Beschreibung der Wärmeübertragung in RB-Konvektion, welche in einem weiten Pr -Bereich gültig ist. Trotzdem sind viele Zusammenhänge, wie das zeitliche Verhalten des in turbulenten RB-Systemen auftretenden Windes (der großskaligen Zirkulationsströmung) und die Wechselwirkung mit den thermischen *Plumes* als kohärenten thermischen Strukturen oder die Dynamik der thermischen *Plumes* und ihr Anteil an der Wärmeübertragung nicht

vollständig verstanden. Aus diesem Grund zielt diese Arbeit darauf ab die Wärmetransportvorgänge bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen und unterschiedlichen Geometrien zu untersuchen. Im folgenden Kapitel werden grundlegende Phänomene der RB-Konvektion diskutiert, wobei der Fokus auf für diese Arbeit relevanten Bereichen liegt.

Zunächst werden die charakteristischen Strömungsformen vom Einsetzen der Konvektion bis zur ausgebildeten turbulenten Strömung und der Einfluss der Randbedingungen auf die Konvektion dargestellt. Ferner werden einige theoretische Ansätze zur Wärmeübertragung (Nu - Ra Beziehung) erläutert und anschließend ein Überblick über das Verhalten der Grenzschichten in turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion gegeben. Abschließend wird der Einfluss der Boussinesq-Approximation, also temperaturabhängiger Stoffwerte diskutiert.

Konvektion bei geringen Rayleigh-Zahlen. Ein Fluid der Schichthöhe \hat{H} und der Prandtl-Zahl Pr bleibt bei einer geringen Temperaturdifferenz $\Delta\hat{T}$ zwischen den beiden horizontalen Platten in Ruhe, so dass Wärme zwischen beiden Platten einzig aufgrund der Wärmeleitungseigenschaften des Fluids übertragen wird. Die Auftriebskräfte, die durch Erhitzen des Fluids entstehen, stehen der Viskosität und den Druckkräften entgegen, so dass sich auch nach Einbringen einer Störung eine Temperaturschichtung einstellt. Wird die Temperaturdifferenz und damit die Rayleigh-Zahl (2.10) als charakteristische Größe erhöht, werden bei hinreichend großen $\Delta\hat{T}$ Störungen angefacht, die Temperaturschichtung wird instabil und Wärme konvektiv durch das Fluid übertragen. Lord Rayleigh führt das Einsetzen der Konvektion auf eine Instabilität der Fluidschicht gegenüber einer charakteristischen Wellenlänge zurück. Die Form der Strukturen ist bestimmt durch die Randbedingungen und die Wellenlänge der Instabilität. Die so entstehenden Strukturen sind auch als Bénard-Zellen bekannt. Durch eine lineare Stabilitätsanalyse zeigt Rayleigh (1916), dass eine in horizontaler Richtung unendlich ausgedehnte Fluidschicht mit festen Rändern in vertikaler Richtung bei $Ra_{krit} \approx 1,70 \times 10^3$ instabil wird, infolge dessen die Konvektion einsetzt. Viel später weisen Schlüter *et al.* (1965) durch eine lineare Stabilitätsanalyse nach, dass eine 2D-Strömung beim Einsetzen der Konvektion der einzige stabile Zustand ist. Weiterhin zeigt Busse (1967) ebenfalls durch Stabilitätsanalysen, dass die 2D-Lösung oberhalb von Ra_{krit} nur gegenüber Instabilitäten bestimmter Wellenlängen stabil ist. Werden Instabilitäten an-

derer Wellenlängen angeregt, oder ist $Ra > Ra_{krit,3D}$ so wechselt das Strömungsfeld in einen drei-dimensionalen Zustand.

Neumann (1990) untersucht mithilfe eines auf Finiten-Volumen basierenden DNS-Verfahrens das Verhalten der Strömung in der Nähe des kritischen Punktes beim Übergang von 2D- zur 3D-Konvektion. Dabei verwendet er zylindrische Geometrien mit $\Gamma = 1$ und $\Gamma = 2$ für $0,02 \leq Pr \leq 6,7$. Auf diese Weise erhält er, dass die Lösung nahe Ra_{krit} von der Initiallösung abhängt und die dominante Wellenlänge der Instabilitäten stark vom Seitenverhältnis der Geometrie geprägt ist.

3.1 Strömungszustände

Abhängig von Ra und Pr und der Geometrie der Konvektionszelle stellen sich die folgenden charakteristischen Strömungszustände ein, die auch bei der in § 4.4 durchgeführten Netzkonvergenzstudie beobachtet werden:

- 2D, stationäre Konvektion
- 3D, stationäre Konvektion
- quasiperiodische, laminare Konvektion
- turbulente Konvektion

Abbildung 3.1 illustriert die Strömungszustände in der Ra - Pr -Ebene, die Krishnamurti (1973) aus einer Vielzahl von Experimenten im Bereich $2,5 \times 10^{-2} \leq Pr \leq 0,85 \times 10^4$ zusammengetragen hat und ebenfalls durch die DNS von Neumann (1990) bestätigt werden. Die Ausbildung dieser Strömungsformen wird jedoch ebenfalls von der Geometrie der Konvektionszelle beeinflusst, was sich sowohl auf das räumliche als auch das zeitliche Verhalten der groß-skaligen Zirkulationsströmung auswirkt.

Groß-skalige Zirkulation. Xi *et al.* (2004) zeigen durch ihre experimentellen Untersuchungen mit Schattenaufnahmen und PIV (Particle Image Velocimetry), dass die groß-skalige Zirkulationströmung (LSC: Large Scale Circulation) bei der thermischen Konvektion auf die Entstehung und Wechselwirkung von laminaren thermischen *Plumes* zurückzuführen ist. Damit bestätigen sie, dass das Einsetzen der Konvektion, wie von Rayleigh vermutet, auf einer Instabilität des Temperaturfeldes beruht. Abbildung 3.2 zeigt

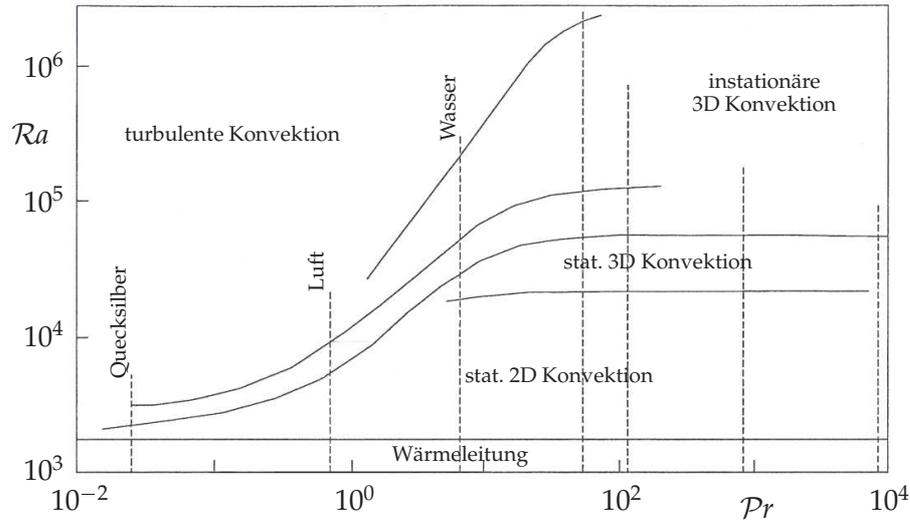


ABBILDUNG 3.1: Phasendiagramm der Strömungszustände in der Ra - Pr -Ebene nach Krishnamurti (1973)

Schattenaufnahmen von Xi *et al.* (2004), die erkennen lassen, dass sich in dem zunächst ruhenden Fluid vereinzelt *Plumes* von der geheizten Platte lösen und senkrecht aufsteigen. Durch die dabei entstehende Verdrängung werden Wirbel erzeugt, die in der Folge mit den aufsteigenden kohärenten Strukturen in Wechselwirkung treten. Xi *et al.* (2004) unterscheiden bei der Entstehung der Konvektion die Wechselwirkung zwischen einem *Plume* und den selbstinduzierten Wirbeln und der Interaktion mehrerer *Plumes* durch die sie umgebenden Wirbelstrukturen. Aufgrund dieser Wechselwirkungen beginnen sich die *Plumes* zu vereinigen und erzeugen auf diese Weise eine groß-skalige zirkulierende Strömung, den sog. Wind. Desweiteren zeigen lokale Temperaturmessungen zusammen mit Schattenaufnahmen von Zhou & Xia (2002) in einer zylindrischen mit Wasser gefüllten Zelle ($\Gamma \approx 1$), dass sich die *Plumes* infolge des Windes vorzugsweise entlang der Seitenwände bewegen. Dieses Verhalten spiegelt sich in den Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (PDFs) der Temperatur wider. In der Nähe der Seitenwand weisen die Ausläufer der PDFs wesentlich stärkere Intermittenz als im Zentrum der Zelle auf.

Cioni *et al.* (1997) untersuchen die Dynamik der LSC mit Quecksilber ($Pr \approx 0,025$) als Arbeitsfluid in einer zylindrischen Zelle mit $\Gamma = 1$ und $5 \times 10^6 \leq Ra \leq 5 \times 10^9$. Sie beobachten anhand der Temperatursignale der in Heiz- und Kühlplatte eingelassenen Temperatursensoren, dass sich die Orientierung der LSC auf einer Zeitskala von mehreren Stunden ändert.

Durch eine leichte Neigung der Zelle können sie die azimuthale Orientierung der LSC auf einen kleinen Winkelbereich einschränken. Dieses Verhalten der LSC und insbesondere die Ursachen, die zur Umkehr der Orientierung führen bzw. diese unterbinden, sind noch nicht endgültig geklärt. Dieser Punkt wird in § 5 anhand einer Analyse des zeitlichen Verhaltens der Strömungsrichtung an zwei Punkten des Strömungsfeldes adressiert.

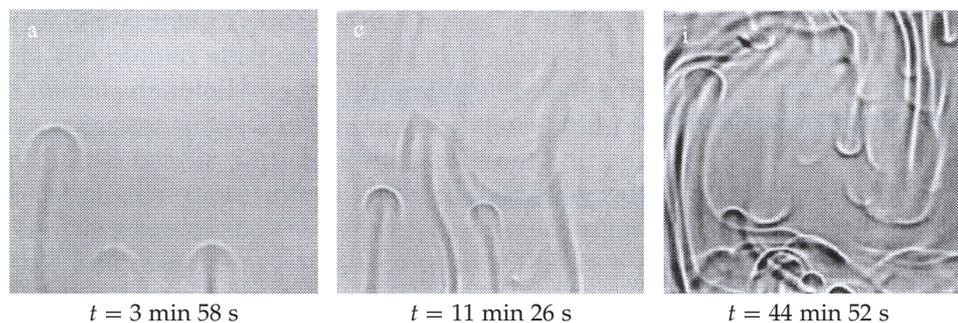


ABBILDUNG 3.2: Serie von Schattenaufnahmen laminarer *Plumes* während der transienten Phase der RB-Konvektion von Wasser in einer quaderförmigen Zelle. $t = 0$ bezieht sich auf den Beginn des Heizens bzw. Kühlens der wärmeleitenden Platten (Ergebnisse von Xi *et al.* 2004).

Einfluss der Seitenwände. Wie bereits oben erwähnt, wurde das klassische Rayleigh-Bénard-Experiment in einem zylindrischen Behältnis mit einem Seitenverhältnis von $\Gamma \equiv \hat{B}/\hat{H} \approx 247$ durchgeführt. Dementsprechend kann das Fluid in radialer Richtung als unendlich ausgedehnt betrachtet werden und der Einfluss der vertikalen Wände auf das Strömungsfeld kann vernachlässigt werden. Bei kleineren Seitenverhältnissen kann der Einfluss der Wände jedoch nicht vernachlässigt werden, da deren Einflüsse die Strömung maßgeblich bestimmen. Im Gegensatz zu freien Rändern, stabilisiert die Wand die Grundlösung, da die Haftbedingung Instabilitäten des Geschwindigkeitsfeldes dämpft und somit die Konvektion deutlich später einsetzt. Adiabate Randbedingungen hingegen führen zu einem früheren Einsetzen der Konvektion, da Temperaturinstabilitäten in diesem Fall von der Wand nicht gedämpft werden (siehe Frick & Clever 1980).

Der Einfluss nicht adiabater Seitenwände ist nicht nur bei laminarer, sondern auch bei turbulenter Konvektion zur genauen Bestimmung des vertikalen Wärmetransportes durch die Fluidschicht von Interesse. Ahlers (2001) schätzt die Wärmeleitung durch die vertikalen Wände ab, indem er davon ausgeht, dass sich eine laminare Grenzschicht entlang der Seiten-

wand ausgebildet. In einem Ansatz wird die Grenzschichtdicke als proportional zur Reynolds-Zahl angenommen, in einem zweiten Modell wird eine feste Grenzschichtdicke festgelegt. Basierend auf diesen Ansätzen zeigt er, dass die Wärmeleitung durch die Seitenwände insbesondere bei hohen Ra nicht vernachlässigbar ist und den Skalierungsexponenten β der Nusselt-Rayleigh-Beziehung (siehe (3.2) in § 3.2) um bis zu 2% ändern kann.

Niemela & Sreenivasan (2003) diskutieren den Einfluss wärmeleitender Seitenwände und heben hervor, dass das Rezirkulationsgebiet in den Ecken der Konvektionszelle entscheidenden Einfluss auf die Verluste durch Wärmeleitung durch die Seitenwände haben, die Rezirkulationsgebiete aber keine einfache Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl aufweisen. Sie geben an, dass das entscheidende Kriterium für die Vernachlässigbarkeit der Wärmeverluste durch die Seitenwände das Verhältnis aus deren Temperaturleitfähigkeit und der Temperaturleitfähigkeit des Fluids sei.

Einfluss Temperaturleitender horizontaler Platten. Neben dem Einfluss der Seitenwände haben auch die thermischen Randbedingungen der Heiz- bzw. Kühlplatte entscheidenden Einfluss auf die Konvektionströmung. Bei Vergleichen experimenteller Ergebnisse mit DNS, die in der Regel mit isothermen horizontalen Platten berechnet werden, treten zum Teil deutliche Unterschiede auf. DNS turbulenter RB-Konvektion in einem Zylinder ($\Gamma = 1/2$) von Verzicco & Sreenivasan (2008) mit einer Heizplatte konstanter Temperatur bzw. konstanten Wärmestroms liefern für $Ra < 10^9$ nahezu identische Ergebnisse für den Wärmestrom. Bei höheren Ra beobachten sie allerdings, dass die Wärmeübertragung einer Platte konstanten Wärmestroms Resultate liefert, die besser zu entsprechenden experimentellen Ergebnissen passen.

Cioni *et al.* (1997) diskutieren den Einfluss der thermischen Leitfähigkeit der horizontalen Platten vor dem Hintergrund der von ihnen durchgeführten Quecksilberexperimente. Sie führen an, dass das Verhältnis der Wärmeübertragung der Kupferplatten zu dem des Fluids von entscheidender Bedeutung ist, und die wärmeleitenden Platten nur bei geringen Ra als isotherm angenommen werden können, da die Wärmeübertragung des Fluids mit Ra schnell zunehme und somit bei genügend großen Ra ähnlich gut oder besser sind als die der horizontalen Platten. Der auf der Basis der DNS-Daten von Verzicco & Sreenivasan (2008) durchgeführte Vergleich zeigt zudem, dass die Wärmeübertragung bei einer Heizplatte mit

konstantem Wärmestrom geringer ausfällt, als bei einer Platte konstanter Temperatur. Dies führen sie darauf zurück, dass eine isotherme Platte einen beliebig höheren Wärmestrom produzieren kann, indem die Grenzschicht lokal dünner wird. Bei aufgeprägtem Wärmestrom dagegen seien die Temperatur der sich lösenden kohärenten Strukturen und der damit verbundene Auftrieb wesentlich geringer.

Geometrischer Einfluss. In der vorliegenden Arbeit wird in Kapitel 7 der Einfluss des Seitenverhältnisses kartesischer Geometrien auf die Wärmetransporteigenschaften untersucht. Allerdings hat nicht nur das Seitenverhältnis Γ , sondern auch die geometrische Form der Konvektionszelle einen wesentlichen Einfluss auf die Strömung. Daya & Ecke (2001) untersuchen das Verhalten der turbulenten RB-Konvektion in einem Zylinder und einem Würfel und stellen Unterschiede in der turbulenten Strömung fest. Lokal gemessene turbulente Fluktuationen weisen z.B. signifikante Unterschiede in ihrer Amplitude auf, während globale Größen wie die Nusselt-Zahl

$$\mathcal{Nu} = \frac{|\partial\hat{T}/\partial\hat{z}|_{wand}}{\Delta\hat{T}/\hat{H}}, \quad (3.1)$$

die das Verhältnis von konvektivem Wärmetransport zu reiner Wärmeleitung darstellt, nahezu unabhängig von der Form des Behältnissen zu sein scheinen.

3.2 Nusselt-Rayleigh-Beziehung

Die Nusselt-Zahl (3.1) ist ein Maß für die Effektivität des konvektiven Wärmetransportes, bezogen auf die Wärmeübertragung durch die Leitungseigenschaften des Fluids. Die Abhängigkeit der \mathcal{Nu} -Zahl von der \mathcal{Ra} -Zahl ist daher von fundamentaler Bedeutung, da die Genauigkeit, mit der eine Theorie oder ein numerisches Modell diese sog. Nusselt-Rayleigh-Beziehung abzubilden vermögen, ein Maß für die Güte des Modells ist. Die Skalierung der Nusselt-Rayleigh Beziehung der Form

$$\mathcal{Nu} \sim \mathcal{Ra}^\beta \mathcal{Pr}^\gamma \quad (3.2)$$

ist in den vergangenen Jahren viel diskutiert worden, da lange Zeit ein universelles Potenzgesetz angenommen wurde. Es hat sich allerdings gezeigt,

dass solche Potenzansätze immer nur innerhalb bestimmter Grenzen Gültigkeit besitzen, da

die Physik der Strömung und damit das Skalenverhalten der überlagerten Beiträge von Randschichten bzw. vom Volumeninneren jeweils anders ist (Ahlers et al. 2002).

Diese Aussage spiegelt den Kern der Grossmann-Lohse (GL) Theorie wider (Grossmann & Lohse 2000). Die Autoren wenden Potenzgesetze immer nur auf Teilbereiche der Ra - Pr -Ebene an und verbinden diese durch Übergangsfunktionen. Damit ist sie die bisher umfassendste Theorie zur Beschreibung der RB-Konvektion. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die historische Entwicklung verschiedener Theorien und deren Einschränkungen gegeben. Vor diesem Hintergrund wird das unterschiedliche Verhalten der Strömung im Volumeninneren und den Randschichten in Kapitel 6 und § 7.2 detailliert untersucht.

1/3-Skalierung. Unter der Annahme, dass sich die Rayleigh-Zahl bezogen auf die thermische Grenzschichtdicke so einstellt, dass sie sich an der Stabilitätsgrenze der Wärmeleitung befindet (Howard 1963), lässt sich zeigen, dass die thermische Grenzschichtdicke und damit die Nusselt-Zahl nicht mehr von der Schichtdicke des Fluids abhängt; entsprechend ergibt sich $\beta \approx 1/3$. Dies impliziert die Annahme, dass die durch den Wind als größtmöglicher Struktur des Systems verursachte Scherung keinen Einfluss auf die Wärmeübertragung hat. Die Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl wird bei diesem Ansatz jedoch nicht näher definiert.

Diese Vorhersage ist in guter Übereinstimmung mit dem Exponenten $\beta = 0,32$, der von Niemela *et al.* (2000) experimentell für den Ra -Bereich $10^6 \leq Ra \leq 10^{17}$ und $Pr \approx 0,7$ mit Helium nahe dem kritischen Punkt ($\hat{T} \approx 5$ K) ermittelt wird. Die Temperatur der horizontalen Platten wurde mit Widerstandsthermometern an mehreren azimuthalen Positionen kontrolliert, wobei sie die Verluste durch die Wärmeleitfähigkeit der Seitenwände der zylindrischen Zelle ($\Gamma = 1/2$) mit berücksichtigen.

1/2-Skalierung. Im Gegensatz zu Howard geht Kraichnan (1962) davon aus, dass die Wärmeübertragung bei einer stark turbulenten Strömung unabhängig von der Wärmeleitung des Fluids ist, und erhält $\beta \approx 1/2$. Dieser Exponent wird von Roche *et al.* (2001) in einer ebenfalls mit Helium

gefüllten zylindrischen Zelle ($\Gamma = 1/2$) für $Ra > 10^{12}$ gemessen. Allerdings besitzt die Zelle im Gegensatz zu der von Niemela *et al.* (2000) verwendeten Apparatur geriffelte Innenwände. Ab $Ra \approx 10^{12}$ ist die Höhe der Riffelung in der Größenordnung der thermischen Grenzschichtdicke δ_θ , wodurch der laminar-turbulente Umschlag der viskosen Grenzschicht für $Ra \approx 10^{12}$ herbeigeführt und die viskose Grenzschichtdicke fixiert soll. Allerdings ist dabei zu beachten, dass durch eine Riffelung der Platte ab einer bestimmten kritischen Rayleigh-Zahl Ra_{krit} der Wärmetransport signifikant vergrößert wird, wenn die Hindernisse aus der Grenzschicht ragen. Du & Tong (2000) zeigen für RB-Konvektion in Wasser ($Pr = 5,4$) durch eine Visualisierung mit temperatursensitiven Flüssigkristallen (TLC: Thermochromic Liquid Crystals), dass die scharfen Kanten der Hindernisse die Ablösung der *Plumes* von den horizontalen Platten begünstigt und somit Nu deutlich steigert. Allerdings führen sie auch an, dass die Skalierung $Nu \sim Ra^\beta$ für $Ra \gg Ra_{krit}$ von diesem Verhalten nicht beeinflusst wird. Shen *et al.* (1996) untersuchen RB-Konvektion in Wasser mit zwei Zellen, von denen eine glatte und eine raue horizontale Platten besitzt. Indem sie die elektrische Leistung für die Temperierung der Heizplatte messen weisen sie experimentell nach, dass sich Ra_{krit} aus dem Verhältnis der thermischen Grenzschichtdicke zur Höhe der Oberflächenrauigkeit $\delta_\theta/h_r \approx 1$ ergibt.

2/7-Skalierung. Castaing *et al.* (1989) geben für $4 \times 10^7 \leq Ra \leq 6 \times 10^{12}$ einen Skalierungsexponenten $\beta \approx 2/7$ an, den sie durch Untersuchungen mit kryogenem Helium ($Pr = 0,7$) in einer zylindrischen Zelle ($\Gamma = 1$) ermitteln. Um die Diskrepanz mit den obenstehenden Theorien zu erklären führen sie ein weiteres Modell ein, dass sich von der bis dahin üblichen Annahme, es gebe nur eine relevante Längenskala (z.B. δ_θ) löst. Neben der thermischen Grenzschichtdicke führen sie eine weitere Längenskala ein, die den Bereich außerhalb der thermischen Grenzschicht beschreibt. Diese Längenskala ermöglicht es den Einfluss der sich aus den Grenzschichten lösenden *Plumes* zu berücksichtigen. Mit dieser Annahme wird im Einklang mit ihren Messungen ein Exponent $\beta \approx 2/7$ bestimmt. Des Weiteren beobachten sie bei ihren Messungen eine signifikante Änderung des Strömungsverhaltens und damit der Nu - Ra -Skalierung bei $Ra \approx 4 \times 10^7$. Das Regime der kleineren Rayleigh-Zahlen bezeichnen sie als weiche und das der höheren Rayleigh-Zahlen als harte Turbulenz. Sie gehen davon aus, dass sich die Kernbereiche, wie in Abbildung 3.3 dargestellt, durch großskalige, kohä-

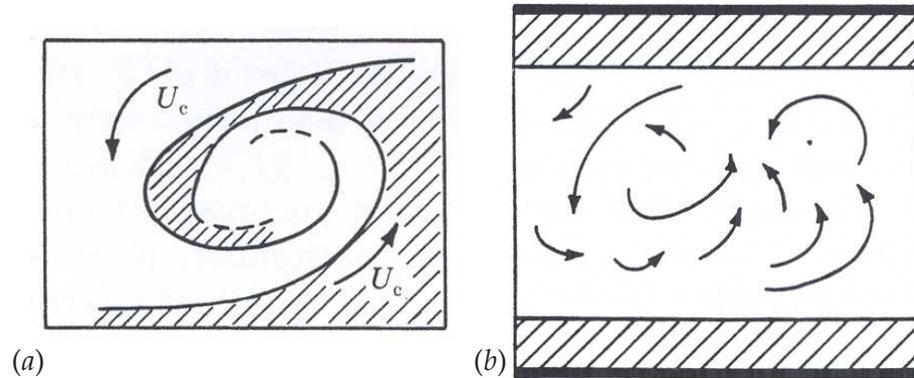


ABBILDUNG 3.3: Illustration (a) weicher und (b) harter turbulenter Konvektion (aus: Castaing *et al.* 1989).

rente Strukturen bzw. gute Durchmischung auszeichnen. Dieses Phänomen wird in Kapitel 7 untersucht. Shraiman & Siggia (1990) kommen mit einem ähnlichen Modell, allerdings unter Annahme der durch Scherung des Windes ($\hat{\epsilon}_u \approx \hat{u}^3/\hat{H}$) hervorgerufenen turbulenten Grenzschichten, zu demselben Skalierungsgesetz. Kerr (1996) vergleicht seine mit einem spektralen Verfahren berechneten DNS-Ergebnisse für eine ebene Geometrie mit periodischen Rändern in beiden horizontalen Richtungen mit den beiden $2/7$ -Skalierungstheorien und beobachtet bei $Ra = 2 \times 10^7$ zwei charakteristische Längenskalen in der Grenzschicht, von denen sich eine innerhalb und eine außerhalb der thermischen Grenzschicht befindet. Aus den Simulationen leitet er indirekt ab, dass es eine starke Korrelation der turbulenten Fluktuationen der Temperatur- und der vertikalen Geschwindigkeiten geben müsse. Dieses Verhalten wird durch eine Analyse der turbulenten Fluktuationen von Temperatur und Geschwindigkeit in § 5.3 bestätigt, was als Bestätigung für die Annahme von Castaing *et al.* (1989) gewertet wird. Im Gegensatz dazu steht die Schlussfolgerung von Kerr (1996), der beobachtet, dass das Profil der Geschwindigkeits-rms-Werte auf eine scherdominierte Strömung hindeutet, was er als Indiz für die Shraiman & Siggia (1990)-Theorie sieht. Einschränkend soll hier vermerkt werden, dass der laminar-turbulente Umschlag der viskosen Grenzschichten laut Ahlers *et al.* (2009) erst sehr viel später stattfindet. Daher bildet dieser Ansatz zwar die Ra -Abhängigkeit, nicht jedoch die Pr -Abhängigkeit der Nusselt-Zahl korrekt ab.

GL-Theorie. Verzicco & Camussi (2003a,b) führen DNS mit einem Finite-Volumenverfahren 2. Ordnung für eine schlanke zylindrische Zelle ($\Gamma = 1/2$) und einem Fluid mit $Pr = 0,7$ unter Annahme der Boussinesq-Approximation (siehe § 3.4) durch. Ihre Simulationen zeigen, dass die Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes mit steigender Ra -Zahl beginnen das Volumeninnere der Konvektionszelle zu dominieren, während die Fluktuationen des Temperaturfeldes verschwinden. Weiterhin beobachten sie, dass die Dissipation kinetischer Energie $\hat{\epsilon}_u = \hat{v}(\partial\hat{u}_i/\partial\hat{x}_j)^2$ in diesem Bereich zunimmt und die thermische Dissipationsrate $\hat{\epsilon}_\theta = \hat{\kappa}(\partial\hat{T}/\partial\hat{x}_j)^2$ abnimmt. Dies veranlasst sie dazu, für die GL-Theorie eine getrennte Betrachtung der thermischen Dissipationsraten infolge der *Plumes* und Grenzschichten $\hat{\epsilon}_{\theta,pl}$ sowie des turbulenten Hintergrundes $\hat{\epsilon}_{\theta,bg}$ vorzuschlagen. Ausgehend von diesen Erkenntnissen haben Grossmann & Lohse (2004) die GL-Theorie dahingehend überarbeitet, dass diesem Verhalten Rechnung getragen wird. Die thermischen Dissipationsraten $\hat{\epsilon}_\theta$ werden daher in Beiträge aus *Plumes* $(\cdot)_{pl}$ und Hintergrundturbulenz $(\cdot)_{bg}$ unterteilt, während die Dissipationsraten des Geschwindigkeitsfeldes $\hat{\epsilon}_u$ weiterhin in Beiträge des Kernvolumens $(\cdot)_{bulk}$ und der Grenzschichten $(\cdot)_{bl}$ unterteilt werden. Diese Aufteilung wird schwerpunktmäßig in Kapitel 6 thematisiert, wobei sich zeigt, dass die thermischen Dissipationsraten in drei charakteristische Bereiche unterteilt werden können, was bedeutet, dass die GL-Theorie mit ihrer Aufteilung

$$\hat{\epsilon}_\theta = \hat{\epsilon}_{\theta,pl} + \hat{\epsilon}_{\theta,bg} \quad (3.3)$$

$$\hat{\epsilon}_u = \hat{\epsilon}_{u,bl} + \hat{\epsilon}_{u,bulk} \quad (3.4)$$

nicht weit genug geht. Allerdings sagt die GL-Theorie für $Pr \approx 1 \dots 7$ einen effektiven Exponenten von $\beta \approx 0,29$ vorher, was in guter Übereinstimmung mit den zuvor genannten experimentellen Ergebnissen von Castaing *et al.* (1989), Shraiman & Siggia (1990), Niemela *et al.* (2000) steht. Ein effektiver Exponent von $\beta = 0,5$ wird von der GL-Theorie für Fluide mit $Pr \ll 1$ angegeben.

Einfluss der Plumes. Mit der oben eingeführten Unterscheidung in weiche bzw. harte Turbulenz geht einher, dass sich das Verhalten der thermischen *Plumes* ebenfalls signifikant ändert. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die *Plumes* bei weicher Turbulenz als fingerartige, zusammenhängende Strukturen über die gesamte Höhe der Zelle erstrecken (Christie

1993). Im Gegensatz dazu werden die *Plumes* unter dem Einfluss harter Turbulenz auseinander gerissen, was dazu führt, dass sich einzelne Pakete heißen oder kalten Fluids durch die Zelle bewegen. Christie (1993) hat den Bereich weicher Turbulenz ($Ra \lesssim 4 \times 10^7$) mittels DNS mit periodischen Rändern in horizontalen Richtungen untersucht und festgestellt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Temperaturfluktuationen θ' im Volumeninneren keine einheitliche Signatur aufweisen und zudem stark von der Ausdehnung des Rechengebietes in periodischer Richtung abhängen. Aus diesem Grund stellen sie eine universell gültige Definition für den Umschlag von weicher zu harter Turbulenz basierend auf der Rayleigh-Zahl in Frage.

He *et al.* (2007) bestimmen die thermischen Dissipationsraten von RB-Konvektion in einer mit Wasser gefüllten zylindrischen Zelle experimentell an mehreren Positionen nahe der Wand und außerhalb der thermischen Grenzschicht. Dabei zerlegen sie die Dissipationsraten in vom mittleren Temperaturgradienten hervorgerufene Anteile $\hat{\epsilon}_{\bar{\theta}} = \hat{\kappa}(\partial\bar{T}/\partial\hat{x}_i)^2$ und von den turbulenten Fluktuationen hervorgerufene Anteile $\bar{\epsilon}_{\theta'} = \hat{\epsilon}_{\theta} - \hat{\epsilon}_{\bar{\theta}}$.

An mehreren Positionen außerhalb der Grenzschicht beobachten sie, dass die Beiträge infolge der Fluktuationen dominieren. In diesem Bereich erhalten sie $\bar{\epsilon}_{\theta'} \sim Ra^{-0,33}$. Innerhalb der thermischen Grenzschichten tragen diese mit weniger als 1,5% nur noch einen geringen Anteil zur gesamten Wärmeübertragung bei. Für diesen Bereich wird eine Skalierung $\hat{\epsilon}_{\bar{\theta}} \sim Ra^{0,63}$ für die mittleren Dissipationsraten ermittelt. He *et al.* (2007) folgern daher, dass diese Skalierungen eine zunehmende Dissipation durch die thermischen *Plumes* widerspiegelt, die zu einer Reduktion der Temperaturfluktuationen im Kernbereich und einen zunehmenden mittleren Temperaturgradienten in der Nähe der wärmeleitenden Wände führt. Sie kommen daher zu dem Schluss, dass *Plumes* und Grenzschichten sich dynamisch unterschiedlich verhaltende Strukturen sind, die nicht gleichwertig behandelt werden können, wie dies bei Grossmann & Lohse (2004) der Fall ist.

Shishkina & Wagner (2006) untersuchen die Rayleigh-Abhängigkeit der thermischen Dissipationsraten bei RB-Konvektion in einem zylindrischen Behältnis für ein Fluid mit $Pr = 0,7$ mit einem Finite-Volumenverfahren 4. Ordnung. Allerdings führen sie im Rahmen der Analyse der Daten im Gegensatz zu Verzicco & Camussi (2003a,b) und He *et al.* (2007) eine Volumenintegration einzelner instationärer turbulenter Strömungsfelder durch.

Damit können sie zeigen, dass der Beitrag der kleinen thermischen Dissipationsraten mit $\epsilon_\theta \ll \langle \epsilon_\theta \rangle_V$, ebenso wie deren volumenmäßiger Anteil, mit steigender Rayleigh-Zahl beständig zunimmt. Daraus schlussfolgern sie, dass der turbulente Hintergrund, der mit kleinen Temperaturgradienten assoziiert wird, das Strömungsfeld dominiert, wenn $Ra \rightarrow \infty$. Dabei ist zu beachten, dass sich die Ergebnisse von Shishkina & Wagner (2006) auf eine volumengemittelte Analyse des Strömungsfeldes stützen, um die Beiträge unterschiedlich großer Dissipationsraten zum mittleren Wärmetransport zu ermitteln, während He *et al.* (2007) zeitlich gemittelte Messwerte auswerten. Für einen direkten Vergleich müssten letztere daher über das entsprechende Volumen integriert werden.

Zhou *et al.* (2007) untersuchen die Eigenschaften und das zeitliche Verhalten der thermischen *Plumes* in einer mit Wasser gefüllten zylindrischen Zelle mittels TLCs. Durch Serien von Aufnahmen horizontaler Schnitte durch die Zelle können sie zeigen, dass sich flächige *Plumes* bei ihrer Ausbreitung durch die Zelle zu pilzförmigen *Plumes* vereinigen. Außerdem extrahieren sie die *Plumes* manuell und ermittelten die Temperatur und Wärmestromverteilung in den *Plumes*. Shishkina & Wagner (2008) extrahieren erstmalig aus denen von ihnen durchgeführten DNS-Daten flächige *Plumes* in horizontalen Schnitten durch den Kernbereich des Volumens eines wassergefüllten ($Pr = 5,4$) Zylinders mit einem Streckungsverhältnis $\Gamma = 1$. Die Methode zur Extraktion der *Plumes* basiert auf der Korrelation zwischen Temperatur und thermischen Dissipationsraten. Auf diese Weise können die geometrischen und physikalischen Eigenschaften thermischen *Plumes* erstmalig detailliert untersucht und quantitativ beschrieben werden.

3.3 Grenzschichten

Aussagen über die Struktur und das Verhalten der Grenzschichten, sowohl der thermischen als auch der viskosen, erlauben Rückschlüsse über die Mechanismen des konvektiven Wärmetransports und die Wechselwirkungen zwischen den charakteristischen Strukturen des Strömungsfeldes, wie den *Plumes*, Grenzschichten oder der LSC. Diese Kenntnisse sind nicht zuletzt für die theoretische Beschreibung der RB-Konvektion, und damit für die Herleitung einer Nusselt-Rayleigh Beziehung, von großer Bedeutung.

Belmonte *et al.* (1994) analysieren die thermischen und viskosen Grenzschichten von RB-Konvektion in einem mit Luft ($Pr = 0,7$) bzw. Wasser ($Pr = 6,6$) gefüllten Würfel. Sie definieren die mittlere thermische Grenzschichtdicke $\delta_{\theta,m}$ als Schnittpunkt des extrapolierten Wandgradienten mit der Kerntemperatur \hat{T}_m des Fluids und beobachten, dass die maximalen Temperaturfluktuationen für $Ra > 2 \times 10^7$ beim gleichen Wandabstand auftreten und sich für $Ra < 2 \times 10^7$ etwas näher an der Wand befinden. Die von ihnen angegebene Grenze von $Ra \approx 10^7$ legt nahe, dass sich der Übergang von der weichen zur harten Turbulenz hier im unterschiedlichen Verhalten der statistischen Momente am Grenzschichtrand widerspiegelt. Anders ausgedrückt, lässt sich aus ihren Beobachtungen schließen, dass der Kernbereich bei der harten Turbulenz wesentlich schärfer gegenüber den Grenzschichten abgegrenzt ist, als bei weicher Turbulenz. Die auf dem Wandabstand der maximalen Fluktuationen basierende Grenzschichtdicke wird im Folgenden als $\delta_{\theta,rms}$ bezeichnet. Da das Verhältnis der maximalen rms-Werte zu $\Delta\hat{T}$ nahezu unabhängig von Ra ist und $\Delta\hat{T}$ mit Ra linear zunimmt, folgern Belmonte *et al.* (1994), dass die immer stärker werdenden Temperaturfluktuationen bei genügend hoher Ra -Zahl die thermische Grenzschicht zerstören können.

Weiterhin stellen sie fest, dass es eine Position außerhalb der Grenzschichten $\delta_{\theta,m}$ bzw. $\delta_{\theta,rms}$ gibt, an der die Schiefheit S_θ des Temperatursignals maximal wird. Für alle untersuchten Ra ($10^7 \leq Ra < 10^{11}$) ist der vertikale Wandabstand der maximalen Schiefe $\delta_{\theta,S}$ nahezu unverändert. Aufgrund der abnehmenden Temperaturfluktuationen im Volumeninneren gehen sie davon aus, dass die die maximale Schiefe verursachenden Mechanismen für alle untersuchten Ra identisch sein müssen und durch den Wind entlang der Seitenwände der Zelle transportiert werden, und nicht durch das Kernvolumen.

Hölling & Herwig (2006) untersuchen die Form der thermischen Grenzschicht theoretisch. Unter Annahme eines in horizontaler Richtung unendlich ausgedehnten Fluids entwickeln sie basierend auf einer asymptotischen Betrachtung ein theoretisches Temperaturprofil für das sie eine charakteristische Temperatur

$$\hat{T}_c \equiv \left(\frac{\hat{\kappa}\hat{\nu}}{\hat{g}\hat{\alpha}} \left| \frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{z}} \right|_{wand}^3 \right)^{1/4} \quad (3.5)$$

einführen, mit deren Hilfe sie eine normierte Fluidtemperatur $\theta^\times \equiv (\hat{T}_b - \hat{T})/\hat{T}_c$ und einen mit der Grenzschichtdicke normierten Wandabstand $z^\times \equiv z/\delta_\theta = |\partial\hat{T}/\partial\hat{z}|_{wand}\hat{z}/\hat{T}_c$ bilden. Als Ergebnis ihrer Arbeit proklamierten sie für $\mathcal{Ra} \rightarrow \infty$ die Existenz zweier Bereiche des Temperaturprofils, die

- 1) linear, $\theta^\times = z^\times$ bzw.
- 2) logarithmisch, $\theta^\times = C \ln(z^\times) + D$

skalieren und die Unterschicht bzw. die Kernregion repräsentieren. Sie vergleichen ihre Vorhersagen mit DNS-Ergebnissen, die für ebene Geometrien mit periodischen Randbedingungen in den horizontalen Richtungen und bei Mittelung in den periodischen Richtungen somit ihrer Annahme eines mittleren Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u} = 0$ entsprechen und erwartungsgemäß eine gute Übereinstimmung zeigen. Als Vergleichsergebnisse dienen die DNS-Daten von Grötzbach (1990) und Wörner (1994), die mit einem Finite-Volumenverfahren 2. Ordnung Temperaturprofile bei $\mathcal{Ra} = 3,8 \times 10^5$ bzw. $\mathcal{Ra} = 6,3 \times 10^5$ extrahierten, und die auf spektralen Verfahren beruhenden Simulationsergebnisse von Hartlep (2004) ($\mathcal{Ra} = 10^6$, $\mathcal{Ra} = 10^7$) und Kerr (1996) ($\mathcal{Ra} = 2,0 \times 10^7$). Der Vergleich mit experimentell gemessenen Temperaturprofilen weist deutliche Unterschiede in Wandnähe auf. Chu & Goldstein (1973) und Du & Tong (2000) messen die Temperaturprofile mit Thermistoren in zylindrischen mit Wasser ($Pr = 5,4$) gefüllten Konvektionszellen für $10^7 \lesssim \mathcal{Ra} \lesssim 10^9$. Die Gründe für die Abweichung können sowohl die nicht vorhandene Periodizität als auch nicht perfekt isotherme Randbedingungen sein (siehe § 3.1).

Du Puits *et al.* (2007) untersuchen die Grenzschichten eines mit Luft gefüllten Zylinders für verschiedene Streckungsverhältnisse ($1 \lesssim \Gamma \lesssim 10$), im Bereich $10^9 \leq \mathcal{Ra} \leq 10^{12}$. Die Temperaturprofile werden mithilfe eines glas-gekapselten Mikrothermistors entlang der Zylinderachse vermessen. Dabei beobachten sie, dass das Streckungsverhältnis der Zelle kaum einen Einfluss auf die Form der Grenzschichten und deren Dicke hat. Mit zunehmendem Streckungsverhältnis ist $\delta_{\theta,m}$ annähernd konstant. Allerdings nimmt $\delta_{\theta,rms}$ kontinuierlich ab. Im Gegensatz dazu nähern sich die Grenzschichtdicken $\delta_{\theta,m}$, $\delta_{\theta,rms}$ und $\delta_{\theta,S}$ bei konstantem Γ und steigender \mathcal{Ra} einander immer weiter an.

Die räumliche Verteilung der zeitlich gemittelten thermischen und viskosen Grenzschichtdicke über der beheizten Platte eines mit Wasser gefüllten Behältnisses wird von Lui & Xia (1998a,b) experimentell untersucht.

Die mit einem Thermistor vermessene thermische Grenzschichtdicke $\delta_{\theta,m}$ entlang der Hauptströmungsrichtung, also entlang der Konvektionsrolle, weist oberhalb von $Ra \approx 4 \times 10^9$ einen parabelförmigen Verlauf mit dem kleinsten $\delta_{\theta,m}$ in der Mitte der Heizplatte auf. Mit steigender Rayleigh-Zahl nehmen die Änderungen entlang der Konvektionsrolle ab, so dass bei genügend hohem Ra die thermische Grenzschichtdicke gleichmäßig über der Heizplatte verteilt ist. Daraus resultierend ergibt sich eine ortsabhängige Skalierung der Grenzschichtdicke $\delta_{\theta,m}(x,y) \sim Ra^{-\beta(x,y)}$, die im Allgemeinen nicht identisch mit $\langle \delta_{\theta,m} \rangle_{boden} = 1/(2Nu) \sim Ra^{-\beta}$ ist. Senkrecht zur LSC beobachten sie ebenfalls oberhalb von $Ra \approx 4 \times 10^9$ in der Mitte der Zelle eine „Furche“ in der Verteilung der thermischen Grenzschichtdicke. Diese sehen sie als Maß für die Breite der Konvektionsrolle an. Sowohl die Breite dieser „Furche“ als auch die Änderung der Grenzschichtdicke nimmt mit steigender Rayleigh-Zahl ab. Im Gegensatz dazu steht das Verhalten der viskosen Grenzschicht, da die Geschwindigkeitsprofile unabhängig von Ra immer gleich skalieren. Allerdings zeigen ihre Ergebnisse, dass die Wand Schubspannung und die viskose Grenzschichtdicke sehr stark von der horizontalen Position abhängen, so dass auch für $Ra \rightarrow \infty$ nicht von einer gleichförmigen Verteilung der Scherraten ausgegangen werden könne.

Die thermischen Grenzschichten werden von Maystrenko *et al.* (2007) mit einem Thermistor an verschiedenen Längspositionen einer quaderförmigen Zelle detailliert vermessen. Sowohl die heißen, als auch die kalten Temperaturgrenzschichten weisen signifikante Unterschiede in Längsrichtung der Zelle auf, was die Autoren auf das unterschiedliche Verhalten des mittleren Strömungsfeldes an diesen Positionen zurückführen. Diese Unterschiede spiegeln sich insbesondere in der Form der Grenzschichten wider und zeigen, dass diejenigen Positionen, an denen die mittlere Strömung parallel zu den horizontalen Platten verläuft, eine bessere Übereinstimmung mit den theoretischen Überlegungen von Hölling & Herwig (2006) aufweisen. Ebert *et al.* (2008) weisen anhand von Messungen mit dem gleichen experimentellen Aufbau eine Selbstähnlichkeit der Temperaturprofile verschiedener Rayleigh-Zahlen in einer langen quaderförmigen mit Luft gefüllten Zelle experimentell nach. Allerdings beobachten sie, wie auch du Puits *et al.* (2007) in der zylindrischen Zelle, dass zwischen denen von Hölling & Herwig (2006) proklamierten Bereichen eine Übergangsschicht zu finden ist, die mit $\theta^\times = B(z^\times)^A$ skaliert.

3.4 Boussinesq-Approximation

Die Boussinesq-Approximation geht auf theoretische Überlegungen von Boussinesq (1903) zurück und basiert auf der Annahme, dass

1. sämtliche Stoffwerte des Fluids, wie die dynamische Viskosität $\hat{\mu}$, die Wärmeleitfähigkeit $\hat{\lambda}$, der thermische Expansionskoeffizient $\hat{\alpha}$ und die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck \hat{c}_p temperaturunabhängig sind,
2. Dichteänderungen infolge Temperaturänderung sehr gering und daher nur im Auftriebsterm der Impulsgleichung wirksam sind und
3. Dichteänderungen infolge Temperaturänderung in erster Näherung linearisiert werden können, so dass sich eine vereinfachte Zustandsgleichung der Form

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_m [1 - \hat{\alpha}_m(\hat{T} - \hat{T}_m)] \quad (3.6)$$

ergibt.

Damit diese Annahmen Gültigkeit besitzen, muss die Bedingung

$$\hat{g}\hat{\rho}_m\hat{H}/\hat{\rho}_m \ll \hat{\alpha}_m\Delta\hat{T} \ll 1 \quad (3.7)$$

erfüllt sein, wobei der Volumenausdehnungskoeffizient eines idealen Gases mit $\hat{\alpha}_m = 1/\hat{T}_m$ definiert ist und der Index $(\cdot)_m$ die Stoffeigenschaften bei der Fluidtemperatur $\hat{T}_m = (\hat{T}_{decke} + \hat{T}_{boden})/2$ bezeichnet. Als Konsequenz aus diesen Annahmen ergibt sich, dass die sog. Oberbeck-Boussinesq (OB) Konvektion im Mittel symmetrisch gegenüber der Zellmitte sein muss, da nach (3.6) die Temperaturdifferenz $\hat{T} - \hat{T}_m$ die einzige temperaturabhängige Größe der Strömung ist (siehe dazu auch Liang *et al.* 1969). Sowohl in der experimentellen als auch der numerischen Realität ist eine perfekte Symmetrie aus verschiedenen Gründen nicht oder nur schwer erreichbar. Bei Experimenten stellt sich das Problem, dass die Temperaturdifferenzen der untersuchten Konvektionsströmungen häufig zu groß sind, so dass die Boussinesq-Annahme streng genommen nicht gültig ist, während die Strömungsfelder aus hochaufgelösten DNS aufgrund begrenzter Rechenkapazitäten in der Regel nicht ausreichend lange gemittelt werden können, um eine idealsymmetrische Lösung zu erhalten.

TABELLE 3.1: Stoffeigenschaften von Luft bei $\hat{T}_m = 40^\circ\text{C}$.

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_m &\approx 1,132 \text{ kg/m}^3 \\
\hat{\nu}_m &\approx 1,688 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \\
\hat{\alpha}_m &\approx 3,2 \times 10^{-3} \text{ 1/K} \\
\hat{c}_{p,m} &\approx 1,0056 \text{ kJ/(kg K)} \\
\hat{\kappa}_m &\approx 0,0271 \text{ W/(m K)} \\
Pr &\approx 0,704
\end{aligned}$$

Gray & Giorgini (1976) führen eine umfangreiche Analyse zur Gültigkeit der Boussinesq-Approximation durch. Unter Verwendung linearisierter Abhängigkeiten der Fluideigenschaften von Druck, Dichte und Temperatur leiten sie die Boussinesq-Gleichungen aus den vollständigen Erhaltungsgleichungen her. Dadurch erhalten sie die 11 Bedingungen, von denen die folgenden für ein Gas am restriktivsten sind

$$\hat{\alpha}_m \Delta\hat{T} \leq \varepsilon \quad (3.8)$$

$$\hat{\kappa}_{T,m} \hat{\rho}_m \hat{g} \hat{H} \leq \varepsilon \quad (3.9)$$

$$\frac{\hat{\alpha}_m \hat{g} \hat{T}_m \hat{H}}{\hat{c}_{p,m} \Delta\hat{T}} \leq \varepsilon \quad (3.10)$$

Hier ist $\hat{\kappa}_{T,m} \equiv \frac{1}{\hat{\rho}} \left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{T}_m}$ die isotherme Kompressibilität des Gases bei der Temperatur \hat{T}_m und ε ein zu wählender Toleranzbereich für die Abweichung der Stoffwerte. Für Luft mit $\hat{T}_m = 40^\circ\text{C}$ und $\varepsilon = 0,1$ ergeben sich mit den Werten aus Tabelle 3.1¹ die Grenzen

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{T} &\lesssim 31,3 \text{ K,} \\
\hat{H} &\lesssim 830 \text{ m und} \\
\frac{\hat{H}}{\Delta\hat{T}} &\lesssim 10,2 \text{ m/K,}
\end{aligned}$$

so dass in einer Konvektionszelle mit der Höhe $\hat{H} = 0,5 \text{ m}$ eine maximale Rayleigh-Zahl $Ra \approx 3 \times 10^8$ erreichbar ist.

Die sog. Nicht-Oberbeck-Boussinesq (NOB) RB-Konvektion weist im Gegensatz dazu eine nicht-lineare Abhängigkeit der Stoffwerte gegenüber der Temperatur auf. Wie in Abbildung 3.4 dargestellt, entsteht daraus ein unterschiedlich großes Temperaturgefälle in der heißen bzw. kalten thermischen Grenzschicht. Das Verhältnis der Temperaturgefälle wird durch den

¹www.engineeringtoolbox.com/air-properties-d_156.html; Stand Dezember 2008

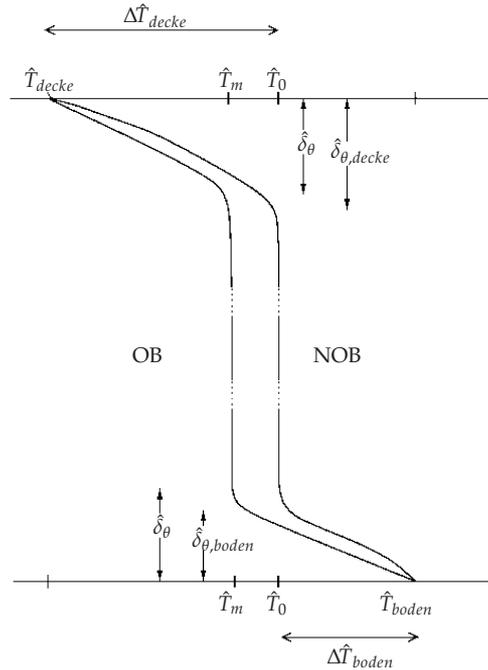


ABBILDUNG 3.4: Skizze der zeitlich gemittelten Temperaturprofile der OB- und NOB-Konvektion. Die Dicke der thermischen Grenzschichten beträgt $\hat{\delta}_\theta$ für den OB-Fall bzw. $\hat{\delta}_{\theta,boden}$ und $\hat{\delta}_{\theta,decke}$ für die heiße bzw. die kalte Platte im NOB-Fall. Die entsprechenden Temperaturgefälle betragen $\Delta\hat{T}_{boden}$ bzw. $\Delta\hat{T}_{decke}$ und die mittlere Fluidtemperatur ist gegeben durch $\hat{T}_m = (\hat{T}_{decke} + \hat{T}_{boden})/2$, während die zeitlich gemittelte Fluidtemperatur in Zellmitte \hat{T}_0 beträgt (adaptiert von Ahlers *et al.* 2006).

Parameter $\chi = \Delta\hat{T}_{boden}/\Delta\hat{T}_{decke}$ beschrieben. Dementsprechend ergibt sich eine mittlere Temperatur in Zellmitte \hat{T}_0 , die nicht aus dem arithmetischen Mittel von Heiz- und Kühlplattentemperatur berechnet werden kann, da $\hat{T}_0 \neq \hat{T}_m$. Diese Abweichung der Kerntemperatur von \hat{T}_m wird auch als Temperaturdrift bezeichnet. Der Parameter χ kann somit als ein direktes Maß für die Abweichung von den OB-Bedingungen herangezogen werden.

Nach Robinson & Chan (2004) verletzen kryogene Heliumexperimente zur Rayleigh-Bénard-Konvektion aufgrund der sehr geringen absoluten Temperaturen von $\hat{T} \approx 5$ K die Boussinesq-Bedingungen (3.7). Im Gegensatz dazu führten Niemela & Sreenivasan (2003) an, dass sich die Stoffeigenschaften des Fluids (*He*) bei diesen Temperaturen bis $Ra \approx 10^{14}$ um weniger als 5% ändern, was auch von $\chi(Ra = 10^{14}) \approx 1,05$ widerspiegelt wird. Allerdings zeugt dies davon, dass NOB-Effekte auch bei ge-

ringeren Ra vorhanden sind. Laut Niemela & Sreenivasan (2003) besteht die Schwierigkeit bei der Auswertung der Experimente darin, die Auswirkungen der NOB-Effekte auf z.B. die Nusselt-Zahl zu bestimmen. Dabei können auf der Boussinesq-Approximation beruhende hochaufgelöste numerische Simulationen hilfreich sein, die Untersuchungen von OB-Simulationen bei beliebiger (nur durch die Rechnerkapazitäten beschränkter) Rayleigh-Zahl ermöglichen und im Vergleich mit vollkompressiblen Simulationen eine vollständige Analyse der NOB-Effekte erlauben.

Theoretisch und experimentell untersuchen Ahlers *et al.* (2006) NOB-Effekte, indem sie RB-Konvektion in zylindrischen mit Wasser gefüllten Zellen mit einem Streckungsverhältnis $\Gamma \approx 1$ für $10^8 \leq Ra \leq 10^{11}$ analysieren. Um die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte zu untersuchen, wurde dieser Ra -Bereich mit drei verschiedenen großen Zellen bei unterschiedlichen Temperaturdifferenzen $\Delta\hat{T}$ vermessen. Dabei zeigt sich, dass sowohl die Nusselt-Zahl als auch die Reynolds-Zahl im untersuchten Parameterbereich nur eine schwache Abhängigkeit (ca. 2%) gegenüber den temperaturabhängigen Stoffwerten aufweisen, während sich χ um bis zu 20% ändert. Theoretische Überlegungen zeigen, dass sich die Temperaturabhängigkeit der Viskosität auf χ auswirkt, während Änderungen der Nusselt-Zahl hauptsächlich von der Änderung der Temperaturleitfähigkeit hervorgerufen werden.

Mittels detaillierter experimenteller und numerischer Untersuchungen verschiedener NOB-Effekte bei turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion zeigen Ahlers *et al.* (2007, 2008), dass die Verletzung einer der drei obengenannten Boussinesq-Annahmen sehr verschiedene Auswirkungen haben und die von ihnen aufgestellte erweiterte Grenzschichttheorie nur eine Verletzung der ersten beiden Bedingungen abzubilden vermag. Die Linearisierung der Dichteabhängigkeit kann von dieser erweiterten Grenzschichttheorie aufgrund der Vernachlässigung des Schwerkräfteinflusses nicht erfasst werden. Allerdings weisen sie mittels 2D-DNS von NOB-Konvektion nach, dass bei NOB-Effekten, die von der Temperaturabhängigkeit von $\hat{\alpha}$ hervorgerufen werden, das Vorzeichen des linearen Terms des Polynoms

$$\hat{\alpha}(\hat{T}) = \hat{g}^{-1} \sum_n C_n (\hat{T} - \hat{T}_m)^n$$

das Vorzeichen der Änderung der Kerntemperatur bestimmt.

Abschließend ist festzuhalten, dass ein Vergleich zwischen Experimenten und auf der Boussinesq-Approximation beruhender numerischer Simulationen gerade bei hohen Rayleigh-Zahlen problematisch sein kann, da die Auswirkungen der Temperaturabhängigkeit der Stoffeigenschaften bislang nur unzureichend verstanden sind, um experimentelle Daten entsprechend korrigieren zu können.

3.5 Bolgiano-Skalierung

In turbulenten Strömungen wird die turbulente kinetische Energie von den großen sog. integralen Skalen der Größe $\hat{\ell}$, über die Energiekaskade zu den kleinsten Strukturen, den sog. Kolmogorov-Skalen der Größe $\hat{\eta}_k$, transportiert, von denen die Energie dissipiert wird. Im Gegensatz dazu spielen im Trägheitsbereich mit $\hat{\ell} > \hat{l} > \hat{\eta}_k$ viskose Effekte eine zu vernachlässigende Rolle, so dass Strukturen dieser Größe die Energie im Wesentlichen zu immer kleineren Skalen transportieren. Für diesen Bereich lässt sich zeigen (siehe Obukhov 1959), dass $\hat{E}_{uu} \sim \hat{k}^{-5/3}$, wobei $\hat{k} = 2\pi/\hat{l}$ die Wellenzahl einer Struktur der Größe \hat{l} ist.

Anhand einer Dimensionsanalyse für ein stabil geschichtetes Fluid mit lokalen Dichteschwankungen zeigt Bolgiano (1959), dass große Strukturen mit $\hat{\ell} > \hat{l} > \hat{l}_b$ aufgrund der lokalen Dichteunterschiede auftriebsdominiert sind. Damit schließt sich oberhalb des Trägheitsbereiches, der dem klassischen Kolmogorovgesetz ($\hat{E}_{uu} \sim \hat{k}^{-5/3} \sim \hat{E}_{\theta\theta}$) folgt, ein auftriebsdominierter Bereich an, für den sich $\hat{E}_{uu} \sim \hat{k}^{-11/5}$ bzw. $\hat{E}_{\theta\theta} \sim \hat{k}^{-7/5}$ für die spektrale Verteilung des Geschwindigkeits- bzw. des Dichte- und damit unter der Annahme der Boussinesq-Approximation des Temperaturfeldes ergeben.

Das Geschwindigkeitsfeld der DNS von Kerr (1996) mit $Pr = 0,7$, periodischen Rändern in horizontalen Richtungen sowie isothermen horizontalen Wänden weist keine Bolgiano-Skalierung, sondern eine Kolmogorov-Skalierung auf. Dieses Verhalten wird von Camussi & Verzicco (2004) durch ihre DNS für $Pr = 0,7$ -Fluid in einer schlanken zylindrischen Zelle bei $Ra = 2 \times 10^{10}$ bestätigt. Sie beobachten eine Bolgiano-Skalierung im Temperatur- und eine Kolmogorov-Skalierung im Geschwindigkeitsfeld. Die Energiespektren in RB-Konvektion werden von Lohse (1994) theoretisch untersucht. Anhand eines Vergleiches mit Scherströmungen zeigt er, dass es bei relativ kleinen Prandtl-Zahlen möglich ist, dass im Temperaturspektrum unabhängig von der Rayleigh-Zahl reine Bolgiano-Skalierung

auftritt.

Die Bolgiano-Länge ist definiert als die Skala \hat{l}_b , bei der sich die Skalierungen des auftriebsdominierten und des trägheitsdominierten Bereichs schneiden. Entsprechend ergibt sich

$$\hat{l}_b \equiv \frac{\hat{\epsilon}_u^{5/4}}{(\hat{\alpha}\hat{g})^{3/2} \hat{\epsilon}_\theta^{3/4}}. \quad (3.11)$$

Laut Calzavarini *et al.* (2002) ist die Bolgiano-Längenskala nur in der Nähe der wärmeleitenden Wände klein genug, damit die Auftriebskräfte sich merklich in Form einer Bolgiano-Skalierung der Strukturfunktionen zeigen. Im Kernvolumen der Zelle ist die Bolgiano-Längenskala so groß, dass ausschließlich viskose Effekte die Strukturfunktionen dominieren. Kunnen *et al.* (2008) beobachten anhand von DNS für Wasser ($Pr = 4$ und $Pr = 6,4$) mit einer zylindrischen Zelle ($\Gamma = 1$) im Bereich $10^8 \leq Ra \leq 10^{10}$, dass die Bolgiano-Längenskala entlang der adiabaten Seitenwände aufgrund der sehr kleinen thermischen Dissipationsraten in diesem Bereich ihr globales Maximum hat. Direkt an den wärmeleitenden Wänden ist sie sehr viel kleiner als im Volumeninneren. Ferner wird ein lokales Maximum der Bolgiano-Längenskala im Bereich außerhalb der thermischen, aber innerhalb der viskosen Grenzschicht beobachtet, das sich mit steigender Rayleigh-Zahl zunehmend stärker ausbildet. Im Kernbereich des Fluids hingegen ist eine gleichmäßige Verteilung der Längenskala und nur eine leichte Abhängigkeit von Ra zu beobachten, was darauf hindeutet, dass turbulente kinetische Dissipation das Volumeninnere beherrscht.

Kapitel 4

Numerisches Verfahren

Im folgenden Kapitel wird ein kurzer Überblick über Methoden zur Berechnung von Strömungen gegeben und die Grundlagen des ursprünglich von Schmitt & Friedrich (1982) entwickelten DNS/LES-Verfahrens FLOWSI erläutert. Die z -Richtung zeigt senkrecht nach oben, und damit entgegen der Schwerkraft, die horizontale y -Richtung gibt die Transformationsrichtung des Drucklösers an (siehe § 4.2) und die x -Richtung steht senkrecht auf y und z . Wenn im Folgenden die Dimensionen der Rechengitter angegeben werden, beziehen sich die Angaben ausschließlich auf die Fluidzellen. Wandpunkte bzw. Zellen zur Erzeugung der Periodizität werden dabei nicht berücksichtigt.

4.1 Simulationsmethoden

Neben partikelbasierten Verfahren, die auf den diskretisierten Boltzmann-Gleichungen beruhen, werden in den meisten Fällen Verfahren verwendet, mit denen die Navier-Stokes Gleichungen gelöst werden. Diese basieren auf einer diskreten Form des Gleichungssystems (2.6) – (2.8). Bei letzteren wird grundsätzlich in spektrale bzw. pseudo-spektrale Verfahren, Finite-Differenzen-, Finite-Elemente- und Finite-Volumen-Verfahren unterschieden.

Finite-Differenzen-Verfahren gehen davon aus, dass alle Größen ausschließlich auf den Gitterpunkten definiert. Diese Art der Diskretisierung macht sie programmiertechnisch sehr handlich, führt aber auch dazu, dass sie nicht konservativ sind. Spektrale Verfahren approximieren das Strö-

mungsfeld mittels einer Ansatzfunktion, die in der Regel auf einer Fourier-Zerlegung beruht. Dies macht sie zu sehr effizienten und vor allem numerisch sehr genauen Verfahren. Allerdings setzt die effiziente Anwendung spektraler Verfahren Periodizität voraus, so dass sie nur für die Untersuchung grundlegender Probleme verwendbar sind. Ähnlich wie spektrale Verfahren approximiert die Finite-Elemente-Methode das Strömungsfeld mit einer Ansatzfunktion. Allerdings erstreckt sich die Ansatzfunktion in diesem Fall nicht über das gesamte Rechengebiet, sondern nur über einige wenige benachbarte Zellen, so dass sie auch auf komplexe Geometrien anwendbar ist.

Bei Finite-Volumen-Verfahren werden die über die jeweiligen Volumenelemente gemittelten Größen des Strömungsfeldes betrachtet. Dies bedeutet, dass diese Methode für alle Zustandsgrößen und unabhängig von der Gitterauflösung per Definition konservativ ist. Dies macht die FV-Methode zu einer effizienten und deshalb attraktiven Methode.

4.2 Diskretisierung

Das Gleichungssystem (2.6) – (2.8) wird mit Hilfe des von Schumann *et al.* (1979) beschriebenen Finite-Volumen (FV) Verfahrens auf endlich großen Volumenelementen ΔV_i diskretisiert. Zur numerischen Berechnung der Impulserhaltungsgleichungen (2.7) wird die Projektionsmethode nach Chorin (1968) verwendet, welche eine getrennte und effiziente Berechnung des Geschwindigkeits- und des Druckfeldes ermöglicht. Diese basiert auf der Zerlegung eines rotationsfreien Vektorfeldes \mathbf{u}^* in eine divergenzfreie Komponente \mathbf{u} und Komponente $\nabla\psi$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \nabla\psi, \quad (4.1)$$

so dass die Lösung des Gleichungssystems in drei Schritten erfolgt:

- 1) Berechnung eines (divergenten) Strömungsfeldes \mathbf{u}^* mit (2.7) unter Vernachlässigung des Druckterms,
- 2) Lösen des aus 1) und (2.6) resultierenden Poisson-Problems $\nabla^2\psi = Q$, mit dem Quellterm $Q = \nabla\mathbf{u}^*$; $\psi \sim \Delta t \cdot p$ und anschließender Berechnung des divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes mit (4.1) sowie

- 3) Lösen der Energiegleichung (2.8) zur Berechnung der Temperatur.

In § 4.2 werden die räumliche und zeitliche Diskretisierung sowie der Ansatz zum direkten Lösen des Poisson-Problems beschrieben. In § 4.3 werden die Rand- und Anfangsbedingungen dargestellt, in § 4.4 die Auflösung des Rechengebietes und in § 4.5 werden drei Ansätze der Feinstrukturmodellierung erläutert. Abschließend wird die Parallelisierung des Programms und seine parallelen Skalierungseigenschaften in § 4.6 diskutiert.

4.2.1 Räumliche Diskretisierung

Die Gleichungen (2.6) – (2.8) werden über die durch das Rechengitter definierten Subvolumen des Rechengebietes integriert und anschließend mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes in Differenzenbeziehungen der Flüsse über die Grenzen der Kontrollvolumen überführt. Die volumengemittelten Erhaltungsgleichungen lassen sich mit Einsteins Summationskonvention wie folgt schreiben

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} + \langle \theta \rangle \delta_{1i} \quad \text{und} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial h_i^R}{\partial x_i} = \kappa \frac{\partial^2 \langle \theta \rangle}{\partial x_i^2}. \quad (4.4)$$

Das Rechengebiet wird auf nicht-äquidistanten, kartesischen Gittern diskretisiert, dessen Knoten im Bereich der Wände mittels einer tanh-Funktion verdichtet werden. Wird Periodizität in Längsrichtung angenommen, werden in dieser Richtung äquidistante Gitterabstände verwendet.

Um eine Entkopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeld zu vermeiden, werden die über den Subvolumen ΔV_i gemittelten Erhaltungsgleichungen (4.2) – (4.4) auf versetzten kartesischen Gittern diskretisiert. Die Geschwindigkeitskomponenten $u_i, i = 1,2,3$ sind, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, auf den Grenzflächen des p -Gitters in i -Richtung definiert. Daraus resultierend müssen zur Berechnung der konvektiven und diffusiven Flüsse die benötigten Größen auf die Grenzflächen des entsprechenden Kontrollvolumens interpoliert werden. Dies geschieht mit einem zentralen Ver-

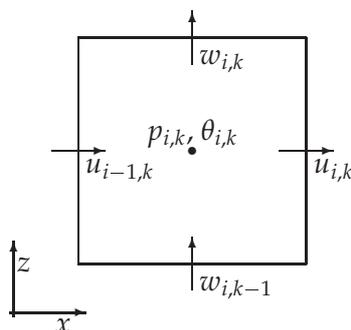


ABBILDUNG 4.1: Schematische Darstellung der Definition der versetzt diskretisierten Größen.

fahren 4. Ordnung, dem stückweise über die benachbarten Volumenelemente integrierte Polynome zugrunde liegen, was insbesondere für die im folgenden beschriebene Berechnung der Feinstrukturterme bei der LES von Bedeutung ist.

Durch die Mittelung über endlich große ΔV_i , die auch als Rechteckfilterung im physikalischen Raum betrachtet werden kann, entstehen sog. Feinstrukturspannungen τ_{ij}^R bzw. Feinstrukturwärmeströme h_i^R . Für die direkte numerische Simulation muss gewährleistet sein, dass die Auflösung des Strömungsfeldes hinreichend ist, damit $\tau_{ij}^R \approx 0$ bzw. $h_i^R \approx 0$, also vernachlässigt werden können. Ist dagegen $\tau_{ij}^R \neq 0$ bzw. $h_i^R \neq 0$, müssen diese Terme modelliert werden, wodurch die DNS in eine LES übergeht. Dabei werden wandauflösende und wandmodellierende LES unterschieden, das heißt Simulationen, die alle relevanten Skalen in den wandnahen Schichten auflösen, bzw. Simulationen, die die wandnahen Schichten modellieren und damit deutlich gröbere Gitter in diesem Bereich erlauben. In dieser Arbeit findet ausschließlich die wandauflösende LES Verwendung. Das im Folgenden verwendete Feinstrukturmodell wird in § 4.5 diskutiert.

4.2.2 Zeitliche Diskretisierung

Die Zeitintegration der Gleichungen (4.3) und (4.4) erfolgt mittels des expliziten Euler-Leapfrog Schemas. Die konvektiven Terme sind mit dem Leapfrog und die diffusiven mit dem Euler-Vorwärts Zeitschritt diskretisiert. Die Größe ϕ des Zeitschrittes $n + 1$ wird vom Leapfrog Schema mittels

$$\phi^{n+1} = \phi^{n-1} + 2\Delta t f(\phi^n)$$

approximiert, was einer Näherung zweiter Ordnung in der Zeit entspricht. Ferner ist es neutral gegenüber Amplitudenfehlern, weshalb das Verfahren bei reiner Konvektion, d.h. $\mathcal{Ra} \rightarrow \infty$, stabil ist. Allerdings besitzt das Leapfrog Schema einen Phasenfehler, der eine ungedämpfte numerische Mode beinhaltet, die von FLOWSI durch zyklisches Mitteln eines Leapfrog Schrittes der Ebene $n - 1$ und eines Euler Schrittes der Ebene n nach 50 Zeitschritten kontrolliert wird.

Die diffusiven Terme sind mit dem Euler-Vorwärts-Verfahren

$$\phi^{n+1} = \phi^{n-1} + 2\Delta t f(\phi^{n-1})$$

diskretisiert, welches einen Abbruchfehler 1. Ordnung hat. Das resultierende Zeitschrittenschema ist 2. Ordnung in der Zeit. Da die Stabilität des Verfahrens, gegeben durch (4.5) (siehe Shishkina & Wagner 2007a), jedoch wesentlich restriktiver ist als die kleinsten turbulenten Zeitskalen, ist eine hinreichende zeitliche Auflösung des Strömungsfeldes dennoch gewährleistet.

$$\Delta t \leq \max \left[\frac{3}{2} \left(\sum_i \frac{|u_i|}{\Delta x_i} \right) + \frac{16}{3\sqrt{\Gamma^3 \mathcal{Ra} \mathcal{Pr}}} \left(\sum_i \frac{1}{\Delta x_i^2} \right) \right]^{-1} \quad (4.5)$$

4.2.3 Direkter Poisson-Löser

In FLOWSI wird die diskretisierte Poissongleichung in y -Richtung entkoppelt, so dass die voneinander unabhängigen Gleichungssysteme mit dem von Swarztrauber (1974); Swarztrauber & Sweet (1975) entwickelten zyklischen Reduktionsverfahren direkt gelöst werden können. Die beiden dieser Arbeit zugrunde liegenden kartesischen Versionen mit periodischen Randbedingungen in Längsrichtung bzw. als geschlossene Zelle unterscheiden sich vor allem durch den Ansatz zur Lösung der diskreten Poissongleichung

$$D_{xz}\psi + D_y\psi = Q \quad (4.6)$$

mit dem auf den Skalar $\psi \sim \Delta t p$ in x - und z -Richtung wirkenden Operator $D_{xz} = (D_x + D_z)$ und dem in y -Richtung wirkenden Operator D_y , die

gegeben sind durch:

$$D_{x_i} \psi(n_i) = \begin{cases} \frac{1}{x_{i(1)}} \frac{\psi(2) - \psi(1)}{x_{i(1)}^{u_i}} & ; n_i = 1 \\ \frac{1}{x_{i(n_i)}} \left(\frac{\psi(n_i+1) - \psi(n_i)}{x_{i(n_i)}^{u_i}} - \frac{\psi(n_i) - \psi(n_i-1)}{x_{i(n_i-1)}^{u_i}} \right) & ; 1 < n_i < n_{i,max} \\ -\frac{1}{x_{i(n_{i,max})}} \frac{\psi(n_{i,max}) - \psi(n_{i,max-1})}{x_{i(n_{i,max-1})}^{u_i}} & ; n_i = n_{i,max} \end{cases} \quad (4.7)$$

wobei x_i und $x_i^{u_i}$ die Gitterabstände in i -Richtung des p - bzw. des u_i -Gitters sind und n_i den Gitterpunkt in der entsprechenden Richtung bezeichnet.

Periodische Längsrichtung. Bei der periodischen Zelle erlauben äquidistante Gitterabstände in Längsrichtung eine Entkopplung der Poissongleichung (4.6) mit Hilfe einer schnellen Fourier-Transformation (FFT). Mit der FFT von ψ und Q in y -Richtung

$$\begin{aligned} \psi_{(i,j,k)} &= \sum_{l=1}^{j_{max}} \tilde{\psi}_{(i,l,k)} \exp\left(\sqrt{-1} \frac{2\pi(l-1)(j-1)}{j_{max}}\right) \\ Q_{(i,j,k)} &= \sum_{l=1}^{j_{max}} \tilde{Q}_{(i,l,k)} \exp\left(\sqrt{-1} \frac{2\pi(l-1)(j-1)}{j_{max}}\right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

ergibt sich aus der Poisson-Gleichung (4.6) ein $(i_{max} \times k_{max})^2$ -Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\tilde{\psi}_{(i-1,l,k)} - 2\tilde{\psi}_{(i,l,k)} + \tilde{\psi}_{(i+1,l,k)} \\ &+ \tilde{\psi}_{(i,l,k)} \frac{2}{\Delta y_{(j)}^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi(l-1)}{j_{max}}\right) - 1 \right] \\ &+ \tilde{\psi}_{(i,l,k-1)} \frac{1}{\Delta z_{p(k)} \Delta z_{w(k-1)}} \\ &- \tilde{\psi}_{(i,l,k)} \frac{1}{\Delta z_{p(k)}} \left(\frac{1}{\Delta z_{w(k)}} + \frac{1}{\Delta z_{w(k-1)}} \right) \\ &+ \tilde{\psi}_{(i,l,k+1)} \frac{1}{\Delta z_{p(k)} \Delta z_{w(k)}} \exp\left(\sqrt{-1} \frac{2\pi(l-1)(j-1)}{j_{max}}\right) \\ &= \tilde{Q}_{(i,l,k)} \exp\left(\sqrt{-1} \frac{2\pi(l-1)(j-1)}{j_{max}}\right) \quad ; 1 \leq l \leq \frac{j_{max}}{2} + 1, \end{aligned} \quad (4.9)$$

das aus Symmetriegründen nur für die komplexen Zahlen $\tilde{\psi}$ und \tilde{Q} der Moden $1 \leq l \leq \frac{j_{max}}{2} + 1$ gelöst werden muss, da sich aus der Synthese der

Fouriertransformation wiederum ein realwertiges Feld ergibt. Eine detailliertere Beschreibung ist bei Schmitt & Friedrich (1982) zu finden.

Geschlossene Zelle. Die Entkoppelung der Gleichungssysteme in Längsrichtung durch die FFT verbietet sich jedoch in der geschlossenen Zelle. Anstelle der FFT wird hier eine auf Trennung der Variablen Methode (SVM: Separation of Variables Method) basierende Zerlegung des Gleichungssystems angewandt. Dieses Verfahren bietet den Vorteil, dass in Transformationsrichtung sowohl Neumann-Randbedingungen gesetzt, als auch die Gitterabstände beliebig gewählt werden können. Einzige Voraussetzung für die Anwendung dieses Verfahrens ist ein regelmäßiges Gitter in Transformationsrichtung, d.h. die Gitterabstände der x - z -Ebene müssen unabhängig von der y -Koordinate sein.

Zur Entkopplung der Gleichungen wird der Operator D_y in seine Eigenwerte λ_y^l und Eigenvektoren $\mathbf{v}_y^l = (v_{y(1)}^l, v_{y(2)}^l, \dots, v_{y(j_{max})}^l)^T$ zerlegt, so dass (4.6) in j_{max} unabhängige Gleichungssysteme

$$\left(D_x + \lambda_y^l E + D_z \right) \tilde{\psi}^l = \tilde{Q}^l \quad ; \text{mit } l = 1, j_{max} \quad (4.10)$$

überführt werden kann, wobei E die Einheitsmatrix darstellt.

Die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen für die Transformation lässt sich nahezu halbieren, wenn die Lösung in ihre symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteile zerlegt wird. Im Fall äquidistanter Gitterabstände in Transformationsrichtung kann diese Zerlegung als Kosinus-Transformation interpretiert werden. Die SVM hat allerdings den Nachteil gegenüber einer FFT, dass sie ungefähr j_{max}^2 statt nur $j_{max} \log(j_{max})$ Rechenoperationen benötigt, und somit bei großen j_{max} ineffizient ist, siehe Kaczorowski *et al.* (2008). Nach Möglichkeit wurden die Simulationen in der geschlossenen Zelle daher so diskretisiert, dass die Richtung mit der geringsten Anzahl von Gitterpunkten als Transformationsrichtung benutzt wurde.

Irreguläre Geometrien. Die Simulation thermische Mischkonvektion einschließlich der Strömung in den Ein- bzw. Auslasskanälen erfordert die Lösung des Poisson-Problems für eine unregelmäßige Geometrie, wobei die Unregelmäßigkeiten durch die Ränder der Ein- und Auslässe hervorgerufen werden. Die Poisson-Gleichung für eine solche irreguläre Geometrie

kann mit Hilfe der Einflussmatrixtechnik (siehe z.B. Schumann & Benner 1982) gelöst werden. Im Folgenden wird die von Shishkina *et al.* (2008) in FLOWSI implementierte Methode kurz beschrieben. Hierbei wird $D = D_{xz} + \lambda_y^l E$ in irreguläre D_1 und reguläre D_2 Teile zerlegt, wobei D_1 eine $m \times n$ Matrix und D_2 eine $(n - m) \times n$ Matrix sind. Hierbei wird der reguläre Operator

$$D^* = \begin{bmatrix} D_1^* \\ D_2 \end{bmatrix}$$

definiert, wobei D_1^* derart gewählt wird, dass die Unregelmäßigkeiten vernachlässigt werden. Dementsprechend wird der Quellterm \tilde{Q} in gleicher Art und Weise zerlegt:

$$\tilde{Q} = \begin{Bmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \end{Bmatrix}.$$

Die $m \times m$ Einflussmatrix C wird aus

$$C = D_1 [D^*]^{-1} W$$

berechnet, wobei

$$W = \begin{bmatrix} E_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

eine $n \times m$ Matrix und E_1 die Einheitsmatrix mit Ordnung m sind. Daraus resultierend lässt sich das Gleichungssystem (4.10) mit Hilfe des folgenden Schemas lösen:

- 1) $D^* \tilde{\psi}^* = \tilde{Q}$,
- 2) $C \omega = \tilde{Q}_1 - D_1 \tilde{\psi}^*$,
- 3) $D^* \tilde{\psi} = \tilde{Q} + W \omega$,

wobei ein schneller Löser von Swarztrauber (1974) verwendet wird, um die Systeme mit regelmäßigen Operatoren D^* zu lösen.

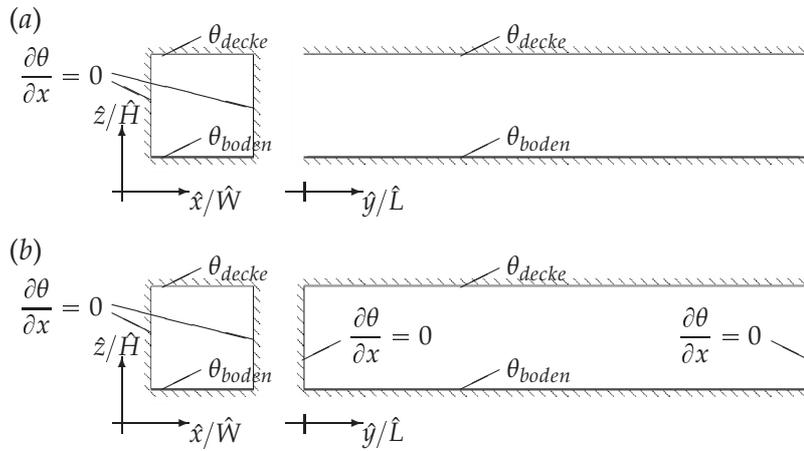


ABBILDUNG 4.2: Vorder- und Seitenansicht (a) der periodischen und (b) der quaderförmigen Zelle mit den thermischen Randbedingungen; feste Wände sind schraffiert dargestellt.

4.3 Rand- und Anfangsbedingungen

Alle Wände sind mit Haft- und Undurchlässigkeitsbedingungen belegt, und alle vertikalen Wände werden als adiabat angenommen. Somit wird die Wandtemperatur über die Bedingung $\partial\theta/\partial\mathbf{n}|_{wand} = 0$ ermittelt, wobei \mathbf{n} der Normalenvektor der Wand ist. Die horizontalen Deck- und Bodenplatten sind isotherm mit Temperaturen $\theta_{decke} = -1/2$ bzw. $\theta_{boden} = +1/2$.

Die in den Kapiteln 5–7 untersuchten Geometrien sind eine periodische und eine quaderförmige Zelle mit einem quadratischen Querschnitt ($\Gamma_{xz} = \Gamma = \hat{B}/\hat{H} = 1$) und einer Längsstreckung $\Gamma_{xy} = \hat{B}/\hat{L} = 1/5$. Für die periodische Zelle gibt die Längsstreckung die Länge des tatsächlich physikalisch abgebildeten Teils der Zelle an. Als dritte Geometrie wird ein Würfel ($\Gamma_{xz} = \Gamma_{xy} = 1$) ausgewählt.

Für die in Kapitel 8 untersuchte Mischkonvektion werden an die geschlossene quaderförmige Zelle mit adiabaten Seitenwänden wie in Abbildung 4.3 skizziert Kanäle für den Lufteinlass bzw. den Luftauslass angebracht, welche ebenfalls adiabate Wände besitzen. Der Lufteinlass befindet sich direkt unter der Decke an der Längsseite der Zelle und hat eine Höhe von $\hat{h}_{einlass}/\hat{H} = 5\%$ und eine Länge von $\hat{l}_{einlass}/\hat{h}_{einlass} = 4$. Am Einströmrund wird ein Parabelprofil für die Geschwindigkeit und eine Temperatur $\theta_{einlass} = \theta_{decke}$ vorgegeben. Da in Kapitel 8 nur mit laminarer zuströmung

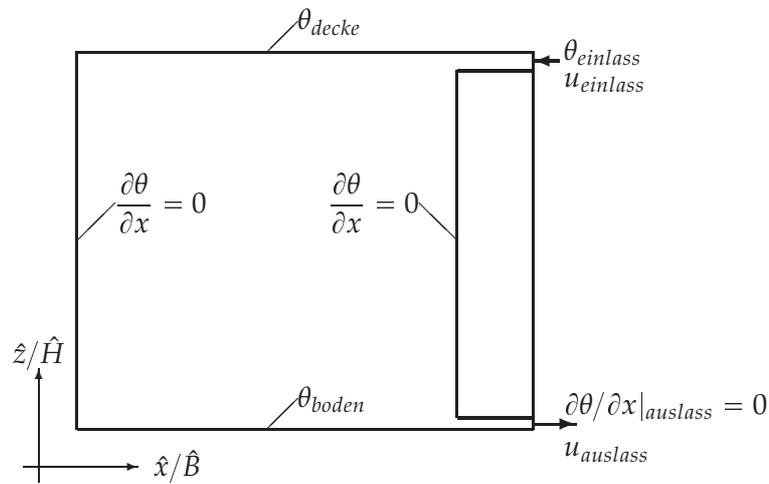


ABBILDUNG 4.3: Schematische Darstellung der Geometrie zur Berechnung gemischter Konvektion.

untersucht wird, wird eine Kanallänge von $\hat{l}_{einlass}/\hat{h}_{einlass} = 4$ als ausreichend lang erachtet, damit sich die laminare Strömung ausbilden kann. Der Auslasskanal befindet sich auf der gleichen Seite wie der Einlasskanal, jedoch direkt über dem Boden und hat eine Höhe von $\hat{h}_{auslass}/\hat{H} = 3\%$ und damit eine Länge von $\hat{l}_{auslass}/\hat{h}_{auslass} = 6,67$. Am Ausströmrand wird wie am Einströmrand ein Parabelprofil für die Geschwindigkeit vorgegeben, während für die Temperatur $\partial\theta/\partial x = 0$ gilt.

Zu Beginn der Simulationen mit $Ra \leq 10^5$ wird das Geschwindigkeitsfeld als in Ruhe befindlich angenommen und das Temperaturfeld mit der Wärmeleitlösung initialisiert, d.h. $u_i = 0$, für $i = 1,2,3$ und $\theta = x - 1/2$. In das Temperaturfeld werden kleine Störungen, entlang einer Geraden in Längsrichtung und in einem Punkt eingebracht, die bei genügend großem Ra das Einsetzen der Konvektion hervorrufen. Dabei gilt es hervorzuheben, dass die Art der Störungen auf das Strömungsfeld nicht näher untersucht wird, da davon ausgegangen wird, dass diese bei den zu untersuchenden hohen Ra -Zahlen keinen Einfluss auf das resultierende turbulente Strömungsfeld haben. Allerdings hat sich gezeigt, dass diese Störungen nur sehr langsam dissipiert werden und sich bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ auch nach über 200 dimensionslosen Zeiteinheiten in den statistischen Momenten widerspiegeln. Aus diesem Grund werden alle Simulationen höherer Rayleigh-Zahl mit den Strömungsfeldern der nächst geringeren simu-

lierten Rayleigh-Zahl initialisiert. Die transiente Lösung wird in der Zeit entwickelt, bis sich das Strömungsfeld im Gleichgewicht befindet, so dass während der sich anschließenden Simulation statistische Daten aus dem Strömungsfeld extrahiert werden können.

4.4 Auflösung des Rechenraums

In diesem Kapitel wird die räumliche Auflösung des Rechengebietes bei RB-Konvektion untersucht. In § 4.4.1 werden Netzkonvergenzstudien für ausgewählte Fälle, in denen sich laminare und schwach turbulente Konvektion einstellt, durchgeführt. Basierend auf diesen Ergebnissen werden die Gitter für die turbulente Konvektion in der periodischen Zelle erstellt. Die a posteriori ermittelte räumliche Auflösung bei turbulenter Konvektion wird in § 4.4.2 diskutiert und in § 4.4.3 wird die Anforderung an die Auflösung der Grenzschichten detailliert untersucht.

4.4.1 Netzkonvergenzstudie bei geringen Rayleigh-Zahlen

Tabelle 4.1 zeigt das Ergebnis einer Gitterstudie für die periodische Zelle und $Ra \leq 4,38 \times 10^5$, d.h. für laminare und schwach turbulente Rayleigh-Bénard-Konvektion. Bei laminarer Konvektion ändert sich Nu bei einer Verdoppelung der Auflösung in jeder Koordinatenrichtung um weniger als 1%, so dass das Rechengebiet mit $16 \times 32 \times 16$ Gitterpunkten als hinreichend gut aufgelöst betrachtet werden kann. Dies gilt allerdings nur für die stationären 2D-Strömungen, denn Abbildung 4.4 zeigt, dass das zeitliche Verhalten des Strömungsfeldes bei $Ra = 8,75 \times 10^4$ trotz geringen Unterschiedes der mittleren Nusselt-Zahlen signifikante Unterschiede aufweist. Bei grober Auflösung werden periodische Oszillationen der Nusselt-Zahl mit einer sehr niederfrequenten Modulation beobachtet. Mit höherer Auflösung stellen sich schwebungsfreie Oszillationen des Wärmestroms ein. Schnitte durch die Zelle bei $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ zeigen, dass sich die unzureichende Auflösung sogar auf die Anzahl der kohärenten Strukturen auswirkt, siehe Abbildung 4.4 (a) und (b).

Bei der höchsten Rayleigh-Zahl, die in dieser Studie untersucht wurde, bei der sich eine schwach turbulente Konvektion einstellt, ändert sich die Nusselt-Zahl zunächst um 4,5%, bleibt bei einer weiteren Verdoppelung der Auflösung in jeder Koordinatenrichtung jedoch nahezu konstant.

TABELLE 4.1: Gitterstudie: Untersuchungen zur Auflösung des Rechengebietes in der periodischen Zelle.

Ra	N_x	N_y	N_z	Nu	
$4,38 \times 10^3$	16	32	16	1,545	2D, laminar
	32	64	32	1,557	
$4,38 \times 10^4$	16	32	16	3,220	2D, laminar
	32	64	32	3,193	
$8,75 \times 10^4$	16	32	16	9,105	3D, instationär, laminar
	32	64	32	8,357	
$4,38 \times 10^5$	16	32	16	13,97	3D, turbulent
	32	64	32	13,38	
	64	128	64	13,39	

Damit kann auch bei schwach turbulenter Konvektion ein Gitter von $32 \times 64 \times 32$ als ausreichend fein betrachtet werden. Abbildung 4.5 zeigt Schnitte der instationären Temperaturverteilung in der Ebene $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$. Dabei ist der Einfluss der Auflösung auf die Struktur der Strömung und die Auswirkungen auf die Wärmeübertragung deutlich zu erkennen. Mit verbesserter Auflösung werden die groß-skaligen kohärenten Strukturen zwar detaillierter wiedergegeben, ihre Anzahl ändert sich jedoch nicht. Dies verdeutlicht die Empfindlichkeit der Lösung in Bezug auf numerische Fehler beim Übergang von der 2D- zur 3D-Konvektion. Um den Einfluss der Auflösung auf das turbulente Strömungsfeld genauer zu untersuchen, bedarf es jedoch statistischer Methoden.

4.4.2 Räumliche Auflösung bei turbulenter Konvektion

Bei der DNS müssen alle relevanten physikalischen Skalen des Strömungsfeldes, d.h. im Fall von turbulenter thermischer Konvektion, die Kolmogorov- und die Batchelor-Skalen η_k bzw. η_b , aufgelöst werden. Bei der Überströmung einer ebenen Platte gilt für Fluide mit kleinen Prandtl-Zahlen wegen $\eta_k/\eta_b = \mathcal{P}r^{-3/4}$, dass die Auflösung der Kolmogorov-Skalen in der Regel restriktiver ist, als die der Batchelor-Skalen. Grötzbach (1983) schätzt die Kolmogorov-Längenskala für Rayleigh-Bénard-Konvektion wie folgt ab:

$$\eta_k = \frac{\pi}{\Gamma} \frac{\sqrt{\mathcal{P}r}}{((Nu - 1)Ra)^{1/4}} \quad (4.11)$$

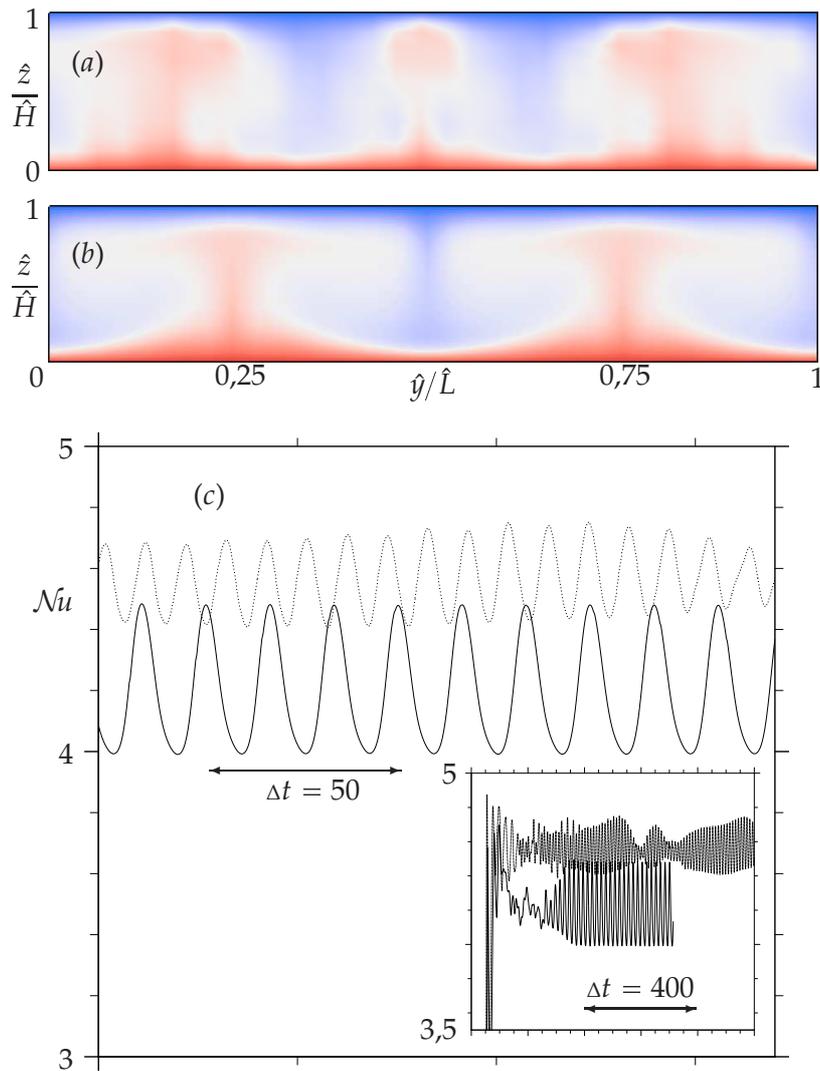


ABBILDUNG 4.4: Netzkonvergenzstudie für die periodische Zelle bei $Ra = 8,75 \times 10^4$; Instationäre Temperaturverteilung bei $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ für ein (a) $16 \times 32 \times 16$ und (b) $32 \times 64 \times 32$ Gitter (rot: $\theta = +0,5$; weiß: $\theta = 0$; blau: $\theta = -0,5$). (c) Nu als Funktion der Zeit; $16 \times 32 \times 16$ (gepunktete Linie) und $32 \times 64 \times 32$ (durchgezogene Linie).

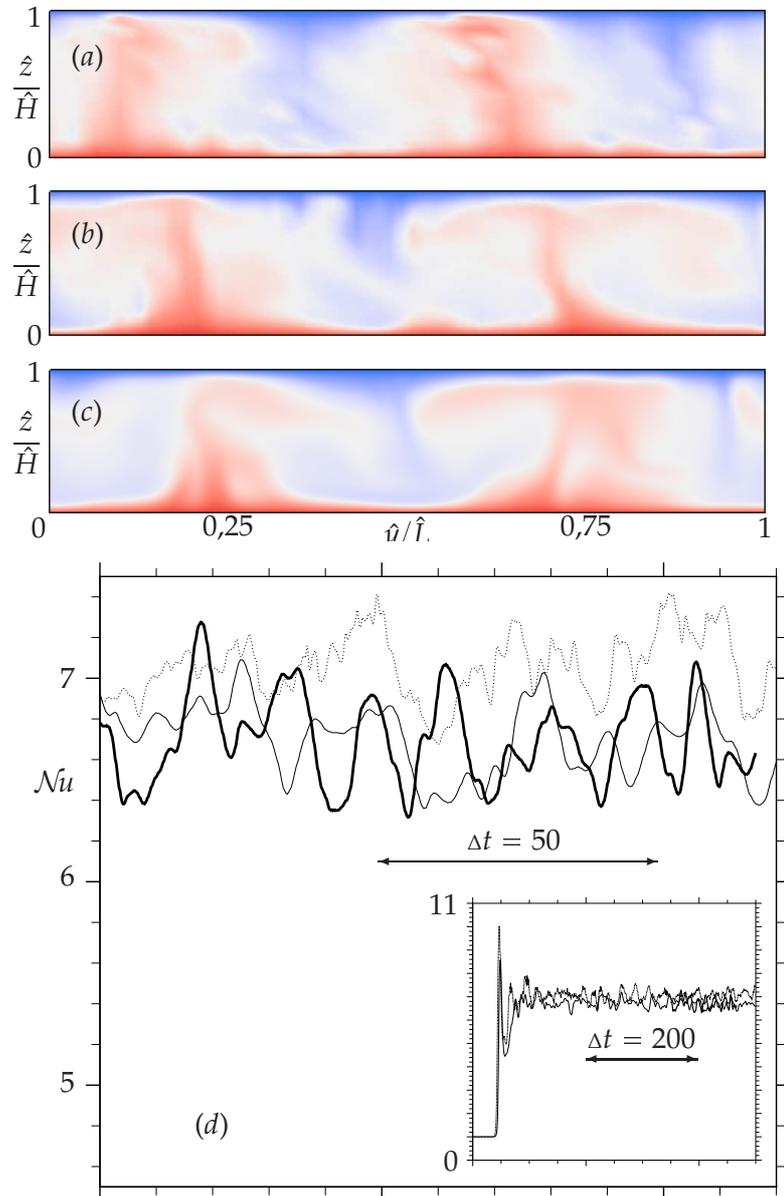


ABBILDUNG 4.5: Netzkonvergenzstudie für die periodische Zelle bei $Ra = 4,38 \times 10^5$; Instationäre Temperaturverteilung bei $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ für ein (a) $16 \times 32 \times 16$, (b) $32 \times 64 \times 32$, (c) $64 \times 128 \times 64$ Gitter (rot: $\theta = +0,5$; weiß: $\theta = 0$; blau: $\theta = -0,5$). (d) Nu als Funktion der Zeit; $16 \times 32 \times 16$ (gepunktete Linie), $32 \times 64 \times 32$ (durchgezogene Linie) und $64 \times 128 \times 64$ (dicke durchgezogene Linie).

Für die Gitterabstände muss daher gelten, dass

$$\frac{h_{V_i}}{\pi\eta_k} \leq 1, \quad (4.12)$$

wobei die Kolmogorov-Skala wie in (2.13) definiert ist. Abbildung 4.6 illustriert die Auflösung des Rechengebietes, basierend auf den in der Zeit und in periodischer Richtung gemittelten turbulenten kinetischen Dissipationsraten (Gleichung 2.13). Dabei ist zu erkennen, dass die Auflösung in Wandnähe aufgrund der starken Gradienten und im Kernbereich wegen der relativ großen Gitterabstände am geringsten ist. Streng genommen, lässt sich Definition (2.13) nur auf homogene isotrope Turbulenz anwenden, soll hier aber aufgrund fehlender Alternativen näherungsweise auf die gut durchmischte Kernregion der Rayleigh-Bénard-Konvektion übertragen werden. In den Grenzschichten ist die hinreichende Auflösung der Gradienten an der Wand maßgebend für die Auflösung des Rechengebietes, deren Auflösungsanforderungen im nächsten Abschnitt untersucht werden. Allerdings zeigen die in Kapitel 6 diskutierten Ergebnisse ebenfalls, dass die turbulenten Fluktuationen in Wandnähe entscheidenden Einfluss auf den Wärmetransport haben. Aus den in Abbildung 5.3 (d) dargestellten mittleren Temperaturprofilen und deren zugehörigen rms-Werten ist ersichtlich, dass die thermischen Grenzschichten für alle berechneten Ra mit ungefähr 10 Volumenelementen aufgelöst sind. Detailliertere Untersuchungen zur Auflösung der Grenzschichten werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

Aus Abbildung 4.6 ist ersichtlich, dass das Gitter aller DNS in der periodischen Zelle feiner ist als die Größe der mit (2.13) abgeschätzten Kolmogorov-Skalen. Ein Vergleich der Kolmogorov-Skalen bestimmt durch (4.11) bzw. (2.13) zeigt, dass die Abschätzung von Grötzbach um bis zu 50% größer ist als die a posteriori ermittelte Kolmogorov-Skala. Da dies sowohl bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ als auch bei $Ra = 3,5 \times 10^7$ der Fall ist, erstere Simulation laut Abbildung 4.6 aber wesentlich besser aufgelöst ist als letztere, kann dies kein Artefakt ungenügender Auflösung sein. Möglicherweise spielt hier die endliche Mittelungszeit der DNS eine Rolle.

4.4.3 Untersuchungen zur Auflösung der Grenzschichten

Die Abschätzung der Auflösung der Grenzschichten bei turbulenter RB-Konvektion stellt verglichen mit der Auflösung des Volumeninneren ein

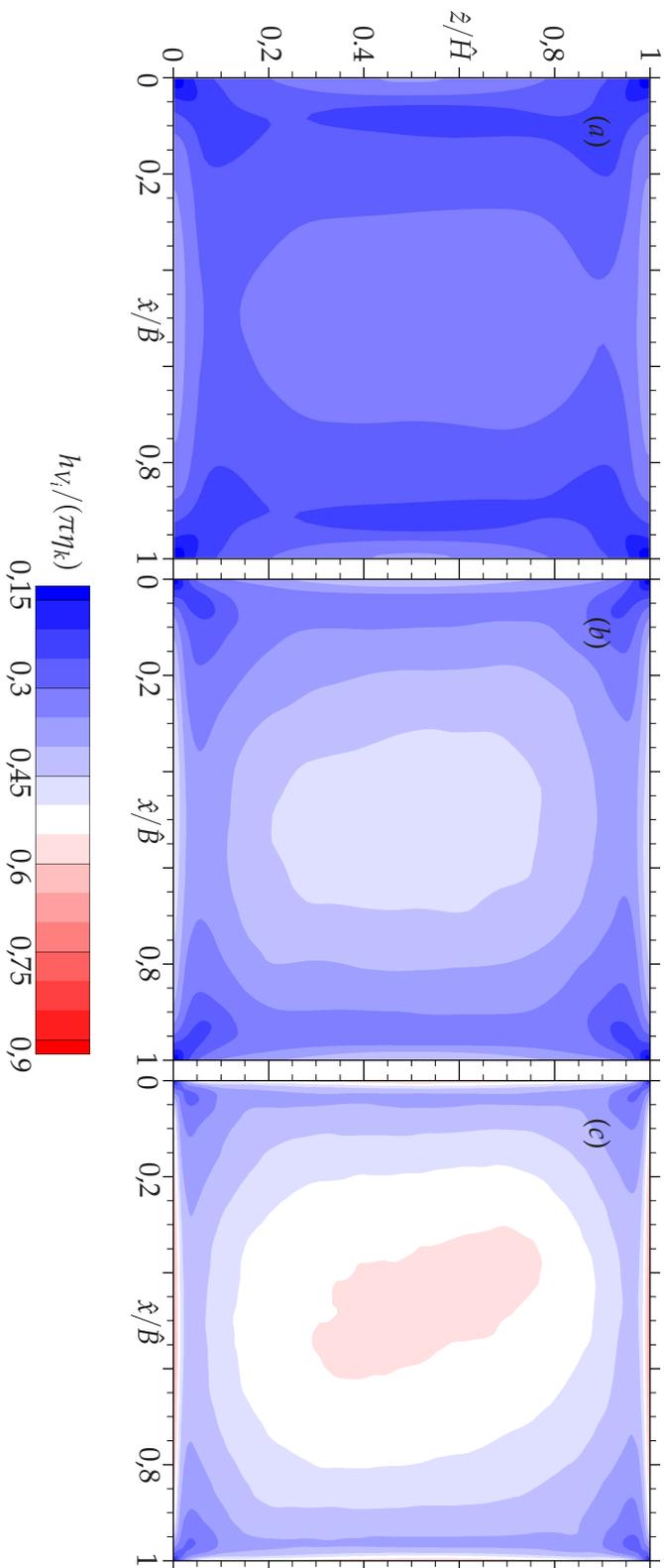


ABBILDUNG 4.6: Mit (4.12) abgeschätzte Auflösung des Rechengebietes bei turbulenter RB-Konvektion für (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$, (b) $Ra = 3,5 \times 10^6$ und (c) $Ra = 3,5 \times 10^7$.

sehr viel größeres Problem dar, da die auf homogener isotroper Turbulenz basierenden Ansätze hier keine Gültigkeit besitzen. Grötzbach (1983) untersucht die Rayleigh-Bénard-Konvektion für eine in horizontaler Richtung unendlich ausgedehnte Fluidschicht für $Ra \leq 3,81 \times 10^5$ und empfiehlt, dass 3 Gitterpunkte innerhalb der thermischen Grenzschicht eine hinreichend gute Auflösung der Grenzschichten darstellen. Eine allgemeinere, bei hohen Ra aber wesentlich restriktivere Aussage zur Auflösung der Grenzschichten wird von Kerr (1985) getroffen. Anhand seiner Studien zur benötigten Auflösung der DNS bei turbulenter RB-Konvektion geht er davon aus, dass mindestens 10% der Rechenkapazität für die Auflösung der Grenzschichten aufgebracht werden müssen. Bei den Untersuchungen dieser Arbeit entspräche das ungefähr 3, 5, 8 und 11 Gitterpunkten je thermischer Grenzschicht bei $Ra \approx 10^5, 10^6, 10^7$ und 10^8 .

Die Anforderungen an die Auflösung des Rechengebietes nehmen mit steigender Rayleigh-Zahl und damit steigendem Turbulenzgrad zu. Daher wird ausgehend von den in § 4.4.2 untersuchten Strömungsfällen der Einfluss der Grenzschichtauflösung bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ und $Ra = 3,5 \times 10^7$ studiert. Dabei werden die Auswirkungen auf die statistischen Momente des Temperaturfeldes analysiert, da die thermische Grenzschicht bei RB-Konvektion mit $Pr = 0,7$ im Vergleich zur viskosen Grenzschicht die wesentlich restriktivere Größe ist.

In Tabelle 4.2 sind die Parameter der Gitterstudie sowie die Ergebnisse zusammengefasst. Bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ werden die thermischen Grenzschichten mit 12, 8 und 6 Gitterpunkten aufgelöst. Für alle drei Auflösungen ergeben sich mittlere Nusselt-Zahlen, die sich nur um ca. 0,1% voneinander abweichen. Eine ähnlich gute Übereinstimmung ist für die thermischen Grenzschichtdicken zu beobachten. Die Analyse der zeitlich und in periodischer Richtung gemittelten Profile der statistischen Momente in der Ebene $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ (siehe Abbildungen 4.7 und 4.8) macht deutlich, dass eine Verbesserung der Auflösung in diesem Bereich von 6 auf 8 Gitterpunkte einen geringfügigen Einfluss auf die absoluten Werte der statistischen Momente, nicht jedoch auf deren qualitative Verteilung hat. Eine weitere Erhöhung der Volumenelemente in der thermischen Grenzschicht auf 12 hat keinen signifikanten Einfluss auf das resultierende Temperaturfeld. Eine Auflösung von $N_{\delta_{\theta,rms}} = 8$ Volumenelementen scheint daher bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ ausreichend, um eine netzunabhängige Lösung zu erzielen.

Bei stärkerer Turbulenz ($Ra = 3,5 \times 10^7$) wirkt sich die reduzierte Auf-

lösung der Grenzschicht jedoch deutlicher aus. Allerdings zeigt Tabelle 4.2 auch, dass die zeitlichen Verläufe der über die horizontalen Platten gemittelten Nusselt-Zahlen $\langle \mathcal{Nu} \rangle_{decke,boden}$ ähnlich große Schwankungen aufweisen und die \mathcal{Nu} -Zahlen bei den Unterschiedlichen Auflösungen höchstens um 1% von einander abweichen. Im Gegensatz dazu weisen die Grenzschichtdicken basierend auf den rms-Werten, der Schiefe und der Wölbung eine eindeutige Abhängigkeit von der Auflösung der Grenzschicht auf: $\delta_{\theta,rms}$ nimmt mit reduzierter Auflösung der Grenzschicht zu, während $\delta_{\theta,S}$ und $\delta_{\theta,K}$ mit reduzierter Grenzschichtauflösung abnehmen. Es wird daher geschlussfolgert, dass eine relativ grobe Grenzschichtauflösung ausreichend ist, um globale Größen wie die Nusselt-Zahl zu bestimmen, nicht jedoch für detaillierte Untersuchungen der statistischen Momente höherer Ordnung.

Die in den Abbildungen 4.7 und 4.8 dargestellten Profile für $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^5$ weisen eine Auffälligkeit insbesondere bei den statistischen Momenten höherer Ordnung auf. Obwohl die Daten teilweise über einen sehr langen Zeitraum gemittelt wurden, weichen die Schiefe und Wölbung in der heißen Grenzschicht um bis zu 15% voneinander ab, während sie sich in der kalten Grenzschicht höchstens um 3 – 4% unterscheiden. Es ist daher anzunehmen, dass sich die anfänglich eingebrachten Störungen des Temperaturfeldes in diesen Abweichungen widerspiegeln, obwohl die Lösung bei $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^5$ ungefähr über 350 Zeiteinheiten entwickelt wurde, bevor mit der statistischen Mittelung begonnen wurde.

4.5 Feinstrukturmodellierung (LES)

LES basieren auf den gefilterten Erhaltungsgleichungen, so dass die in (4.2) – (4.4) auftretenden Feinstrukturterme

$$\tau_{ij}^R \equiv \langle u'_i u'_j \rangle = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \quad (4.13)$$

$$h_i^R \equiv \langle u'_i \theta' \rangle = \langle u_i \theta \rangle - \langle u_i \rangle \langle \theta \rangle \quad (4.14)$$

modelliert werden müssen, um das Gleichungssystem zu schließen. Physikalisch kann dieses Phänomen bei der Verwendung von spektralen Verfahren so interpretiert werden, dass die großen Skalen von der Simulation aufgelöst werden, während alle kleinen Skalen modelliert werden müssen. Bei der Modellierung der Feinstrukturterme ist laut Kravchenko & Moin

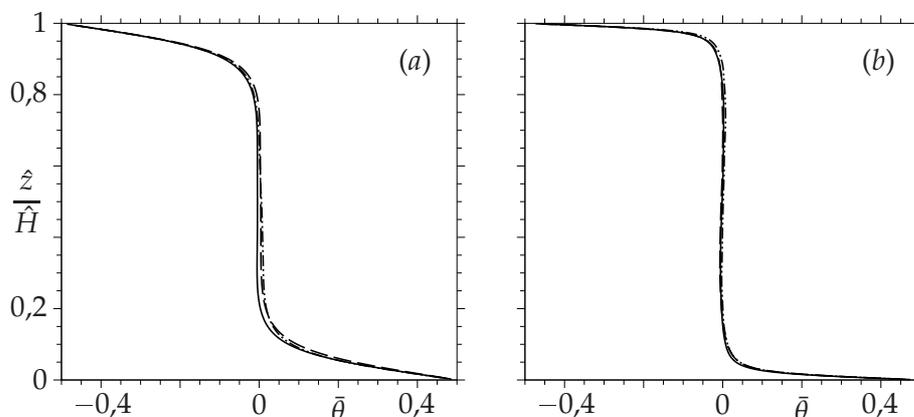


ABBILDUNG 4.7: Einfluss der Grenzschichtauflösung auf die Temperaturprofile für (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$ und (b) $Ra = 3,5 \times 10^7$. Auflösung 0 (—), Auflösung 1 (---) und Auflösung 2 (- · - · -).

(1997) zu beachten, dass das numerischen Abbruchfehler die Modellierung entscheidend beeinflussen können, wenn das numerische Differenzenschema nicht von hinreichender Genauigkeit ist. Aus diesem Grund empfehlen sie die Verwendung numerischer Verfahren höherer Ordnung, was in FLOWSI durch ein 4.-Ordnung-Schema realisiert ist. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über einige LES-Modelle und die Rolle von LES bei der Berechnung der RB-Konvektion gegeben.

Smagorinsky-Modell. Das Standardmodell für LES ist das Smagorinsky-Modell, welches auf dem Wirbelviskositätsansatz

$$\tau_{ij}^R \approx \nu_t \langle s_{ij} \rangle - 2/3 k \delta_{ij} \quad (4.15)$$

beruht, wobei $\langle s_{ij} \rangle = 1/2(\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j + \partial \langle u_j \rangle / \partial x_i)$ der Scherratentensor und $k = 1/2 u_i u_i$ die turbulente kinetische Energie sind. Dabei wird Wirbelviskosität ν_t mit Hilfe der Filterbreite Δx , der lokalen Scherrate $|\langle s \rangle| = \sqrt{2 \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle}$ und einem ggf. dynamisch ermittelten Koeffizienten C_S bestimmt: $\nu_t = (C_S \Delta x)^2 |\langle s \rangle|$. Allerdings bildet der Wirbelviskositätsansatz die realen Feinstrukturspannungen aufgrund schlechter Korrelation zwischen $\langle s_{ij} \rangle$ und $\langle u_i' u_j' \rangle$ diese nur schlecht ab und erlaubt zudem kein sog. *back-scattering*, d.h. intermittenten Energietransport von kleinen zu großen Skalen, weshalb es im Allgemeinen zu dissipativ wirkt. Dieses Verhalten wird auch durch die von Germano *et al.* (1991) vorgeschlagene Variante mit dynami-

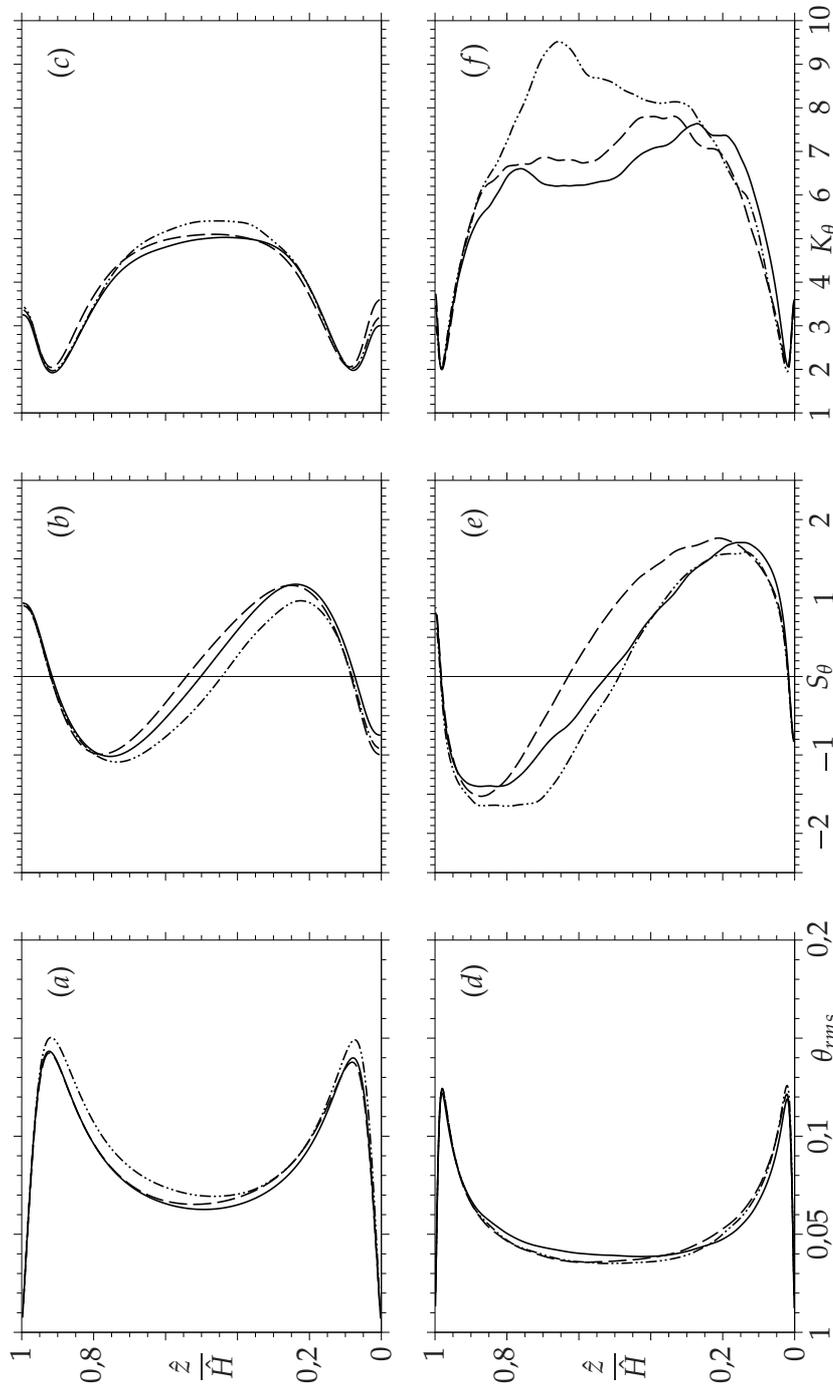


ABBILDUNG 4.8: Einfluss der Grenzschichtauflösung auf die statistischen Momente: rms-Werte (a,d), Schiefe (b,e) und Wölbung (c,f) für $Ra = 3,5 \times 10^5$ (a-c) und $Ra = 3,5 \times 10^7$ (d-f). Auflösung 0 (—), Auflösung 1 (---) und Auflösung 2 (-·-·-).

scher Berechnung von C_S nicht vollständig behoben. Diese Methode vermeidet die *a-priori*-Bestimmung des Koeffizienten C_S , allerdings mache diese Vorgehensweise das Modell laut Kimmel & Domaradzki (2000) instabiler. Zudem trete bei der thermischen Konvektion das Problem auf, dass die üblichen auf den mittleren Wandschubspannungen basierenden Wandfunktionen versagen, da es keine mittlere Strömung gibt.

Ein modifiziertes Smagorinsky-Modell bei dem die Auswirkung der Auftriebskräfte auf die Feinstrukturspannungen berücksichtigt wird, wird von Eidson (1985) zur Berechnung turbulenter Rayleigh-Bénard Konvektion verwendet. Ein Vergleich der LES zeigt eine gute Übereinstimmung mit experimentell gewonnenen Mittel- und rms-Werten. Um aus der Modellierung der Wandfunktion resultierende unbefriedigende Ergebnisse zu vermeiden, werden die Grenzschichten entsprechend hoch aufgelöst. Laut Peng & Davidson (2002) stößt dieses Modell jedoch bei thermisch stabil geschichteten Fluiden an seine Grenzen, da sich in diesem Fall eine negative Wirbelviskosität ν_t ergeben kann.

Skalen-Ähnlichkeitsmodell. Dieses Modell geht auf die experimentelle Beobachtung von Liu *et al.* (1994) zurück, dass die Näherung (4.16) deutlich besser mit den exakten Feinstrukturspannungen korreliert als der Scherrantensor. Die Feinstrukturspannungen werden daher mittels einer zweifachen Filterung bestimmt:

$$\tau_{ij}^R \approx \{\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle\} - \{\langle u_i \rangle\} \{\langle u_j \rangle\}, \quad (4.16)$$

wobei $\langle \cdot \rangle$ eine Filterung mit Gitterauflösung und $\{\cdot\}$ eine Filterung mit doppelter Gitterweite darstellen. Damit wird angenommen, dass sich die größten nicht aufgelösten Skalen ähnlich den kleinsten aufgelösten Skalen verhalten. Dieses Modell wird von Kimmel & Domaradzki (2000) zur Berechnung von RB-Konvektion im Parameterbereich $6,3 \times 10^5 \leq Ra \leq 10^8$ eingesetzt und sowohl mit gefilterten DNS-Daten als auch mit Ergebnissen des Smagorinsky-Modells verglichen. Sie zeigen, dass die Ergebnisse des Ähnlichkeitsmodells im Gegensatz zum Smagorinsky-Modell in guter Übereinstimmung mit den aus den DNS bestimmten Werten sind. Allerdings führen Kimmel & Domaradzki (2000) an, dass Skalen-Ähnlichkeitsmodelle in der Regel nicht genügend Energie dissipieren, so, dass sie häufig mit dissipativeren Modellen kombiniert werden.

Tensor-Diffusionsmodell. Die in den Kapiteln 5 und 6 durchgeführten LES turbulenter RB-Konvektion basieren auf dem Tensor-Diffusionsmodell von Leonard & Winkelmans (1999). dieses Modell approximiert die Feinstrukturterme durch die im entsprechenden Volumenelement auftretenden Gradienten des Temperatur- bzw. Geschwindigkeitsfeldes. Somit kann es als Näherung erster Ordnung einer Taylor-Expansion des Feinstrukturtermes τ_{ij}^R bzw. h_i^R interpretiert werden, was zur Folge hat, dass eine relativ hohe Auflösung des Rechengebietes erforderlich ist, damit die Feinstrukturterme mittels dieser Linearisierung hinreichend genau modelliert werden. Die hier verwendete Rechteckfilterung findet implizit, d.h. über das Rechengitter, im physikalischen Raum statt und entspricht damit der lokalen Gitterweite.

$$\tau_{ij}^R \approx \frac{1}{12} \sum_{j \neq k} (\Delta x_k)^2 \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \quad (4.17)$$

$$h_i^R \approx \frac{1}{12} \sum_{j \neq k} (\Delta x_k)^2 \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} \quad (4.18)$$

In FLOWSI sind neben einem Smagorinsky-Modell, die Skalen-Ähnlichkeitsmodelle von Cabot (1992) und Wagner (2003) sowie das Rekonstruktionsmodell von Gullbrand (2003) implementiert. Alle Modelle benutzen die von Germano *et al.* (1991) vorgeschlagene dynamische Berechnung der Koeffizienten. Auf eine detaillierte Beschreibung aller Modelle soll an dieser Stelle jedoch verzichtet werden, da in der vorliegenden Arbeit außer dem Tensor-Diffusionsmodell keine LES-Modelle zum Einsatz kommen.

4.6 Parallelisierung

Die für die parallelen Simulationen notwendige Zerlegung des Rechengebietes erfolgt durch Aufteilung in horizontale Scheiben mit idealerweise gleicher Anzahl von Volumenelementen. An der Grenze zwischen zwei Rechenkernen wird die horizontale Scheibe um zwei Schichten Volumenelemente erweitert, um der Diskretisierung 4. Ordnung Rechnung tragen zu können. Die entsprechenden Daten dieser Überlappungsschichten werden jeweils nach Lösen der Impuls- bzw. der Energiegleichung mittels der *Message Passing Interface* (MPI) Technik zwischen den Rechenkernen ausgetauscht. Zur Lösung des Poisson-Problems werden die von jedem Rechen-

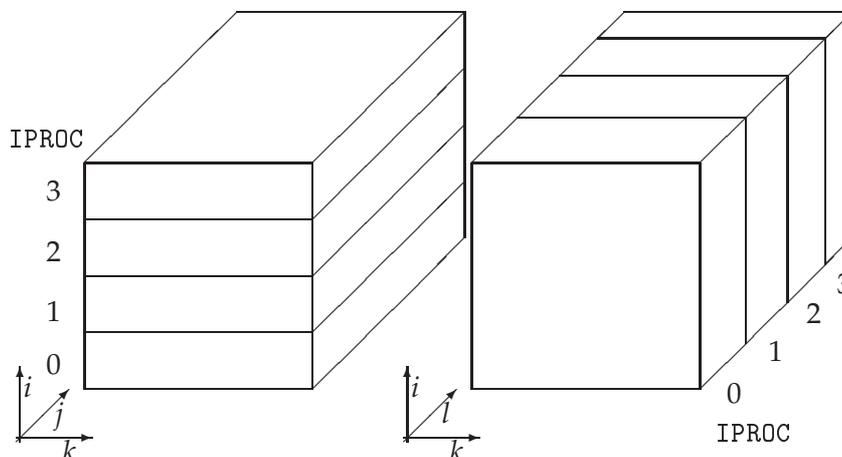


ABBILDUNG 4.9: Schematische Darstellung der Aufteilung des Rechengebietes auf die Rechenkern (NPROC = 4) für die Berechnung der Felder u_i und θ (a) und für die Berechnung der entkoppelten Komponenten des Pseudodrucks $\tilde{\psi}_{(i,k)^l}$ (b).

kern berechneten entkoppelten Quellterme so auf die Rechenkern verteilt, dass auf jedem Rechenkern l entkoppelte i - k -Ebenen mit Hilfe des direkten Matrixlösers berechnet werden können. Nach Lösen des Gleichungssystems werden die entsprechenden Daten auf die jeweiligen Rechenkern zurück übertragen und rücktransformiert.

Die Kommunikationsschritte des Drucklösers stellen gewissermaßen den Flaschenhals der parallelen Simulation dar, da das von der Inkompressibilität des Fluids herrührende elliptische Gleichungssystem es verlangt, dass zur Berechnung der Druckkorrektur jeder Rechenkern mit jedem anderen kommunizieren muss. Die Aufteilung des Rechengebietes auf die Rechenkern ist in Abbildung 4.9 schematisch dargestellt. Um den Datenaustausch effizient zu gestalten, muss es zu jedem Zeitpunkt der Kommunikation immer genau eine Rechenkernpaarung geben. Da dies nur der Fall ist, wenn die Anzahl der Rechenkern eine Potenz von zwei ist, müssen für parallele Rechnungen mit FLOWSI $NPROC = 2^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Rechenkern verwendet werden.

Die Leistungsfähigkeit der Parallelisierung wurde mit Gittern verschiedener Größen getestet und die parallele Skalierbarkeit des Programms an-

hand der erzielten parallelen Beschleunigung

$$S_{par} = t_{WCT,NPROC=1} t_{WCT,NPROC}$$

(WCT: verbrauchte Istzeit; Wall Clock Time) untersucht. Für die Rechnungen wurde das Institutscluster „Enigma“ des DLR Göttingen mit $2 \times 2,2$ GHz AMD Opteron Dualcore Rechenkernen, 500 MB/Rechenkern und Infinibandverbindung und der GNU-Fortran Compiler verwendet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.10 (a) gezeigt. Die theoretisch erreichbare parallele Effizienz $E_{par} = 1$ ist zusätzlich als Referenz gegeben, wobei die parallele Effizienz wie folgt berechnet wird:

$$E_{par} = \frac{t_{WCT,NPROC=1}}{NPROC t_{WCT,NPROC}}$$

Die Simulation auf einem Gitter mit vergleichsweise wenigen Punkten, das typischerweise für Rechnungen für $Re \approx 10^5$ genutzt wird, zeigt, dass die parallele Beschleunigung sehr schnell abnimmt, wenn mehr als 4 Rechenkerne verwendet werden. Die größeren Gitter hingegen weisen eine sehr gute parallele Skalierbarkeit für bis zu 32 Rechenkerne auf. Die für die jeweiligen Rechnungen benötigte physikalische Zeit t_{WCT} ist in Abbildung 4.10 (b) dargestellt und illustriert den mit der Anzahl der Volumenelemente steigenden Bedarf an Rechenleistung.

Simulationen mit höheren Anforderungen an die Rechnerkapazitäten wurden sowohl mit einem Würfel mit $256 \times 256 \times 256$ Volumen-Elementen als auch mit einer quaderförmigen Zelle mit $256 \times 256 \times 816$ Volumen-Elementen und bis zu 64 Rechenkernen durchgeführt. Allerdings konnten die Skalierungseigenschaften für diese Fälle mangels Speicher pro Rechenkern auf dem Institutscluster „Enigma“ nicht hinreichend untersucht werden. Die benötigte physikalische Zeit je Zeitschritt ts beträgt bei Verwendung von 16 Rechenkernen $t_{WCT} = 4,15 \text{ s}/ts$ für den Würfel und $t_{WCT} = 8,64 \text{ s}/ts$ für den Quader gerechnet auf 64 Rechenkernen.

Die parallele Skalierbarkeit von FLOWSI auf dem Höchstleistungsrechner Bayern II (HLRB2) bestehend aus $2 \times 1,6$ GHz Intel-Itanium2-Dualcore Prozessoren, 4 GB/Prozessorkern und NUMALink-4-Netzwerk wurde für RB-Konvektion in einem Würfel mit $256 \times 256 \times 256$ Gitterpunkten ($Re = 2,31 \times 10^8$) und dem Intel-Fortran Compiler untersucht. Die durchschnittlich verbrauchte Ist-Zeit wurde über 100 Zeitschritte ermittelt. Die Rechen-

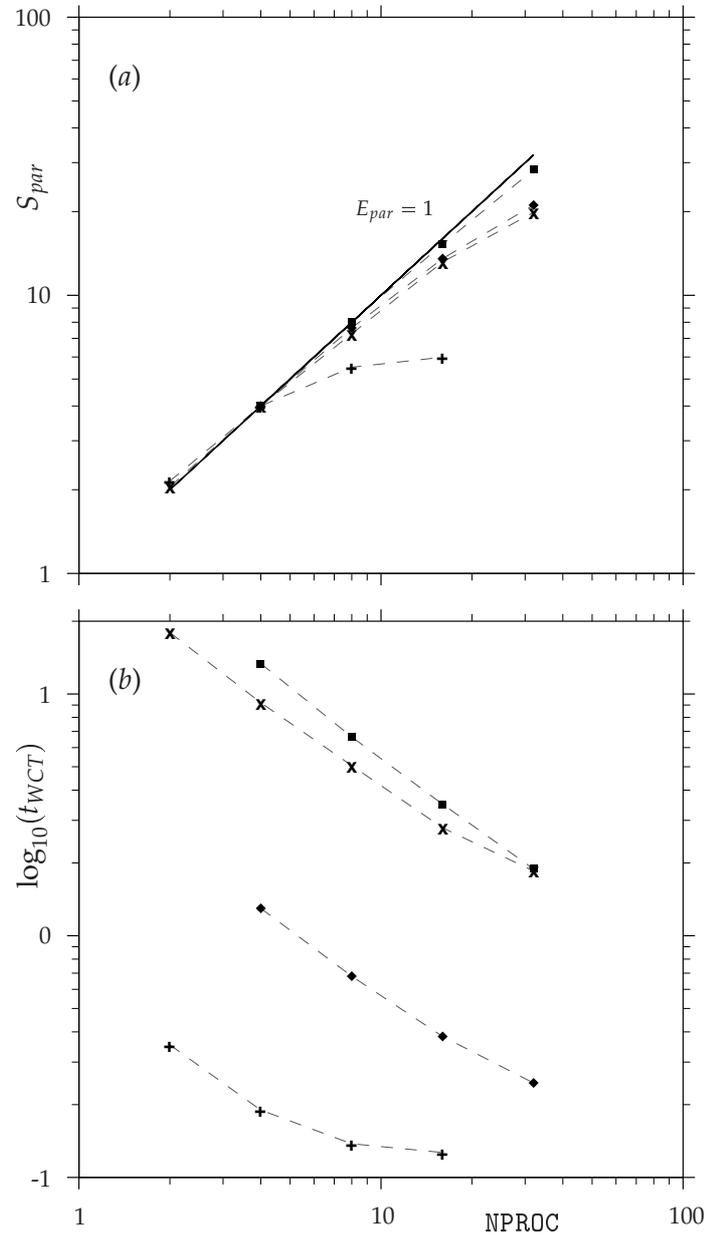


ABBILDUNG 4.10: Skalierung des parallelen Programms für die geschlossene Zelle für verschiedene Gittergrößen: (a) Parallele Beschleunigung S_{par} und (b) Zeitverbrauch t_{WCT} je Zeitschritt als Funktion der Anzahl der Rechenkerne; $32 \times 128 \times 32$ (+), $96 \times 400 \times 96$ (x), $96 \times 96 \times 96$ (♦), $190 \times 190 \times 190$ (■).

TABELLE 4.3: Skalierung der verbrauchten Ist-Zeit und parallele Beschleunigung für die Berechnung thermischer Konvektion mit einem $256 \times 256 \times 256$ Gitter auf dem HLRB2.

N_{PROC}	t_{WCT} s/ts	S_{par}	E_{par}
4	6,00	1,00	1,00
8	2,91	2,06	1,03
16	1,75	3,43	0,86
32	0,91	6,59	0,82

zeiten sind in Tabelle 4.3 zusammen mit der parallelen Beschleunigung bezogen auf $t_{WCT, N_{PROC}=4}$ dargestellt. Zusätzlich ist in der Tabelle die parallele Effizienz E_{par} angegeben. Parallele Beschleunigungen größer als $N_{PROC}/4$ sind auf Bandweitungsschwankungen bei der Kommunikation zurückzuführen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Programm sehr gute Skalierungseigenschaften besitzt, solange die Anzahl der Schichten von Volumenelementen je Prozessorkern 4–8 nicht überschreiten.

Kapitel 5

Dynamik der RB-Konvektion in der periodischen Zelle

Abbildung 5.1 zeigt Isoflächen der Temperatur der RB-Konvektion in der periodischen Zelle bei vier verschiedenen Rayleigh-Zahlen, die sich über den Bereich vom Einsatz der (weichen) Turbulenz bis zum Beginn der harten Turbulenz (siehe Castaing *et al.* 1989) erstrecken. Dabei ist zu erkennen, dass die thermischen *Plumes* mit steigendem Ra kleiner werden, während ihre Anzahl sich erhöht. Bei der kleinsten untersuchten Rayleigh-Zahl sind zwei Paare thermischer *Plumes* zu erkennen, die die typischen Konvektionsrollen senkrecht zur Längsachse der periodischen Zelle formen. Bei $Ra = 3,5 \times 10^7$ wird das Strömungsfeld vollturbulent, d.h. es sind viele klein-skalige *Plumes* zu erkennen, wobei die Wechselwirkung zwischen den *Plumes* dazu führt, dass diese weiterhin eine groß-skalige Rolle induzieren. Anhand von Animationen ist zu erkennen, dass die Rolle instabil ist, was dazu führt, dass die groß-skalige Zirkulation zwischenzeitlich zusammenbricht.

Abbildung 5.2 verdeutlicht das Verhalten der Strömung an einer Längsposition in der Mitte der Zelle ($\hat{y}/\hat{L} = 0,5$, $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$), indem das zeitliche Verhalten des Geschwindigkeitsvektors dargestellt durch die Winkel

$$\begin{aligned}\varphi_{v,w} &= \arctan\left(\frac{w}{-v}\right) \quad \text{und} \\ \varphi_{u,v} &= \arctan\left(\frac{u}{v}\right),\end{aligned}$$

aufgetragen wird. Wie aus Abbildung 5.1 (c) zu erkennen ist, ist an der

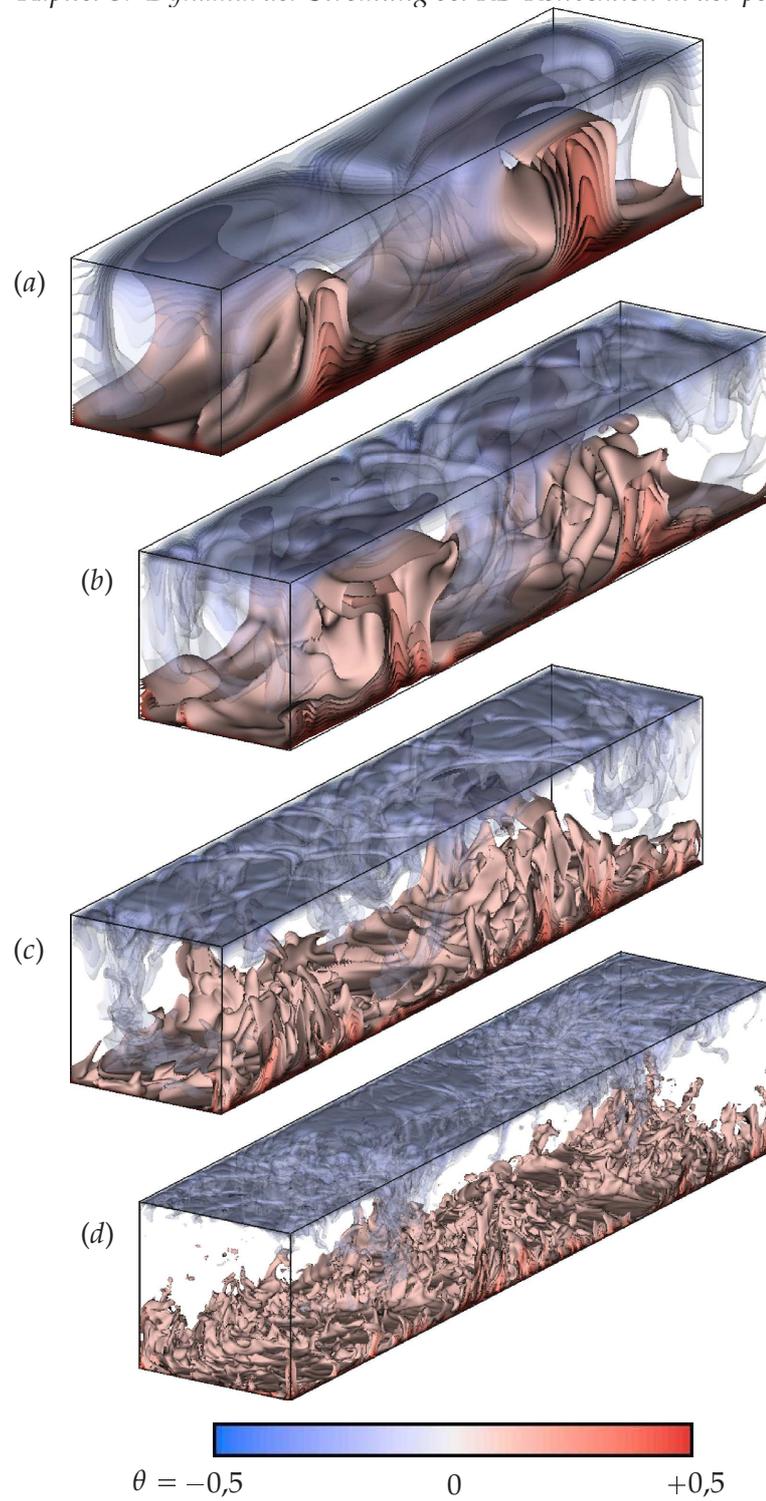


ABBILDUNG 5.1: Instantane Temperaturfelder der periodischen Zelle dargestellt durch 16 Isothermen mit $|\theta| \geq 0,1$; (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$, (b) $Ra = 3,5 \times 10^6$, (c) $Ra = 3,5 \times 10^7$ und (d) $Ra = 2,31 \times 10^8$.

gewählten Position vornehmlich sinkendes Fluid, also ein Winkel $\varphi_{v,w} \approx -90^\circ$ zu erwarten. Dies wird von Abbildung 5.2 (a) für den Kernbereich bestätigt, allerdings ist auch auffällig, dass die Strömung am Rand der thermischen Grenzschicht ein grundsätzlich anderes Verhalten aufweist. Normalerweise strömt das Fluid in horizontaler Richtung, allerdings weist der Zeitschrieb einige Spitzen auf, die durch aufsteigendes Fluid und damit von sich aus der Grenzschicht lösenden thermischen *Plumes* hervorgerufen werden. Dieses gegensätzliche Verhalten veranschaulicht, wie die thermischen *Plumes* lokal der großskaligen Konvektionsrolle entgegen wirken. Dies lässt die Schlussfolgerung zu, dass der Einfluss der stärker werdenden *Plumes* dazu führt, dass die Rotation der Konvektionsrolle kurzzeitig gestört wird. Aus Abbildung 5.2 (b) geht zudem hervor, dass die Strömung im Kernvolumen stark turbulent ist, während sie am Rand der thermischen Grenzschicht beinahe sinusförmige Oszillationen aufweist.

Abbildung 5.1 (d) zeigt wiederum, dass das Temperaturfeld bei $Ra = 2,31 \times 10^8$ fast ausschließlich von den klein-skaligen Strukturen bestimmt ist, so dass die zuvor deutlich ausgeprägte Rollenstruktur kaum noch zu erkennen ist. Die Diskussion dieses Phänomens wird in § 5.3 in Verbindung mit den turbulenten Fluktuationen fortgesetzt. In § 5.2 werden die thermischen und kinetischen Dissipationsraten untersucht und die Grenzschichtdicken werden in § 5.1 analysiert. DNS in der periodischen Zelle sind für $Ra \leq 3,5 \times 10^7$ und hochaufgelöste LES für $Ra = 3,5 \times 10^7$ und $Ra = 2,31 \times 10^8$ durchgeführt worden.

5.1 Grenzschichtdicken

Abbildung 5.3 (a,c) zeigt die aus der zentralen Ebene $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ der periodischen Zelle extrahierten Temperaturprofile der vier Rayleigh-Zahlen im Bereich $3,5 \times 10^5 \leq Ra \leq 2,31 \times 10^8$. Die Profile sind zeitlich und in periodischer Richtung gemittelt. Die Abbildung zeigt die für die natürliche Konvektion typischen Profile mit einem Temperaturgradienten nahe Null in Zellmitte. Kleine Abweichungen von $\partial\theta/\partial z = 0$ und dem arithmetischen Mittel von Heiz- und Kühlplattentemperatur werden auf die endliche Mittelungszeit der numerischen Simulationen zurückgeführt. Die zugehörigen rms-Werte in Abbildung 5.3 (b,d) zeigen die mit steigendem Ra abnehmende thermische Grenzschichtdicke. Außerdem ist zu erkennen, dass die rms-Werte an der Wand verschwinden, um die isotherme Randbedingung zu

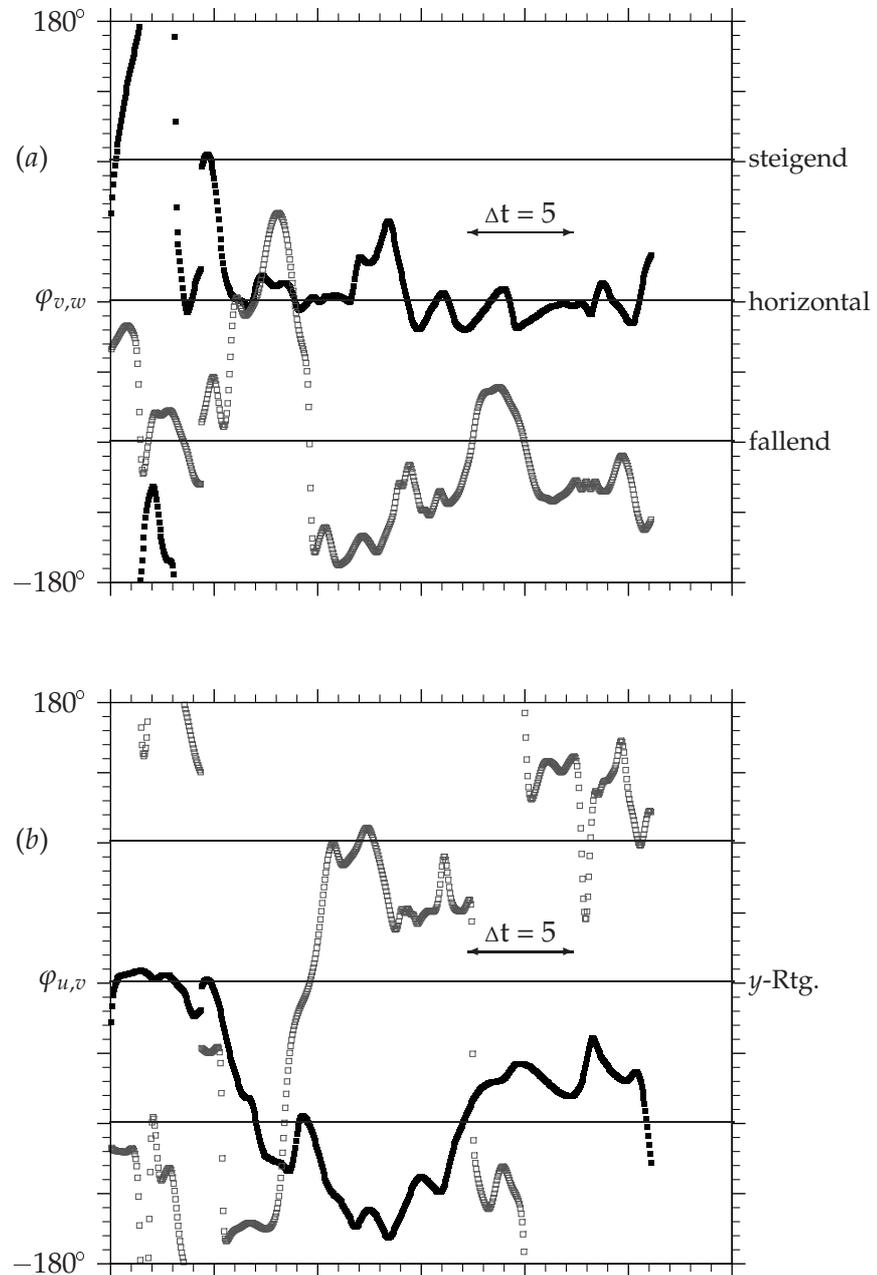


ABBILDUNG 5.2: Zeitliche Änderung der Strömung am Rand der thermischen Grenzschicht (■) und in der Mitte der Zelle (□) dargestellt für die Position $\hat{y}/\hat{L} = 0,5$ $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$. (a) zeigt den Winkel in der y - z -Ebene und (b) den Winkel in der x - y -Ebene. $\varphi_{v,w} \approx 90^\circ$ bedeutet sinkendes Fluid.

TABELLE 5.1: Ergebnisse der numerischen Simulationen in der periodischen Zelle: mittlere viskose und thermische Grenzschichtdicken δ_u und δ_θ an der Stelle $\hat{x}/\hat{\beta} = 0,5$, die Temperatur am Grenzschichttrand θ_e , die mittlere Nusselt-Zahl und die Mittelungszeit t_{mittel} . Die mit (4.11) abgeschätzte Kolmogorov-Längenskala, die a posteriori mit (2.13) ermittelte Längenskala und die relative Auflösung des Gitters sind sowohl für die Kolmogorov als auch die Batchelor-Skala gegeben.

Gittergröße	$3,5 \times 10^5$		$3,5 \times 10^6$		$3,5 \times 10^7$		$2,31 \times 10^8$	
	DNS	DNS	DNS	DNS	LES	LES	LES	LES
\mathcal{Nu}	6,225	12,12	22,87	23,38	40,62			
δ_θ	$7,81 \times 10^{-2}$	$4,00 \times 10^{-2}$	$2,05 \times 10^{-2}$	$1,90 \times 10^{-2}$	$1,11 \times 10^{-2}$			
δ_u	$1,12 \times 10^{-1}$	$8,93 \times 10^{-2}$	$7,14 \times 10^{-2}$	$5,72 \times 10^{-2}$	$4,92 \times 10^{-2}$			
$ \theta_e $	0,133	0,135	0,147	0,150	0,166			
$\eta_{k,Grö.}$	$7,17 \times 10^{-2}$	$2,35 \times 10^{-2}$	$1,58 \times 10^{-2}$	$1,57 \times 10^{-2}$	$8,57 \times 10^{-3}$			
$\max(\eta_k)$	$4,75 \times 10^{-2}$	$2,32 \times 10^{-2}$	$9,00 \times 10^{-3}$	$9,19 \times 10^{-3}$	$5,00 \times 10^{-3}$			
$\max(\eta_b)$	$2,25 \times 10^{-2}$	$3,26 \times 10^{-2}$	$1,76 \times 10^{-2}$	$1,74 \times 10^{-2}$	$1,15 \times 10^{-2}$			
$h_{V_i, \max}$	$3,01 \times 10^{-2}$	$1,72 \times 10^{-2}$	$1,06 \times 10^{-2}$	$1,50 \times 10^{-2}$	$9,99 \times 10^{-3}$			
$\max(h_{V_i}/\pi\eta_k)$	0,375	0,489	0,670	0,902	1,06			
$\max(h_{V_i}/\pi\eta_b)$	0,226	0,312	0,464	0,631	0,773			

erfüllen. Für $Ra = 3,5 \times 10^7$ sind sowohl das mit der DNS als auch das mit der LES ermittelte mittlere Temperaturprofil und das Profil der zugehörigen rms-Werte dargestellt. Die mittleren Temperaturprofile weichen kaum merklich voneinander ab. Auch die rms-Werte weisen eine maximale Abweichung von weniger als 1% bezogen auf den maximalen rms-Wert auf, was für die gute Qualität der LES spricht und eine Extrapolation der Ergebnisse zu höheren (nicht mit DNS berechneten) Ra erlaubt.

Die mittleren viskosen und thermischen Grenzschichtdicken $\delta_{u,rms}$ bzw. $\delta_{\theta,rms}$ werden in Zellmitte bei $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ bestimmt. Die aus den Simulationsergebnissen ermittelten Grenzschichtdicken sind in Tabelle 5.1 aufgeführt und in Abbildung 5.4 graphisch gegenübergestellt. Demzufolge ergibt sich, dass $\delta_{\theta,rms} \sim Ra^{-0,291}$, so dass die Ergebnisse unter der Voraussetzung $Nu = 1/(2\delta_{\theta,rms})$ sehr gut mit den Beobachtungen und theoretischen Vorhersagen von Castaing *et al.* (1989) und Grossmann & Lohse (2004) übereinstimmen. Weiterhin fällt auf, dass die LES trotz der guten Auflösung der Grenzschichten nicht die gleichen Grenzschichtdicken liefern, allerdings die Ra -Abhängigkeit der Nu -Zahl sehr gut zu höheren Ra extrapolieren. Außerdem werden die Grenzschichtdicken der periodischen Zelle in Abbildung 5.4 mit Ergebnissen von Hartlep *et al.* (2005) verglichen, die durch DNS einer dünnen Fluidschicht gewonnen wurden. Als Referenz ist die Skalierung $\delta_{\theta} \sim Ra^{-0,291}$ gegeben und die Daten sind zusätzlich in kompensierter Form dargestellt, um die gute Übereinstimmung der Ergebnisse mit der Näherungsfunktion hervorzuheben. Die Abbildung zeigt deutlich die gute Übereinstimmung der beiden Simulationen, insbesondere der thermischen Grenzschichtdicken für die Hartlep (2004) einen Skalierungsexponenten $\beta = 0,278$ angibt. Er beobachtet allerdings etwas dünnere viskose Grenzschichten, so dass zu vermutet wird, dass diese Unterschiede auf die zusätzlichen Seitenwände der periodischen Zelle und der damit verbundenen unterschiedlichen Dynamik der Strömungsfelder zurückzuführen sind. Außerdem ist zu beobachten, dass die viskosen und thermischen Grenzschichtdicken unterschiedlich schnell abnehmen. Dieses Verhalten wird ebenfalls durch die DNS von Verzicco & Camussi (2003a) in einer schlanken zylindrischen Zelle bestätigt und von Grossmann & Lohse (2000, 2004) theoretisch vorhergesagt.

Ein Vergleich der hochaufgelösten LES-Daten bei $Ra = 2,31 \times 10^8$ mit den experimentellen Daten von Ebert *et al.* (2008) bei $Ra = 1,3 \times 10^8$ zeigt eine gute qualitative Übereinstimmung. In Abbildung 5.5 und 5.6 sind die

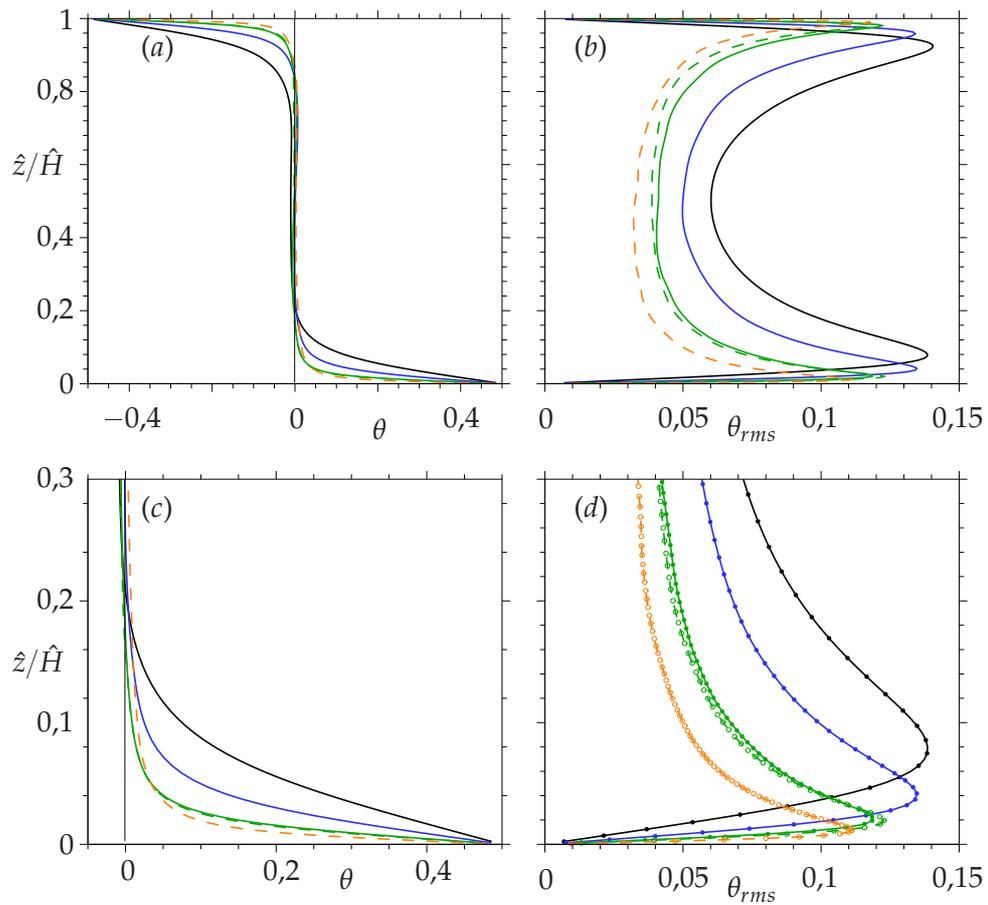


ABBILDUNG 5.3: Mittlere Temperaturprofile (a,c) und die zugehörigen rms-Werte der Temperatur (b,d) extrahiert an der Stelle $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ für $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^5$, $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^6$, $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^7$ und $\mathcal{Ra} = 2,31 \times 10^8$; DNS (—), LES (---).

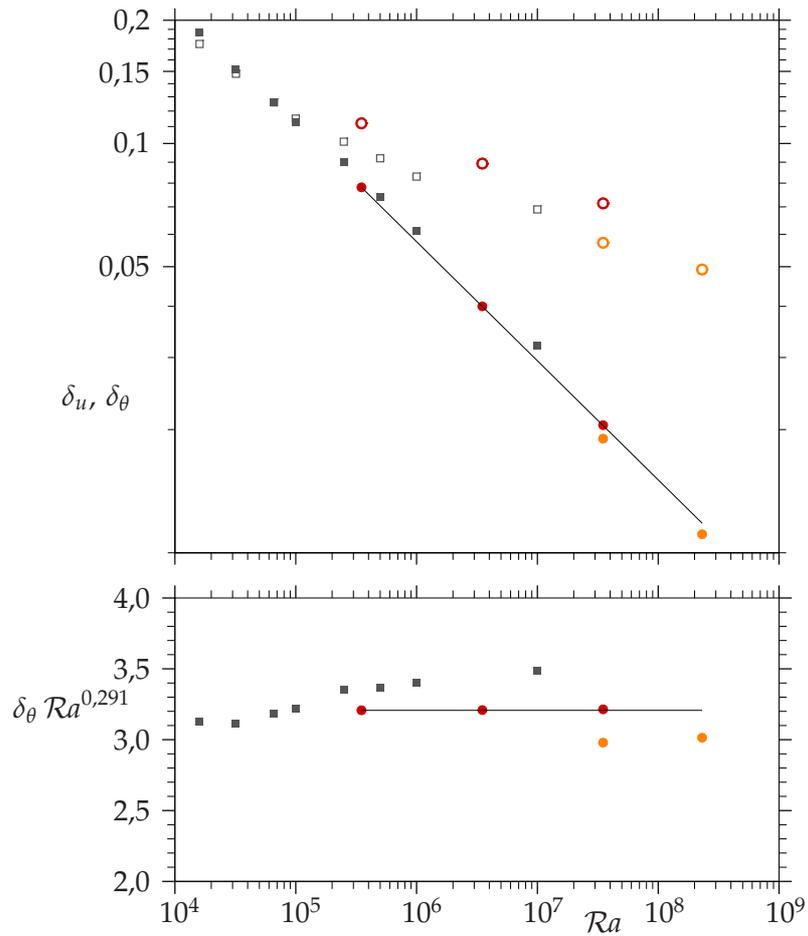


ABBILDUNG 5.4: Grenzschichtdicken des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes δ_θ (geschlossene Symbole) bzw. δ_u (offene Symbole). Kreise (rot=DNS; orange=LES) entsprechen Simulationsergebnissen der periodischen Zelle an der Stelle $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ und Quadrate DNS einer unendlich ausgedehnten Fluidschicht von Hartlep (2004); Zusätzlich ist die Skalierung $Nu \sim Ra^{-0,291}$ als Referenz (—) gegeben. Horizontale Linien in (b) sind konsistent mit dem Skalierungsexponent $\beta = 0,291$.

Profile der mittleren Temperatur sowie der zugehörigen rms-Werte θ_{rms} , der Schiefe S_θ und der Wölbung K_θ der Temperatur dargestellt.

Die hier gezeigten experimentellen Daten wurden an der peripheren Position gemessen, d.h. die Messpunkte befinden sich an einer Längsposition, bei der die Hauptströmungsrichtung parallel zu den horizontalen Platten verläuft. Die numerischen Daten sind sowohl zeitlich als auch in periodischer Richtung gemittelt. Die statistischen Momente werden dabei aus den gemittelten Korrelationen folgendermaßen bestimmt:

$$\theta_{rms} = \sqrt{\overline{\theta^2} - \bar{\theta}^2} \quad (5.1)$$

$$S_\theta = \frac{\overline{\theta^3} - 3\bar{\theta}\bar{\theta}^2 + 2\bar{\theta}^3}{\theta_{rms}^3} \quad (5.2)$$

$$K_\theta = \frac{\overline{\theta^4} - 4\bar{\theta}\bar{\theta}^3 + 6\bar{\theta}^2\bar{\theta}^2 - 3\bar{\theta}^4}{\theta_{rms}^4} \quad (5.3)$$

Obwohl sich die Lage der Extrema von Experiment und Rechnung in guter Übereinstimmung befinden, verdeutlichen die Abbildungen auch, dass die absoluten Werte, insbesondere von θ_{rms} stark voneinander abweichen. Es wird daher vermutet, dass diese Differenzen auf die unterschiedlichen Randbedingungen zurückzuführen sind. Dennoch ist die qualitative Übereinstimmung trotz der großen geometrischen Unterschiede erstaunlich gut.

5.2 Vergleich thermischer und viskoser Dissipationsraten

In Abbildung 5.7 (a) – (d) ist die Verteilung der turbulenten kinetischen und thermischen Dissipationsraten $\overline{\epsilon_u'}$ bzw. $\overline{\epsilon_\theta'}$ in einem horizontalen und einem vertikalen Schnitt durch die Zelle dargestellt. Wie für die Temperaturprofile sind auch hier die Ergebnisse der DNS und der LES bei $Ra = 3,5 \times 10^7$ gegenübergestellt. Aus Abbildung 5.7 ist zu erkennen, dass die Ergebnisse beider Simulationen im Rahmen der statistischen Unsicherheit übereinstimmen.

In der Kernregion ist die turbulente kinetische Dissipationsrate näherungsweise konstant und nimmt innerhalb der Grenzschichten, wo viskose Effekte zum Tragen kommen, allmählich zu. Im Gegensatz dazu weisen

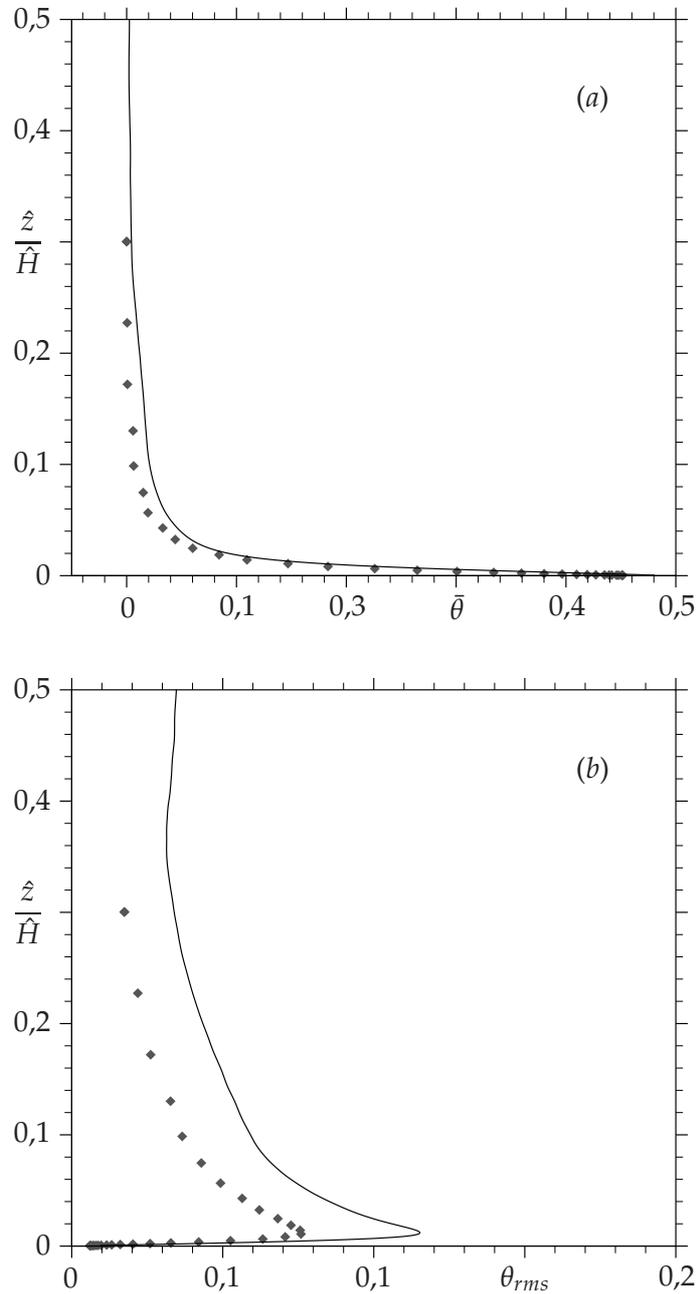


ABBILDUNG 5.5: Vergleich numerisch und experimentell ermittelter Daten: Profile (a) der Temperatur $\bar{\theta}$ und (b) der rms-Werte θ_{rms} . Periphere Position der experimentellen Daten von Ebert *et al.* (2008) für $\mathcal{Ra} = 1,3 \times 10^8$ (\blacklozenge); zeitlich und in periodischer Richtung gemittelte Profile der hochauflösten LES für $\mathcal{Ra} = 2,31 \times 10^8$ (—).

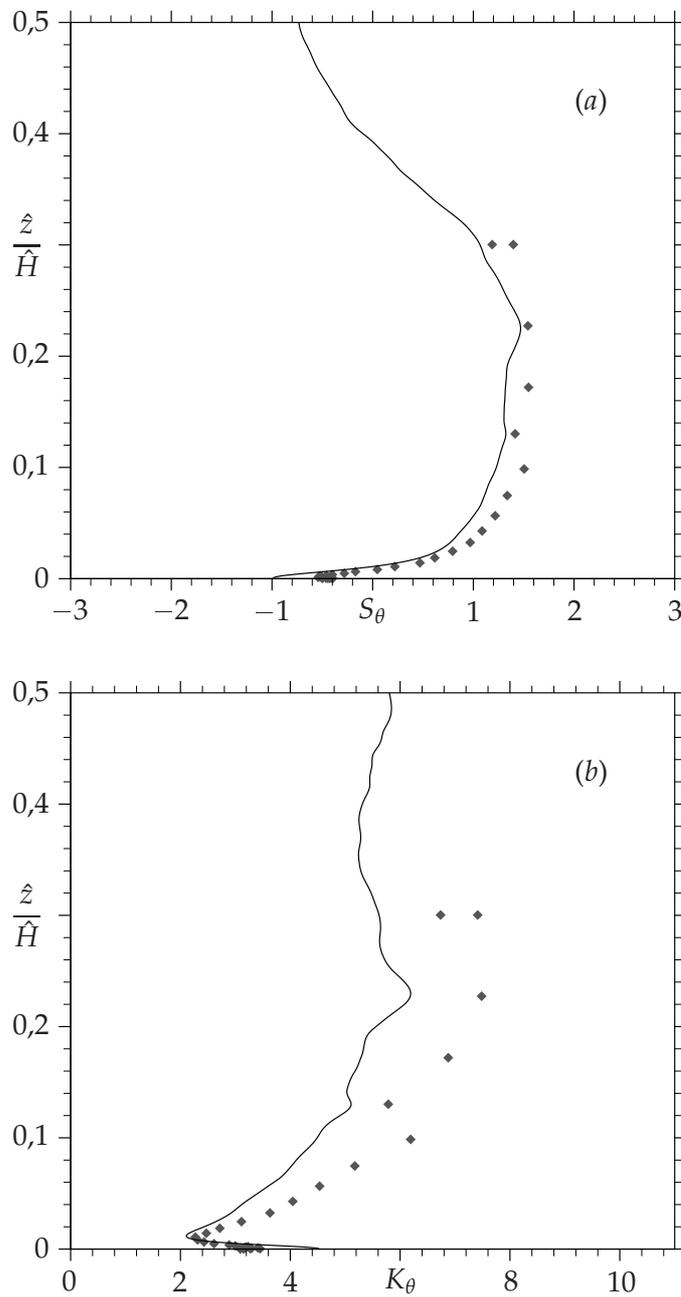


ABBILDUNG 5.6: Vergleich numerisch und experimentell ermittelter Daten: Profile (a) der Schiefe S_θ und (b) Wölbung K_θ . Periphere Position der experimentellen Daten von Ebert *et al.* (2008) für $Ra = 1,3 \times 10^8$ (\blacklozenge); zeitlich und in periodischer Richtung gemitteltes Temperaturprofil der hochaufgelösten LES für $Ra = 2,31 \times 10^8$ (—).

die turbulenten thermischen Dissipationsraten eine komplexere und von Ra abhängige Verteilung auf. Mit steigendem Ra verschwinden die lokalen Maxima in der Nähe der Seitenwände (siehe Abbildung 5.7 a). Dies deutet darauf hin, dass Temperaturfluktuationen im Bulk bei höheren Ra gleichmäßiger dissipiert werden. Am Rand der thermischen Grenzschicht ist ein lokales Minimum von $\overline{\epsilon_{\theta'}}$ auszumachen, wohingegen ein lokales Maximum am Rand der viskosen Grenzschichten entlang der Seitenwände zu beobachten ist. Beide lokalen Extrema verschwinden mit steigendem Ra , was die Vermutung zulässt, dass diese dem Einfluss der großskaligen Konvektionsrollen zugeschrieben werden können. Ein Vergleich der viskosen und thermischen turbulenten Dissipationsraten zeigt, dass letztere im gesamten Strömungsfeld wesentlich kleiner sind, was, wie eingangs erwähnt, bei einem Fluid mit $Pr = 0,7$ nicht zwingend zu erwarten ist.

Zur detaillierteren Auswertung wird das Verhältnis beider Dissipationsraten $\overline{(\partial u'_i/\partial x_j)^2}/\overline{(\partial \theta'/\partial x_i)^2}$ untersucht, das in Abbildungen 5.8 (a) und (b) für zwei Rayleigh-Zahlen dargestellt ist. Dieser Vergleich zeigt, dass das Verhältnis im Bulk größer ist als eins, aber in Richtung der Wände abnimmt. Von $Ra = 3,5 \times 10^5$ bis $Ra = 2,31 \times 10^8$ nimmt das Verhältnis in der Kernregion von ungefähr 7,5 auf 20 zu, was darauf hindeutet, dass Geschwindigkeitsfluktuationen diesen Bereich immer dominieren. Im Gegensatz dazu ist nahe dem Rand der thermischen Grenzschicht ein Minimum von $\overline{(\partial u'_i/\partial x_j)^2}/\overline{(\partial \theta'/\partial x_i)^2}$ zu finden, das mit steigendem Ra bis auf ungefähr eins abnimmt. Letzteres zeigt eine starke Wechselwirkung zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen an. Dies bedeutet, dass die Dissipation von turbulenter thermischer Energie in den Grenzschichten zunehmend stärker wird, während die Dissipation turbulenter kinetischer Energie die Kernregion dominiert.

5.3 Auswertung der turbulenten Fluktuationen

In Abbildung 5.9 sind zeitlich gemittelte, in periodischer Richtung aufgenommene Energiespektren des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes aus der zentralen vertikalen Ebene ($\hat{x}/\hat{B} = 0,5$) für verschiedene Wandabstände und Rayleigh-Zahlen dargestellt. Bei den Spektren der Geschwindigkeitskomponenten (a, b, c) fällt auf, dass diese sich mit steigendem Wandabstand dem $-5/3$ Gesetz (siehe Oboukhov 1962) annähern. Das Spektrum im Zentrum der Zelle ist dabei durch die Lage des $-5/3$ Abfalls und

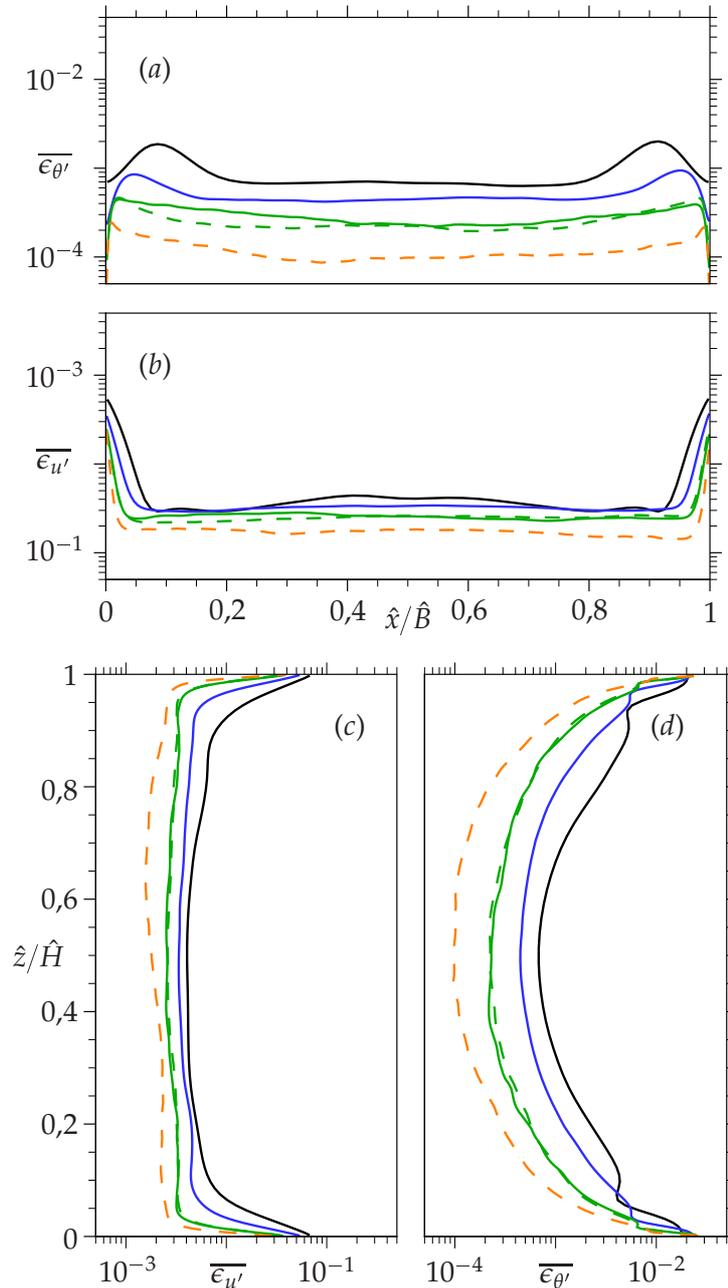


ABBILDUNG 5.7: Mittlere turbulente kinetische Dissipationsrate $\overline{\epsilon_{u'}}$ (b,c) und turbulente thermische Dissipationsrate $\overline{\epsilon_{\theta'}}$ (a,d) in den zentralen Ebenen $\hat{z}/\hat{H} = 0,5$ (a,b) und $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ (c,d) für $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^5$, $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^6$, $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^7$ und $\mathcal{Ra} = 2,31 \times 10^8$; DNS (—), LES (---).

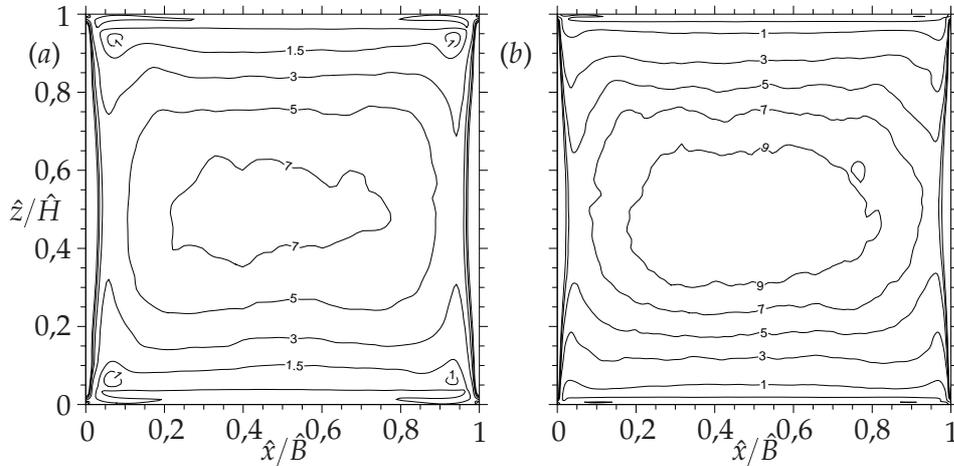
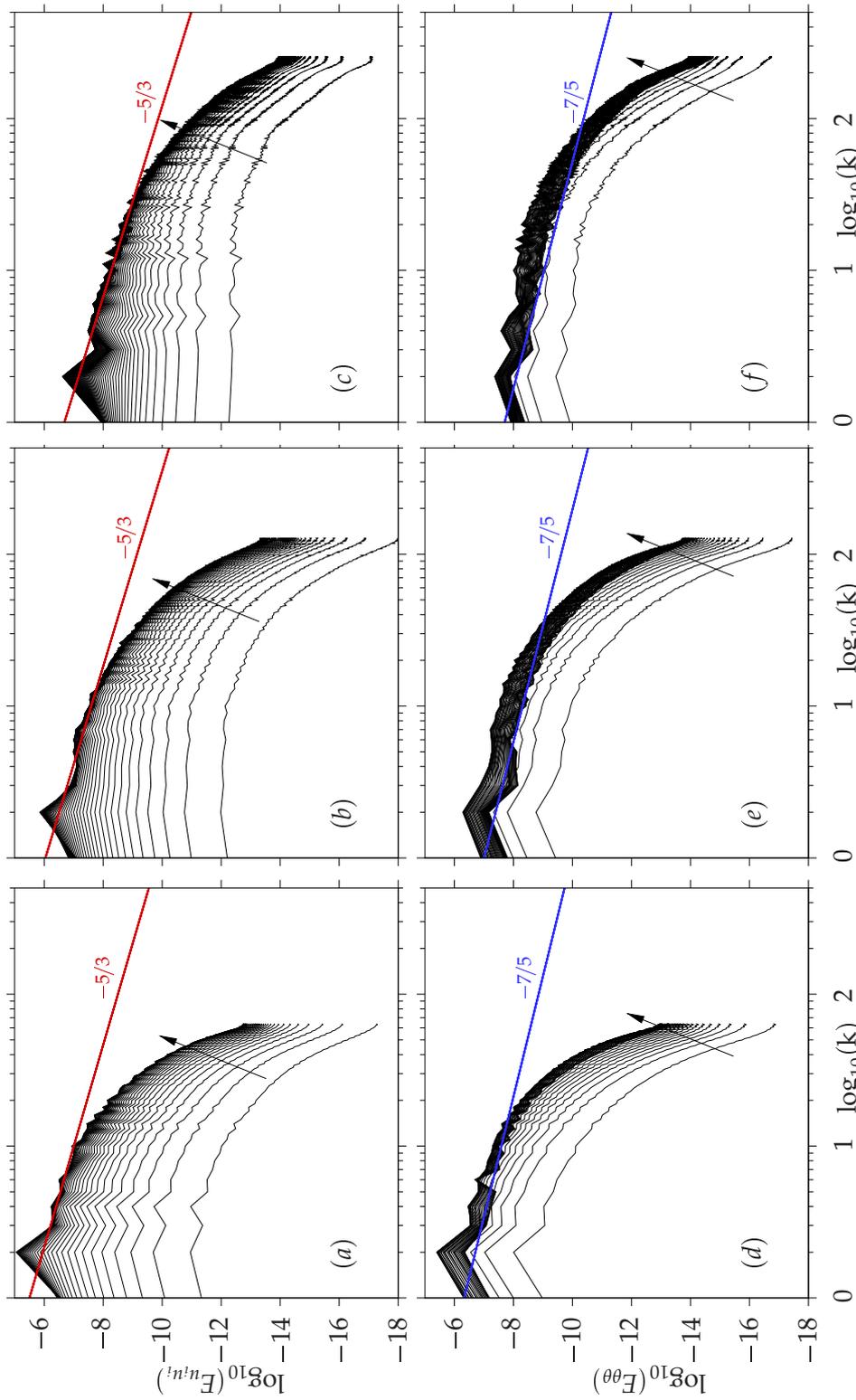


ABBILDUNG 5.8: Verhältnis der mittels direkter numerischer Simulation ermittelten Dissipationsraten $(\partial u'_i / \partial x_j)^2 / (\partial \theta' / \partial x_i)^2$ für zwei Rayleigh-Zahlen: (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$ und (b) $Ra = 3,5 \times 10^7$.

der steigende Wandabstand durch die Pfeile gekennzeichnet. In den Darstellungen der Temperaturspektren (*d,e,f*) ist im Gleichgewichtsbereich ein $-7/5$ Abfall erkennbar, die sog. Bolgiano (1959) Skalierung. Dies ist im Einklang mit Beobachtungen von Verzicco & Camussi (2003a) und Lohse (1994).

Bei der geringsten Rayleigh-Zahl zeigen die Spektren von Temperatur und Geschwindigkeit ein ausgeprägtes Maximum in der Kernregion ($\hat{z}/\hat{H} = 0,5$ und $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$, angedeutet durch die Potenzfunktion) für die Wellenzahl $k = 2$. Dies zeigt, dass sich zwei Paare von Konvektionsrollen in der Zelle ausgebildet haben. Mit steigendem Ra nimmt das Maximum des Temperaturspektrums bei $k = 2$ allerdings ab, während sich ein zweites Maximum bei $k = 4$ ausbildet, das ungefähr von gleicher Stärke ist wie das bei $k = 2$. Dies zeigt, dass der Einfluss der großen *Plumes* verschwindet und kleinere Strukturen beginnen das Strömungsfeld zu dominieren. Da Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld bei $Ra \geq 3,5 \times 10^7$ ein unterschiedliches Verhalten im Bulk aufweisen, lässt sich daraus der Schluss ziehen, dass sich die Strukturen beider Felder beginnen in der Kernregion voneinander zu entkoppeln, sobald sich ein vollturbulentes Strömungsfeld ausbildet. Dabei ist allerdings festzuhalten, dass die thermischen *Plumes* unabhängig von ihrer Größe die großskaligen Konvektionsrollen antreiben, was anhand des gleichbleibenden Maximums bei $k = 2$ im Geschwin-



ABILDUNG 5.9: Kinetische (a,b,c) und thermische Energiespektren (d,e,f) aufgenommen an der Position $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ für alle Gitterpunkte mit $\hat{z}/\hat{H} \leq 0,5$; $Ra = 3,5 \times 10^5$ (a,d), $Ra = 3,5 \times 10^6$ (b,e) und $Ra = 3,5 \times 10^7$ (c,f). Pfeile zeigen steigende Wandabstände an; die Position der Potenzgesetznäherung deutet das Zentrum der Zelle an.

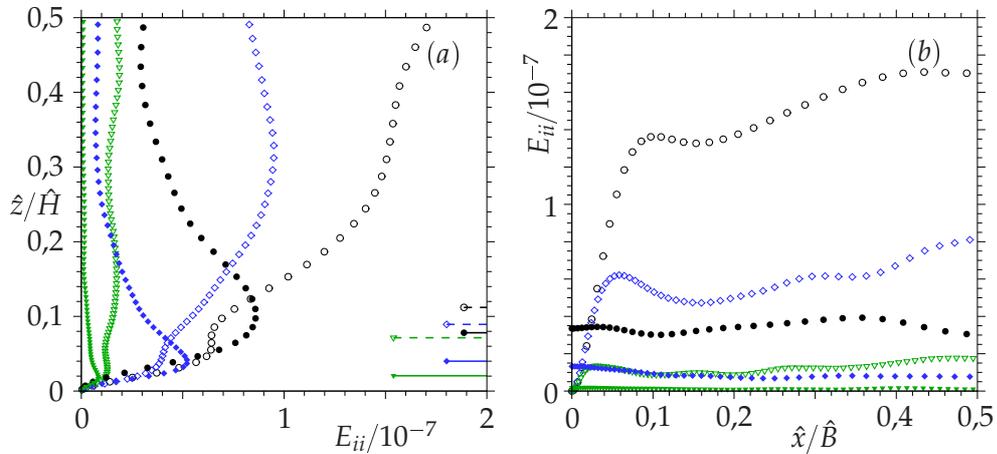


ABBILDUNG 5.10: Turbulente Energie der Geschwindigkeit (offene Symbole) und Temperatur (geschlossene Symbole) als Funktion des vertikalen Wandabstandes. Dargestellt ist die Wellenzahl $k = 8$ aufgenommen zwischen den vertikalen Wänden an der Stelle $\hat{x}/\hat{B} = 0.5$ (a) und zwischen den horizontalen Platten an der Stelle $\hat{z}/\hat{H} = 0.5$ (b). $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^5$ (\circ), $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^6$ (\diamond) und $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^7$ (∇); horizontale Linien bezeichnen das zeitliche Mittel der Temperatur- (—) und Geschwindigkeitsgrenzschichten (---).

digkeitsspektrum zu erkennen ist.

Es ist ebenfalls auffällig, dass die Energie der einzelnen Skalen des Temperaturspektrums nicht wie beim Geschwindigkeitsspektrum stetig bis zur Zellmitte zunimmt. Dieser Effekt wird detaillierter für eine beliebig gewählte Wellenzahl untersucht. In Abbildung 5.10 (a) sind die Energie der Wellenzahl $k = 8$ für $E_{\theta\theta}$ und $E_{u_i u_i}$ als Funktion des vertikalen Wandabstandes mittig zwischen den Seitenwänden dargestellt. Hier ist deutlich zu erkennen, dass die turbulente kinetische Energie kontinuierlich bis zur Zellmitte ansteigt. Allerdings weist der Verlauf außerhalb der thermischen, aber immer noch innerhalb der viskosen Grenzschicht einen Knick auf, bevor die turbulente kinetische Energie weiter zunimmt. Die Position des Knicks fällt dabei mit der des Minimums von $\overline{(\partial u'_i / \partial x_j)^2} / \overline{(\partial \theta' / \partial x_i)^2}$ zusammen, das bereits in § 5.2 diskutiert wurde. Die Temperaturspektren zeigen ein ausgeprägtes Maximum am Rand der thermischen Grenzschicht, das sich mit steigendem \mathcal{Ra} zunehmend stärker ausprägt, während das Niveau turbulenter thermischer Energie im Kernbereich beständig abnimmt. Dieser Zusammenhang, wie auch das Verhältnis der in § 5.2 diskutierten turbulenten Dissipationsraten, deuten darauf hin, dass am Rand der thermischen Grenzschicht eine starke Wechselwirkung zwischen beiden Fel-

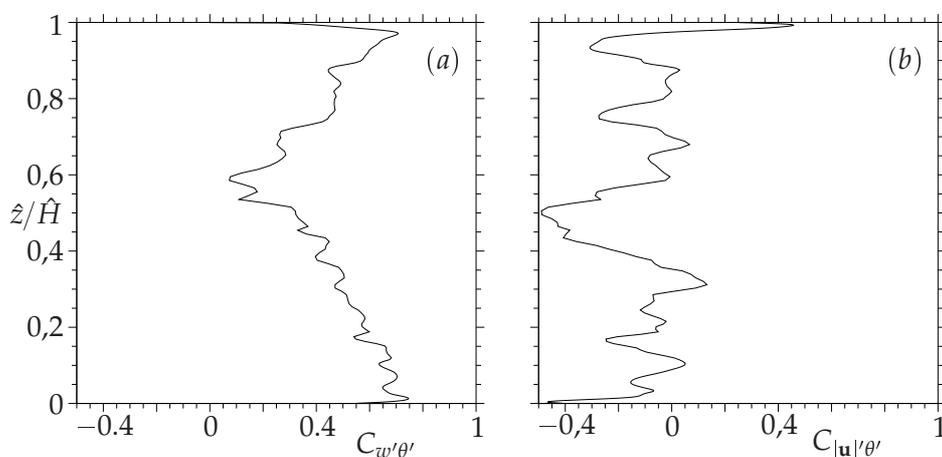


ABBILDUNG 5.11: Korrelation der turbulenten Fluktuationen von Geschwindigkeit und Temperatur an einer einzelnen Längsposition in der zentralen Ebene der Zelle, gebildet mit (a) den vertikalen Geschwindigkeitsfluktuationen $C_{w'\theta'}$ und (b) den Fluktuationen des Geschwindigkeitsbetrages $C_{|u|\theta'}$; $Ra = 2,31 \times 10^8$.

dern stattfindet, die auf den Einfluss der thermischen *Plumes* zurückzuführen ist, da in Abbildung 5.10 (b) ein ähnliches Verhalten in der Nähe der adiabaten Wände nicht zu beobachten ist. Hier ist lediglich die viskose Grenzschicht zu erkennen, während die Temperaturfluktuationen unabhängig von der horizontalen Position sind. Daraus folgt, dass die Entstehung der thermischen *Plumes* in der Grenzschicht mit einer Umwandlung von thermischer in kinetische Energie einhergeht. Aus diesem Grund nimmt die Energie des Geschwindigkeitsfeldes auch außerhalb der Grenzschicht beständig zu, wenn Fluid in Richtung der gegenüberliegenden wärmeleitenden Platte konvektiert, während die Energie des Temperaturfeldes abnimmt. Dies ist im Einklang mit den in § 3.1 erläuterten Schlussfolgerungen von Xi *et al.* (2004), die zeigen konnten, dass die thermischen *Plumes* Wirbel erzeugen, und somit kinetische Energie in das Strömungsfeld einbringen.

Um die Koppelung beider Felder näher zu untersuchen, wird der Korrelationskoeffizient $C_{w'\theta'} = \overline{w'\theta'} / \sqrt{\overline{w'^2} \overline{\theta'^2}}$ für eine Zeitreihe an einer vertikalen Position mittig zwischen den Seitenwänden bestimmt. Aus Abbildung 5.11 (a) geht hervor, dass die Korrelation der turbulenten Fluktuationen der Temperatur und der vertikalen Geschwindigkeitskomponente von 0,8 in der Nähe der wärmeleitenden Wände auf nahezu Null in Zellmitte abfällt. Abbildung 5.11 (b) zeigt zudem den auf den Fluktuationen

des Betrages der Geschwindigkeit $|\mathbf{u}'|$ basierenden Korrelationskoeffizienten. Daraus geht hervor, dass beide turbulente Felder innerhalb der Grenzschichten stark gekoppelt sind, während nur eine leichte (Anti-) Korrelation in der Kernregion beobachtet wird. Die Anti-Korrelation im Zentrum der Zelle ist aufgrund der sehr kleinen Fluktuationen in diesem Gebiet wahrscheinlich überzeichnet, da $|\mathbf{u}'|\theta'$ keine so starke Anti-Korrelation aufweist. Dieses Verhalten wird als Bestätigung für die Aussagen des vorangegangenen Abschnittes betrachtet.

Kapitel 6

Wärmeübertragung bei RB-Konvektion in der periodischen Zelle

Im Folgenden wird der Einfluss der thermischen *Plumes* auf die Wärmeübertragung näher untersucht werden. Dafür werden die thermischen Dissipationsraten einzelner Bereiche des Strömungsfeldes mittels Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktionen analysiert. Zur Auswertung der PDFs wird eine Filterfunktion

$$\Delta(n) \sim (\zeta_{max}/\zeta_{min})^{n/500} ,$$

mit den Parametern $n = 1, \dots, 500$, $\zeta_{min} = 10^{-7}$ und $\zeta_{max} = 10^5$ verwendet. Dabei ist $\zeta = \epsilon_\theta / \langle \epsilon_\theta \rangle_V$ eine mit der volumengemittelten thermischen Dissipation normierte thermische Dissipationsrate und $P(\zeta)$ bezeichnet ihre Wahrscheinlichkeit.

Abbildung 6.1 zeigt die PDFs der thermischen Dissipationsraten einer Vielzahl instantaner Strömungsfelder. Die thermischen Dissipationsraten mit $\zeta \gg 1$ werden dem Bereich in der Nähe der wärmeleitenden Wände zugeordnet indem die größten Temperaturgradienten auftreten und $\zeta \ll 1$ dem Bulk, wo Temperaturfluktuationen aufgrund des geringen mittleren Temperaturgradienten dominieren.

Betrachtet man die Ra -Abhängigkeit der in Abbildung 6.1 dargestellten PDFs, so fällt auf, dass die Ausläufer der Verteilungsfunktion sehr ähnlich sind, das Maximum der Funktion durch einen immer größer werdenden

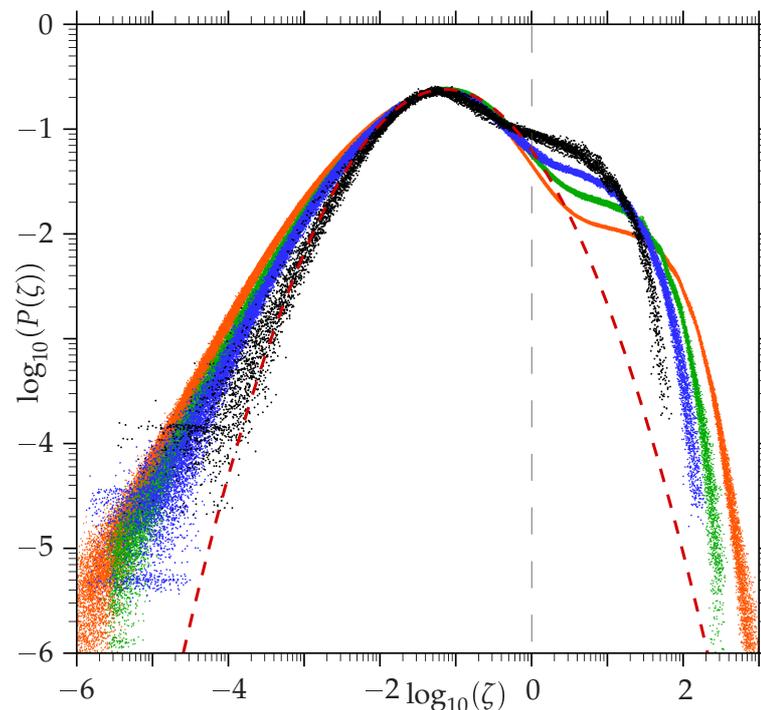


ABBILDUNG 6.1: PDFs der thermischen Dissipationsraten; die vertikale gestrichelte Linie bezeichnet die volumengemittelte thermische Dissipationsrate, eine Gaußverteilung (---), deren Erwartungswert entsprechend dem Maximum von $P(\zeta)$ gewählt wurde, ist als Referenz gegeben. Die farbliche Darstellung entspricht: $Ra = 3,5 \times 10^5$, $Ra = 3,5 \times 10^6$, $Ra = 3,5 \times 10^7$ und $Ra = 2,31 \times 10^8$.

Gradienten bei $\zeta \approx 1$ allerdings zunehmend stärker ausgeprägt wird. Dies deutet darauf hin, dass es bei hohen Ra eine deutliche Abgrenzung zwischen kleinen und großen thermischen Dissipationsraten gibt. Infolge von Intermittenzeffekten weichen die Ausläufer der Verteilung bei hohen Ra zunehmend von einer Gaußverteilung ab. Abbildung 6.1 zeigt ebenfalls, dass die Gaußverteilung für $\zeta \ll 1$ unter die Verteilung $P(\zeta)$ fällt, was im Einklang mit dem Verhalten eines passiven Skalars in einem periodischen Rechengebiet ist (siehe Schumacher & Sreenivasan 2005). Die Unterschiede zur PDF der thermischen Dissipationsraten eines passiven Skalars für $\zeta > 1$ werden daher auf den Einfluss der thermischen *Plumes* und Grenzschichten zurückgeführt.

Die Form der PDFs und ihre Änderung mit Ra legt außerdem nahe, dass die thermischen Dissipationsraten in drei Bereiche unterteilt werden können. Zur Unterteilung in kleine und große thermische Dissipationsraten werden die beiden Wendepunkte der PDF herangezogen, so dass sich,

wie in Abbildung 6.2 illustriert, drei Bereiche ergeben. Der obigen Annahme folgend repräsentieren diese Bereiche

- I den Bulk,
- II die *Plumes* und Mischungsschichten sowie
- III die konduktive Unterschicht,

und werden somit den Teilen des Strömungsfeldes zugeordnet, bei denen der Schwerkräfteinfluss wegen der kleinen Temperaturfluktuationen vernachlässigbar ist und die Konvektion der eines passiven Skalars ähnelt (I) bzw. von turbulenter Durchmischung (II) oder Wärmeleitung (III) dominiert werden.

Die die Wendepunkte und das Maximum von $P(\zeta)$ definierenden thermischen Dissipationsraten sind durch Tabelle 6.1 gegeben. Um den oben erläuterten Ansatz zur Aufteilung der thermischen Dissipationsraten zu untermauern, werden die PDFs nicht nur für das gesamte Volumen, sondern ebenfalls für bestimmte Teilvolumina berechnet. Hierbei werden thermische *Plumes* und Grenzschichten als Fluid mit $|\theta| > |\theta_e|$ betrachtet, wobei θ_e die in Tabelle 5.1 spezifizierte mittlere Temperatur am Rand der thermischen Grenzschicht ist. Idealerweise sollten daher die Beiträge dieses Bereiches die Summe der Bereiche II und III ergeben. Im Gegensatz zum vorherigen Ansatz, wo der Bulk als Bereich kleiner ζ definiert wurde, wird für die Analyse des Kernbereichs des Strömungsfeldes ein kubisches Teilgebiet aus der Mitte des Volumens geschnitten. Die Grenzen dieses Gebietes sind dabei so gewählt, dass sie sich außerhalb der in Tabelle 5.1 gegebenen mittleren Grenzschichtdicken befinden. Allerdings wird bei der Auswertung der Kernregion Fluid mit $|\theta| > |\theta_e|$ nicht berücksichtigt, so dass wiederum drei Gebiete

- a Kernregion ohne $|\theta| > |\theta_e|$ Fluid,
- b thermische Grenzschichten und *Plumes* ($|\theta| > |\theta_e|$) und
- c Zwischenschicht (Rest)

entstehen, deren Summe wieder die Gesamtverteilung ergibt. Dabei sollte beachtet werden, dass bewusst zwischen dem Bulk, d.h. Bereich I, der per Definition ausschließlich kleine thermische Dissipationsraten beinhaltet, und der Kernregion, d.h. Bereich a, der hauptsächlich geometrisch definiert ist, unterschieden wird.

Beispielhaft ist in Abbildung 6.2 dargestellt, dass der linke Teil der PDF der Kernregion α größtenteils mit dem Bulkbereich I übereinstimmt, aber zusätzlich größere thermische Dissipationsraten beinhaltet. Ein Vergleich der Beiträge der Bereiche α bis ϵ zu kleinen ζ der Gesamt-PDF, d.h. Bereich I, legt nahe, dass die Kernregion (α) ein Teilbereich des Bulk (I) ist. Der letztere Bereich erstreckt sich per Definition bis zu den Seitenwänden, so dass die Summe aus Bereichen α und ϵ die gleiche $\mathcal{R}a$ -Abhängigkeit aufweisen sollte wie Bereich I. Ähnliches gilt für die Bereiche β und III , deren rechte Enden beinahe identisch sind. Andererseits ist Bereich II von Beiträgen des Bereiches β dominiert, allerdings haben sowohl die Kernregion als auch die Zwischenschicht einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf diesen Bereich, was zum einen der Mitnahme von Umgebungsluft durch die thermischen *Plumes*, zum anderen aber auch dem Einfluss der Temperaturleitfähigkeit zugeschrieben werden kann. Abbildung 6.3 illustriert die Auswirkung der Prandtl-Zahl auf den durch die Temperaturleitfähigkeit beeinflussten Bereiche um einen thermischen *Plume*. Sie verdeutlicht, dass bei relativ geringen $\mathcal{P}r$ der *Plume* durch den Temperaturgradienten weniger scharf abgegrenzt ist als bei hohen. Daher wird dieser Bereich im Folgenden als *Plume*-und-Mischungsschicht-dominiert bezeichnet.

Der Bereich der *Plumes*/Mischungsschichten trennt den Bulk (I) von der konduktiven Unterschicht (III). Um die räumliche Verteilung der thermischen Dissipationsraten der Bereiche II und III zu illustrieren, sind Isolinien der zugehörigen ζ zusammen mit Isolinien der Temperatur in Abbildung 6.4 dargestellt. Daraus geht hervor, dass die Dissipationsraten des Bereiches III (dargestellt in rot) zu Bereichen gehören, in denen die Isothermen nahezu parallel zueinander verlaufen, was darauf hindeutet, dass diese Bereiche von der Wärmeleitung dominiert werden. Weiterhin ist zu erkennen, dass dem Bereich II zugeordnete thermische Dissipationsraten sehr gut mit den Mischungsschichten und den von den heißen (oder kalten) Wänden aufsteigenden (oder herabfallenden) thermischen *Plumes* übereinstimmen. Bereich I zugeordnete thermische Dissipationsraten sind hingegen hauptsächlich im Bulk zu finden.

Entsprechend der oben aufgeführten Definitionen für den Bulk, die *Plumes* und Mischungsschichten und die konduktive Unterschicht, können die jeweiligen Beiträge der Bestandteile des Strömungsfeldes zur mittleren Wärmeübertragung abgeschätzt werden. Die Ergebnisse dieses Ansatzes werden in § 6.3 diskutiert.

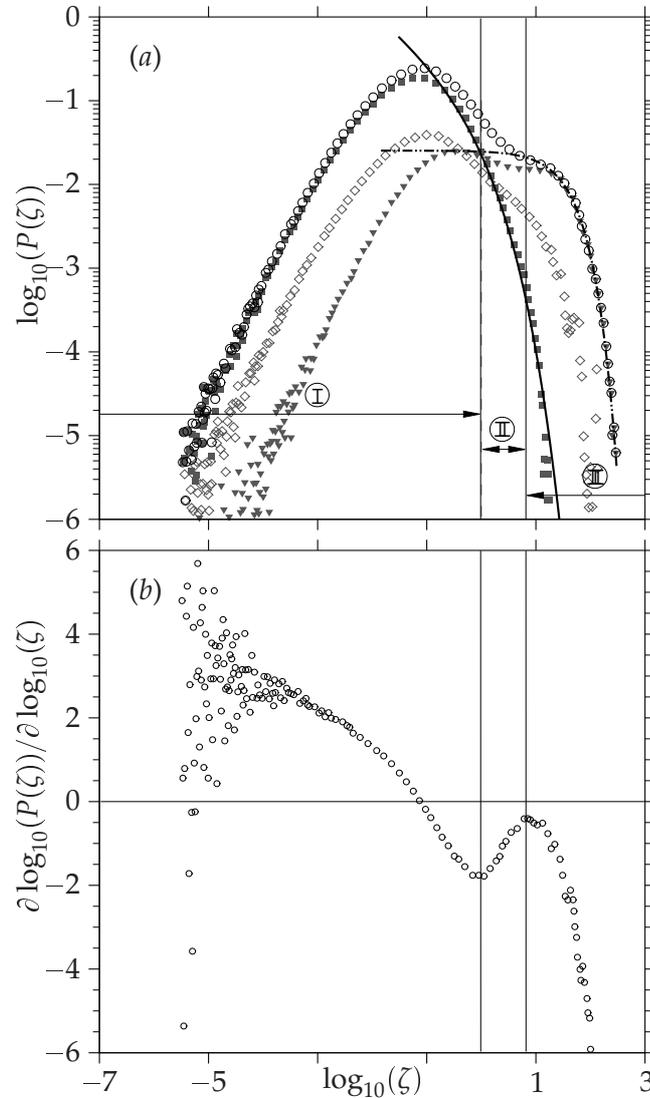


ABBILDUNG 6.2: (a) Beispielhafte Verteilung der thermischen Dissipationsraten abgeleitet von Simulationsergebnissen für $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^7$ in der periodischen Zelle. Dargestellt sind die Gesamt-PDF (\circ) und die Beiträge der drei Teilvolumina: a Kernregion: \blacksquare , dessen rechtes Ende der Verteilung durch eine gestreckte Exponentialfunktion (—) genähert werden kann, b die thermischen Grenzschichten und *Plumes*: ∇ und die exponentielle Näherung (- · -) für den rechten Ausläufer und c die Zwischenschicht: \diamond . (b) Die lokale Steigung der gleichen PDF illustriert die definition der Grenzen des Bereiches I, der durch die Bulk-turbulenz dominiert wird und III, der von der Wärmeleitung dominiert wird. Bereich II wird als *Plume* und Mischungsschicht dominierter Bereich betrachtet.

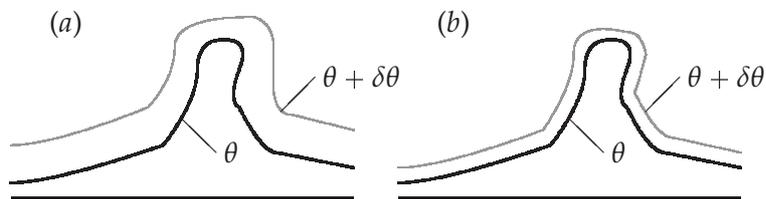


ABBILDUNG 6.3: Skizze des Einflussbereiches der thermischen *Plumes* auf das Temperaturfeld bei (a) relativ kleinen und (b) großen Prandtl-Zahlen. Die dicke Linie symbolisiert den Kernbereich des *Plumes*, die dünne das durch Wärmediffusion um das Temperaturinkrement $\delta\theta$ aufgeheizte Umgebungsfluid.

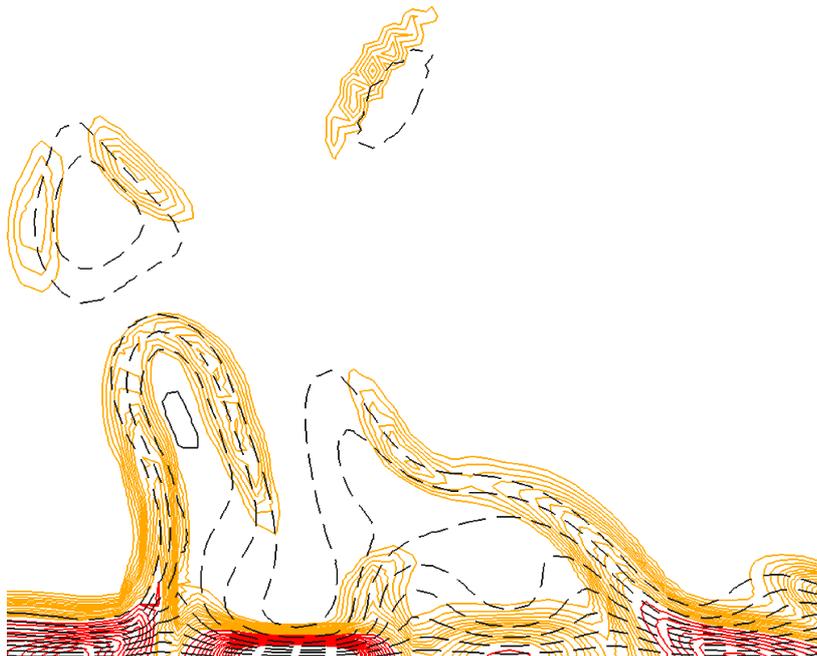


ABBILDUNG 6.4: Nahaufnahme der thermischen Dissipationsraten in einem vertikalen Schnitt durch die Mittelebene der periodischen Zelle. Rote Isolinien stellen Dissipationsraten des Bereiches III und orange des Bereiches II dar. Zusätzlich sind isotherme Linien (---) mit $0,1 \leq |\theta| \leq 0,45$ als Referenz dargestellt; $Ra = 3,5 \times 10^7$.

TABELLE 6.1: Lage des Maximums und der Wendepunkte der PDFs als Funktion von Ra , die Koeffizienten B_1 und B_2 der Least-square Fits ermittelt durch (6.1) und die Koeffizienten A_1 , A_2 und a aus (6.2) ermittelt durch Least-square Fits des gesamten Datensatzes für $\zeta_{limit} > 10 \zeta_{(P_{max})}$. Standardabweichung σ , Schiefe S und Wölbung K der thermischen Dissipationsraten PDFs.

Ra	$3,5 \times 10^5$		$3,5 \times 10^6$		$3,5 \times 10^7$		$2,31 \times 10^8$	
	DNS	DNS	DNS	DNS	LES	LES	LES	
$\zeta_{(P_{max})}$	$4,67 \times 10^{-2}$	$5,91 \times 10^{-2}$	$7,38 \times 10^{-2}$	$7,57 \times 10^{-2}$	$6,30 \times 10^{-2}$			
$\zeta_{(I-II)}$	0,169	0,495	0,971	0,887	0,978			
$\zeta_{(III-III)}$	0,879	3,16	6,56	7,47	11,5			
A_1	$1,806 \times 10^{-1}$	$1,884 \times 10^{-1}$	$1,672 \times 10^{-1}$	$4,017 \times 10^{-1}$	$4,294 \times 10^{-1}$			
A_2	3,915	2,464	1,998	2,879	2,967			
a	1,034	0,993	0,993	0,838	0,752			
B_1	$7,089 \times 10^{-2}$	$3,587 \times 10^{-2}$	$2,544 \times 10^{-2}$	$2,354 \times 10^{-2}$	$0,952 \times 10^{-2}$			
B_2	$8,536 \times 10^{-2}$	$4,419 \times 10^{-2}$	$2,890 \times 10^{-2}$	$2,712 \times 10^{-2}$	$1,263 \times 10^{-2}$			
σ	16,22	16,76	16,98	16,87	19,13			
S	-0,250	-0,248	-0,245	-0,247	-0,257			
K	-2,926	-2,924	-2,925	-2,925	-2,924			
σ_a	12,77	14,90	15,16	15,21	17,41			
S_a	-0,355	-0,303	-0,295	-0,291	-0,291			
K_a	-2,862	-2,900	-2,902	-2,905	-2,906			
σ_b	7,821	4,898	4,191	3,057	2,136			
S_b	-0,384	-0,265	-0,045	0,483	0,864			
K_b	-2,768	-2,524	-2,351	-1,915	-0,778			

6.1 Thermische Dissipation in der Grenzschicht

Die Temperatur am Rand der thermischen Grenzschicht θ_e wird anhand des statistisch gemittelten Temperaturprofils ermittelt. Somit werden *Plumes* und Grenzschichten, die als Fluid mit $|\theta| > |\theta_e|$ betrachtet werden, extrahiert. Da dieses Temperaturkriterium auf gemittelten Werten basiert und auf instantane Strömungsfelder angewandt wird, ist es jedoch nicht hinreichend, um die instantanen thermischen Grenzschichten von Intermitenzeffekten innerhalb des Bulk zu trennen. Dies resultiert in einem Überlappungsbereich von thermischen Dissipationsraten mit $\zeta \approx 1$, die wie in Abbildung 6.2 dargestellt, sowohl Bereich **a** als auch **b** zugeordnet werden können. Die Untersuchung dieses Bereiches zeigt, dass sehr hohe thermische Dissipationsraten hauptsächlich in dem wandnahen Bereich konzentriert sind. Abbildung 5.7 (d) zeigt, dass die hohen thermischen Dissipationsraten nicht allein auf den hohen mittleren Gradienten an der Wand zurückzuführen sind, sondern in hohem Maße von den Fluktuationen der thermischen Dissipationsraten in diesem Bereich hervorgerufen werden, da diese mit der \mathcal{Ra} -Zahl im wandnahen Bereich deutlich zunehmen. Im Gegensatz dazu nehmen die thermischen Dissipationsraten in den äußeren Grenzschichten (die hier als Mischungsschichten bezeichnet werden) und dem Kernbereich ab mit steigender Rayleigh-Zahl ab.

Weiterhin ist festzuhalten, dass Bereich **b** größtenteils mit Bereich **III** übereinstimmt und einer exponentiellen Beziehung der Form

$$P(\zeta \gg 1) = B_1 \exp(-B_2 \zeta) \quad (6.1)$$

folgen. PDFs dieses Bereiches (**b**) werden über einen langen Zeitraum ausgewertet. Die Koeffizienten von (6.1) werden sowohl für die instantane Verteilung $P(\zeta)$ als auch für deren Kollektivmittelwert für $\zeta > 2 \zeta_{II-III}$ bestimmt. Die dem Least-square Fit zugehörigen Daten sind in Abbildung 6.5 zu sehen. Aus dem kleiner werdenden Exponenten B_2 des rechten Ausläufers kann geschlossen werden, dass mit steigender \mathcal{Ra} ein größerer Bereich von Dissipationsraten an Bedeutung gewinnt. Dies ist in Übereinstimmung mit den Beobachtungen die zu Beginn des Kapitel 6 ausgeführt wurden.

Zeitreihen des Koeffizienten B_2 zweier Rayleigh-Zahlen sind in Abbildung 6.6 dargestellt. Sie zeigen, dass der Exponent in beiden Fällen oszilliert, was mit dem Ablösen und Auftreffen der *Plumes* aus bzw. in die Grenzschichten in Verbindung gebracht wird. Löst sich ein *Plume* aus der

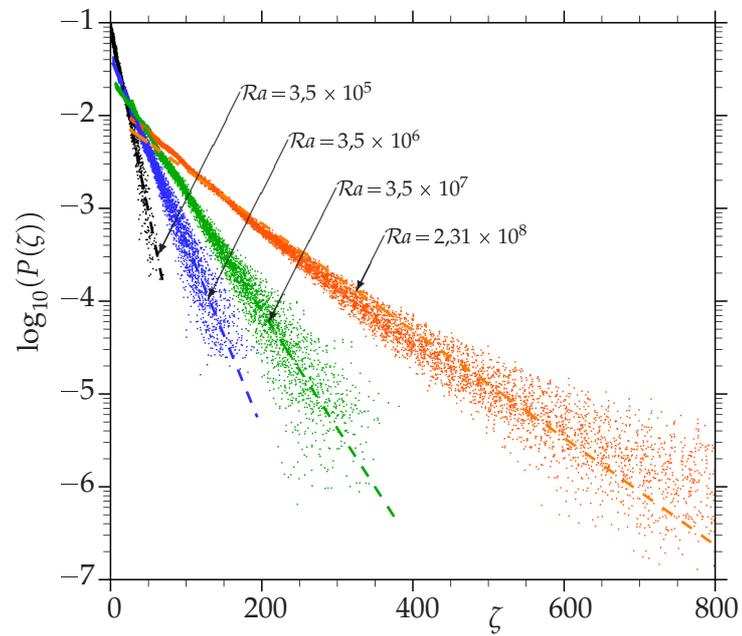


ABBILDUNG 6.5: Punktwolke der PDFs thermischer Dissipationsraten des Bereiches III, der die konduktive Unterschicht repräsentiert für eine Vielzahl instantaner Strömungsfelder, dargestellt für 4 Rayleigh-Zahlen. Zusätzlich ist der entsprechende Least-square Fit (---) der Daten dargestellt.

Grenzschicht, entfernt sich Fluid mit hohem ϵ_θ von der wärmeleitenden Wand, was zu einer geringeren Wahrscheinlichkeit von hohen thermischen Dissipationsraten, und somit größerem B_2 führt. Es ist zu sehen, dass die Häufigkeit solcher Ereignisse mit steigendem \mathcal{Ra} zunimmt, während die Amplituden der Zeitreihen kleiner werden. Dies deutet darauf hin, dass zunehmend kleinere *Plumes* häufiger mit den Grenzschichten in Wechselwirkung treten. Die Zeitreihen der Wölbung

$$K = \left(\sum_i \log(\zeta_i)^4 P(\zeta_i) \right) / \left(\sum_i \log(\zeta_i)^2 P(\zeta_i) \right) - 3$$

der instantanen PDFs des Bereiches \mathfrak{b} weisen ebenfalls ein zunehmend instationäres Verhalten auf, sind jedoch wesentlich glatter als die Zeitreihen von B_2 . Zudem steigt K von ungefähr $-2,8$ für $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^5$ auf $-0,8$ für $\mathcal{Ra} = 2,31 \times 10^8$ an, wobei die größte Änderung von K zwischen $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^7$ und $\mathcal{Ra} = 2,31 \times 10^8$ (siehe Tabelle 6.1) festzustellen ist. Daraus folgt, dass die thermische Grenzschicht sich erheblich ändert, wenn sich ein vollturbulentes Strömungsfeld eingestellt hat. Weiterhin unterstreicht ein Vergleich der in Tabelle 6.1 gegebenen statistischen Momente der PDFs, dass die Grenzschichten der LES trotz der guten Übereinstimmung der gemittelten Temperaturprofile am stärksten von der reduzierten Auflösung der Kernregion, und der damit verbundenen Feinstrukturmodellierung betroffen sind. Es ist zu sehen, dass die PDFs der Kernregion der DNS und der LES bei $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^7$ beinahe identische statistische Momente aufweisen, die der Grenzschichten sich jedoch signifikant unterscheiden.

6.2 Verhalten der Kernregion

Abbildung 6.7 zeigt die PDFs der Kernregion \mathfrak{a} der Strömungsfelder. Ein Vergleich dieser PDFs mit denen von Bereich \mathfrak{III} der volumenintegrierten PDFs verdeutlicht, dass ein Großteil der kleinen ζ -Einträge der in Abbildung 6.1 dargestellten PDFs auf die Kernregion zurückzuführen sind. Die detaillierte Analyse der PDFs des Bereiches \mathfrak{a} weist ein ähnliches Bild wie die Ergebnisse von Schumacher & Sreenivasan (2005) für einen konvektierenden passiven Skalar auf, da die PDFs der thermischen Dissipationsraten weder symmetrisch noch Gaußverteilt sind. Für sehr kleine ζ fällt die Gaußverteilung unter die PDFs, was auf starke Intermittenzeffekte der kleinen Skalen hindeutet. Der rechte Ausläufer der Kernregion-PDF kann für

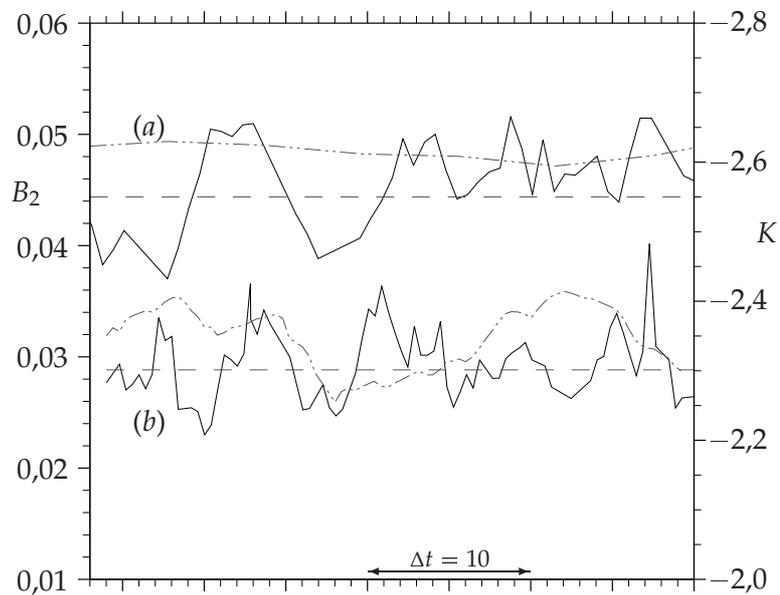


ABBILDUNG 6.6: Zeitreihe des Exponenten B_2 (—) von (6.1) und die Wölbung K der PDF des Bereiches b (- · -) für $Ra = 3,5 \times 10^6$ (a) und $Ra = 3,5 \times 10^7$ (b). Die gestrichelte Linie repräsentiert den durch Tabelle 6.1 gegebenen Kollektivmittelwert.

$\zeta > 10 \zeta_{(P_{max})}$ durch eine gestreckte Exponentialfunktion

$$P(\zeta > 10 \zeta_{(P_{max})}) = \frac{A_1}{\sqrt{\zeta}} \exp(-A_2 \zeta^{a/2}) \quad (6.2)$$

approximiert werden, die von Chertkov *et al.* (1998); Gamba & Kolokolov (1999) für Péclet-Zahlen $Pe \rightarrow \infty$ analytisch für turbulente Konvektion eines passiven Skalars hergeleitet und für die ein Exponent $a = 2/3$ vorhergesagt wurde. Die Kollektivmittelwerte der Koeffizienten der Least-square Fits sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Die Koeffizienten A_1 und A_2 weisen in der Nähe von $\mathcal{Ra} \approx 10^7$ ein Maximum auf, wohingegen $a \approx 1$ für $\mathcal{Ra} \leq 3,5 \times 10^7$. Allerdings nimmt a mit weiter steigendem \mathcal{Ra} ab, was darauf hindeutet, dass sich a , und damit das Verhalten des Kernbereichs, bei genügend hohen \mathcal{Ra} dem für einen passiven Skalar theoretisch vorhergesagten Wert annähert. Die von Cioni *et al.* (1995) durchgeführten Versuche zu stark turbulenter RB-Konvektion ($5 \times 10^6 \leq \mathcal{Ra} \leq 5 \times 10^9$) mit Quecksilber ($Pr \approx 0,025$) in einer zylindrischen Zelle zeigen ebenfalls, dass das Verhalten der klein-skaligen Temperaturfluktuationen dem eines passiven Skalars ähnelt.

Ähnlich wie bei den volumenintegrierten PDFs nehmen die Intermittenzeffekte bei den Ausläufern der Kernregion-PDFs mit \mathcal{Ra} zu und das Maximum $\zeta_{(P_{max})}$ bewegt sich für $\mathcal{Ra} < 3,5 \times 10^7$ in Richtung der volumengemittelten thermischen Dissipationsrate und wieder in Richtung kleinerer ζ für $\mathcal{Ra} = 2,31 \times 10^8$. Dieses Verhalten verdeutlicht, dass das Strömungsfeld eine signifikante Änderung erfährt, während es sich von einem transitionellen Strömungsfeld ($\mathcal{Ra} < 3,5 \times 10^7$) zu einem vollturbulenten entwickelt. Wie aus Tabelle 6.1 hervorgeht, beginnt sich im vollturbulenten Bereich die Form des rechten Ausläufers der PDF von einer Exponentialfunktion zu einer gestreckten Exponentialfunktion zu ändern. Daraus folgt, dass in der Kernregion zwei wesentliche Effekte beobachtet werden: eine kontinuierliche Abnahme von $\overline{\varepsilon_\theta}$ und eine Änderung der Form des rechten Ausläufers der PDF, nachdem das Strömungsfeld vollturbulent geworden ist. Die mittels DNS von Emran & Schumacher (2008) bestimmten PDFs der thermischen Dissipationsraten zeigen einen ähnlichen Trend. Für $\mathcal{Ra} = 10^7$ erhalten sie in einer zylindrischen Zelle mit $\Gamma = 1/2$ einen Exponenten $a = 1,4$, der mit steigender Rayleigh-Zahl ($\mathcal{Ra} = 10^8$ bzw. 10^9) auf $a = 0,88$ bzw. $a = 0,76$ abnimmt, und sich somit ebenfalls dem theoretischen Minimalwert annähert. Die Analyse der PDFs der Temperaturfluktuationen bei

RB-Konvektion verschiedener Rayleigh-Zahlen zeigt laut Christie (1993) keinen eindeutigen Trend bezüglich einer Transition von weicher zu harter Turbulenz, insbesondere nicht, wenn die Ergebnisse verschiedener Ausdehnungen des Fluids in den periodischen horizontalen Richtungen betrachtet werden. Im Gegensatz dazu deuten die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen mit denen von Emran & Schumacher (2008) darauf hin, dass sich der Bereich harter Turbulenz durch eine Annäherung an die Dynamik eines passiven Skalars, gekennzeichnet durch das Skalierungsverhalten der thermischen Dissipationsraten, auszeichnet. Ob der Bereich weicher Turbulenz durch $a = 1$ oder zumindest $a = \text{const}$ gekennzeichnet ist, kann durch einen Vergleich der Daten mit den Ergebnissen von Emran & Schumacher (2008) aufgrund mangelnder Daten für $Ra < 10^7$ weder bestätigt noch widerlegt werden.

Zeitreihen der durch Least-square Fits berechneten Parameter A_2 und a der instantanen Strömungsfelder zeigen, dass beide Parameter Fluktuationen unterliegen. Der Exponent a weist starke Spitzen auf, die seltene, aber extreme Ereignisse darstellen. Dies spiegelt sich ebenfalls im zeitlichen Verhalten der Wölbung K wieder, die ebenfalls für die PDFs der Kernregion der instantanen Strömungsfelder berechnet wurde. Abbildung 6.8 verdeutlicht, dass der Kollektivmittelwert von K mit steigendem Ra abnimmt, d.h. die PDFs der Kernregion werden flacher, wohingegen ebenfalls festzustellen ist, dass die Spitzen von K deutlich ausgeprägter werden. Dies verdeutlicht, dass die thermischen Dissipationsraten bei größeren Ra in der Kernregion gleichmäßiger verteilt sind und die Strömung in diesem Bereich nur selten von thermischen *Plumes* gestört wird.

6.3 Abschätzung der Wärmeübertragung durch die thermischen Plumes

Zur Analyse der Einträge unterschiedlicher Bestandteile des Strömungsfeldes zur Gesamtwärmeübertragung, werden die jeweiligen PDFs der Bereiche a bis c der instantanen Strömungsfelder einer Zeitreihe gemittelt. Auf diese Weise können die Beiträge dieser Bereiche quantifiziert werden. Zusätzlich werden die durch die turbulenten Fluktuationen hervorgerufenen Beiträge untersucht, indem die von den mittleren Temperaturgradienten verursachten Beiträge von den instantanen Beiträgen abgezogen werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst und werden mit den

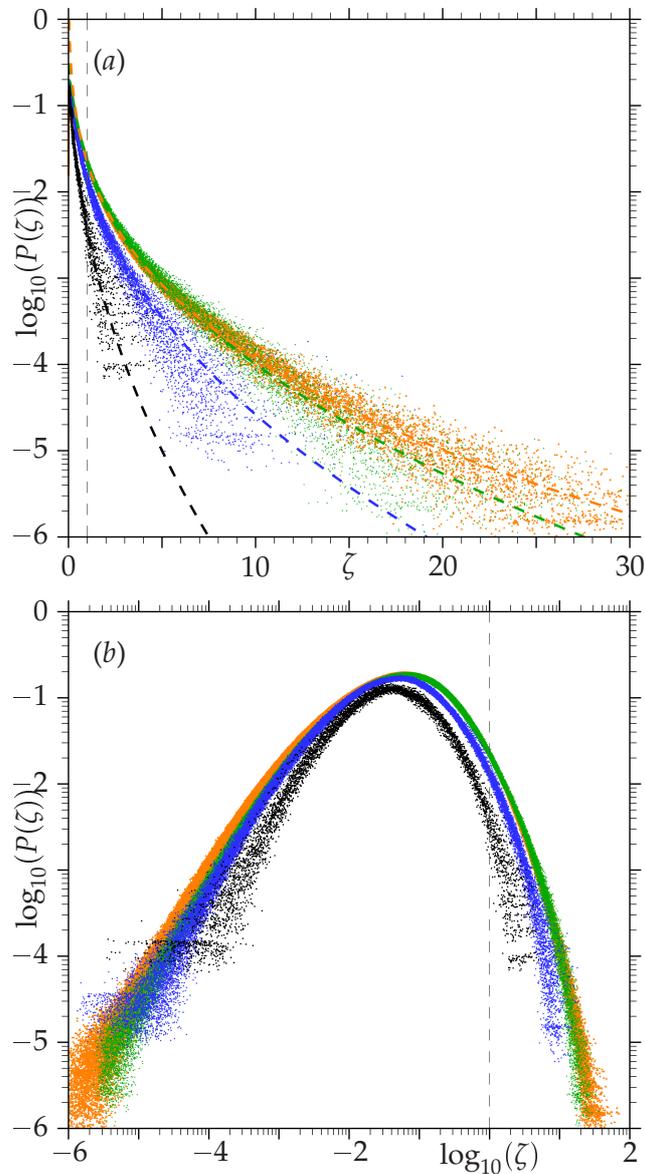


ABBILDUNG 6.7: PDFs der Kernregion (a) mit den entsprechenden Least-square Fits (---); die vertikale Linie deutet die mittlere thermische Dissipationsrate an. (b) zeigt die gleichen PDFs mit log – log Skalierung, um das Verhalten der kleinen thermischen Dissipationsraten zu illustrieren. Die farbliche Darstellung entspricht: $Ra = 3,5 \times 10^5$, $Ra = 3,5 \times 10^6$, $Ra = 3,5 \times 10^7$ und $Ra = 2,31 \times 10^8$.

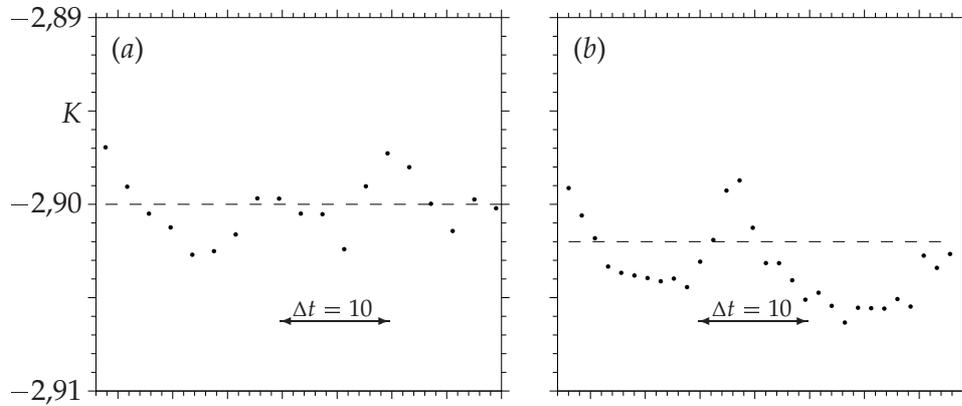


ABBILDUNG 6.8: Zeitreihe der Wölbung K der Kernregion-PDFs für $Ra = 3,5 \times 10^6$ (a) und $Ra = 3,5 \times 10^7$ (b) über der Zeit t aufgetragen. Die gestrichelten Linien (– –) sind die Kollektivmittelwerte gegeben durch Tabelle 6.1.

Beiträgen der Bereiche I bis III verglichen, die in der gleichen Tabelle aufgeführt sind.

Aus Tabelle 6.2 (oben) folgt, dass der relative Beitrag der Kernregion (a) mit steigender Rayleigh-Zahl zunimmt bis ein vollturbulentes Temperaturfeld erreicht ist. Andererseits zeigt die Mittelung über den Bulk-Bereich (I) im untersuchten Rayleigh-Zahlbereich nahezu gleichbleibende Beiträge. Dies impliziert, dass die Wärmeübertragung von den seitenwandnahen Gebieten in die Kernregion umverteilt wird. Zhou & Xia (2002) fanden mit ihren Experimenten heraus, dass die thermischen *Plumes* vorzugsweise entlang der Seitenwände aufsteigen. Bei hinreichend großem Ra scheinen sich jedoch zunehmend mehr *Plumes* durch das Innere der Zelle fort zu bewegen, was auch anhand der Schnappschüsse der in Abbildung 5.1 dargestellten Strömungsfelder zu erkennen ist. Shishkina & Wagner (2007b) zeigten, dass die Verteilung des lokalen Wärmestroms senkrecht zu den vertikalen Wänden bei größeren Ra gleichmäßiger wird, was bedeutet, dass die Beiträge der Kernregion steigen müssen. Die Analyse der fluktuierenden Anteile der thermischen Dissipationsraten ergibt zudem, dass die den mittleren Temperaturgradienten zuzuschreibenden Beiträge in der Kernregion erwartungsgemäß vernachlässigbar sind. Dies befindet sich in Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen von He *et al.* (2007). Andererseits nehmen die Beiträge der turbulenten Fluktuationen des Bulkbereiches zu, und nähern sich somit dem Verhalten des Kernbereiches an,

da die Einträge aufgrund der mittleren Temperaturgradienten in der Nähe der adiabaten Wände mit steigender Rayleigh-Zahl sehr schnell abnehmen. Dies lässt vermuten, dass der Einfluss der adiabaten Wände auf das Strömungsfeld mit steigender Rayleigh-Zahl schwindet.

Aus der Tabelle ist ebenfalls ersichtlich, dass die Beiträge des *Plume*- und Grenzschicht-dominierten Bereiches, d.h. die Summe der Beiträge aus Bereichen II und III ungefähr konstant ist. Im Gegensatz dazu nehmen die Beiträge des Bereiches *b* mit Ra leicht ab, wohingegen die Beiträge der Zwischenschicht *c* zunächst ab- und oberhalb von $Ra = 3,5 \times 10^7$ wieder zunehmen. Dieses Verhalten ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass das Kriterium $|\theta| > |\theta_e|$ nicht hinreichend ist, um die thermischen *Plumes* und Grenzschichten vom Bulk zu unterscheiden, da auf diese Weise der Einfluss von Intermittenzeffekten nicht berücksichtigt werden kann. Trotzdem zeigt Tabelle 6.2 (unten), dass die Beiträge der konduktiven Unterschicht bei hohen Ra einen immer geringeren Anteil an der Gesamtwärmeübertragung haben. Im Umkehrschluss bedeutet dies wiederum, dass die thermischen *Plumes* trotz ihrer abnehmenden Größe mit steigendem Ra zunehmend mehr Wärme transportieren. Andererseits nehmen die Beiträge zur konduktiven Unterschicht durch turbulente Fluktuationen im untersuchten Rayleigh-Zahlbereich vom kleinsten zum größten Ra von 18% auf 73% zu. Insgesamt zeigt dies, dass turbulente Fluktuationen in der wandnahen Schicht mit zunehmender Rayleigh-Zahl eine immer wichtigere Rolle spielen. Dieses Verhalten wird ebenfalls von Emran & Schumacher (2008) durch die Analyse der DNS-Daten von RB-Konvektion in einer zylindrischen Zelle mit $\Gamma = 1$ und $Pr = 0,7$ bestätigt. Sie beobachten, dass die auf den Temperaturfluktuationen beruhenden thermischen Dissipationsraten in der Grenzschicht einen nicht zu vernachlässigenden Anteil an der gesamten thermischen Dissipation in diesem Bereich haben.

Ungeachtet der Tatsache, dass die *Plumes* und Mischungsschichten zunehmend mehr zum Wärmetransport beitragen, ist zu beobachten, dass ihre Beiträge aufgrund turbulenter Fluktuationen kontinuierlich abnehmen, was sich in Übereinstimmung mit Ergebnissen von He *et al.* (2007) befindet. Daher lässt sich zusammenfassend sagen, dass das Auftreffen der thermischen *Plumes* auf die Grenzschichten mit steigender Rayleigh-Zahl, und damit zunehmenden Auftriebskräften eine turbulenterere Unterschicht verursacht, wohingegen die *Plumes* selbst weniger von der sie umgebenden Turbulenz beeinflusst werden.

TABELLE 6.2: Beiträge der Bereiche α bis ϵ (oben) und I bis III (unten) zur volumengemittelten thermischen Dissipationsrate für die periodische Zelle. Werte in Klammern geben die Beiträge der turbulenten Fluktuationen zum mittleren Beitrag an.

	Ra	$3,5 \times 10^5$	$3,5 \times 10^6$	$3,5 \times 10^7$	$2,31 \times 10^8$
		DNS	DNS	DNS	LES
Kernregion $\langle \epsilon \rangle_\alpha / \langle \epsilon \rangle_V$		0,04 (0,04)	0,08 (0,07)	0,11 (0,11)	0,10 (0,10)
Grenzschichten und Plumes $\langle \epsilon \rangle_b / \langle \epsilon \rangle_V$		0,75 (0,29)	0,76 (0,29)	0,70 (0,28)	0,67 (0,27)
Zwischenschicht $\langle \epsilon \rangle_c / \langle \epsilon \rangle_V$		0,21 (0,10)	0,16 (0,09)	0,19 (0,11)	0,23 (0,14)
Bulk $\langle \epsilon \rangle_I / \langle \epsilon \rangle_V$		0,12 (0,03)	0,11 (0,06)	0,12 (0,10)	0,12 (0,10)
pl /Mischungsschichten $\langle \epsilon \rangle_{II} / \langle \epsilon \rangle_V$		0,54 (0,32)	0,67 (0,30)	0,73 (0,27)	0,74 (0,25)
konduktive Unterschicht $\langle \epsilon \rangle_{III} / \langle \epsilon \rangle_V$		0,34 (0,06)	0,22 (0,09)	0,15 (0,11)	0,14 (0,10)
		LES	LES	LES	LES
		0,10 (0,07)	0,10 (0,07)	0,10 (0,07)	0,10 (0,06)

Kapitel 7

Thermische Konvektion in geschlossenen kartesischen Zellen

Im nachstehenden Kapitel wird das Verhalten der Konvektionsströmungen in einem Würfel und einer geschlossenen quaderförmigen Zelle analysiert und mit den zuvor diskutierten Ergebnissen der periodischen Zelle verglichen. Hauptaugenmerk ist hier die Untersuchung der Ra -Abhängigkeit der Strömung bzgl. des Einflusses der Geometrie.

7.1 Globale Struktur der Strömungsfelder

Instantane Strömungsfelder der RB-Konvektion in einem Würfel und einer geschlossenen quaderförmigen Zelle sind in Abbildung 7.1 anhand von Isoflächen der Temperatur dargestellt. Die Abbildung verdeutlicht das unterschiedliche Verhalten der Strömung in beiden Geometrien. In der quaderförmigen Geometrie bilden sich, ähnlich wie in der periodischen Zelle, vier Rollenstrukturen quer zur Längsrichtung der Zelle aus, während die *Plumes* in dem Würfel vornehmlich in den Ecken aufsteigen bzw. herabsinken. Die Abbildung veranschaulicht, dass die Ausdehnung der *Plumes* bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ von der gleichen Größenordnung ist, wie die Abmessungen des Behältnisses, während die *Plumes* bei $Ra = 3,5 \times 10^7$ ungefähr eine Größenordnung kleiner sind. Besonders deutlich wird dies durch den „Fussabdruck“ der *Plumes* in den Grenzschichten, die speichenförmige

Muster in der Grenzschicht hervorrufen. Bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ ist nur eine einzelne Speiche auszumachen, während die Grenzschicht bei $Ra = 3,5 \times 10^7$ bereits von einer Vielzahl von Speichen oder Wurzeln der thermischen *Plumes* durchzogen ist.

Im Gegensatz zu den experimentellen Beobachtungen von Cioni *et al.* (1997) bei RB-Konvektion in einer zylindrischen Zelle, ist weder bei der Simulation in der kubischen noch in der quaderförmigen Zelle eine Umkehr der LSC zu beobachten. Dies kann aber auch auf die im Verhältnis zum Experiment verhältnismäßig kurze Simulationszeit von ungefähr 50 konvektiven Zeitskalen zurückgeführt werden.

Die folgenden Abbildungen 7.2 – 7.9 zeigen das aus ca. 50 Schnappschüssen über den Zeitraum t_{mittel} (Tabelle 7.1) gemittelte Strömungsfelder der beiden geschlossenen Zellen mit den zugehörigen rms-Werten. Die Visualisierung der mittleren Geschwindigkeitsfelder in der zentralen Ebene $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ der quaderförmigen Zelle (Abbildung 7.2) verdeutlicht, dass sich für alle drei simulierten Rayleigh-Zahlen vier Konvektionsrollen quer zur Längsrichtung der Zelle ausbilden. Zudem nehmen, dass die mittleren (normierten) Geschwindigkeitsbeträge im gesamten Querschnitt mit steigender Ra -Zahl ab, während sich die Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes, dargestellt in Abbildung 7.3 durch die rms-Werte von $|u|$, im Volumeninneren mit steigender Rayleigh-Zahl gleichmäßiger verteilen. Bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ sind hohe rms-Werte auf die Bereiche der aufsteigenden oder sinkenden Strömung beschränkt. Bei höherer Rayleigh-Zahl nimmt die turbulente Durchmischung im Kernbereich zu, so dass die Bereiche hoher rms-Werte der Geschwindigkeit relativ gleichmäßig über das Kernvolumen verteilt sind.

Anhand des mittleren Temperaturfeldes der Ebene $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ (Abbildung 7.4) wird deutlich, wie sich warmes bzw. kaltes Fluid über die gesamte Schichthöhe \hat{H} erstreckt, der Kontrast dieser Bereiche gegenüber der mittleren Fluidtemperatur $\bar{\theta}_0$ mit steigender Ra -Zahl jedoch abnimmt. Dies verdeutlicht die stärkere turbulente Durchmischung des Kernbereiches in der Rayleigh-Zelle. Anhand der in den Abbildungen 7.2 und 7.4 dargestellten mittleren Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder erkennt man die Rollenstruktur und damit den Wind, der mit steigender Ra -Zahl an Intensität verliert. Diese Visualisierungen veranschaulichen das in den Kapiteln 5 und 6 diskutierte Verhalten des Strömungsfeldes, nämlich dass das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld im Volumeninneren der Konvek-

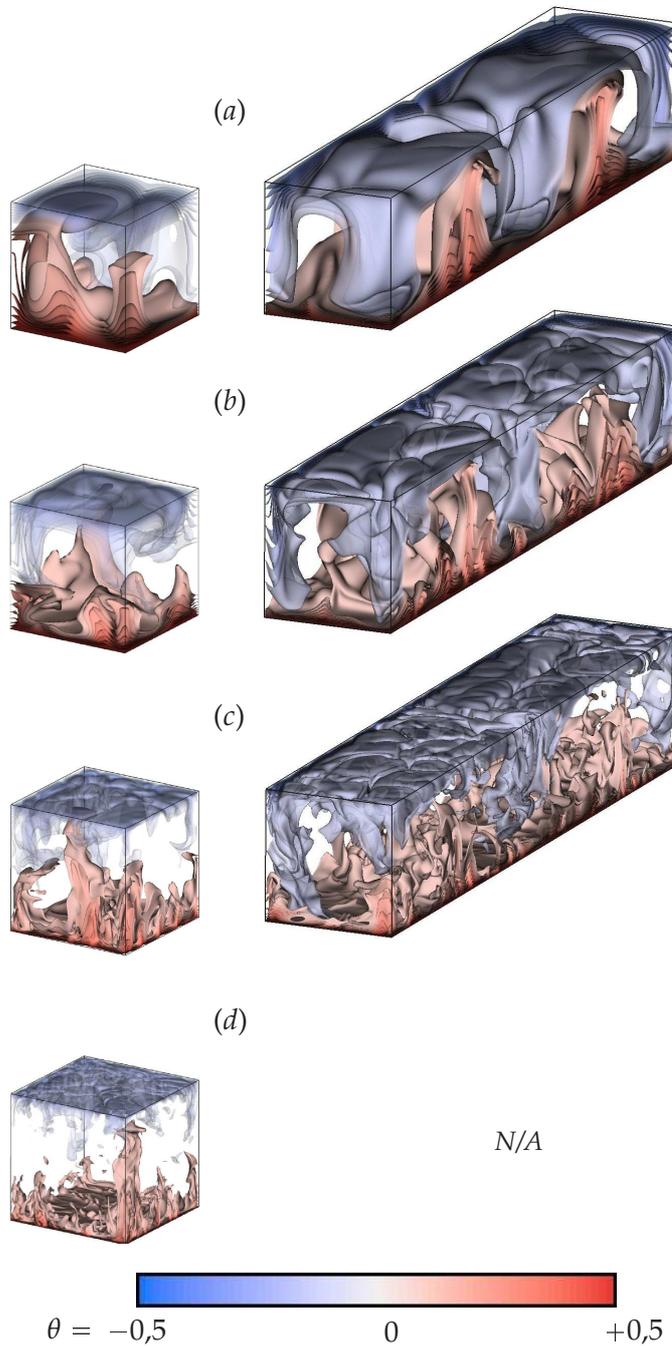


ABBILDUNG 7.1: Instantane Temperaturfelder in der kubischen und der quaderförmigen Zelle dargestellt durch 16 Isothermen mit $|\theta| \geq 0,1$; (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$, (b) $Ra = 3,5 \times 10^6$, (c) $Ra = 3,5 \times 10^7$ und (d) $Ra = 2,31 \times 10^8$.

TABELLE 7.1: Simulationsergebnisse der thermischen Konvektion in der quaderförmigen Zelle und dem Würfel.

Ra	$3,5 \times 10^5$	$3,5 \times 10^6$	$3,5 \times 10^7$	$2,31 \times 10^8$
<i>Würfel</i>	DNS	DNS	DNS	DNS
Gittergröße	$64 \times 64 \times 64$	$96 \times 96 \times 96$	$190 \times 190 \times 190$	$256 \times 256 \times 256$
Nu	6,10	11,98	23,11	39,72
t_{mittel}	106	44	34	30
$h_{V,\text{max}}$	$3,03 \times 10^{-2}$	$2,53 \times 10^{-2}$	$1,01 \times 10^{-2}$	$6,83 \times 10^{-3}$
<i>Quader</i>	DNS	DNS	DNS	DNS
Gittergröße	$64 \times 322 \times 64$	$160 \times 578 \times 160$	$160 \times 578 \times 160$	—
Nu	6,13	12,15	22,86	—
t_{mittel}	57	34	61	—
$h_{V,\text{max}}$	$3,03 \times 10^{-2}$	$1,11 \times 10^{-2}$	$1,11 \times 10^{-2}$	—

onszelle mit steigender Rayleigh-Zahl dekorrelieren, was auch an der Ra -Abhängigkeit der rms-Werte (Abbildungen 7.5 und 7.9) zu erkennen ist.

Die Analyse der Strömungsfelder in der kubischen Zelle ergibt zudem, dass sich die Hauptströmungsrichtung bei $Ra = 3,5 \times 10^5$, wie bei Christie (1993) beschrieben, parallel zu einer Seitenfläche ausbildet. Animationen bei $Ra = 3,5 \times 10^7$ zeigen, dass die Orientierung der Rotationsachse in dem Würfel abwechselnd parallel zu einer der Seitenflächen verläuft. Diese starken Schwankungen der Orientierung der LSC werden als Instabilität der Strömung betrachtet. Eine Instabilität der LSC tritt bei der gleichen Rayleigh-Zahl auch in der periodischen Zelle, allerdings wie in Kapitel 5 diskutiert durch zeitweises Zusammenbrechen der Rollenstruktur, auf. daraus folgt, dass diese Instabilität charakteristisch für $Ra \approx 10^7$, und damit für den Übergang zu ausgebildeter Turbulenz ist.

Die in den Abbildungen 7.6 und 7.8 anhand von horizontalen Schnitten am Rand der thermischen Grenzschichten dargestellten mittleren Strömungsfelder im Würfel verdeutlichen das Verhalten des Strömungsfeldes von einsetzender Turbulenz bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ bis hin zu stark ausgebildeter Turbulenz bei $Ra = 2,31 \times 10^8$. Wie bereits eingangs erwähnt, ist bei der kleinsten simulierten Rayleigh-Zahl die Dominanz der Konvektionsrolle parallel zu einer Seitenfläche zu erkennen, während die Hauptströmungsrichtung bei der höchsten Rayleigh-Zahl in diagonaler Richtung verläuft. Bei $Ra = 3,5 \times 10^6$ ist der Beginn der Transition zur diagonalen Hauptströmungsrichtung zu erkennen, die sich besonders stark im Geschwindigkeitsfeld widerspiegelt. Dieser Übergang von einer zur anderen globalen Strömungsstruktur erklärt das oben beschriebene Verhalten, der stark oszillierenden Konvektionswalze.

7.2 Vergleich der Wärmetransporteigenschaften

Die Analyse des von der Nusselt-Zahl repräsentierten mittleren Wärmetransportes ergibt, dass dieser nur einem geringen geometrischen Einfluss unterliegt, da diese für $Ra = 3,5 \times 10^5$ weniger als 2% Unterschied aufweisen. In Abbildung 7.10 ist die normierte Nusselt-Zahl als Funktion der Rayleigh-Zahl aufgetragen. Als Normierung dient hier Ra^β , wobei für den Exponenten der von Grossmann & Lohse (2004) vorgeschlagene Wert für die Skalierung der Nusselt-Zahl $\beta = 0,29$ gewählt wird. Aus der Abbildung geht hervor, dass die Skalierung von Nu für alle drei Geometrien

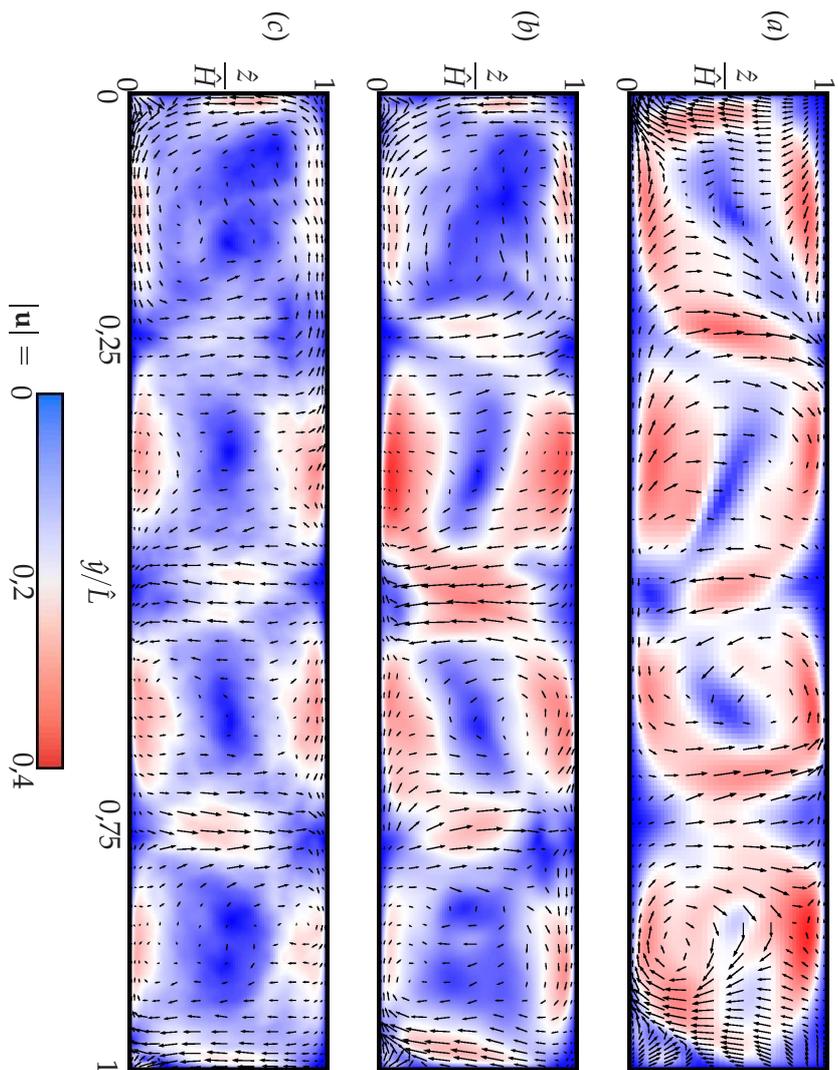


ABBILDUNG 7.2: Mittleres Geschwindigkeitsfeld in der zentralen Ebene $\xi/\beta = 0,5$ der quaderförmigen Zelle: (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$, (b) $Ra = 3,5 \times 10^6$ und (c) $Ra = 3,5 \times 10^7$. Vektoren (ausgedünnt) stellen die Geschwindigkeitskomponenten in der Ebene dar.

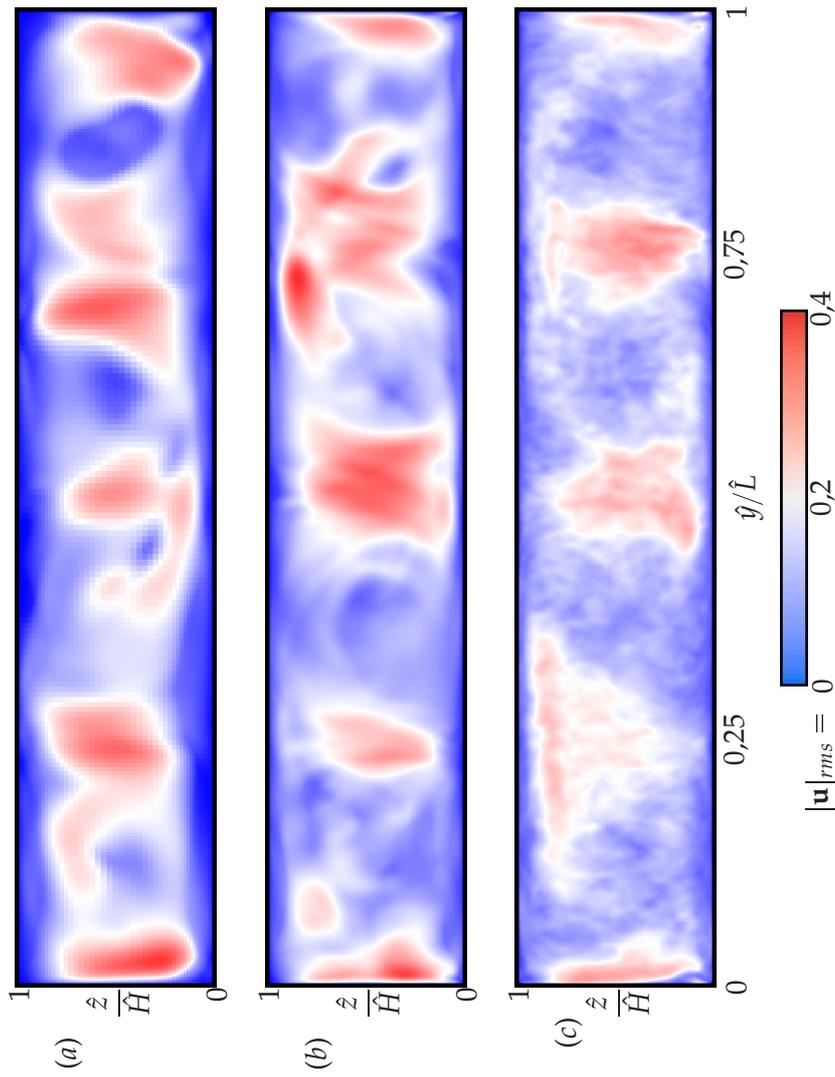


ABBILDUNG 7.3: Fluktuationen des mittleren Geschwindigkeitsfeldes in der zentralen Ebene $\hat{x}/\hat{\beta} = 0,5$ der quaderförmigen Zelle: (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$, (b) $Ra = 3,5 \times 10^6$ und (c) $Ra = 3,5 \times 10^7$.

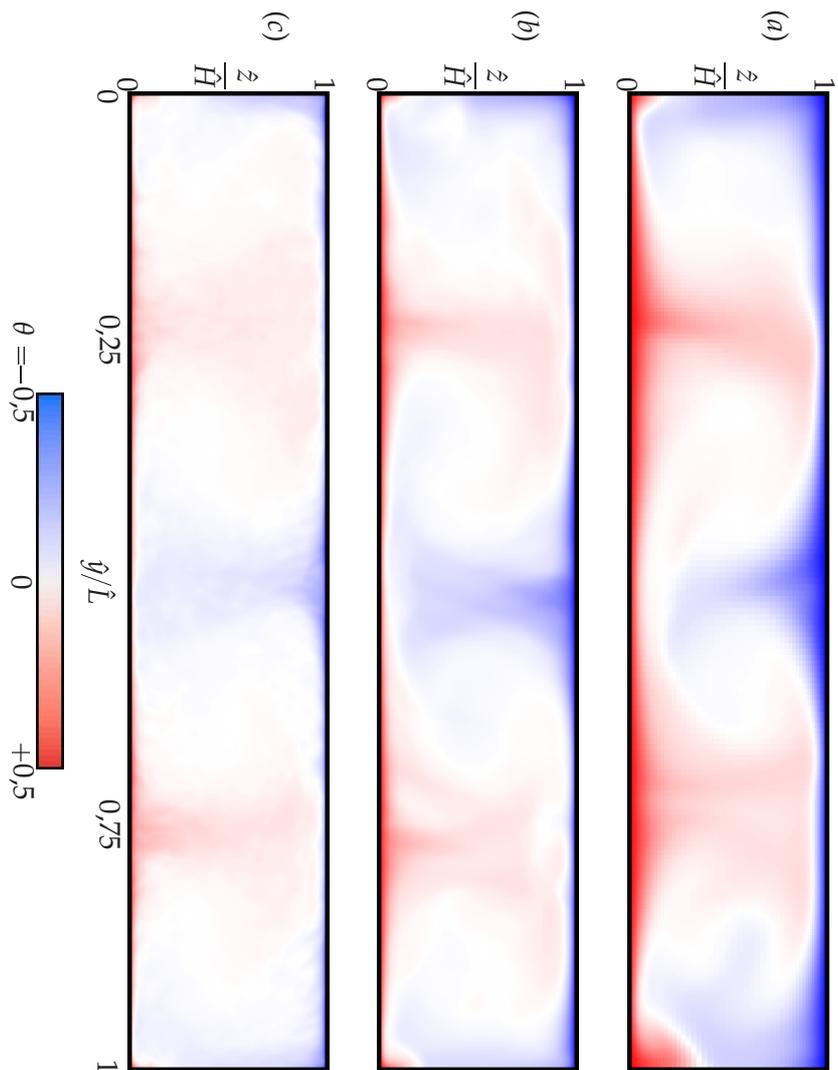


ABBILDUNG 7.4: Mittlere Temperaturverteilung in der zentralen Ebene $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ der quaderförmigen Zelle: (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$, (b) $Ra = 3,5 \times 10^6$ und (c) $Ra = 3,5 \times 10^7$.

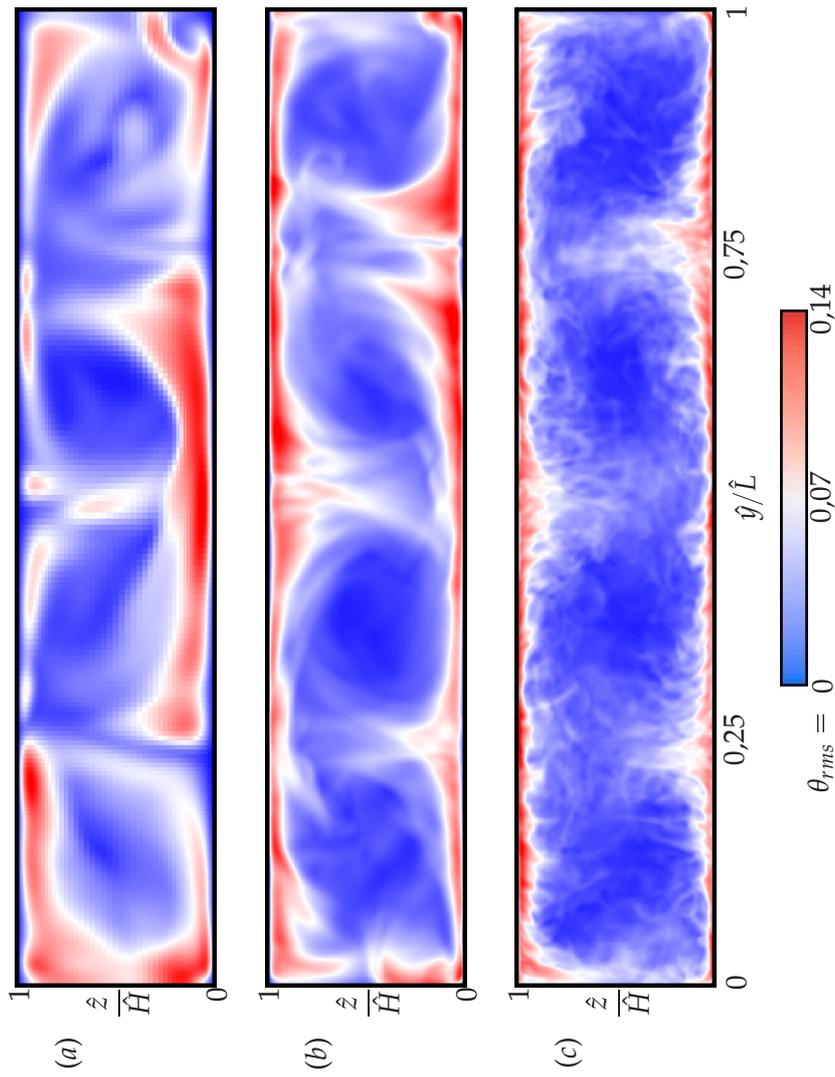


ABBILDUNG 7.5: Temperaturfluktuationen in der zentralen Ebene $\hat{x}/\hat{B} = 0,5$ der quaderförmigen Zelle: (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$, (b) $Ra = 3,5 \times 10^6$ und (c) $Ra = 3,5 \times 10^7$.

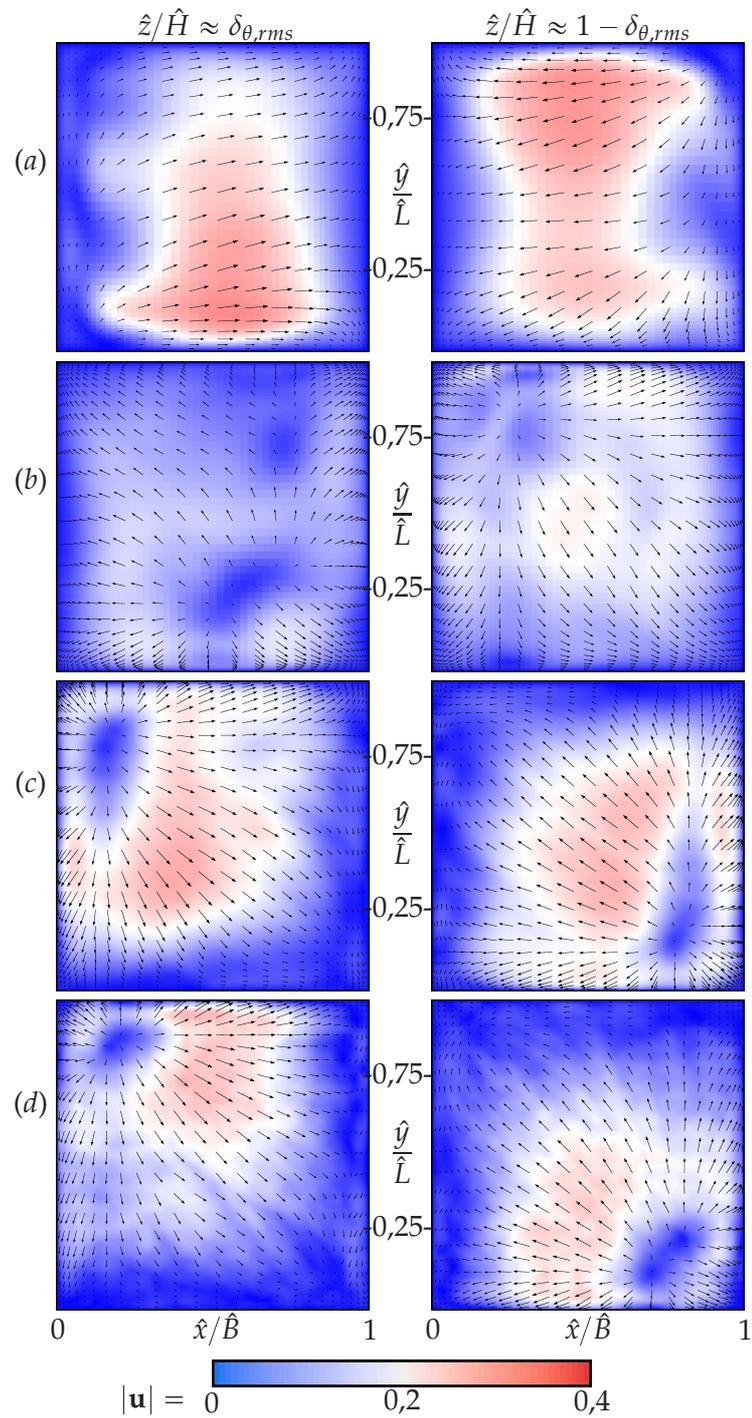


ABBILDUNG 7.6: Mittleres Geschwindigkeitsfeld am Rand der thermischen Grenzschicht der RB-Konvektion im Würfel: (a) $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^5$, (b) $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^6$ und (c) $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^7$. Vektoren (ausgedünnt) stellen die Geschwindigkeitskomponenten in der Ebene dar.

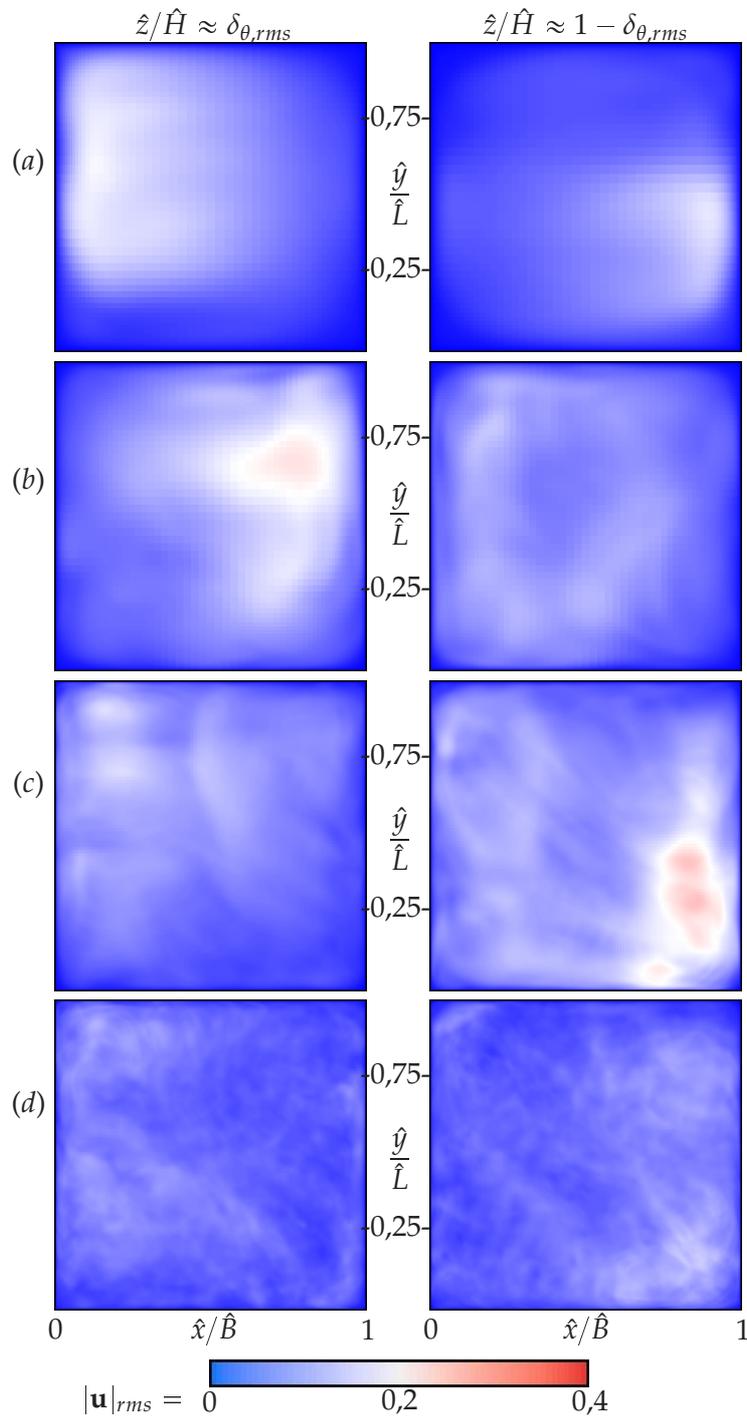


ABBILDUNG 7.7: Fluktuationen des mittleren Geschwindigkeitsfeldes am Rand der thermischen Grenzschicht der RB-Konvektion im Würfel: (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$, (b) $Ra = 3,5 \times 10^6$ und (c) $Ra = 3,5 \times 10^7$.

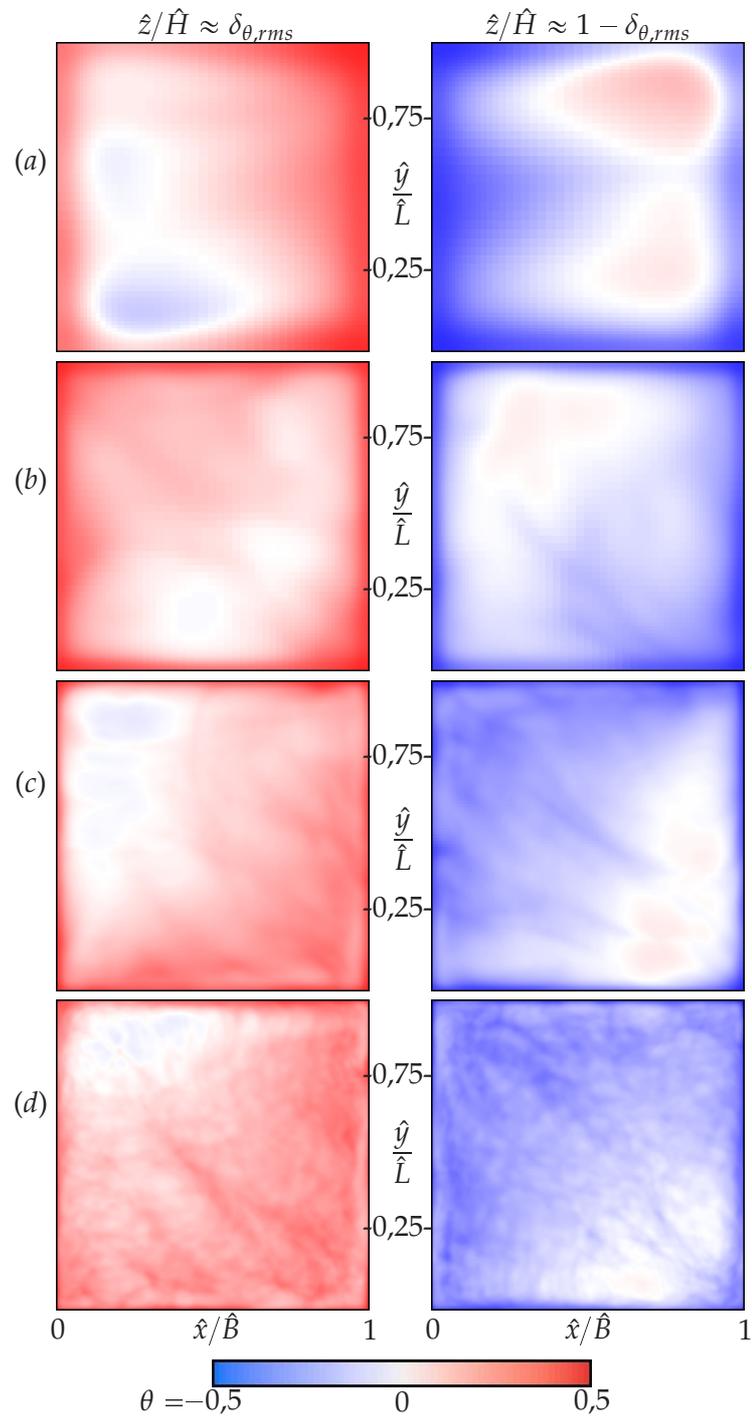


ABBILDUNG 7.8: Mittlere Temperaturverteilung am Rand der thermischen Grenzschicht der RB-Konvektion im Würfel: (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$, (b) $Ra = 3,5 \times 10^6$ und (c) $Ra = 3,5 \times 10^7$.

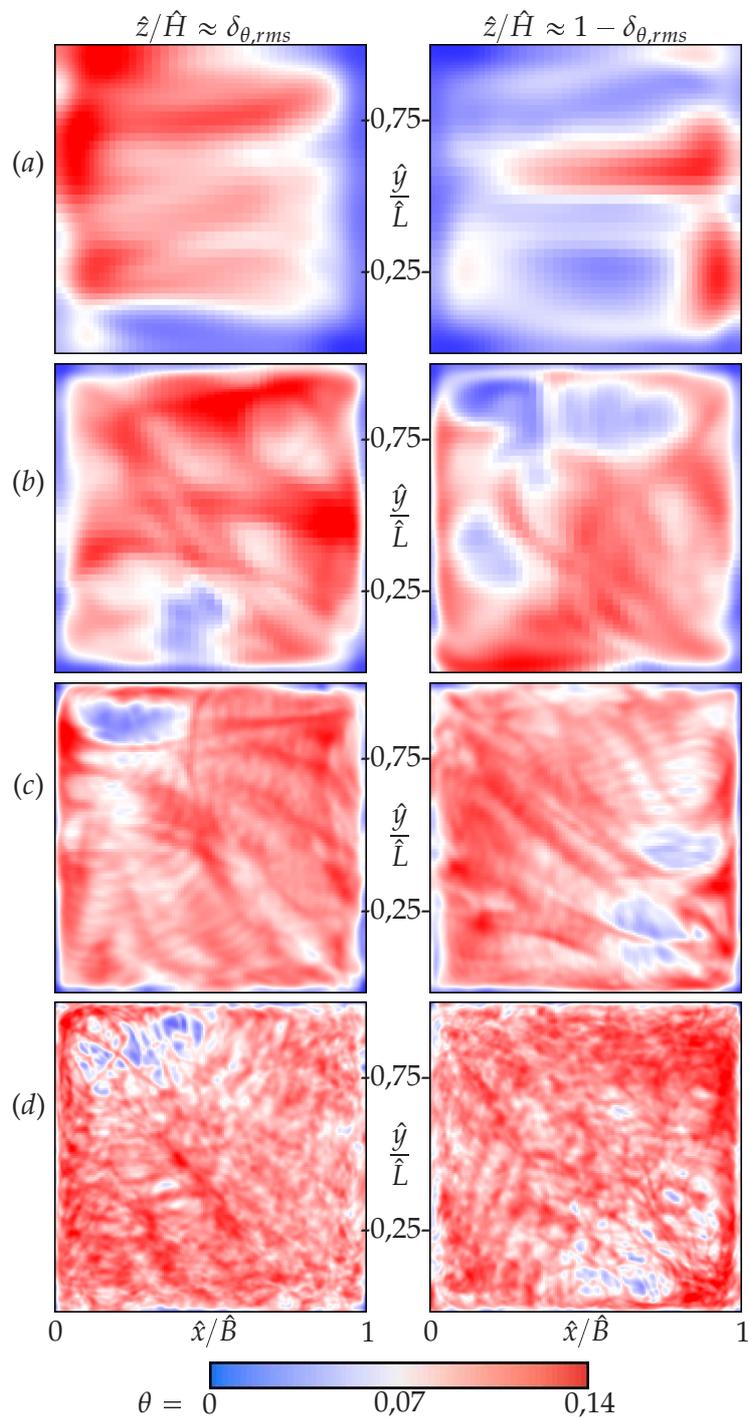


ABBILDUNG 7.9: Fluktuationen des mittleren Temperaturfeldes am Rand der thermischen Grenzschicht der RB-Konvektion im Würfel: (a) $Ra = 3,5 \times 10^5$, (b) $Ra = 3,5 \times 10^6$ und (c) $Ra = 3,5 \times 10^7$.

sehr ähnlich ist. Die Skalierungsexponenten β der drei Geometrien sind in Tabelle 7.2 zusammengefasst. Für den Bereich der transitionellen Turbulenz $3,5 \times 10^5 \leq Ra \leq 3,5 \times 10^7$ folgt, dass der Skalierungsexponent mit Verkleinerung des Streckungsverhältnisses in Längsrichtung von $\Gamma_{yz} = \infty$ in der periodischen Zelle auf $\Gamma_{yz} = 1$ im Würfel von $\beta_{peri} = 0,284$ auf $\beta_{würfel} = 0,289$ steigt.

Da die Konvektion im Würfel und in der quaderförmigen Zelle bei geringen Rayleigh-Zahlen die kleinere Nusselt-Zahlen erreichen, als die periodische Zelle, bedeuten größere Skalierungsexponenten β des Würfels und der quaderförmigen Zelle, dass sich die Nusselt-Zahlen der drei Geometrien einander annähern. Kleiner werdende Unterschiede des Wärmetransports lassen darauf schließen, dass der Wärmetransport für $Ra \rightarrow \infty$ unabhängig von der Geometrie ist, da die turbulenten Strukturen sehr viel kleiner sind als die Abmessungen der Konvektionszelle. Im Gegensatz dazu wird die Ausbreitung der *Plumes* durch das Fluid bei relativ kleinen Ra stark von der Geometrie beeinflusst, da ihre Ausdehnung in diesem Fall von der gleichen Größenordnung ist, wie die der Konvektionszelle.

Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass es eine Ra -Zahl geben muss, bei der die charakteristischen turbulenten Strukturen so klein sind, dass ihre Dynamik und die damit verbundene Wärmeübertragung unabhängig von der Geometrie der Zelle ist. Daher wird mit den Least-square Fits der Nusselt-Rayleigh-Beziehung die Rayleigh-Zahl ermittelt, für die sich bei jeweils zwei Geometrien die selbe Nusselt-Zahl ergeben. Für Würfel und quaderförmige Zelle ergibt sich die Schnittstelle $Ra_{krit} \approx 1,5 \times 10^7$ und für die periodische Zelle und den Würfel $Ra_{krit} \approx 2,3 \times 10^7$, welche sich in erstaunlich guter Übereinstimmung befinden. Im Gegensatz dazu ergibt sich für die periodische und die quaderförmige Zelle eine Schnittstelle $Ra_{krit} \approx 2,4 \times 10^{11}$. Aufgrund der geringen Anzahl von Simulationen kann an dieser Stelle nicht abschließend geklärt werden kann, ob diese Abweichung physikalischer Natur ist oder auf die Ungenauigkeit der Ermittlung der Skalierungsfunktionen zurückzuführen ist. Allerdings fällt auf, dass die hier abgeschätzten kritischen Rayleigh-Zahlen $Ra_{krit} \approx 2 \times 10^7$ mit der rein qualitativen Beobachtung in § 7.1 sehr gut zusammenpassen.

Wie in Kapitel 6 beschrieben, grenzen die Wendepunkte der PDFs von ϵ_θ den *Plume*-und-Mischungsschicht-dominierten Bereich (II) zum Bulk (I) und der konduktiven Unterschicht (III) ab. Ein qualitativer Vergleich der Konvektion in den drei Geometrien zeigt, dass die PDFs der thermischen

TABELLE 7.2: Vergleich der Exponenten der Nu - Ra -Beziehung für die periodische und die quaderförmige Zelle und den Würfel.

Ra	$3,5 \times 10^5 \leq Ra \leq 3,5 \times 10^7$	$Ra \geq 3,5 \times 10^5$
β_{peri}	0,284	0,288
β_{box}	0,286	
$\beta_{würfel}$	0,289	0,288

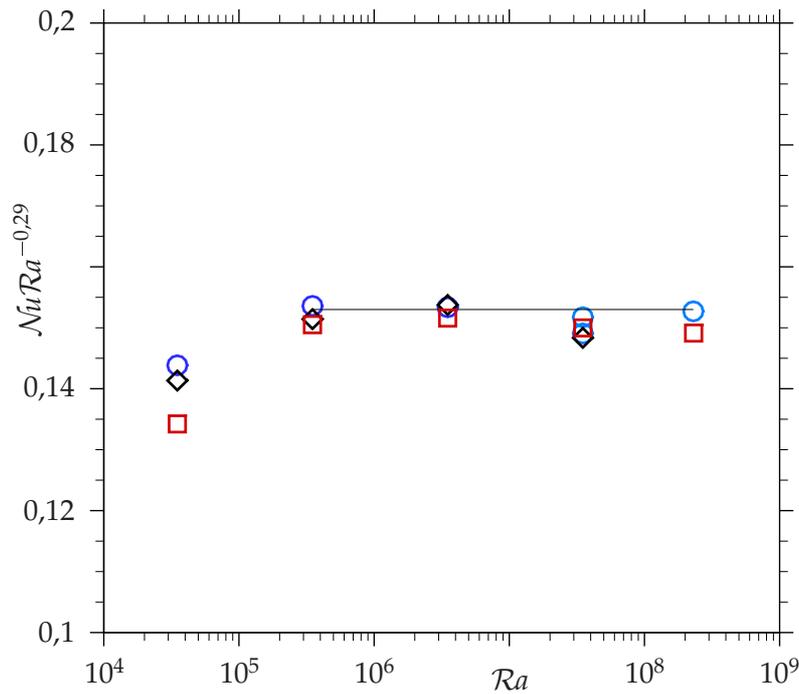
ABBILDUNG 7.10: Einfluss der Geometrie auf die Wärmeübertragung. Nu normiert mit Ra^β und $\beta = 0,29$ entsprechend der theoretischen Vorhersage von Grossmann & Lohse (2004); periodische Zelle (\circ), quaderförmige Zelle (\diamond) und Würfel (\square).

TABELLE 7.3: Beiträge der Bereiche a bis c und I bis III zur volumengewittelten thermischen Dissipationsrate für den Würfel.

	$\mathcal{R}a$	$3,5 \times 10^5$	$3,5 \times 10^6$	$3,5 \times 10^7$	$2,31 \times 10^8$
		DNS	DNS	DNS	DNS
$\zeta^{(pmax)}$		$5,12 \times 10^{-2}$	$8,48 \times 10^{-2}$	$5,36 \times 10^{-2}$	$5,34 \times 10^{-2}$
$\zeta^{(I-II)}$		0,190	0,442	0,798	0,938
$\zeta^{(II-III)}$		0,582	1,66... 5,21	6,82	12,8
A1	$4,181 \times 10^{-2}$		$7,863 \times 10^{-2}$	$5,561 \times 10^{-2}$	$9,494 \times 10^{-2}$
A2	0,162		0,522	1,392	2,040
a	3,801		1,038	1,191	0,885
B1	$9,253 \times 10^{-2}$	$(3,645...3,068) \times 10^{-2}$	$1,484 \times 10^{-2}$	$0,994 \times 10^{-2}$	$0,994 \times 10^{-2}$
B2	$9,169 \times 10^{-2}$	$(4,098...3,848) \times 10^{-2}$	$1,895 \times 10^{-2}$	$1,307 \times 10^{-2}$	$1,307 \times 10^{-2}$
$\langle e_{\theta} \rangle_V$		5,91	11,50	22,26	38,54
Kernregion $\langle e_{\theta} \rangle_a / \langle e_{\theta} \rangle_V$		0,11	0,14	0,06	0,06
Grenzschichten und Plumes $\langle e_{\theta} \rangle_b / \langle e_{\theta} \rangle_V$		0,74	0,74	0,71	0,66
Zwischenschicht $\langle e_{\theta} \rangle_c / \langle e_{\theta} \rangle_V$		0,15	0,12	0,23	0,28
Bulk $\langle e \rangle_I / \langle e_{\theta} \rangle_V$		0,03	0,08	0,09	0,10
pl/Mischungsschichten $\langle e \rangle_{II} / \langle e_{\theta} \rangle_V$		0,91	0,82... 0,68	0,75	0,71
konduktive Unterschicht $\langle e \rangle_{III} / \langle e_{\theta} \rangle_V$		0,06	0,10... 0,24	0,16	0,19

TABELLE 7.4: Beiträge der Bereiche α bis ϵ und I bis III zur volumengemittelten thermischen Dissipationsrate für die quaderförmige Zelle.

	Ra	$3,5 \times 10^5$	$3,5 \times 10^6$	$3,5 \times 10^7$
		DNS	DNS	DNS
$\zeta^{(P_{max})}$		$9,32 \times 10^{-2}$	$6,53 \times 10^{-2}$	$5,66 \times 10^{-2}$
$\zeta^{(I-II)}$		0,204	0,386	0,693
$\zeta^{(II-III)}$		0,498	2,36	5,22
A_1		$12,16 \times 10^{-2}$	$7,988 \times 10^{-2}$	$6,224 \times 10^{-2}$
A_2		2,004	1,795	1,181
a		1,418	1,142	1,280
B_1		$10,28 \times 10^{-2}$	$4,223 \times 10^{-2}$	$1,851 \times 10^{-2}$
B_2		$10,29 \times 10^{-2}$	$4,690 \times 10^{-2}$	$2,337 \times 10^{-2}$
$\langle \epsilon_\theta \rangle_V$		6,059	11,93	20,08
Kernregion $\langle \epsilon_\theta \rangle_\alpha / \langle \epsilon_\theta \rangle_V$		0,07	0,06	0,08
Grenzschichten und Plumes $\langle \epsilon_\theta \rangle_b / \langle \epsilon_\theta \rangle_V$		0,73	0,73	0,70
Zwischenschicht $\langle \epsilon_\theta \rangle_c / \langle \epsilon_\theta \rangle_V$		0,20	0,21	0,22
Bulk $\langle \epsilon \rangle_I / \langle \epsilon_\theta \rangle_V$		0,04	0,06	0,09
pl /Mischungsschichten $\langle \epsilon \rangle_{II} / \langle \epsilon_\theta \rangle_V$		0,92	0,81	0,76
konduktive Unterschicht $\langle \epsilon \rangle_{III} / \langle \epsilon_\theta \rangle_V$		0,04	0,13	0,15

Dissipationsraten nur geringfügige Unterschiede aufweisen. Im Würfel treten dabei stärkere Fluktuationen auf als in der periodischen Zelle und die Ra -Abhängigkeit des Bereiches II zeigt leichte Unterschiede.

Der Analyse in § 6.3 folgend werden die thermischen Dissipationsraten über die Bereiche I – III bzw. a – c integriert, so dass sich die Beiträge der einzelnen Bestandteile des Strömungsfeldes quantifizieren lassen. Die Ergebnisse für den Würfel sind in Tabelle 7.3 und für die quaderförmige Zelle in Tabelle 7.4 zusammengefasst. Dabei fällt auf, dass die Beiträge des Bulk $\langle \epsilon_\theta \rangle_I$ zur volumengemittelten Wärmeübertragung in der periodischen Zelle nahezu konstant bei 11% liegen, während $\langle \epsilon_\theta \rangle_I$ mit steigender Rayleigh-Zahl im Würfel kontinuierlich von 3% auf 9% und in der quaderförmigen Zelle von 4% auf 9% ansteigt. Auffallende Unterschiede zwischen der periodischen Zelle und dem Würfel sind auch bei den Beiträgen der Bereiche II und III festzustellen. Für $Ra \geq 3,5 \times 10^6$ zeigen die dem Bereich I I zugeordneten Beiträge aller Geometrien ein ähnliches Verhalten. Da die Differenzen zwischen den Geometrien in diesem Bereich gering sind und keine eindeutigen Tendenzen für die Abweichungen auszumachen sind, liegt die Vermutung nahe, dass die Unterschiede auf die begrenzte Mittelungszeit zurückzuführen sind. Bei geringeren Ra , kurz nach Einsetzen der Turbulenz sind die Unterschiede jedoch signifikant, so dass diese eindeutig auf den Einfluss der Geometrie auf das Verhalten der Strömung zurückgeführt werden können. Auffällig ist, dass der Eintrag des Bereichs I I bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ in den geschlossenen Zellen sehr viel größer ist als bei allen anderen Rayleigh-Zahlen und der Beitrag des Bereiches III sehr gering ausfällt. Dieses Verhalten kann dadurch erklärt werden, dass die thermischen *Plumes*, wie z.B. von Zhou & Xia (2002) und Lui & Xia (1998a) beobachtet, bevorzugt entlang der Wände und in den Ecken aufsteigen, so dass der Würfel die Bildung von *Plumes* beim einsetzen der 3D Strömung verstärkt, während bei höheren Ra der Einfluss der Geometrie auf die Strukturen abnimmt und die Turbulenz das Strömungsfeld dominiert. Weiter zeigt sich, dass der Beitrag der Kernregion (I) in den langen Zellen nahezu unabhängig von der Rayleigh-Zahl ist, im Würfel dieses Verhalten aber erst bei hohen Ra zu beobachten ist. Dieses Verhalten wird dem geringen Seitenverhältnis des Würfels zugeschrieben.

Die im Würfel auftretenden stärkeren Fluktuationen der Ausläufer der PDFs der thermischen Dissipationsraten lassen sich z.B. durch Zeitreihen des Least-square Fit-Koeffizienten B_2 des rechten Ausläufers darstellen.

Auf diese Weise lässt sich das zeitliche Verhalten der Grenzschichten und damit der sich aus den Grenzschichten lösenden bzw. von ihnen integrierten *Plumes* analysieren. In Abbildung 7.11 sind die Zeitreihen von B_2 für den Würfel und die periodische Zelle für $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^6$ und $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^7$ dargestellt. Dabei fällt auf, dass die Fluktuationen des Koeffizienten beider Geometrien bei $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^7$ ähnlich groß sind, während die Fluktuationen und damit die zeitliche Änderung in der Grenzschicht des Würfels bei $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^6$ deutlich größer sind. Da dieses Verhalten auch darauf zurück geführt werden kann, dass das Integrationsvolumen im Würfel kleiner ist, wurde das Verhalten von B_2 bei $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^6$ ebenfalls für ein Teilvolumen der periodischen Zelle untersucht. Wie anhand von Abbildung 7.11 a zu erkennen ist, sind die Amplituden in der periodischen Zelle auch für ein reduziertes (kubisches) Integrationsvolumen ähnlich groß wie für die gesamte Zelle.

7.3 Einfluss der Messposition

In Abbildung 7.12 sind drei ausgewählte Temperaturprofile der Konvektionsströmung in der quaderförmigen Zelle bei $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^7$ dargestellt, die mittig durch eine Konvektionsrolle bzw. durch einen Bereich sinkenden oder steigenden Fluids gehen und aus nur 41 statistisch unabhängigen, über 61 Zeiteinheiten aufgenommenen momentanen Strömungsfeldern zeitlich gemittelt sind. Im Bereich der isothermen Wände sind die drei Profile nahezu identisch, im Kernbereich der Zelle ist der Einfluss der globalen Strömungsstruktur anhand der unterschiedlichen Kerntemperaturen jedoch deutlich erkennbar. Wie auch in Abbildung 7.4 verdeutlicht ist, entsteht in bestimmten Bereichen vornehmlich sinkenden Fluids $\bar{\theta}_0 < 0$ und in anderen Bereichen steigenden Fluids $\bar{\theta}_0 > 0$. In diesen Bereichen, in denen sich die Hauptströmungsrichtung entweder senkrecht oder parallel zu den horizontalen Platten verläuft, scheint sich ein Temperaturgradient $\partial\bar{\theta}_0/\partial z \approx 0$ zu ergeben. An anderen Positionen werden jedoch Gradienten mit $\partial\bar{\theta}_0/\partial z \neq 0$ beobachtet. Ein ähnliches Verhalten wird von Emran & Schumacher (2008) in DNS von RB-Konvektion in einer zylindrischen Zelle mit $\Gamma = 1$ und $\mathcal{Pr} = 0,7$ für Rayleigh-Zahlen $10^7 \leq \mathcal{Ra} \leq 10^9$ beobachtet.

Allerdings ist an dieser Stelle anzumerken, dass die Ergebnisse aus Kapitel 5 zeigen, dass das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld mit stei-

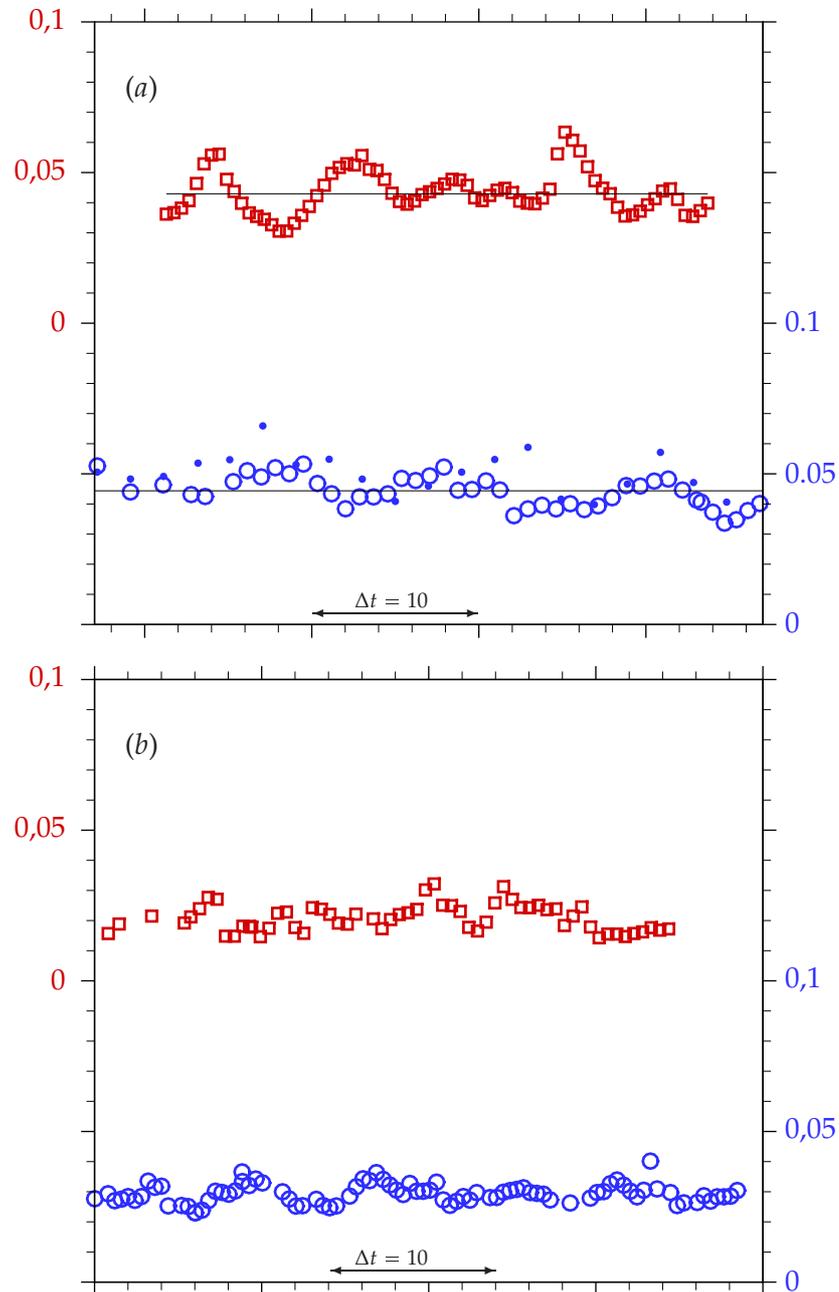


ABBILDUNG 7.11: Vergleich der Zeitreihen des Least-square Fit Koeffizienten B_2 für (a) $Ra = 3,5 \times 10^6$ und (b) $Ra = 3,5 \times 10^7$; Würfel (\square) und periodische Zelle (\circ); (\bullet) sind Ergebnisse der periodischen Zelle mit einem kubischen Integrationsvolumen.

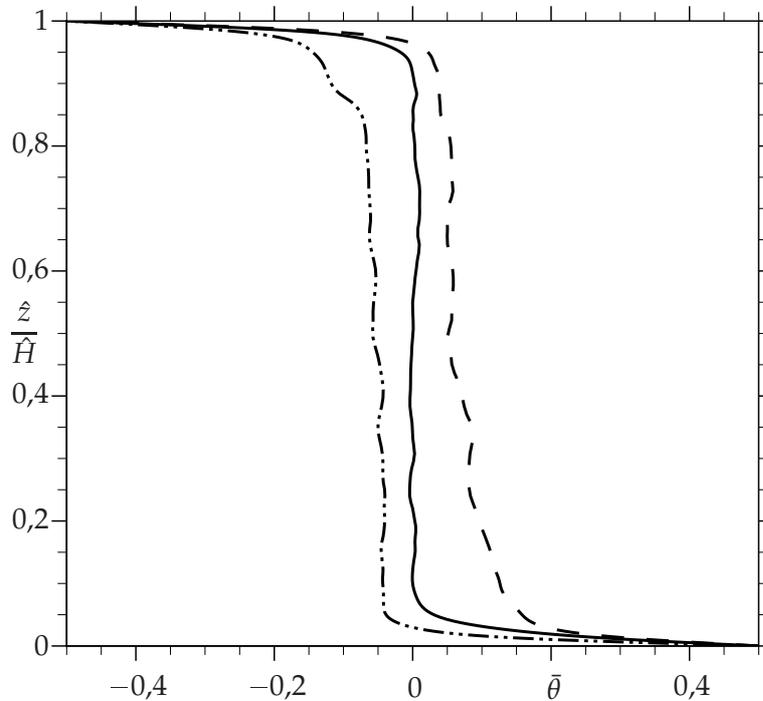


ABBILDUNG 7.12: Temperaturprofile in der quaderförmigen Zelle für $Ra = 3,5 \times 10^7$ bei drei Längspositionen: Abwärtsströmung $\hat{y}/\hat{L} = 0,499$ (\cdots), Rotationszentrum $\hat{y}/\hat{L} = 0,647$ (—) und Aufwärtsströmung $\hat{y}/\hat{L} = 0,751$ (---).

gender Rayleigh-Zahl im Kernbereich zunehmend weniger korreliert sind, was auch von den Abbildungen 7.2 und 7.4 bestätigt wird. Dementsprechend ist zu erwarten, dass die globale Strömungsstruktur bei genügend hohen Ra (und hinreichend langer Mittelungszeit) keinen Einfluss auf die Temperaturverteilung in der Kernregion hat und somit die Temperatur im Volumeninneren unabhängig von der Messposition sein sollte: $\bar{\theta}_0 = 0$ und $\partial\bar{\theta}_0/\partial z = 0$.

Kapitel 8

Mischkonvektion in einer geschlossenen quaderförmigen Zelle

Die thermischen *Plumes* spielen nicht nur bei freier, sondern auch bei gemischter thermischer Konvektion eine bedeutende Rolle für den Wärmetransport. In diesem Kapitel werden die Unterschiede zwischen Rayleigh-Bénard-Konvektion und thermischer Mischkonvektion exemplarisch anhand der Strömung für $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^5$ untersucht. Hierfür wird die in Kapitel 7 verwendete quaderförmige Zelle um einen Lufteinlass und einen Luftauslass erweitert. Beide befinden sich an der gleichen Seitenwand der Zelle direkt unterhalb der Kühlplatte bzw. direkt über der Heizplatte. Eine detailliertere Beschreibung der Randbedingungen ist in § 4.3 gegeben.

Diese Konfiguration ermöglicht die Untersuchung grundlegender Phänomene, wie sie bei der Mischkonvektion auftreten: Strahlablösung von der Wand, turbulente Mischungsvorgänge oder Wechselwirkungen zwischen Zuluftstrahl und thermischen *Plumes*. Ein wichtiger Parameter zur Beschreibung der thermischen Mischkonvektion ist die Archimedes-Zahl

$$\mathcal{Ar} \equiv \frac{\mathcal{Ra} \Gamma^3 / \mathcal{Pr}}{(\mathcal{Re}_B)^2} = \frac{\hat{g} \hat{B}}{\hat{U}^2} \hat{\alpha} \Delta \hat{T}, \quad (8.1)$$

welche das Verhältnis der von der thermischen Konvektion hervorgerufenen Auftriebskräfte zu den Trägheitskräften der erzwungenen Konvektion ausdrückt. Hierbei ist $\mathcal{Re}_B = \hat{U} \hat{B} / \hat{\nu}$ die mit einer charakteristischen Ge-

schwindigkeit \hat{U} und der Breite der Zelle \hat{B} gebildete Reynolds-Zahl. Im Allgemeinen wird davon ausgegangen, dass gemischte Konvektion vorliegt, wenn $Ar \approx 1$, während der Anteil der erzwungenen Konvektion für $Ar \gg 1$ vernachlässigt werden kann, da in diesem Fall die von der thermischen Konvektion herrührenden Auftriebskräfte das Strömungsfeld dominieren. Die thermische Konvektion ist also ein Spezialfall der Mischkonvektion mit $Ar = \infty$.

Im Folgenden wird zunächst ein kurzer Überblick über die thermische Mischkonvektion gegeben, bevor in § 8.2 das globale Strömungsfeld der Mischkonvektion hinsichtlich der Strukturbildung, der Strahlablösung von der Decke und den Wärmetransporteigenschaften untersucht wird. In § 8.3 werden schließlich die Auswirkungen der Wechselwirkungen auf das Verhalten der thermischen Dissipationsraten betrachtet.

8.1 Grundlagen zur thermischen Mischkonvektion

Im Gegensatz zum geometrisch einfachen Aufbau der RB-Konvektion bietet die thermische Mischkonvektion ein vielfaches an Freiheitsgraden. Dies erschwert die systematische Untersuchung dieser Strömungsform wesentlich und hat zur Folge, dass kaum ein Experiment oder eine numerische Simulation der Mischkonvektion vergleichbare (geometrische) Randbedingungen bieten, da sie sich in der Regel an konkreten, ebenso vielfältigen Anwendungsfällen orientieren.

Eine dieser Anwendungen ist die Strömung in bzw. Klimatisierung von Räumen. Das Strömungsfeld in einer generischen Flugzeugkabine und die Wechselwirkung zwischen den Zuluftstrahlen und der von den beheizten Passagiermodellen ausgehenden Auftriebsströmungen wird z.B. von Kühn *et al.* (2009) mittels großskaligem PIV und Temperaturfeldmessungen mit einem Thermoelementrechen untersucht. Sie beobachten, dass die Strömung in der Kabine, insbesondere die Strömungsrichtung der Zuluftstrahlen, sehr stark von den thermischen Lasten der Passagiere und elektrischen Einbauten beeinflusst werden. Ähnliche Untersuchungen werden in § 8.2, allerdings für die belüftete RB-Konvektion durchgeführt. Untersuchungen generischer Kabinen werden von Günter *et al.* (2006) sowohl experimentell als auch mittels RANS Simulationen durchgeführt. Ein Vergleich verschiedener statistischer Turbulenzmodelle zeigt, dass die RANS-Technik im Allgemeinen in der Lage ist generelle Tendenzen der Strö-

mungsphänomene wieder zu geben, nicht jedoch die absoluten Werte. Dies verdeutlicht den weiterhin vorhandenen Bedarf zur Verbesserung der Turbulenzmodelle und das dafür notwendige umfassende Verständnis der Turbulenz auf diesem Gebiet.

Grundlegende Studien zur Mischkonvektion sind nicht zuletzt wegen der Komplexität der Strömung weitaus seltener als bei der RB-Konvektion. Linden & Cooper (1996) befassen sich mit der Belüftung von Innenräumen, beschäftigen sich aber im Gegensatz zu der zuvor beschriebenen Möglichkeit der aktiven Belüftung, mit Luftaustauschmechanismen, die von der thermischen Konvektion hervorgerufen werden. Ihre theoretischen Ansätze basieren auf den von punktförmigen Wärmequellen hervorgerufenen Auftriebsströmungen, die das darüber liegende stabil geschichtete Fluid verdrängen. Auf diese Weise bestimmen sie die Luftaustauschrate in Abhängigkeit der Anzahl und Stärke der Wärmequellen, und somit den Einfluss der Wechselwirkungen zwischen den aufsteigenden *Plumes*. Der Einfluss von Zuluftstrahlen findet dabei jedoch keine weitere Beachtung.

Eine Konfiguration, die häufig bei der Kühlung von Bauteilen zu finden ist, lässt sich als von unten beheizte Kanalströmung idealisieren. Die Transition von erzwungener Konvektion zu Mischkonvektion wird in dieser Geometrie z.B. von Chiu & Rosenberger (1987) bei niedrigen Rayleigh- und Reynolds-Zahlen ($1368 \leq Ra \leq 8300$, $15 \leq Re \leq 170$) untersucht. Für diesen Parameterbereich vermessen sie die Geschwindigkeitsprofile mittels Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) bei verschiedenen Längspositionen. Anhand der Form der Geschwindigkeitsprofile ermitteln sie die kritische Lauflänge für das Einsetzen der thermischen Konvektion und der vollausgebildeten Mischkonvektion. Ihre Ergebnisse zeigen, dass sich abhängig von Ra und Re entweder stationäre oder instationäre Rollenstrukturen ausbilden. In einem Folgeexperiment untersuchen Chiu *et al.* (1987) ebenfalls mit LDA die ausgebildete Mischkonvektion in dem Kanal. Sie beobachten, dass die Überlagerung der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit erzwungener Konvektion in dem untersuchten Parameterbereich einer laminaren Konvektion keinen Einfluss auf die maximalen Vertikalgeschwindigkeiten hat, d.h. $w_{max} = f(Ra)$, während für die Maximalwerte der Längskomponente $u_{max} = f(Re)$ gilt. Allerdings wird die Form der Geschwindigkeitsprofile aufgrund der Wechselwirkungen zwischen thermischer und erzwungener Konvektion stark beeinflusst. Je nach Messposition (aufwärts oder abwärts gerichtete Strömungskomponente) verschiebt sich das Ma-

ximum des bei der erzwungenen Konvektion auftretenden Parabelprofils nach oben oder unten. Das Experiment zeigt außerdem, dass die Transition von stationären zu instationären Rollenstrukturen bei höheren Ra verzögert wird. Daher folgern sie, dass die erzwungene Konvektion die von der RB-Konvektion hervorgerufenen Instabilitäten dämpft.

Die Leistungsfähigkeit zweier LES-Modelle zur Vorhersage von Konvektionsströmungen (sowohl freier und erzwungener, als auch gemischter) in rechteckigen Geometrien wird von Zhang & Chen (2000) mithilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens untersucht. Für ihre Studie verwenden sie eine nahezu kubische Zelle mit beheiztem Boden ($\hat{T} = 35^\circ\text{C}$) sowie kalter Decke und Seitenwänden ($\hat{T} = 15^\circ\text{C}$). Ein- und Auslass befinden sich ähnlich wie bei der in diesem Kapitel untersuchten Geometrie an den Seitenwänden, sind einander allerdings diagonal gegenüberliegend angeordnet. Zhang & Chen (2000) finden heraus, dass das klassische Smagorinsky Modell verglichen mit dem von ihnen getesteten dynamischen Feinstrukturmodell nur unbefriedigende Ergebnisse liefert, da letzteres Modell nicht nur die Tendenzen experimentell ermittelter Daten, sondern auch deren absolute Werte deutlich besser wiedergibt.

Zwei Experimente mit Randbedingungen, die mit der in diesem Kapitel untersuchten Geometrie vergleichbar sind, werden von Westhoff *et al.* (2007) und Schmeling *et al.* (2009) durchgeführt. Sie verwenden eine Hochdruckzelle, um die Skalierungseigenschaften thermischer Mischkonvektion zu analysieren, d.h. bei kleinerem Maßstab der Geometrie sollen die relevanten Kennzahlen Ra , Pr , Re , und damit Ar konstant bleiben. Dafür verwenden sie eine Zelle mit zwei verschiedenen Größen: $\hat{H} = 0,5$ m und $\hat{H} = 0,1$ m, wobei die große Zelle ausschließlich unter Normaldruck und die kleine Zelle unter Hochdruck ($\hat{p} \lesssim 10$ bar) betrieben wird.

Das im Auslass dieser Zellen quer zur Strömungsrichtung mithilfe von PT-100 vermessene Temperaturfeld ergibt, dass das ausströmende Fluid räumlich abgegrenzte Gebiete warmer und kalter Luft aufweist und bei $Ar \approx 1 \dots 2$ zeitliche Oszillationen der Temperatur auftreten. Beide Effekte schreiben sie dem Einfluss der thermischen *Plumes* bzw. ihrer Wechselwirkung mit der erzwungenen Konvektion zu. Die Gebiete warmen und kalten Fluids im Auslass werden als Fußabdruck der großskaligen Konvektionsrollen betrachtet, während die Oszillationen der Temperatur die Wechselwirkungen zwischen thermischer und erzwungener Konvektion interpretiert werden.

Eine weitere Problematik der gemischten Konvektion liegt in der Definition der Archimedes-Zahl. Bei ihrer Berechnung muss entweder für die thermische oder die erzwungene Konvektion eine willkürlich gewählte Referenzlänge gewählt werden. Für die thermische Konvektion wird z.B. die Breite oder Höhe der Zelle gewählt, während die Kanalhöhe des Lufteinlasses z.B. eine charakteristische Länge für die erzwungene Konvektion ist. Um diese Problematik zu umgehen, bietet sich die Möglichkeit an die Mischkonvektion nicht wie üblich über ein Kräftegleichgewicht, sondern über die Mischungseigenschaften zu charakterisieren. Als relevante Längenskalen für die Durchmischung bzw. die Interaktion zwischen freier und erzwungener Konvektion können in diesem Fall die Grenzschichtdicken der freien Konvektion und der Kanalströmung herangezogen werden. Dies ist auch insofern sinnvoll, als dass die thermische Grenzschichtdicke proportional zur Dicke der thermischen *Plumes* ist, die mit dem Zuluftstrahl interagieren. Diese Herangehensweise birgt allerdings den Nachteil, dass die Grenzschichtdicken *a priori* zur Auslegung des Systems bekannt sein müssen.

8.2 Globales Verhalten des Strömungsfeldes

Die in den folgenden Abschnitten diskutierten Ergebnisse der thermischen Mischkonvektion quaderförmigen Zelle werden mit $106 \times 216 \times 130$ Gitterpunkten für die horizontale, die longitudinale und die vertikale Richtung aufgelöst. Für die Auflösung der eigentlichen Konvektionszelle werden in horizontaler Richtung 74 Gitterpunkte verwendet. Dementsprechend werden die Ein- und Auslasskanäle in Strömungsrichtung mit den verbleibenden 32 Gitterpunkten diskretisiert. In vertikaler Richtung wird die Kanalhöhe am Auslass ($\hat{h}_{\text{auslass}}/\hat{H} = 0,03$) mit 22 und am Einlass ($\hat{h}_{\text{einlass}}/\hat{H} = 0,05$) mit 38 Gitterpunkten aufgelöst.

In Abbildung 8.1 sind instantane Temperaturfelder der RB-Konvektion und der thermischen Mischkonvektion in einer quaderförmigen Zelle für $Ra = 3,5 \times 10^5$ gegenübergestellt. Während bei der RB-Konvektion, die in Kapitel 7 bereits diskutierten Konvektionsrollen in Form der großskaligen thermischen *Plumes* deutlich auszumachen sind, werden die *Plumes* bei der Mischkonvektion auf der dem Einlass zugewandten Seite (rechts im Bild) von dem Zuluftstrahl verdrängt und bilden sich nur im linken Teil der Zelle aus.

Neben der „Verdrängung“ der *Plumes* auf einer Seite der Zelle wirkt sich der Einfluss des Zuluftstrahls nicht nur auf die Position der *Plumes*, sondern auch auf deren Größe und Anzahl aus. In Abbildung 8.1 (b) sind mindestens vier *Plumes* zu erkennen, die sich vom Boden zur Decke erstrecken. Allerdings sind sie deutlich filigraner als die thermischen *Plumes* bei RB-Konvektion.

Abbildung 8.1 (b) veranschaulicht ebenfalls, dass sich die Wurzeln der thermischen *Plumes* als Gebiete warmen Fluids im Auslasskanal fortsetzen. Dies befindet sich in Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen von Schmeling (2008), der die Temperaturverteilung im Auslasskanal vermessen hat. Die von Schmeling und Westhoff beobachtete zeitliche Schwankung der Temperatur im Auslasskanal zeigt sich ebenfalls in der numerischen Simulation. In Abbildung 8.2 ist der konvektive Wärmestrom $\langle u\theta \rangle_{\text{auslass}}$ durch den Ausströmrand für eine Periode aufgetragen. Aus dem Graphen ist abzulesen, dass eine Periodenlänge ungefähr 10 konvektiven Zeitskalen entspricht. Die Wechselwirkung zwischen *Plumes* und Zuluftstrahl bewirkt demzufolge eine Oszillation des Wärmestroms am Auslass. Außerdem geht aus der Abbildung hervor, dass $\langle u\theta \rangle_{\text{auslass}} < 0$. Dies bedeutet, dass durch den Auslass mehr kalte Frischluft als warme Luft von der Heizplatte abgeführt wird. Entsprechend den Schwankungen am Auslass wird ebenfalls eine Oszillation des Wärmestroms an der Heizplatte beobachtet, die allerdings niederfrequenter ist als die Oszillation am Auslass. Im Gegensatz dazu ist die über die Kühlplatte gemittelte Nusselt-Zahl nahezu konstant. Als mittlere Nusselt-Zahlen ergeben sich an der Heizplatte $\langle \mathcal{Nu} \rangle_{\text{boden}} \approx 11,4$ und an der Kühlplatte $\langle \mathcal{Nu} \rangle_{\text{decke}} \approx 4,1$. Es folgt also, dass sich die Wärmeübertragung für den hier betrachteten Fall verglichen mit der RB-Konvektion ($\mathcal{Nu} \approx 6$) nahezu verdoppelt, während sie an der Kühlplatte aufgrund der Nähe zum Einströmrand etwas geringer ausfällt.

Die Wechselwirkungen zwischen dem Zuluftstrahl und den thermischen *Plumes* werden auch anhand der Ablöselinie des Wandstrahls von der Decke ersichtlich. Die Ablösung des Wandstrahls lässt sich über die Wandschubspannung $\tau_{ii}|_{\text{wand}} \sim \partial u_i / \partial x_i$ ermitteln, wobei das Kriterium für Ablösung $\tau_{ii}|_{\text{wand}} = 0$ ist. In Abbildung 8.3 ist dieses Kriterium für die Decke und den Boden der Zelle (inklusive der Kanäle) eingezeichnet. Aus Abbildung 8.3 (a) geht hervor, dass die Ablösestelle des Wandstrahls von der Längsposition der Zelle abhängt. An Stellen, an denen warme *Plumes* aufsteigen löst der Strahl früher ab als dort wo kalte herabfallen. Allerdings

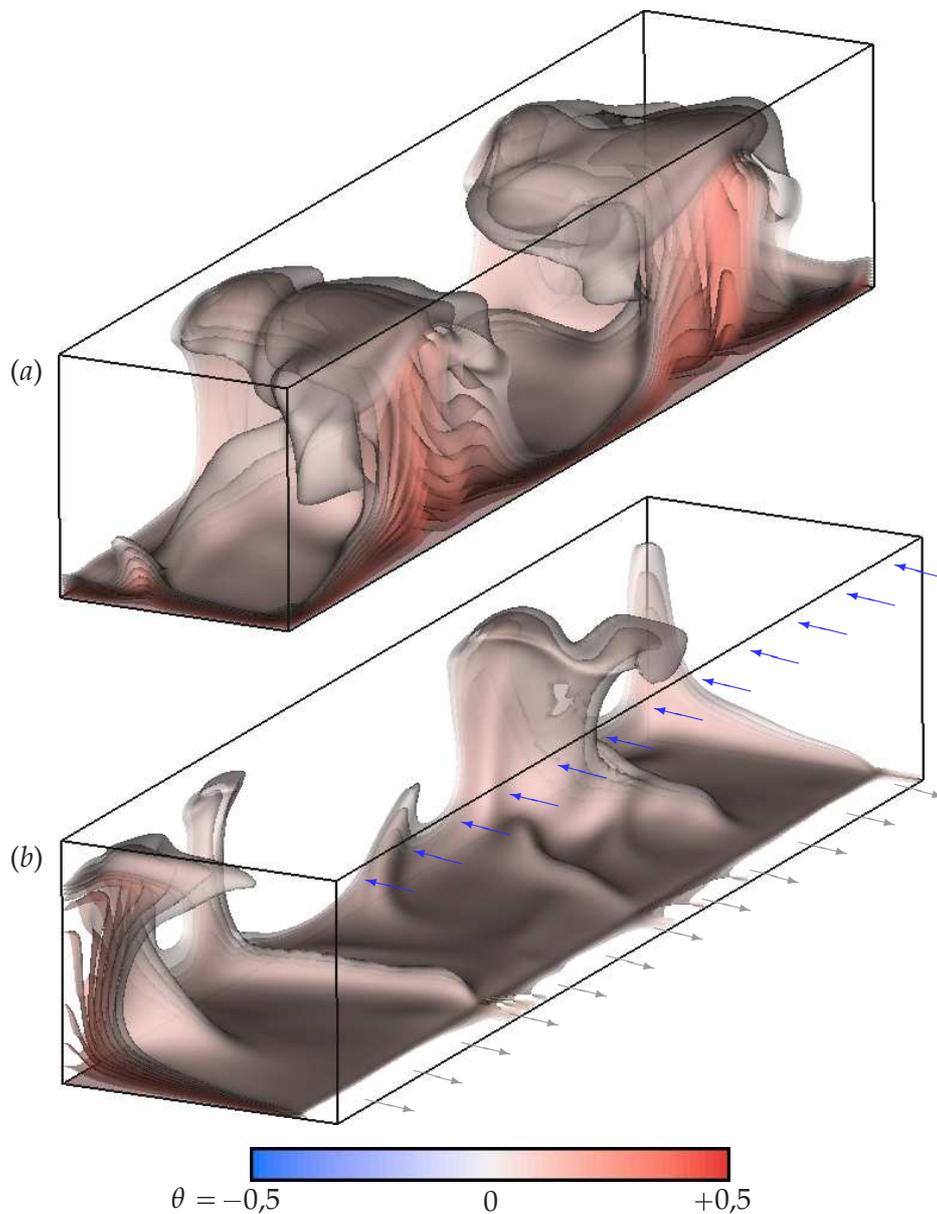


ABBILDUNG 8.1: Vergleich instantaner Temperaturfelder dargestellt durch 10 Isothermen mit $\theta \geq 0,05$: (a) RB-Konvektion in der quaderförmigen Zelle und (b) thermische Mischkonvektion in der quaderförmigen Zelle mit Lufteinlass oben rechts und Luftauslass unten rechts; Pfeile deuten die Position von Einlass und Auslass an. $Ra = 3,5 \times 10^5$ und bei (b) $Re_B = 707$ ($Ar = 1$)

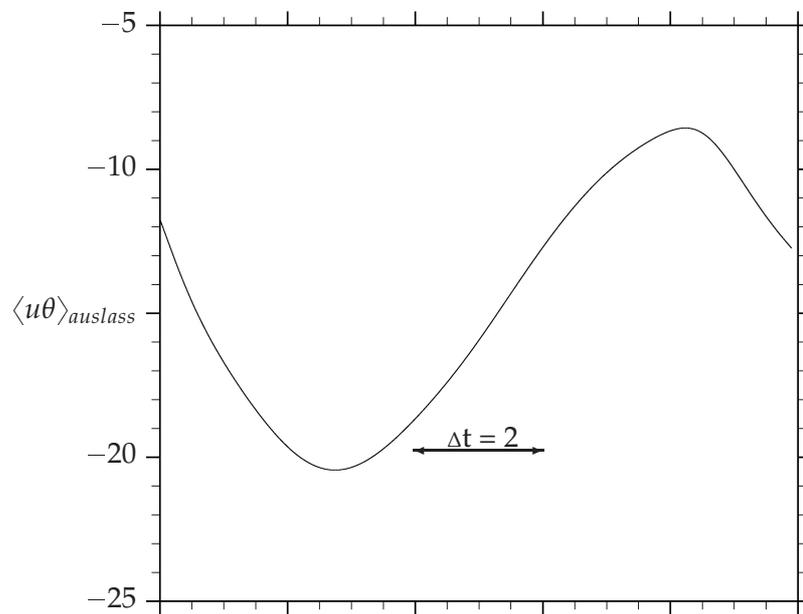


ABBILDUNG 8.2: Zeitliches Verhalten des konvektiven Wärmestroms $\langle u\theta \rangle_{\text{auslass}}$ am Ausströmrund.

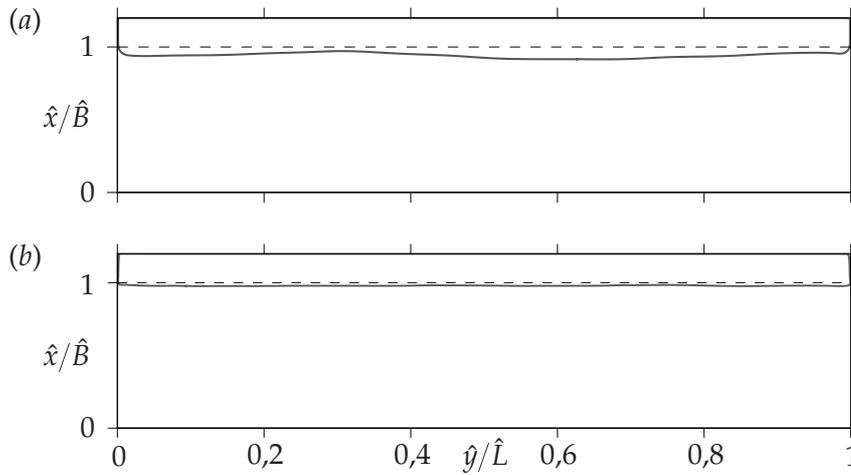


ABBILDUNG 8.3: Wandschubspannungen $\tau_{ii}|_{wand} = 0$ auf (a) der Decke und (b) dem Boden sind durch dicke Linien dargestellt. Die gestrichelte Linie deutet die Grenze zwischen den Ein- bzw. Auslasskanälen und dem Inneren der Zelle an.

löst der Strahl nach spätestens 10% der Lauflänge der Decke ab, an manchen Stellen bereits nach 2% der Lauflänge. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Abgebildete Ablöselinie bzw. die Anlegelinie in Abbildung 8.3 (b) nur über 2 konvektive Zeitskalen während der fallenden Flanke der $\langle u\theta \rangle_{auslass}$ -Oszillation gemittelt sind. Daher kann an dieser Stelle nicht eindeutig geklärt werden, ob die beobachtete Asymmetrie, die auch in Abbildung 8.1 zu erkennen ist, repräsentativ für die Strömung ist oder lediglich zufällig auftritt.

Im Gegensatz zur Decke ist die Anlegelinie auf dem Boden sehr viel weniger von der Längsposition der Zelle abhängig; sie befindet sich für alle \hat{y}/\hat{L} bei $\hat{x}/\hat{B} \approx 99\%$. Dies deutet darauf hin, dass die Wechselwirkungen zwischen *Plumes* und Zuluftstrahl vorwiegend im inneren der Zelle stattfinden müssen, da die Lauflänge des Zuluftstrahls über die isothermen Platten bei der hier untersuchten Strömung mit $\mathcal{Ra} = 3,5 \times 10^5$ und $\mathcal{Re}_B = 707$ sehr gering ist.

Für eine weitergehende Analyse wäre die Untersuchung der Mischkonvektion mit unterschiedlichen Kanalhöhen interessant. Die Ergebnisse dieser Untersuchung würden Klarheit darüber verschaffen, inwieweit das in § 8.1 vorgeschlagene Kriterium zur Beschreibung der Mischkonvektion mittels des Verhältnisses der Grenzschichtdicken geeignet ist.

8.3 Analyse der thermischen Dissipationsraten

Die im Folgenden diskutierten PDFs der thermischen Dissipationsraten sind aus 10 instantanen Strömungsfeldern über einen Zeitraum von 2 Zeiteinheiten extrahiert. Zum Vergleich wurden die entsprechenden Daten der RB-Konvektion auf die gleiche Anzahl von Stichproben reduziert.

In Abbildung 8.4 sind PDFs der Mischkonvektion innerhalb der Konvektionszelle (ohne Ein- und Auslasskanäle) und der RB-Konvektion für $Ra = 3,5 \times 10^5$ dargestellt. Der Vergleich der abgebildeten PDFs zeigt, dass die PDF der Mischkonvektion für $\zeta \ll 1$ eine große Ähnlichkeit mit der PDF der RB-Konvektion aufweist. Für große ζ ergeben sich jedoch deutliche Unterschiede. Der Bereich mit $\zeta \gg 1$, der in Kapitel 6 den konduktiven Unterschichten zugeordnet wurde, skaliert bei der gemischten Konvektion nicht mehr mit $P(\zeta) \sim \exp(\zeta)$. Thermische Dissipationsraten, die bei der RB-Konvektion dem Bereich II zugeordnet wurden verhalten sich bei der Mischkonvektion ebenfalls anders. Während dieser Bereich bei der RB-Konvektion als Übergangsbereich zwischen Bulk und konduktiver Unterschicht keiner einfachen Skalierung folgt, weisen die Ergebnisse der Mischkonvektion auf ein Potenzgesetz $P(\zeta) \sim \zeta^{1/2}$ hin. Des Weiteren ist der Bereich bei der Mischkonvektion deutlich ausgeprägter als bei der RB-Konvektion.

Diese Unterschiede in der PDF veranschaulichen die Änderung des Strömungsfeldes bei gemischter Konvektion, die sich hauptsächlich auf die hohen Werte der thermischen Dissipationsraten auswirkt. Folglich beeinflusst der Zuluftstrahl vorwiegend die *Plumes* und Grenzschichten, da diese den entsprechenden Bereichen der thermischen Dissipationsraten zugeordnet werden. Die klein-skaligen turbulenten Mischungsvorgänge ($\zeta \ll 1$) werden von diesen Wechselwirkungen allerdings nur unwesentlich beeinflusst.

Es ist allerdings anzumerken, dass sich die Struktur des gesamten Strömungsfeldes ändert, so dass das Kernvolumen der Zelle nicht mehr als einfache Durchmischungszone im Sinne eines passiven Skalars betrachtet werden kann. Dies wird von der in Abbildung 8.5 dargestellten PDF für das Kernvolumen verdeutlicht. Die Abbildung zeigt, dass Unterschiede zur RB-Konvektion wiederum bei relativ großen ζ auftreten, die dem Zuluftstrahl zuzuschreiben sind.

Der Zuluftstrahl beeinflusst demnach die charakteristischen Bestand-

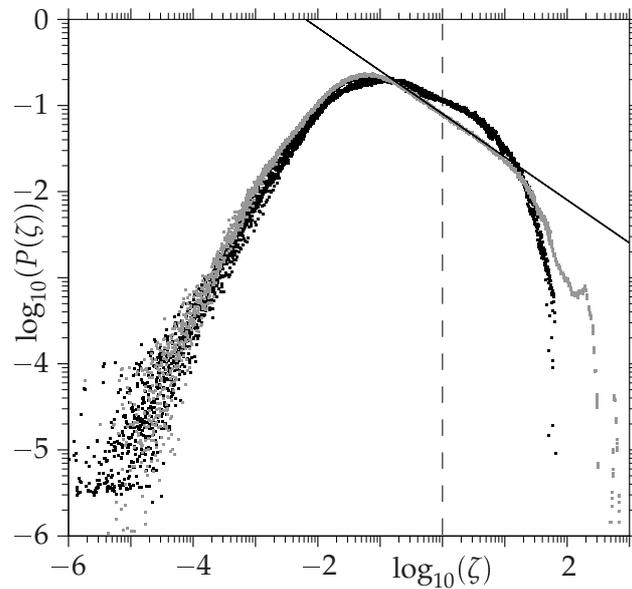


ABBILDUNG 8.4: Vergleich der PDFs der thermischen Dissipationsraten für $Ra = 3,5 \times 10^5$ in Rayleigh-Bénard-Konvektion (schwarz) und Mischkonvektion mit $Ar = 1$ (grau); die vertikale gestrichelte Linie bezeichnet die volumengemittelte thermische Dissipationsrate. Eine Potenzfunktion $P(\zeta) \sim \zeta^{1/2}$ ist als Referenz gegeben.

teile des Strömungsfeldes wie *Plumes*, Grenzschichten und Kernvolumen signifikant, klein-skalige Mischungsvorgänge, die vor allem im Bulk auftreten, sind davon aber kaum betroffen. Für eine detailliertere Analyse der turbulenten Mischkonvektion muss einerseits eine Parameterstudie für Ra und Ar und ggf. Pr durchgeführt werden und andererseits die Statistik der hier gezeigten Ergebnisse verbessert werden.

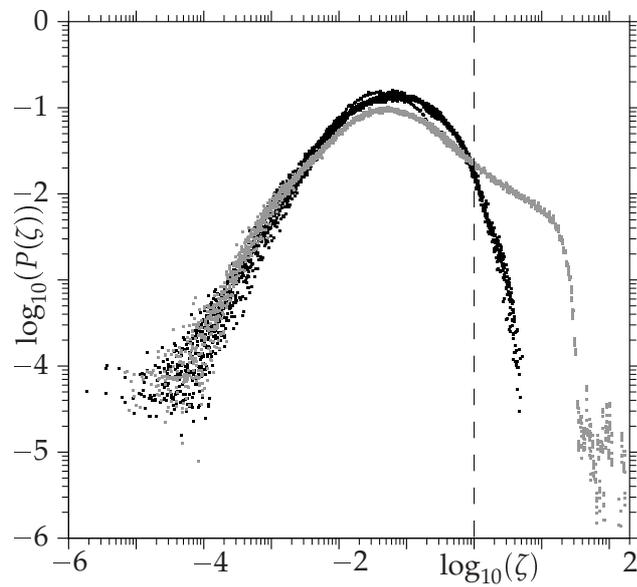


ABBILDUNG 8.5: Vergleich der PDFs der thermischen Dissipationsraten der Kernregion (α) für $Ra = 3,5 \times 10^5$ in Rayleigh-Bénard-Konvektion (schwarz) und Mischkonvektion mit $Ar = 1$ (grau); die vertikale Linie deutet die mittlere thermische Dissipationsrate an.

Kapitel 9

Abschließende Bemerkungen

9.1 Schlussfolgerungen

In der vorliegenden Arbeit wurden turbulente thermische Konvektionsströmungen für $Ra \leq 2,31 \times 10^8$ sowohl in quaderförmigen Behältnissen als auch in Würfeln mittels DNS und hochaufgelöster LES untersucht. Die hier untersuchten Konvektionsströmungen umfassen damit den Übergangsbereich der sich ausbildenden turbulenten Konvektion. Die wichtigsten Erkenntnisse dieser Arbeit zur thermischen Konvektion lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. In der Kernregion beginnen die turbulenten Fluktuationen von Temperatur und Geschwindigkeit mit steigender Rayleigh-Zahl zu entkoppeln. Das Verhalten des Temperaturfeldes nähert sich dem eines passiven Skalars, was als Bestätigung des von Castaing *et al.* (1989) in Abbildung 3.3 skizzierten Verhaltens des Strömungsfeldes betrachtet wird und auch von Cioni *et al.* (1995) für geringe Pr experimentell bestätigt wird.
2. Die Korrelation der turbulenten Fluktuationen des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes sowie das Verhältnis der Dissipationsraten beider Felder weist darauf hin, dass außerhalb der thermischen, aber innerhalb der viskosen Grenzschicht mit steigender Rayleigh-Zahl bzw. Turbulenz stärkere Wechselwirkungen zwischen beiden Feldern auftreten und somit die von Castaing *et al.* (1989) getroffene Annahme einer Mischungslänge bestätigt.

3. PDFs der thermischen Dissipationsraten zeigen, dass diese in drei Bereiche mit unterschiedlichen charakteristischen Eigenschaften unterteilt werden können. Diese drei Bereiche werden dem turbulenten Hintergrund, den *Plumes*/Mischungsschichten sowie der konduktiven Unterschicht zugeordnet. Die Ra -Abhängigkeit der drei Bereiche weist deutliche Unterschiede auf. Daher wird vorgeschlagen, den von der GL-Theorie gewählten Ansatz (3.3) so zu erweitern, dass dem Verhalten der konduktiven Unterschicht gesondert Rechnung getragen wird.
4. Ein Vergleich der drei untersuchten Geometrien, periodische, quaderförmige und kubische Zelle, zeigt, dass sich die Wärmetransporteigenschaften mit steigender Rayleigh-Zahl einander angleichen und Unterschiede der Strömungsfelder bei geringen Ra dem Einfluss der Geometrie zuzuschreiben sind.
5. Der Vergleich der Wärmeübertragungsraten in den drei Geometrien lässt vermuten, dass es eine kritische Rayleigh-Zahl $Ra \approx 2 \times 10^7$ gibt, bei der die charakteristischen turbulenten Strukturen sehr viel kleiner sind, als die charakteristische Längenskala der Geometrie und die Wärmeübertragung somit unabhängig von der Geometrie ist.

Neben der reinen thermischen Konvektion wurde exemplarisch ebenfalls der Einfluss erzwungener Konvektion auf die thermische Konvektion und die *Plumes* analysiert.

1. Die Wechselwirkungen zwischen *Plumes* und Zuluftstrahl verursachen eine Oszillation des Wärmestroms am Ausströmrand und der Nusselt-Zahl an der Heizplatte, während die Wärmeübertragung an der Kühlplatte nahezu konstant ist. Die Lauflänge des Zuluftstrahls entlang der Decke ist stark von der Längsposition und damit von der durch die thermische Konvektion aufgeprägten Rollenstruktur abhängig.
2. Bei gemischter Konvektion ($Ar = 1$) entstehen mehr, dafür aber kleinere *Plumes* als bei RB-Konvektion.
3. Ein Vergleich der thermischen Dissipationsraten von turbulenter RB- und Mischkonvektion weist darauf hin, dass der Zuluftstrahl vor allem die großskaligen Strukturen beeinflusst, wohingegen die kleinskaligen Mischungsvorgänge nahezu unverändert sind.

9.2 Zusammenfassung

Im Folgenden werden die zu den oben aufgeführten Erkenntnissen führenden Ergebnisse zusammenfassend dargelegt.

Die Analyse der PDFs der thermischen Dissipationsraten zeigt, dass diese in drei Bereiche unterteilt werden können, welche den turbulenten Hintergrund oder Bulk (I), die konduktive Unterschicht (III) und die *Plumes* / Mischungsschichten (II) charakterisieren (Kaczorowski & Wagner 2009). Letztere fungieren dabei als eine Art Bindeglied zwischen den beiden ersteren Bereichen und sind durch die Wendepunkte der PDF der thermischen Dissipationsraten von einander abgetrennt. Es wurde gezeigt, dass die Kernregion α und die Zwischenschicht ϵ zusammen das Verhalten des Bulkbereiches I sehr gut widerspiegeln. Weiterhin korrelieren die Ausläufer der PDFs der Bereiche I und III sehr gut mit den PDFs der Subvolumen α (Kernregion) und b (konduktive Unterschicht).

Die Analyse der Kernregion macht deutlich, dass der Einfluss der Auftriebskräfte auf diesen Bereich mit steigender Rayleigh-Zahl schwindet, während die turbulente Durchmischung im Sinne eines passiven Skalars zunimmt. Dies zeigt sich sowohl in einer homogeneren Verteilung der turbulenten thermischen Dissipationsraten bei höheren Ra als auch in der Ra -Abhängigkeit der PDFs der Kernregion. Das Verhalten der Fluktuationen von Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld untermauert diese Rückschlüsse, da bei hohen Ra die Fluktuationen $|\mathbf{u}'|$ und θ' in der Kernregion nur sehr schwach korrelieren und die Kernregion mit steigender Rayleigh-Zahl zunehmend weniger turbulente thermische Energie beinhaltet. Daher weisen die thermischen Dissipationsraten bei hohen Ra in der Kernregion ein Plateau auf, während bei geringeren Ra der Einfluss der Auftriebskräfte aufgrund des schlecht durchmischten Fluids zu beobachten ist. Ein Vergleich der PDFs der thermischen Dissipationsraten für diesen Bereich mit einem von Chertkov *et al.* (1998) und Gamba & Kolokolov (1999) theoretisch vorhergesagten Skalierungsgesetz zeigt, dass sich die Strömung im Kernbereich mit steigendem Ra dem Verhalten eines passiv durchmischten Skalars nähert. Ein asymptotisches Verhalten konnte für die untersuchten Ra jedoch nicht gefunden werden. Um dieses Verhalten eindeutig zu bestätigen, bedarf es zusätzlicher Ergebnisse bei höheren Rayleigh-Zahlen. Die Auswertung der durch den mittleren Temperaturgradienten hervorgerufenen thermischen Dissipationsraten in der Kernregion macht deutlich, dass

diese Beiträge vernachlässigbar klein sind, während der Anteil aufgrund von turbulenten Fluktuationen diesen Bereich dominiert, was im Einklang mit experimentellen Ergebnissen von He *et al.* (2007) ist. Allerdings ist hervorzuheben, dass die Beiträge der Kernregion zur Wärmeübertragung in den Simulationen mit Ra zunehmen.

Die Integration der PDFs des Bereiches II macht deutlich, dass der von *Plumes* und Mischungsschichten dominierte Bereich in der periodischen Zelle mit steigender Rayleigh-Zahl zunehmend mehr zum mittleren Wärmetransport beiträgt. Andererseits nehmen die Beiträge infolge Bereich I II zugeordneter thermischer Dissipationsraten im gleichen Maße ab. Dies scheint plausibel, wenn man bedenkt, dass der konvektive Wärmetransport bei hohen Rayleigh-Zahlen dominiert. Die Auswertung der Beiträge der turbulenten Fluktuationen $\epsilon_{\theta'}$ zum Wärmetransport in Bereich b macht deutlich, dass der Anteil des turbulenten Wärmetransports in den Grenzschichten von 37% bei $Ra = 3,5 \times 10^5$ auf 42% bei $Ra = 3,5 \times 10^7$ ansteigt. Dies steht im Widerspruch zu Ergebnissen von He *et al.* (2007), die experimentell eine Abnahme der Fluktuationen der thermischen Dissipationsraten $\overline{\epsilon_{\theta'}}$ in der Nähe der wärmeleitenden Wand gemessen haben. Die Simulationsergebnisse zeigen jedoch, dass $\overline{\epsilon_{\theta'}}$ in der Nähe der isothermen Wände ansteigt und erst in den äußeren Grenzschichten mit steigender Rayleigh-Zahl abnimmt, was in Übereinstimmung mit Ergebnissen von Emran & Schumacher (2008) ist. Die Diskrepanz mit den experimentellen Ergebnissen lässt den Schluss zu, dass He *et al.* (2007) die Messungen nicht nah genug an der Wand durchgeführt haben oder die im Experiment nicht perfekt isothermen Randbedingungen zu diesem Unterschied führen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die konduktive Unterschicht und die *Plumes* / Mischungsschichten sich unterschiedlich verhalten. Ein Vergleich der viskosen und thermischen Dissipationsraten zeigt, dass sich ihr minimales Verhältnis am Grenzschichtrand von ungefähr 1,4 auf 1 von der geringsten zur höchsten untersuchten Rayleigh-Zahl reduziert. Dieses Verhalten unterstreicht die zunehmend stärkeren Wechselwirkungen zwischen dem Temperatur- und dem Geschwindigkeitsfeld, was ebenfalls durch eine starke Korrelation der Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen am Grenzschichtrand untermauert wird, wohingegen das Gegenteil in der Kernregion der Fall ist. Die unterschiedliche Dynamik der beiden Felder lässt sich ebenfalls anhand der turbulenten Energie einzelner Skalen ablesen, da das Maximum der turbulenten thermischen Energie am Grenzschichtrand δ_{θ} zu finden ist, während die turbulente kinetische Ener-

gie auch außerhalb der Grenzschichten bis zur Zellmitte weiter zunimmt. Ein weiterer Unterschied liegt darin, dass die örtlichen Energiespektren des Temperaturfeldes bei hohen Ra keine charakteristische Frequenz aufweisen, während sich in den Spektren des Geschwindigkeitsfeldes weiterhin ein eindeutiges Maximum zeigt, das durch die Rollenstruktur des Strömungsfeldes hervorgerufen wird.

Der Vergleich der periodischen mit den geschlossenen Zellen zeigt, dass sich die Strömung bei relativ geringen Rayleigh-Zahlen sehr unterschiedlich verhält, bei Rayleigh-Zahlen ab ungefähr 10^7 jedoch ähnliche Tendenzen aufweisen. Eine qualitative Analyse des Strömungsfeldes ergibt, dass die thermischen *Plumes* bei dieser Rayleigh-Zahl ungefähr eine Größenordnung kleiner sind als die charakteristische Längenskala der Geometrie. Diese Unterschiede spiegeln sich auch in der Skalierung des Nusselt-Rayleigh-Beziehung wider. Der Würfel mit der geringsten Wärmeübertragung bei geringen Rayleigh-Zahlen weist den größten Exponenten β auf, während die periodische Zelle mit den besten Wärmetransporteigenschaften bei geringen Ra den kleinsten Exponenten hat. Daraus folgt, dass die Wärmetransporteigenschaften bei $Ra \approx 10^7$ nahezu unabhängig von der Geometrie sind.

Die Auswertung der PDFs der thermischen Dissipationsraten ergibt, dass sich mit steigender Rayleigh-Zahl ein immer stärker werdender Gradient bei $\zeta \approx 1$ ausbildet, was bedeutet, dass die Abgrenzung zwischen den Dissipationsraten des Bulk und der *Plumes* / Grenzschichten immer stärker wird. Daraus wird geschlossen, dass es in der Tat sinnvoll ist, die thermischen Dissipationsraten wie in Gleichung (3.4) als Beiträge der *Plumes* (und Grenzschichten) und des turbulenten Hintergrundes zu betrachten. Allerdings ergibt die Analyse der DNS-Daten, dass bei geringen Ra ein sanfter Übergang von Bereich I (Bulk) zu III (konduktive Unterschicht) vorhanden ist. Bei den höchsten untersuchten Ra scheinen die *Plumes* eine entscheidende Rolle dabei zu spielen, die Bereiche I und III miteinander zu verbinden. Daher darf insbesondere bei hohen Ra der Wärmeeintrag durch die *Plumes* nicht vernachlässigt werden. Wie in § 3.2 erläutert, kommen He *et al.* (2007) zu dem Schluss, dass *Plumes* und Grenzschichten sich dynamisch unterschiedlich verhaltende Strukturen sind und deshalb in (3.3) nicht gleichwertig behandelt werden dürfen. Im Wesentlichen stimmen die hier gezeigten DNS-Ergebnisse mit ihren Schlussfolgerungen überein, allerdings verdeutlichen die Simulationen ebenfalls, dass dabei

die konduktive Unterschicht und die *Plumes* / Mischungsschichten gesondert betrachtet werden sollten. Untersuchungen bei höheren Ra sind nötig, um die Annäherung der turbulenten Durchmischung der Temperatur in der Kernregion an das Verhalten eines passiven Skalars zu untermauern.

Die DNS der turbulenten Mischkonvektion verdeutlicht, dass der Einfluss des Zuluftstrahls sich signifikant auf die Strukturbildung auswirkt, da sich die Anzahl der *Plumes* vergrößert, während sich ihre Größe verringert. In Übereinstimmung mit Experimenten von Westhoff *et al.* (2007) und Schmeling (2008) wird ein Oszillieren des konvektiven Wärmestroms am Ausströmrand der Zelle beobachtet. Diese Schwankung als auch das Verhalten der Ablöselinie des Zuluftstrahls sind Indikatoren für die Wechselwirkungen zwischen den thermischen *Plumes* und Wandstrahl. Des Weiteren beeinflussen die Wurzeln der *Plumes* die Strömung innerhalb des Auslasskanals, was Gebiete warmen und kalten Fluids quer zur Strömungsrichtung zur Folge hat.

Um diese exemplarische Untersuchung der thermischen Mischkonvektion zu erweitern, sollten neben weiteren Simulationen für mehrere Ra und Ar auch der Einfluss der Höhe des Einlasskanals auf die Strömung untersucht werden. Mithilfe dieser Untersuchung kann die Wechselwirkung der viskosen Grenzschichten aus Kanalströmung und thermischer Konvektion mit verschiedenen Dicken analysiert werden. Auf diese Weise ließe sich das Mischungsverhalten und die Interaktion beider Strömungsformen studieren.

9.3 Ausblick

Für die weitere Untersuchung der thermischen *Plumes* hinsichtlich ihres Beitrages zur Wärmeübertragung und ihrer Dynamik ist es notwendig diese zu detektieren und verfolgen zu können. Zukünftige Arbeiten sollten daher eine Methode entwickeln, die dies erlaubt. Die bedingte Mittelung z.B. der Dissipationsraten oder der Wirbeligkeit als Funktion der Wärmestromdichte, könnte hier wesentliche Hinweise für die drei-dimensionale Extraktion der *Plumes* geben. Im Folgenden ließe sich die Dynamik der *Plumes* in unterschiedlichen Geometrien und bei unterschiedlichen Prandtl-Zahlen untersuchen. Die Anwendung einer solchen Methode auf die gemischte Konvektion, und damit einhergehend die Analyse der Wechselwirkungen zwischen erzwungener und thermischer Konvektion sind hierbei

eine interessante Ergänzung.

Anhang A

Simulationsparameter

TABELLE A.1: Simulationsparameter für die periodische Zelle. x =vertikale Richtung, y =Längsrichtung, D=Dirichlet, P=periodisch, N=Neumann

Pr	Ra	Γ_{xz}	Γ_{xy}	Temp.-Randbed.		Geschw.-Randbed.		N_x	N_y	N_z	N_{it}	Kapitel
				(x,y,z)	(x,y,z)							
0,7	$4,38 \times 10^3$	1	5	NPD	DPD	16	32	16	1,545			4.4.1
						32	64	32	1,557			
0,7	$4,38 \times 10^4$	1	5	NPD	DPD	16	32	16	3,220			4.4.1
						32	64	32	3,193			
0,7	$8,75 \times 10^4$	1	5	NPD	DPD	16	32	16	9,105			4.4.1
						32	64	32	8,357			
0,7	$4,38 \times 10^5$	1	5	NPD	DPD	16	32	16	13,97			4.4.1
						32	64	32	13,38			
						64	128	64	13,39			
0,7	$3,5 \times 10^4$	1	5	NPD	DPD	32	64	32	2,99			7.2
0,7	$3,5 \times 10^5$	1	5	NPD	DPD	64	128	64	6,225			5,6
0,7	$3,5 \times 10^6$	1	5	NPD	DPD	96	256	96	12,12			
0,7	$3,5 \times 10^7$	1	5	NPD	DPD	152	512	152	22,87			
0,7	$2,31 \times 10^8$	1	5	NPD	DPD	152	512	152	40,62			

TABELLE A.2: Simulationsparameter für die quaderförmige Zelle. x =vertikale Richtung, y =Längsrichtung, D =Dirichlet, P =periodisch, N =Neumann

Pr	Ra	Γ_{xz}	Γ_{xy}	Temp.-Randbed.		Geschw.-Randbed.		N_x	N_y	N_z	\bar{Mu}	Kapitel
				(x,y,z)	(x,y,z)	(x,y,z)	(x,y,z)					
0,7	$3,5 \times 10^5$	1	5	NND	DDD	64	322	64	64	6,13	7	
0,7	$3,5 \times 10^6$	1	5	NND	DDD	160	578	160	160	12,15		
0,7	$3,5 \times 10^7$	1	5	NND	DDD	160	578	160	160	22,86		

TABELLE A.3: Simulationsparameter für die kubische Zelle. x =vertikale Richtung, y =Längsrichtung, D=Dirichlet, P=periodisch, N=Neumann

Pr	Ra	Γ_{xz}	Γ_{xy}	Temp.-Randbed.		Geschw.-Randbed.		N_x	N_y	N_z	N_{μ}	Kapitel
				(x,y,z)	(x,y,z)							
0,7	$3,5 \times 10^5$	1	1	NND	DDD	64	64	64	6,10			7
0,7	$3,5 \times 10^6$	1	1	NND	DDD	96	96	96	11,98			
0,7	$3,5 \times 10^7$	1	1	NND	DDD	190	190	190	23,11			
0,7	$2,31 \times 10^8$	1	1	NND	DDD	256	256	256	39,72			

Literaturverzeichnis

- AHLERS, G. 2001 Effect of sidewall conductance on heat-transport measurements for turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E* **63** (1).
- AHLERS, G., ARAUJO, F. F., FUNFSCHILLING, D., GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2007 Non-Oberbeck-Boussinesq Effects in gaseous Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **98** (5).
- AHLERS, G., ARAUJO, F. F., FUNFSCHILLING, D., GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2008 Non-Oberbeck-Boussinesq Effects in turbulent thermal convection in ethane close to the critical point. *Phys. Rev. E* **77** (4).
- AHLERS, G., BROWN, E., FONTENELE ARAUJO, F., FUNFSCHILLING, D., GROSSMANN, L. & LOHSE, D. 2006 Non-Oberbeck-Boussinesq effects in strongly turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **569**, 409–445.
- AHLERS, G., GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2002 Hochpräzision im Kochtopf - Neues zur turbulenten Wärmekonvektion. *Physik Journal* **2**, 31–37.
- AHLERS, G., GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2009 Heat transfer & large-scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Rev. Mod. Phys.* **81**, im Druck.
- BELMONTE, ANDREW, TILGNER, ANDREAS & LIBCHABER, ALBERT 1994 Temperature and velocity boundary layers in turbulent convection. *Phys. Rev. E* **50** (1), 269–279.
- BÉNARD, H. 1901 Les tourbillons cellulaires dans un nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. *Ann. Chim. Phys.* **23**, 62–144.
- BOLGIANO, R. 1959 Turbulent spectra in a stably stratified atmosphere. *J. Geophys. Res.* **64** (12), 2226–2229.
- BOUSSINESQ, J. 1903 *Theorie analytique de la chaleur*, , vol. 2. Paris: Gauthier-Villars.
- BUSSE, F. H. 1967 On the study of two-dimensional convection in a layer heated from below. *J. Math. Phys.* **49**, 140–150.

- CABOT, W. 1992 Large eddy simulations of time-dependent and buoyancy-driven channel flows. Annual Research Briefs, 45–60. CTR.
- CALZAVARINI, E., TOSCHI, F. & TRIPICCIONE, R. 2002 Evidences of Bolgiano scaling in 3D Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E* **66**.
- CAMUSSI, R. & VERZICCO, R. 2004 Temporal statistics in high Rayleigh number convective turbulence. *Europ. J. Mech/B Fluids* **23**, 427–442.
- CASTAING, B., GUNARANTE, G., HESLOT, F., KADANOFF, L., LIEBCHABER, A., THOMAE, S., WU, X., ZALESKI, S. & ZANETTI, G. 1989 Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **204**, 1–30.
- CHERTKOV, M., FALKOVICH, G. & KOLOKOLOV, I. 1998 Intermittent dissipation of a passive scalar in turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **80** (10), 2121–2124.
- CHIU, K.-C., OUAZZANI, J. & ROSENBERGER, F. 1987 Mixed convection between horizontal plates—ii. fully developed flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* **30** (8), 1655–1662.
- CHIU, K.-C. & ROSENBERGER, F. 1987 Mixed convection between horizontal plates—i. entrance effects. *Int. J. Heat Mass Transfer* **30** (8), 1645–1654.
- CHORIN, A. J. 1968 Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computations* **22**, 745–762.
- CHRISTIE, S.-L. 1993 Numerical evidence for nonuniversality of the soft/hard turbulence classification for thermal convection. *Phys. Fluids A* **5** (2), 412–420.
- CHU, T. Y. & GOLDSTEIN, R. J. 1973 Turbulent convection in a horizontal layer of water. *J. Fluid Mech.* **60**, 141–159.
- CIONI, S., CILIBERTO, S. & SOMMERIA, J. 1995 Temperature structure functions in turbulent convection at low Prandtl number. *Europhys. Lett.* **32**, 413–418.
- CIONI, S., CILIBERTO, S. & SOMMERIA, J. 1997 Strongly turbulent Rayleigh-Bénard convection in mercury: comparison with results at moderate Prandtl number. *J. Fluid Mech.* **335**, 111–140.
- DAYA, Z. A. & ECKE, R. E. 2001 Does turbulent convection feel the shape of the container? *Phys. Rev. Lett.* **87** (18), 184501.
- DU, Y.-B. & TONG, P. 2000 Turbulent thermal convection in a cell with ordered rough boundaries. *J. Fluid Mech.* **407**, 57–84.
- EBERT, A., RESAGK, C. & THESS, A. 2008 Experimental study of temperature distribution and local heat flux for turbulent Rayleigh-Bénard convection of air in a long rectangular enclosure. *Int. J. Heat and Mass Trans.* **51**, 4238–4248.

- EIDSON, T. 1985 Numerical Simulation of the turbulent Rayleigh-Bénard problem using subgrid modelling. *J. Fluid Mech.* **158**, 245–268.
- EMRAN, M. S. & SCHUMACHER, J. 2008 Fine-scale statistics of the temperature derivatives in convective turbulence. *J. Fluid Mech.* **611**, 13–34.
- FRICK, H. & CLEVER, R. M. 1980 Einfluss der Seitenwände auf das Einsetzen der Konvektion in einer horizontalen Flüssigkeitsschicht. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **31**, 512 ff.
- GAMBA, A. & KOLOKOLOV, I. V. 1999 Dissipation statistics of a passive scalar in a multidimensional smooth flow. *J. Stat. Phys.* **94**, 759–777.
- GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P. & CABOT, W. 1991 A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids* **3** (7), 1760–1765.
- GRAY, D. D. & GIORGINI, A. 1976 The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 545–551.
- GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2000 Scaling in thermal convection: a unifying theory. *J. Fluid Mech.* **407**, 27–56.
- GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2004 Fluctuations in turbulent Rayleigh-Bénard convection: The role of plumes. *Phys. Fluids* **16** (12), 4462–4472.
- GRÖTZBACH, G. 1983 Spatial resolution requirements for direct numerical simulation of Rayleigh-Bénard convection. *J. Comp. Phys.* **49**, 241–264.
- GRÖTZBACH, G. 1990 Simulation of turbulent flow and heat transfer for selected problems of nuclear thermal-hydraulics. In *1st Int. Conf. on Supercomp. in Nuclear Applications*. Mito, Japan.
- GULLBRAND, J. 2003 Grid-independent large-eddy simulation in turbulent channel flow using three-dimensional explicit filtering. CTR, Ann. Res. Briefs.
- GÜNTER, G., BOSBACH, J., PENNECOT, J., WAGNER, C., LERCHE, T. & GORES, I. 2006 Experimental and numerical simulations of idealized aircraft cabin flows. *Aerospace Science and Technology* **10**, 563–573.
- HARTLEP, T. 2004 Strukturbildung und Turbulenz. Eine numerische studie zur turbulenten Rayleigh-Bénard Konvektion. PhD thesis, Universität Göttingen.
- HARTLEP, T., TILGNER, A. & BUSSE, F. H. 2005 Transition to turbulent convection in a fluid layer heated from below at moderate aspect ratio. *J. Fluid Mech.* **554**, 309–322.
- HE, X., TONG, P. & XIA, K.-Q. 2007 Measured dissipation field in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **98** (14).
- HOWARD, L. N. 1963 Heat transfer by turbulent convection. *J. Fluid Mech.* **17**, 405–432.

- HÖLLING, M. & HERWIG, H. 2006 Asymptotic analysis of heat transfer in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Int. J. Heat Mass Transfer* **49**, 1129–1136.
- KACZOROWSKI, M., SHISHKIN, A., SHISHKINA, O. & WAGNER, C. 2008 *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics VI, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, vol. 96, chap. Developement of a Numerical Procedure for Direct Simulations of Turbulent Convection in a Closed Rectangular Cell, pp. 381–388. Springer.
- KACZOROWSKI, M. & WAGNER, C. 2009 Analysis of the thermal plumes in turbulent Rayleigh-Bénard convection based on well-resolved numerical simulations. *J. Fluid Mech.* **618**, 89–112.
- KERR, R. M. 1985 Higher-order derivative correlations and the alignment of small-scale structures in isotropic numerical turbulence. *J. Fluid Mech.* **153**, 31–58.
- KERR, R. M. 1996 Rayleigh number scaling in numerical convection. *J. Fluid Mech.* **310**, 139–179.
- KIMMEL, S. J. & DOMARADZKI, A. 2000 Large eddy simulations of Rayleigh-Bénard convection using subgrid scale estimation model. *Phys. Fluids* **12** (1), 169–184.
- KOLMOGOROV, A. N. 1941 Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32**, 19–21.
- KRAICHNAN, R. H. 1962 Turbulent thermal convection at arbitrary prandtl number. *Phys. Fluids* **5**, 1374–1389.
- KRAVCHENKO, A. G. & MOIN, P. 1997 On the effect of numerical errors in Large Eddy Simulations of turbulent flows. *J. Comp. Phys.* **131**, 310–322.
- KRISHNAMURTI, R. 1973 Some further studies on the transition to turbulent convection. *J. Fluid Mech.* **60**, 285–303.
- KUNNEN, R. P. J., CLERX, H. J. H., GEURTS, B. J., BOKHOVEN, L. J. A., VAN, AKKERMANS, R. A. D. & VERZICCO, R. 2008 Numerical and experimental investigation of structure-function scaling in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E* **77**.
- KÜHN, M., BOSBACH, J. & WAGNER, C. 2009 Systematic experimental parameter study of forced and mixed convection in a passenger aircraft cabin mock-up. *Building and Environment* .
- LEONARD, A. & WINKELMANS, G. S. 1999 A tensor-diffusivity subgrid model for Large-Eddy Simulation. *Tech. Rep.* Tech. Rep. 043. Caltech ASCI.
- LIANG, S. F., VIDAL, A. & ACRIVOS, A. 1969 Buoyancy-driven convection in cylindrical geometries. *J. Fluid Mech.* **36**, 239–256.

- LINDEN, P. F. & COOPER, P. 1996 Multiple sources of buoyancy in a naturally ventilated enclosure. *J. Fluid Mech.* **311**, 177–192.
- LIU, S., MENEVEAU, C. & KATZ, J. 1994 On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet. *J. Fluid Mech.* **275**, 83–119.
- LOHSE, D. 1994 Temperature spectra in shear flow and thermal convection. *Physics Letters A* **196**, 70–75.
- LUI, S.-L. & XIA, K.-Q. 1998a Spatial structure of the thermal boundary layer in turbulent convection. *Phys. Rev. E* **57** (5), 5494–5503.
- LUI, S.-L. & XIA, K.-Q. 1998b Spatial structure of the viscous boundary layer in turbulent convection. *Phys. Rev. E* **58** (5), 5816–5820.
- MAYSTRENKO, A., RESAGK, C. & TCESS, A. 2007 Structure of the thermal boundary layer for turbulent Rayleigh-Bénard convection of air in a long rectangular enclosure. *Phys. Rev. E* **75** (6), 066303.
- NEUMANN, G. 1990 *J. fluid Mech.* **214**, 559–578.
- NIEMELA, J. J., SKRBEK, L., SREENIVASAN, K. R. & DONELLY, R. J. 2000 Turbulent convection at very high Rayleigh numbers. *Nature* **404**, 837–840.
- NIEMELA, J. J. & SREENIVASAN, K. R. 2003 Confined turbulent convection. *J. Fluid Mech.* **481**, 355–384.
- OBOUKHOV, A. M. 1962 Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid. Mech.* **13**, 77–81.
- OBUKHOV, A. M. 1959 *Sov. Phys. Dokl.* **4**, 61.
- PENG, S.-H. & DAVIDSON, L. 2002 On a subgrid-scale heat flux model for large eddy simulation of turbulent thermal flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* **45**, 1393–1405.
- POLIFKE, W. & KOPITZ, J. 2005 *Wärmeübertragung*. Pearson.
- POPE, S. B. 2003 *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- DU PUIITS, R., RESAGK, C., TILGNER, A., BUSSE, F. H. & TCESS, A. 2007 Structure of thermal boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **572**, 231–254.
- RAYLEIGH, L. 1916 On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the other side. *Philos. Mag.* **32**, 529–543.
- RICHARDSON, L. F. 1922 *Weather prediction by numerical process*. Cambridge: Cambridge University Press.

- ROBINSON, F. & CHAN, K. 2004 Non-Boussinesq simulations of Rayleigh-Bénard convection in a perfect gas. *Phys. Fluids* **16** (5), 1321–1333.
- ROCHE, P. E., CASTAING, B. & HEBRAL, B. 2001 Observation of the 1/2 power law in Rayleigh-Bénard convection. *Phys Rev. E* **63**.
- SCHLÜTER, A., LORTZ, D. & BUSSE, F. H. 1965 On the stability of finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.* **23**, 129–144.
- SCHMELING, D. 2008 Experimentelle Untersuchung von Strukturbildung und Wärmetransport in turbulenter Mischkonvektion. Master's thesis, Universität Göttingen.
- SCHMELING, D., WESTHOFF, A., KÜHN, M., BOSBACH, J. & WAGNER, C. 2009 Flow structure formation of turbulent mixed convection in a closed rectangular cavity. *in Vorbereitung*.
- SCHMITT, L. & FRIEDRICH, R. 1982 Numerische Simulation turbulenter Grenzschichten (Large-Eddy-Simulation). *Tech. Rep.* 82/2. Institut für Strömungsmechanik, TU München.
- SCHUMACHER, J. & SREENIVASAN, K. R. 2005 Statistics and geometry of passive scalars. *Phys. Fluids* **17** (125107).
- SCHUMANN, U. & BENNER, J. 1982 Direct solution of the discretised Poisson-Neumann problem on a domain composed of rectangles. *J. Comp. Phys.* **46**, 1–14.
- SCHUMANN, U., GRÖTZBACH, G. & KLEISER, L. 1979 Direct numerical simulations of turbulence. In *Prediction methods for turbulent flows, VKI-lecture series 1979 2*. Brussels: Von Kármán Institute for Fluid Dynamics.
- SHEN, Y., TONG, P. & XIA, K.-Q. 1996 Turbulent convection over rough surfaces. *Phys. Rev. Lett.* **76** (6).
- SHISHKINA, O., SHISHKIN, A. & WAGNER, C. 2008 Simulation of turbulent thermal convection in complicated domains. *J. Comput. Appl. Math.* p. im Druck.
- SHISHKINA, O. & WAGNER, C. 2006 Analysis of thermal dissipation rates in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **546**, 51–60.
- SHISHKINA, O. & WAGNER, C. 2007a Boundary and interior layers in turbulent thermal convection in cylindrical containers. *Int. J. Sci. Comp. Math.* **1** (2/3/4), 360–373.
- SHISHKINA, O. & WAGNER, C. 2007b Local heat flux in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Fluids* **19** (8), 085107–1–085107–13.
- SHISHKINA, O. & WAGNER, C. 2008 Analysis of sheet-like thermal plumes in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **599**, 383–404.

- SHRAIMAN, B. I. & SIGGIA, E. D. 1990 Heat transport in high-Rayleigh-number convection. *Phys. Rev. A* **42**, 3650–3653.
- SWARZTRAUBER, P. N. 1974 A direct method for the discrete solution of separable elliptic equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **11**, 1136–1150.
- SWARZTRAUBER, P. N. & SWEET, R. 1975 Efficient Fortran subprograms for the solution of elliptic equations. *Tech. Rep.* IA-109. National Center for Atmospheric Research.
- VERZICCO, R. & CAMUSSI, R. 2003a Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell. *J. Fluid Mech.* **477**, 19–49.
- VERZICCO, R. & CAMUSSI, R. 2003b Turbulent thermal convection in a closed domain: Viscous boundary layer and mean flow effects. *Eur. Phys. J. B.* **35**.
- VERZICCO, R. & SREENIVASAN, K. R. 2008 A comparison of turbulent thermal convection between conditions of constant temperature and constant heat flux. *J. Fluid Mech.* **595**, 203–219.
- WAGNER, C. 2003 A non-dissipative dynamic subgrid scale similarity model. In *Proc. of 3rd International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*. Sendai, Japan.
- WESTHOFF, A., GRABINSKI, N., BOSBACH, J., WAGNER, C. & TRESS, A. 2007 Scaling of turbulent mixed convection under high pressure. , vol. 2, pp. 505–510. Garching, Germany.
- WILCOX, D. C. 2004 *Turbulence Modelling for CFD*, 2nd edn. DCW Industries.
- WÖRNER, M. 1994 Direkte Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard Konvektion in flüssigem Natrium. PhD thesis, Universität Karlsruhe.
- XI, H.-D., LAM, S. & XIA, K.-Q. 2004 From laminar plumes to organized flows: the onset of large-scale circulation in turbulent thermal convection. *J. Fluid Mech.* **503**, 47–56.
- ZHANG, W. & CHEN, Q. 2000 Large eddy simulation of indoor airflow with a filtered dynamic subgrid scale model. *Int. J. Heat and Mass Transfer* **43**, 3219–3231.
- ZHOU, Q., SUN, C. & XIA, K.-Q. 2007 Morphological study. *Phys. Rev. Lett.* **98** (7).
- ZHOU, S.-Q. & XIA, K.-Q. 2002 Plume statistics in thermal turbulence: Mixing of an active scalar. *Phys. Rev. Lett.* **89** (18).