

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Über die Dominanzzahl in Graphen unter Nutzung verschiedener Konzepte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Dr. rer. nat.

eingereicht von

Dipl.-Math. Sarah Artmann

Institut für Mathematik
TU Ilmenau

Gutachter: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Jochen Harant

(Technische Universität Ilmenau)

Prof. Dr. rer. nat. habil. Arnfried Kemnitz

(Technische Universität Braunschweig)

Prof. Dr. rer. nat. habil. Ingo Schiermeyer

(Technische Universität Bergakademie Freiberg)

Tag der Einreichung: 11. Januar 2010

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 03. März 2010

urn:nbn:de:gbv:ilm1-2010000102

Vorwort

Die ursprüngliche Problemstellung, die die Theorie zu dominierenden Mengen in Graphen motiviert hat, geht auf C.F. DE JAENISCH zurück. Dieser veröffentlichte im Jahr 1862 eine Abhandlung, in der er über die folgende Aufgabe nachdenkt:

„Wie viele Damen benötigt man mindestens (an welchen Positionen), um auf einem $(n \times n)$ -Schachbrett jedes Feld in maximal einem Zug erreichen zu können.“

Graphentheoretisch wurde dieses Thema dann erstmals 1958 von C. BERGE [8] und 1962 von O. ORE [31] formuliert und veröffentlicht. Deutet man nämlich in dem „Damenproblem“ jedes Feld des Schachbrettes als einen Knoten und verbindet man zwei Knoten jeweils dann durch eine Kante, wenn eine Dame sich durch einen Spielzug von einem der zugehörigen Felder zum anderen bewegen kann, dann sind das Bestimmen der Anzahl und der Positionen der benötigten Damen und das Finden einer kleinsten dominierenden Menge in dem so konstruierten Graphen äquivalent.

Das so entstandene Problem der Dominanz in Graphen – das heißt zu einem gegebenen Graphen G eine minimale Menge D von Knoten zu suchen, so dass jeder Knoten, der nicht zu D gehört, mindestens einen Nachbarn in D besitzt – gehört mittlerweile zu den meist untersuchten Problemen in der Graphentheorie. Dieser Umstand ist vor allem der Fülle von Anwendungen für diese Aufgabe zu verdanken. So kann man sich neben dem „Damenproblem“ mit Fragestellungen zur Überwachung von Netzwerken, zur Übermittlung von Informationen innerhalb dieser und zu Depots in Versorgungsnetzen beschäftigen und kommt immer wieder auf Dominanzprobleme.

Allerdings ist das zugehörige Entscheidungsproblem DOMINATING SET (DS)

$DS : \{(G, k) \mid G \text{ besitzt eine dominierende Menge } D \text{ mit } |D| \leq k\}$,

das zu einem Graphen G und einer natürlichen Zahl k die Aussage liefert, ob es in G eine dominierende Menge D einer Mächtigkeit kleiner oder gleich k gibt, NP-vollständig. Das bedeutet, für einen beliebigen Graphen kann nicht „schnell“ bestimmt werden, wie groß eine kleinste dominierende Menge ist, es sei denn $P=NP$ würde gelten. Dies ist jedoch das große offene Problem der Komplexitätstheorie, wobei vermutet wird, dass die Gleichheit nicht gilt.

In der Literatur findet sich daher bereits eine Fülle von Arbeiten, die sich mit Näherungsmethoden zum Auffinden oberer Schranken für die Mächtigkeit „guter“ Dominanzmengen in Graphen beschäftigen. Die Resultate lassen sich dabei grob in zwei Gruppen aufteilen:

1. Schranken, die durch „konstruktive“ Methoden gefunden wurden.
2. Unter Nutzen der probabilistischen Methode gefundene Schranken.

Insbesondere die Kombination der beiden Vorgehensweisen liefert zudem neue Ergebnisse. Die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Konzepte nutzen im Wesentlichen die probabilistische Methode, die – mit Algorithmen kombiniert – heuristische Methoden liefert zum Finden guter dominierender Mengen, zum Aufstellen neuer Schranken, usw.

Eine wesentliche Rolle für diese Arbeit spielt im Hinblick auf spezielle Graphenklassen die Tatsache, dass das Entscheidungsproblem DS NP-vollständig bleibt, wenn die Eingabe auf bipartite oder reguläre Graphen beschränkt wird.

Die in dieser Arbeit entwickelten neuen Methoden werden für allgemeine und insbesondere für bipartite Graphen vorgestellt, wobei die erzielten Ergebnisse für bipartite Graphen erwartungsgemäß besser gegenüber den allgemeinen Ergebnissen sind.

Damit stellen die Ergebnisse für allgemeine Graphen lediglich eine Bereicherung der bereits umfangreich untersuchten Sachlage dar. Für bipartite Graphen jedoch sind die Resultate in dieser Richtung sehr spärlich und der Beitrag zu dieser speziellen Aufgabenstellung ist der Hauptzweck der Arbeit.

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die mir bei der Erstellung der vorliegenden Arbeit mit Rat und Tat zur Seite gestanden haben. Insbesondere meinem Betreuer Prof. Dr. J. Harant sowie meinen Kollegen Dr. Anja Pruchnewski und Prof. Dr. D. Rautenbach für ihre tatkräftige Unterstützung und erfolgreiche Motivation. Für fruchtbare Diskussionen mit Prof. Dr. I. Schiermeyer und Dr. F. Göring auf dem C_5 -Workshop in Rathen 2007 bin ich ebenfalls dankbar.

Ich widme diese Arbeit meiner Familie, die immer an mich geglaubt hat, und meinem Verlobten Dennis, der stets an meiner Seite ist.

Sie bilden gemeinsam die Menge, von der ich mein Leben gerne dominieren lasse.

Ich danke ihnen für ihren Rückhalt und ihre Unterstützung!

Ilmenau, im Januar 2010

Sarah Artmann

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
Inhaltsverzeichnis	1
1 Einleitung	2
1.1 Graphentheoretische Grundlagen	2
1.2 Das Dominanzproblem in Graphen	4
1.3 Die probabilistische Methode	8
1.3.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen	8
1.3.2 Die probabilistische Methode	9
1.4 Bekannte Schranken für die Dominanzzahl	11
1.5 Aufbau der Arbeit	13
2 Kontrollierte Abstiege	15
2.1 Kontrollierte Abstiege in regulären Graphen	15
2.1.1 Verbesserung mit einer vorgegebenen unabhängigen Menge I_5	16
2.1.2 Verbesserung mit Schranken für $\alpha_h(G)$	22
2.1.3 Minimierung der oberen Schranke über p	25
2.1.4 Zusammenfassung und Auswertung	26
2.2 Kontrollierte Abstiege in beliebigen Graphen	29
2.2.1 Schranken für p	30
2.2.2 Verbesserungen	36
3 Abstiegsverfahren	41
3.1 Abstiegsverfahren in allgemeinen Graphen	41
3.2 Abstiegsverfahren in bipartiten Graphen	50
4 Iterationsverfahren	58
4.1 Iterationsverfahren in allgemeinen Graphen	58
4.2 Iterationsverfahren in bipartiten Graphen	65
5 Zusammenfassung	71
Symbolverzeichnis	73
Literaturverzeichnis	76

1 Einleitung

Um ein einheitliches Verständnis der Bezeichnungen für den Verlauf dieser Arbeit aufzubauen, werden zunächst einige begriffliche Grundlagen der Graphentheorie wiederholt (Kapitel 1.1), anschließend wird das behandelte Problem der Dominanz in Graphen vorgestellt (Kapitel 1.2) und ein grundlegendes Verfahren zur Herangehensweise präsentiert, das wir in dieser Arbeit nutzen werden (Kapitel 1.3). Danach wollen wir in dieser Einleitung bekannte Ergebnisse anführen (Kapitel 1.4) und einen kurzen Überblick über die folgenden Kapitel geben (Kapitel 1.5).

1.1 Graphentheoretische Grundlagen

Den Behandlungsgegenstand dieser Arbeit bilden ungerichtete und schlichte Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

und der Kantenmenge

$$E \subseteq \{v_i v_j \mid v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}.$$

Dabei bezeichnen $|V| = n$ die *Ordnung* und $|E| = m$ die *Größe* des Graphen G .

Auf dieser Grundlage wollen wir nun einige Begriffe aus der Graphentheorie einführen, die im Verlauf der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Mit den üblichen Bezeichnungen nach [15] ist die *Nachbarschaft* eines Knoten $v_i \in V$ im Graphen G die Menge $N_G(v_i) = N(v_i) = \{v_j \in V \mid v_i v_j \in E\}$, das heißt die Menge aller Knoten, mit denen v_i durch eine Kante verbunden ist. Die *abgeschlossene Nachbarschaft* von v_i beinhaltet zusätzlich v_i selber, also $N_G[v_i] = N_G(v_i) \cup \{v_i\}$.

Für eine Menge $U \subset V$ sei $N_G[U] = \bigcup_{v_i \in U} N_G[v_i]$ und $N_G(U) = N_G[U] \setminus U$.

Sind zwei Knoten v_i und v_j – ggf. über weitere paarweise verschiedene Knoten v_{k_1}, \dots, v_{k_l} – miteinander verbunden, so bezeichnet man die Folge von Knoten und Kanten $v_i = v_{k_0}, e_{k_1}, v_{k_1}, e_{k_2}, v_{k_2}, \dots, v_{k_l}, e_{k_{l+1}}, v_{k_{l+1}} = v_j$ mit $e_{k_i} = v_{k_i} v_{k_{i+1}}$, $i = 0, \dots, l$, als *Weg* zwischen v_i und v_j . Sind v_i und v_j identisch und läuft der Weg durch mindestens drei Knoten, so handelt es sich um einen *Kreis* im Graphen G . Die *Länge* eines Weges oder Kreises ergibt sich als die Anzahl der enthaltenen Kanten.

Entsprechend dieser Definition bezeichne P_j einen Weg (engl. path) mit j Kanten und $j + 1$ Knoten. Als die Länge eines kürzesten Kreises in einem Graphen, ist die *Tailenweite* (engl. girth) g definiert.

Wählt man in einem Graphen G einen kürzesten Weg, der zwei Knoten v_i und v_j ($i \neq j$) verbindet, so bezeichnet man dessen Länge als *Abstand* (engl. distance) von v_i und v_j , formal $dist_G(v_i, v_j)$.

Auf Grundlage dieses Begriffs können wir die *s-te Nachbarschaft* von v_i definieren. Diese wird mit $N_s(v_i)$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, bezeichnet und beschreibt die Menge aller Knoten v_j , für die $dist_G(v_i, v_j) = s$ gilt.

Die *Valenz* eines Knoten v_i in G ist die Anzahl seiner Nachbarn $d_G(v_i) = d(v_i) = |N(v_i)|$. Dabei nennt man die kleinste Valenz in einem Graphen die *Minimalvalenz* $\delta(G) = \delta = \min_{v_i \in V} d(v_i)$ und die größte Valenz die *Maximalvalenz* $\Delta(G) = \Delta = \max_{v_i \in V} d(v_i)$ von G . Es gilt trivialerweise $\delta \leq d(v_i) \leq \Delta$ für alle $v_i \in V(G)$ und man sieht leicht, dass gilt

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m. \quad (1.1)$$

Die *Durchschnittsvalenz* \bar{d} eines Graphen berechnet sich demnach als $\bar{d} = \frac{2m}{n}$.

Nachdem wir verschiedene Begriffe in Graphen definiert haben, wollen wir nun versuchen, Klassen von Graphen durch die Forderung bestimmter Eigenschaften zu bilden. Wir beschränken uns dabei auf die Klassen der regulären und bipartiten Graphen, da wir mit diesen im weiteren Verlauf arbeiten werden.

Besitzt jeder Knoten $v_i \in V$ die gleiche Valenz $d(v_i) = r$, so heißt der Graph *r-regulär*. Mit der Klasse der regulären Graphen beschäftigen wir uns in Kapitel 2.1.

Ein Graph heißt *bipartit*, wenn sich seine Knotenmenge V so in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 aufteilen lässt, dass für jede Kante $e \in E$ ein Endknoten in V_1 und einer in V_2 liegt. Die beiden Teilmengen der Knotenmenge werden auch *Partitionsklassen* genannt. Bipartite Graphen werden uns in den Kapiteln 3.2 und 4.2 begegnen.

Besitzen alle Knoten innerhalb der Partitionsklasse V_1 die Valenz r und alle Knoten in V_2 die Valenz s , dann heißt der bipartite Graph *r-s-regulär*.

Wenn alle Knoten eines Graphen paarweise durch eine Kante verbunden sind, so heißt der Graph *vollständig*. Der vollständige Graph mit n Knoten wird mit K_n bezeichnet. *Vollständig bipartit* heißt ein bipartiter Graph, wenn jeder Knoten der Partitionsklasse V_1 mit jedem Knoten der Partitionsklasse V_2 benachbart ist. Sind $|V_1| = n_1$ und $|V_2| = n_2$ die Mächtigkeiten der beiden Partitionsklassen, so heißt der zugehörige vollständig bipartite Graph K_{n_1, n_2} .

1.2 Das Dominanzproblem in Graphen

Diese Arbeit widmet sich einem ganz bestimmten Graphenparameter – der Dominanzzahl. Wir wollen diese im Folgenden definieren, das zugehörige Entscheidungsproblem aufstellen und dessen Komplexität untersuchen. Zudem werden die gängigen Herangehensweisen für diese Problemstellung zusammengetragen.

Eine Menge $D \subseteq V$ von Knotenpunkten in einem Graphen G heißt *dominierend*, falls jeder Knoten $v_i \in V \setminus D$ einen Nachbarn in D besitzt. Die minimale Mächtigkeit einer solchen dominierenden Menge D wird mit der *Dominanzzahl* $\gamma(G)$ bezeichnet.

Dies führt zu dem Entscheidungsproblem DOMINATING SET (DS)

$DS : \{(G, k) \mid G \text{ besitzt eine dominierende Menge } D \text{ mit } |D| \leq k\}$,

das zu einem Graphen G und einer natürlichen Zahl k die Aussage liefert, ob es in G eine dominierende Menge D einer Mächtigkeit kleiner oder gleich k gibt. Dieses Problem ist NP-vollständig (vgl. [17], S.190) und bleibt es auch für spezielle Graphenklassen wie die von uns betrachteten regulären oder bipartiten Graphen (vgl. [9]). Folglich ist es in diesem Sinne schwer, $\gamma(G)$ zu bestimmen.

Aus diesem Grund beschäftigt man sich damit, Schranken für $\gamma(G)$ zu finden und Näherungsalgorithmen zum Bestimmen „kleiner“ Mengen D zu entwickeln.

Dank vielfältiger Anwendungsgebiete in der Praxis findet sich in der Literatur bereits eine Fülle von Arbeiten zur Dominanz in Graphen. Die Resultate zu oberen Schranken für $\gamma(G)$ lassen sich grob in zwei Gruppen aufteilen:

1. Schranken, die durch „konstruktive“ Methoden gefunden wurden (z.B. KOSTOCHKA und STODOLSKY [28], ARNAUTOV und PAYAN [3, 32] oder LIN und SUN [29]).
2. Unter Nutzen der probabilistischen Methode (vgl. Kapitel 1.3) gefundene Schranken (z.B. ALON und SPENCER [2], CARO und RODITTY [12] oder HARANT, PRUCHNEWSKI und VOIGT [21]).

Im Gegensatz zum Vorgehen der ersten Gruppe erhält man die Resultate der zweiten Gruppe, indem zufällige dominierende Mengen konstruiert werden und der Erwartungswert ihrer Mächtigkeit eine obere Schranke für $\gamma(G)$ bildet. Ohne auf diesem Weg sofort eine konkrete Menge D in die Hand zu bekommen, lassen sich Schranken für $\gamma(G)$ und später auch „realisierende“ Algorithmen für diese Schranken finden. Dabei kann man den Erwartungswert oft als multilineare Funktion in noch zu definierenden Wahrscheinlichkeiten schreiben. Das bedeutet diese Funktion ist linear in jeder Variablen, wenn die übrigen Variablen fixiert werden. Es gelingt oft zu zeigen, dass $\gamma(G)$ gleich dem Minimum dieser Funktion ist, genommen über die Intervalle $[0, 1]$ für die Wahrscheinlichkeiten.

Insbesondere die Kombination der beiden Vorgehensweisen liefert zudem neue Ergebnisse. In den Kapiteln 2 und 3 werden wir auf diese Weise neue Schranken für $\gamma(G)$ entwickeln.

Bei den Überlegungen zur Dominanz tritt häufig auch eine ähnliche Eigenschaft auf, die Unabhängigkeit. Eine Knotenmenge $I \subseteq V$ heißt *unabhängig* (engl independent), falls keine zwei Knoten aus I in G benachbart sind. Die maximale Mächtigkeit einer unabhängigen Menge ist die *Unabhängigkeitszahl* $\alpha(G)$ von G . Auch diese Aufgabenstellung lässt sich als Entscheidungsproblem formulieren, dass sich als NP-vollständig herausstellt (vgl. [17], S.194f.). Daher geben wir eine einfache untere Schranke für die Unabhängigkeitszahl nach CARO [11] und WEI [38] an. Sie zeigten, dass gilt

$$\alpha(G) \geq \sum_{v_i \in V} \frac{1}{d(v_i) + 1}. \quad (1.2)$$

Verallgemeinert sei I_h eine Menge von Knoten im Graphen G , die paarweise einen Abstand größer oder gleich h haben. Wir nennen eine solche Menge auch *h -unabhängig*.

Bilden wir das Maximum über die Mächtigkeiten aller möglichen Mengen I_h in G zu einem festen h , so soll dieses mit $\alpha_h(G) = \max_{I_h} |I_h|$ bezeichnet werden. Mit diesen verallgemeinerten unabhängigen Mengen arbeiten wir in Kapitel 2.

Dominierende und unabhängige Mengen gehören zu den am besten untersuchten Objekten der Graphentheorie. Die Literatur allein zum Thema Dominanz wurde 1998 in den zwei Büchern von HAYNES, HEDETNIEMI und SLATER [23, 24] zusammengefasst und beschrieben.

Natürliche Herangehensweisen für den Erhalt oberer Schranken für die Dominanzzahl nutzen die Ordnung der betrachteten Graphen und die Valenzen der Knoten oder lediglich die Minimal- und/oder Maximalvalenz des Graphen.

Obwohl es viele Ergebnisse für eine kleine Minimalvalenz gibt (s. [30, 31, 36]), können die asymptotisch besten Schranken in Abhängigkeit von der Ordnung und der Minimalvalenz mit sehr einfachen, probabilistischen Argumenten erhalten werden. Diese werden in Kapitel 1.3 ausführlich vorgestellt.

Da wir uns in Kapitel 4.2 mit Dominanz in bipartiten Graphen mit Tailenweite größer gleich sechs beschäftigen, ist es nötig zu zeigen, dass das Entscheidungsproblem DS auch unter diesen Einschränkungen der Graphenklasse NP-vollständig bleibt. Erst dann ist es sinnvoll, über Schranken für $\gamma(G)$ nachzudenken. Zudem können wir an diesem Beispiel aufzeigen, wie ein Beweis der NP-Vollständigkeit aussehen kann.

Theorem 1.2.1. *DOMINATING SET (DS) bleibt NP-vollständig auf bipartiten Graphen mit Taillenweite größer oder gleich sechs.*

Beweis. (Für die Beweisidee über 3-SAT verweisen wir auf [25].)

Zunächst können wir sagen, dass das Entscheidungsproblem DS für bipartite Graphen mit Taillenweite mindestens sechs in NP liegt, da eine positive Lösung in Polynomialzeit verifiziert werden kann. Um zu zeigen, dass es NP-vollständig ist, wollen wir nun das NP-vollständige 3-SAT-Problem in unser Entscheidungsproblem überführen.

Dazu gehen wir wie folgt vor: Zu einer gegebenen 3-SAT-Formel \mathcal{F} konstruieren wir im ersten Teil des Beweises einen bipartiten Graphen $G_{\mathcal{F}}$ mit Taillenweite sechs, dessen Ordnung polynomial in der Größe (Anzahl der Klauseln und Variablen) von \mathcal{F} beschränkt ist. Damit die NP-Vollständigkeit gilt, müssen wir im zweiten Teil zeigen, dass die Erfüllbarkeit von \mathcal{F} eine dominierende Menge D mit $|D| \leq k = k(\mathcal{F})$ liefert, und im dritten Teil sicherstellen, dass eine dominierende Menge D mit $|D| \leq k$ die Erfüllbarkeit von \mathcal{F} impliziert.

Teil 1 Beginnen wir mit der Konstruktion des Graphen $G_{\mathcal{F}}$ zu einer gegebenen Formel \mathcal{F} .

1. Für jede boolesche Variable x_i , die in \mathcal{F} vorkommt, enthalte der Graph einen $C_6 = C_6^i$ mit den benachbarten Knoten x_i und \bar{x}_i .
2. Für jede Klausel F_j in \mathcal{F} enthalte $G_{\mathcal{F}}$ einen $C_{10} = C_{10}^j$, in dem wiederum zwei benachbarte Knoten F_j und \bar{F}_j gekennzeichnet sind.

Kommt nun in der Formel \mathcal{F} eine Variable x_i in einer Klausel F_j vor, so wird der Knoten x_i in C_6^i durch einen P_4 (einen Weg mit vier Kanten) mit dem Knoten F_j in C_{10}^j verbunden. Analog wird im Fall, dass x_i negiert in F_j auftritt, \bar{x}_i mit \bar{F}_j verbunden.

Bemerkung: Alle genutzten Kreise sind bipartit. Wenn wir die Knoten den zwei Partitionsklassen zuordnen wollen, ist nach Definition der Verbindungen der C_6 mit den C_{10} sichergestellt, dass die x_i und F_j in der einen und die \bar{x}_i und \bar{F}_j in der anderen Partitionsklasse liegen. Bei der Konstruktion entstehen zudem keine Kreise mit einer Länge kleiner sechs.

Teil 2 Nehmen wir nun an, die Formel \mathcal{F} enthält s Variablen und t Klauseln mit jeweils genau drei Literalen (Variablen oder negierte Variablen). Da für jede Variable sechs Knoten, für jede Klausel zehn Knoten und für jeden P_4 -Weg drei (zusätzliche) Knoten benötigt werden, wobei für jede Klausel drei Wege in dem Graphen $G_{\mathcal{F}}$ erzeugt werden, ist die Ordnung des Graphen genau $6s + 10t + 3 \cdot 3t = 6s + 19t$. Sei nun $k = k(\mathcal{F}) = 2s + 6t$.

Zunächst nehmen wir an, \mathcal{F} wäre erfüllbar und zeigen auf, wie man zu einer dominierenden Menge D der Ordnung $2s + 6t$ in $G_{\mathcal{F}}$ kommt. Wir wählen eine beliebige erfüllende Belegung für \mathcal{F} . Wird darin eine Variable x_i mit Eins belegt, so nehmen wir den Knoten $x_i \in V(C_6^i)$ und den im Abstand drei im entsprechenden C_6^i zu D

hinzu. Wird ein x_i mit Null belegt, werden hingegen $\bar{x}_i \in V(C_6^i)$ und sein Nachbar im Abstand drei aus dem betreffenden C_6^i gewählt. Insgesamt nehmen wir in diesem Schritt also $2s$ Knoten zu D .

Alle Wege, die von einem bereits gewählten Knoten x_i oder \bar{x}_i ausgehen, werden in der Form dominiert, dass der Knoten im Abstand drei zu x_i bzw. \bar{x}_i auf dem P_4 -Weg hinzugenommen wird. Erfüllt die Variable x_i die Klausel F_j , so wird auf diese Weise der Knoten $F_j \in V(C_{10}^j)$ – bzw. wenn \bar{x}_i die Klausel F_j erfüllt, der Knoten $\bar{F}_j \in V(C_{10}^j)$ – bereits von dem Knoten des P_4 dominiert. Auf den übrigen Wegen wählen wir jeweils den mittleren Knoten aus, damit alle inneren Knoten dominiert sind (vgl. Abbildung 1.2.1 für ein Beispiel).

Es kommen demnach für jeden P_4 ein und damit insgesamt $3t$ Knoten zu D hinzu.

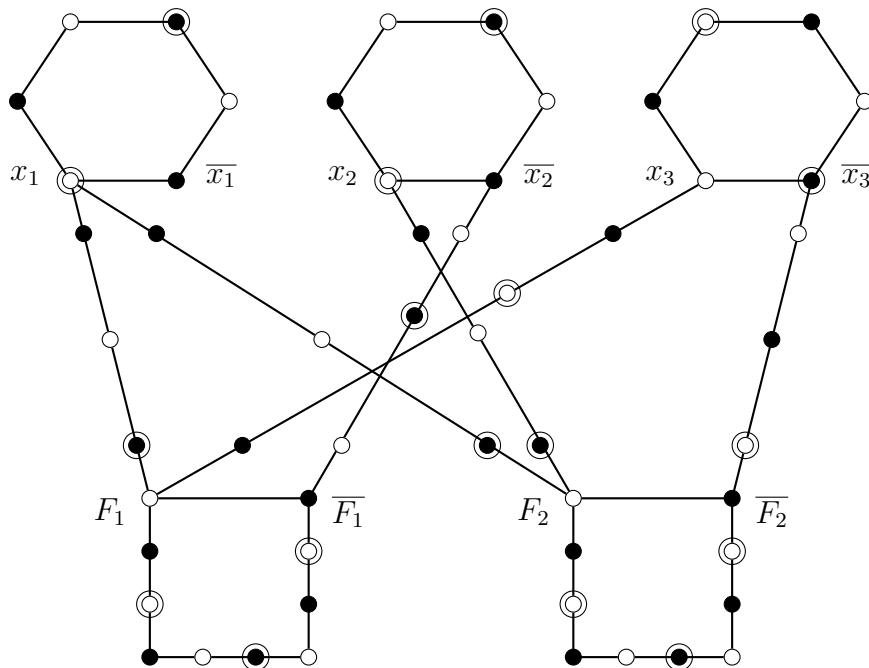


Abbildung 1.2.1: Graph $G_{\mathcal{F}}$ zu $\mathcal{F} = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$ mit den Partitionsklassen „schwarz“ und „weiß“ und der dominierenden Menge (hervorgehoben durch die Markierungen) zu $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 0$.

Da nach Voraussetzung jede Klausel für die gewählte Belegung der x_i wahr ist, wird in jedem C_{10}^j entweder der Knoten F_j oder der Knoten \bar{F}_j (oder sogar beide) von einem P_4 aus dominiert. Die übrigen neun Knoten im C_{10}^j können durch die Wahl von drei weiteren Knoten ebenfalls dominiert werden. Damit werden für jeden der t C_{10} drei zusätzliche Knoten zu D gewählt und somit D zu einer dominierenden Menge in $G_{\mathcal{F}}$ erweitert.

Fassen wir die Anzahl der Knoten, die in den einzelnen Schritten gewählt werden, zusammen, so hat D die Mächtigkeit $|D| = 2s + 3t + 3t = 2s + 6t = k$ womit die erste Richtung gezeigt ist.

Teil 3 Nehmen wir nun an, wir haben eine dominierende Menge des bipartiten Graphen G mit $|D| \leq k$ gegeben. Zum Dominieren der C_6 werden aus dieser Menge

genau zwei (bei $s C_6$ also $2s$ Knoten) und zum Dominieren der inneren Knoten eines Weges genau ein Knoten (bei $3t$ Wegen also $3t$ Knoten) benötigt. Damit bleiben noch $3t$ Knoten, mit denen die $t C_{10}$ dominiert werden. In jeden C_{10} liegen also drei Knoten aus D . Um alle Knoten des Kreises zu dominieren, muss also in jedem C_{10} ein Knoten von „außen“ dominiert sein. Dafür muss auf (mindestens) einem der drei von ihm ausgehenden P_4 -Wege der zu F_j oder \overline{F}_j benachbarte Knoten ebenso in D liegen wie der am anderen Ende des Weges liegende Knoten x_i bzw. \overline{x}_i .

Wählen wir nun für eine Variable x_i die Belegung 1, wenn der Knoten x_i zu D , und die Belegung 0 wenn \overline{x}_i zu D gehört, so erhalten wir eine verifizierende Belegung der Variablen in \mathcal{F} . Damit ist auch die zweite Richtung gezeigt und Theorem 1.2.1 bewiesen. \square

1.3 Die probabilistische Methode und wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

1.3.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Wir wollen in diesem Kapitel die probabilistische Methode vorstellen, die eine wichtige Basis für die vorliegende Arbeit bildet. Dazu wiederholen wir zunächst einige einfache Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die wir in den nächsten Kapiteln nutzen wollen.

\mathbb{P} bezeichne dabei das *Wahrscheinlichkeitsmaß* und \mathbb{E} den *Erwartungswert*. Es gilt:

- Sei N eine feste, endliche Menge und $M \subseteq N$ zufällig. Dann ist

$$\mathbb{E}(|M|) = \sum_{n \in N} \mathbb{P}(n \in M). \quad (1.3)$$

- Der Erwartungswert ist linear, das heißt mit den Zufallsgrößen A und B sowie den Konstanten c_1 und c_2 gilt

$$\mathbb{E}(c_1 \cdot A + c_2 \cdot B) = c_1 \cdot \mathbb{E}(A) + c_2 \cdot \mathbb{E}(B). \quad (1.4)$$

- Sei A eine Zufallsgröße, dann gilt

$$\mathbb{P}(A \leq \mathbb{E}(A)) > 0. \quad (1.5)$$

Zusätzlich benötigen wir in Kapitel 4 den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit. Auch dazu wollen wir einige Regeln angeben:

- Die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B* ist definiert durch

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Die *Unabhängigkeit* zweier Ereignisse A und B ist weiter charakterisiert durch

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

- Es gilt die Multiplikationsformel: Seien A_1, \dots, A_n Ereignisse und $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}). \quad (1.6)$$

Diese und weitere Aussagen können unter anderem in [26] nachgelesen werden. Da sie aber nur Hilfsmittel und nicht Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit sind, wollen wir die angegebenen Regeln nicht ausführlicher darlegen und kommen stattdessen zur probabilistischen Methode.

1.3.2 Die probabilistische Methode

Wie bereits in Kapitel 1.2 angedeutet, liegt die Idee der probabilistischen Methode darin, eine Menge mit einer ausgewählten Eigenschaft zufällig zu wählen und mit Hilfe des Erwartungswertes der Mächtigkeit dieser Menge Schranken für den zugehörigen Parameter zu entwickeln.

Wir wollen die Methode hier direkt am von uns untersuchten Graphenparameter vorstellen. Dafür wählen wir zufällig eine dominierende Menge und leiten daraus Schranken für die Dominanzzahl $\gamma(G)$ her.

Wählen wir aus $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine zufällige Menge X aus, in der jeder Knoten v_i mit einer Wahrscheinlichkeit p_i in X enthalten ist, und vereinigen wir diese Menge mit der Menge R aller Knoten, die von X nicht dominiert werden, $R = V \setminus N[X]$, so erhalten wir eine dominierende Menge $D = X \cup R$.

Ermittelt man mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten p_i den Erwartungswert der Mächtigkeit ebendieser Menge, so gilt zunächst wegen Gleichung (1.3) (s. S.8)

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{v_i \in V} p_i \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(|R|) = \sum_{v_i \in V} \prod_{v_j \in N_G[v_i]} (1 - p_j).$$

Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes (vgl. Gleichung (1.4), S.8) und da X und R disjunkt sind, gilt weiter $\mathbb{E}(|D|) = \mathbb{E}(|X \cup R|) = \mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|R|)$ und damit

$$\mathbb{E}(|D|) = \sum_{v_i \in V} \left(p_i + \prod_{v_j \in N_G[v_i]} (1 - p_j) \right) =: f(p_1, \dots, p_n). \quad (1.7)$$

HARANT, PRUCHNEWSKI und VOIGT konnten zudem zeigen, dass mit dieser Funktion f gilt

Theorem 1.3.1 (HARANT, PRUCHNEWSKI, VOIGT [21]).

$$\gamma(G) = \min_{0 \leq p_i \leq 1} f(p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (1.8)$$

Werden alle Knoten mit einer einheitlichen Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ zu X gewählt, so erhält man mit

$$\gamma(G) \leq \min_{0 \leq p \leq 1} \left(n \cdot p + \sum_{v_i \in V} (1 - p)^{d(v_i)+1} \right) \quad (1.9)$$

ein eindimensionales Optimierungsproblem. Wir schätzen $d(v_i)$ nach unten mit der Minimalvalenz δ und $(1 - p)$ nach oben durch e^{-p} ab und berechnen dann mit einfachen analytischen Methoden das Minimum von $n \cdot (p + e^{-p(\delta+1)})$. Es liegt bei $p = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$. Damit erhält man als Schranke für die Dominanzzahl

Theorem 1.3.2 (ALON, SPENCER [2]).

$$\gamma(G) \leq \frac{\ln(\delta + 1) + 1}{\delta + 1} \cdot n. \quad (1.10)$$

Diese Schranke ist asymptotisch best möglich, wie von ALON und SPENCER in [2] und auch von POGHOSYAN und ZVEROVICH in [34] mit Verweis auf eine Konstruktion von ALON in [1] beschrieben wird.

Viele Zufallsverfahren zum Bilden dominierender Mengen liefern im Wesentlichen eine Schranke für die Dominanzzahl in Form einer multilinearen Funktion, die von den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten abhängt. Weitere Beispiele werden auch im nächsten Teil als bekannte Schranken angegeben.

1.4 Bekannte Schranken für die Dominanzzahl

Nachdem wir die Grundlagen der vorliegenden Arbeit zusammengefasst und erläutert haben, wollen wir den einleitenden Teil abschließen, indem wir bekannte Ergebnisse für allgemeine, bipartite und reguläre Graphen vorstellen.

Schranken für allgemeine Graphen

Wir werden zunächst drei Ergebnisse zu Schranken für die Dominanzzahl in allgemeinen Graphen angeben, die konstruktiv gewonnen wurden.

Theorem 1.4.1 (ORE [31]). *Sei G ein Graph ohne isolierten Knotenpunkte, dann gilt*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}. \quad (1.11)$$

Theorem 1.4.2 (REED [36]). *Sei G ein zusammenhängender Graph mit Minimalvalenz $\delta \geq 3$, dann gilt*

$$\gamma(G) \leq \frac{3}{8}n. \quad (1.12)$$

Theorem 1.4.3 (ARNAUTOV [3], PAYAN [32]). *Sei G ein Graph ohne isolierte Knotenpunkte, dann gilt*

$$\gamma(G) \leq \left(\frac{1}{\delta+1} \sum_{k=1}^{\delta+1} \frac{1}{k} \right) n. \quad (1.13)$$

Kommen wir im Folgenden zu Resultaten, die aus probabilistischen Überlegungen abgeleitet wurden, so gehören natürlich zunächst die bereits in Kapitel 1.3.2 vorgestellten Theoreme 1.3.1 und 1.3.2 zu den Schranken für die Dominanzzahl in allgemeinen Graphen.

Lässt man auf Seite 10 bei dem Schritt von Gleichung (1.9) zu Gleichung (1.10) das Abschätzen von $(1-p)$ durch e^{-p} weg, so erhält man

Theorem 1.4.4 (CARO, RODITTY [12]). *Sei G ein Graph der Ordnung n mit Minimalvalenz δ , dann gilt*

$$\gamma(G) \leq \left(1 - \delta \left(\frac{1}{\delta+1} \right)^{1+\frac{1}{\delta}} \right) n. \quad (1.14)$$

Versuchen wir die Schranken von ALON /SPENCER (vgl. Theorem 1.3.2; kurz AS) und CARO/RODITTY (vgl. Theorem 1.4.4; kurz CR) miteinander zu vergleichen, so gilt aufgrund der Abschätzung $1 - p \leq e^{-p}$ auch $CR \leq AS$.

Auch das folgende Resultat gehört zu der Klasse von Ergebnissen, die probabilistisch gezeigt wurden.

Theorem 1.4.5 (GÖRING, HARANT [19]). *Sei G ein Graph der Ordnung n mit Minimalvalenz δ und Maximalvalenz Δ , dann gilt*

$$\gamma(G) \leq \min_{p \in [0,1]} \left(p \left(1 - p^\Delta (1 - p) \right) + (1 - p)^{\delta+1} \left(1 - \frac{1}{1 + \Delta} (1 - p)^{\Delta(\Delta-1)} \right) \right) \cdot n. \quad (1.15)$$

Alle hier aufgezählten Schranken hängen von der Ordnung n des Graphen, teilweise von der Minimalvalenz δ und in einem Fall zusätzlich von der Maximalvalenz Δ ab. Da auch wir Ergebnisse in diesen Parametern präsentieren wollen, wurde die obige Auswahl wie angegeben zusammengestellt.

Schranken in bipartiten Graphen

Zu oberen Schranken für die Dominanzzahl bipartiter Graphen in Abhängigkeit von den Minimalvalenzen δ_1, δ_2 in den beiden Partitionsklassen V_1, V_2 und dem Anteil ρ der Partitionsklasse V_1 an der Gesamtknotenmenge gibt es unseres Wissens nur wenige Arbeiten. In [20] und [22] werden jedoch Schranken in diesen Parametern angegeben:

Theorem 1.4.6 (HARANT, PRUCHNEWSKI [20]). *Sei G ein bipartiter Graph auf der Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2$ mit den Minimalvalenzen δ_1 und δ_2 sowie den Mächtigkeiten n_1 und n_2 der beiden Partitionsklassen V_1 und V_2 . Weiter gelte $\delta_1 \delta_2 \geq 1$, $\delta_1 n_1 \geq n_2$ und $\delta_2 n_2 \geq n_1$. Dann gilt mit $0 \leq p_1 = \frac{\ln(u) - \delta_1 \ln(v)}{\delta_1 \delta_2 - 1} \leq 1$ und $0 \leq p_2 = \frac{\ln(v) - \delta_2 \ln(u)}{\delta_1 \delta_2 - 1} \leq 1$, wobei $u = \frac{\delta_2 n_2 - n_1}{n_1 (\delta_1 \delta_2 - 1)}$ und $v = \frac{\delta_1 n_1 - n_2}{n_2 (\delta_1 \delta_2 - 1)}$,*

$$\gamma(G) \leq n_1 p_1 + n_2 p_2 + \sum_{v_i \in V_1} (1 - p_1)(1 - p_2)^{d(v_i)} + \sum_{v_i \in V_2} (1 - p_2)(1 - p_1)^{d(v_i)}. \quad (1.16)$$

Theorem 1.4.7 (HARANT, RAUTENBACH [22]). *Sei G ein bipartiter Graph auf der Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2$ mit Minimalvalenz δ und $|V_1| = \rho|V|$.*

Mit der eulerschen Zahl e gilt für $\frac{e\delta}{\delta^2 - 1 + e(\delta+1)} \leq \rho \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{|V|} \leq & \frac{1}{\delta + 1} + \frac{\rho}{\delta^2 - 1} \left(\ln \left(\frac{\delta(1 - \rho) - \rho}{(\delta^2 - 1)\rho} \right) - \delta \ln \left(\frac{\delta\rho - (1 - \rho)}{(\delta^2 - 1)(1 - \rho)} \right) \right) \\ & + \frac{(1 - \rho)}{\delta^2 - 1} \left(\ln \left(\frac{\delta\rho - (1 - \rho)}{(\delta^2 - 1)(1 - \rho)} \right) - \delta \ln \left(\frac{\delta(1 - \rho) - \rho}{(\delta^2 - 1)\rho} \right) \right). \end{aligned}$$

Vergleichen wir die Ergebnisse aus Theorem 1.4.6 (kurz HP) und Theorem 1.4.7 (kurz HR) miteinander, so gilt: Wegen $1 - p \leq e^{-p}$ folgt, dass $\text{HP} \leq \min\{\psi(p, q) = \rho p + (1 - \rho)q + \rho e^{-p-\delta_1 q} + (1 - \rho)e^{-q-\delta_2 p} \mid 0 \leq p, q \leq 1\}$. In [22] wird gezeigt, dass für spezielle Werte $\hat{p}, \hat{q} \in [0, 1]$ gilt $\text{HR} = \psi(\hat{p}, \hat{q})$ und damit auch $\text{HP} \leq \text{HR}$.

Schranken in regulären Graphen

Die besten bekannten Schranken für reguläre Graphen sind folgende

Theorem 1.4.8 (KOSTOCHKA, STODOLSKY [28]). *Sei G ein 3-regulärer Graph mit $n \geq 10$, dann gilt*

$$\gamma(G) \leq \frac{4}{11}n. \quad (1.17)$$

Theorem 1.4.9 (LIN, SUN, [29]). *Sei G ein 4-regulärer Graph, dann gilt*

$$\gamma(G) \leq \frac{4}{11}n. \quad (1.18)$$

Für r -reguläre Graphen mit $r \geq 5$ sind keine schärferen Schranken als die bereits angegebenen allgemeinen (mit $\delta = r$) bekannt.

1.5 Aufbau der Arbeit

In den Kapiteln 2 und 3 versuchen wir von einer Schranke für die Dominanzzahl $\gamma(G)$ in Form einer multilinearen Funktion kommend konstruktive Verbesserungsschritte auszuführen, um die „Ausgangsschranke“ weiter zu verbessern. In beiden Kapiteln erhalten wir zum Teil realisierende Mengen für die entwickelten Schranken.

In Kapitel 2.1 entwickeln wir für reguläre Graphen eine Operation, die in Kapitel 2.2 auf beliebige Graphen übertragen wird. Diese Operation arbeitet mit einer fest gewählten multilinearen Funktion und auf einer Teilmenge der Knotenmenge V des Graphen.

Verallgemeinert wird dieser Ansatz in Kapitel 3, wo der dort vorgestellte Algorithmus nicht nur auf einzelnen Knoten, sondern auf der gesamten Knotenmenge arbeitet und zudem auf verschiedene multilineare Funktionen angewendet werden kann. Das Prinzip wird in diesem Fall auf allgemeinen Graphen entwickelt (Kapitel 3.1) und anschließend wird (in Kapitel 3.2) versucht, für bipartite Graphen – durch Ausnutzen der speziellen Eigenschaften dieser Graphenklasse – weitere Verbesserungen zu erzielen.

In Kapitel 4 versuchen wir den probabilistischen Ansatz von ALON und SPENCER (vgl. Kapitel 1.3.2) zu verallgemeinern. Anstatt wie dort direkt nach der Wahl einer zufälligen Menge zu stoppen, wollen wir auswerten, welche Ergebnisse zu erzielen sind, wenn das Verfahren über mehrere Runden iteriert wird. Auch diesen Ansatz entwickeln wir zunächst auf allgemeinen Graphen und übertragen das Konzept dann auf bipartite Graphen, auf denen erneut bessere Ergebnisse erzielt werden können.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse in Kapitel 5 bildet den Abschluss der vorliegenden Arbeit.

2 Kontrollierte Abstiege

In diesem Abschnitt wollen wir die in Kapitel 1.3 vorgestellte probabilistische Methoden nutzen, um einen guten Ansatz einer neuen Schranke für $\gamma(G)$ zu erhalten, und diesen anschließend mithilfe konstruktiver Methoden weiter verbessern.

Unsere Verfahrensweise stützt sich dabei anfänglich auf bereits bekannte Resultate. Im zweiten Schritt werden im Wesentlichen die Verbesserungen bei geschicktem Abändern jeweils einer Koordinate im Vektorargument einer multilinearen Funktion, welche durch die Struktur des Graphen festgelegt ist, bestimmt.

Beliebige obere Schranken für $\gamma(G)$, die durch probabilistische Methoden unter Zuhilfenahme multilinearer Funktionen konstruiert worden sind, können auf diese Weise verbessert und zugehörige „realisierende“ Algorithmen entwickelt werden. Wir demonstrieren das Verfahren am Beispiel der multilinearen Funktion aus Theorem 1.3.1 (s. S.10). Aus diesem Grund sei auch im gesamten Kapitel 2 die Funktion f wie in Gleichung (1.7) angegeben. Andere multilineare Funktionen, die mit diesem Prinzip bearbeitet werden können, findet man unter anderem in [19].

Hier sei angemerkt, dass es sich bei den Inhalten von Kapitel 2.1 um eine Zusammenfassung der Ergebnisse aus [4] handelt. Diese soll dazu dienen, an einer einfachen Graphenklasse das Vorgehen anschaulich zu erläutern, dessen Übertragung auf allgemeine Graphen in Kapitel 2.2 zu neuen bisher unveröffentlichten Ergebnissen führt.

2.1 Kontrollierte Abstiege in regulären Graphen mit großer Tailenweite

Wie eben bemerkt, fasst dieses Kapitel die Ergebnisse aus [4] zusammen und legt damit die Grundlage für die Übertragung auf allgemeine Graphen in Kapitel 2.2. Dabei können wir unser entwickeltes Prinzip am Beispiel regulärer Graphen anschaulich gut darstellen. Auch wenn die bereits bekannten guten Schranken für 3- und 4-reguläre Graphen (vgl. Theorem 1.4.8 und Theorem 1.4.9 auf S.13) hierbei nicht verbessert werden, kann das Verfahren auf jeden r -regulären Graphen G mit $r \geq 3$ angewendet werden. Dabei sind mit guten „Ausgangsmengen“, die in diesem Kapitel noch erklärt werden, Verbesserungen gegenüber den bekannten Schranken für allgemeine Graphen (vgl. Kapitel 1.4) zu erwarten.

2.1.1 Verbesserung mit einer vorgegebenen unabhängigen Menge I_5

Zu einem gegebenen Graphen G wählen wir für jeden Knoten $v_i \in V$ einen Wert $p_i \in [0, 1]$. Dann sei f die folgende Funktion aus Theorem 1.3.1 (s. S.10) über $C^n = [0, 1]^n$

$$f(p_1, \dots, p_n) = \sum_{v_i \in V} \left(p_i + \prod_{v_j \in N[v_i]} (1 - p_j) \right).$$

Setzen wir alle $p_i = p$ für $i = 1, \dots, n$, so gilt

Beobachtung 1. Ein lokales Minimum von $f(p, \dots, p) = np + \sum_{i=1}^n (1 - p)^{d(v_i)+1}$ im Intervall $[0, 1]$ existiert und dieses p erfüllt die Gleichung

$$n = \sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1)(1 - p)^{d(v_i)}. \quad (2.1)$$

Für einen r -regulären Graphen ergibt sich daraus

$$f(p, \dots, p) = n \cdot (p + (1 - p)^{r+1})$$

und p kann mit $p = 1 - \sqrt[r]{\frac{1}{r+1}}$ direkt angegeben werden, womit in diesem Fall $1 = (r + 1)(1 - p)^r$ gilt.

Wir definieren die Funktion $verb = verb(l)$ mit $l \in \mathbb{N}$, die eine in den folgenden Lemmata 2.3 (s. S.19) und 2.4 (s. S.20) noch zu erklärende „Verbesserung“ angibt:

$$verb(l) := \begin{cases} 2rp(1 - p)^r, & \text{falls } l = 1; \\ rp(1 - p)^{r-1} (2(1 - p) + (r - 1)(1 - 2p)), & \text{falls } l = 2; \\ verb_l, & \text{falls } l \geq 3 \end{cases} \quad (2.2)$$

mit

$$\begin{aligned} verb_l &= 2p(1 - p)^r \left(r + \sum_{s=3}^l K_1(s) \right) + p(1 - p)^{r-1} (3 - 2p) \sum_{s=3}^l K_0(s) \\ &\quad + p(1 - p)^{r-1} (1 - 2p) \left(r(r - 1) + \sum_{s=3}^l K_2(s) \right), \end{aligned}$$

wobei für $s \geq 3$

$$\begin{aligned}
K_2(s) &= \frac{\left(r(4r-5) + \sqrt{5-4r} \cdot (2-r)\right) r \left(\frac{2-2r}{1-\sqrt{5-4r}}\right)^s}{(4r-5)(r+1)(1-\sqrt{5-4r})} \\
&\quad + \frac{r}{r+1} (r-1)^s - \frac{\left(r(4r-5) + \sqrt{5-4r} \cdot (r-2)\right) r \left(\frac{2-2r}{1+\sqrt{5-4r}}\right)^s}{(4r-5)(r+1)(1+\sqrt{5-4r})}, \\
K_0(s) &= K_2(s-1) \text{ und} \\
K_1(s) &= K_0(s-1) \cdot (r-1).
\end{aligned}$$

Dann lässt sich zeigen

Theorem 2.1.1 (ARTMANN [4]). *Seien $l \geq 1$ und $r \geq 3$ natürliche Zahlen, G ein r -regulärer Graph mit der Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und der Taillenweite $g \geq 2l + 3$. I_{2l+3} sei eine gegebene Menge von Knoten, die paarweise einen Abstand größer oder gleich $2l + 3$ in G haben, und $p = 1 - \sqrt{\frac{1}{r+1}}$. Dann gilt mit vorstehender Definition für $\text{verb}(l)$:*

$$(i) \quad \gamma(G) \leq f(p, p, \dots, p) - |I_{2l+3}| \cdot \text{verb}(l) =: B_1$$

(ii) *Es gibt einen $\mathcal{O}\left(|I_{2l+3}|r^l + r^2 2^r n\right)$ -Algorithmus, der zu gegebenen l , G und I_{2l+3} eine dominierende Menge D mit $|D| \leq B_1$ findet.*

Die ausführliche Beweisführung für dieses Theorem ist in [4] zu finden. Zum Verständnis der Überlegungen mit Hinblick auf die Übertragung auf allgemeine Graphen in Kapitel 2.2 werden wir hier jedoch die Beweisidee und damit die Herleitung der im Theorem 2.1.1 auftretenden Funktion $\text{verb}(l)$ grob skizzieren.

Beweisidee. Unser Ziel ist es, nach und nach die Koordinaten des n -dimensionalen Vektorarguments der Funktion f , ausgehend von (p, \dots, p) , auf Null oder Eins zu ändern. Dabei bezeichne q_i für einen Knoten v_i diesen neuen Wert. Um das genaue Vorgehen zu definieren, führen wir eine Operation $O(v_i, t)$ mit $t \in \mathbb{N}$ ein. Zunächst zeigen wir jedoch eine einfache Struktureigenschaft der betrachteten Graphenklasse auf und geben zwei weitere Definitionen an.

Aufgrund der Taillenweite von G liegt in den betrachteten regulären Graphen eine nahezu reguläre Baumstruktur von einem Knoten v_i bis in seine $(\lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1)$ -ste Nachbarschaft vor, wie Lemma 2.1 beschreibt.

Lemma 2.1. Sei $v_i \in V(G)$, dann gilt $|N_1(v_i)| = r$ und für $s = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 2$

- $v_j \in N_s(v_i) \Rightarrow |N(v_j) \cap N_{s-1}(v_i)| = 1, |N(v_j) \cap N_s(v_i)| = 0$ und
 $|N(v_j) \cap N_{s+1}(v_i)| = r - 1,$
wobei $|N(v_j) \cap N_{s-1}(v_i)| = 1$ auch noch für $s = \lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1$ gilt;
- $|N_s(v_i)| = r \cdot (r - 1)^{s-1}.$

Der Beweis des Lemmas nutzt lediglich, dass G ein r -regulärer Graph ist und keine Kreise der Länge kleiner g enthält.

Zur Erleichterung der alsbald folgenden Beschreibungen legen wir fest:

Definition 1. Für einen Knoten v_j aus der s -ten Nachbarschaft von v_i sei $F(v_j) = N(v_j) \cap N_{s+1}(v_i)$ der von v_j aufgespannte Fächer. Den eindeutigen Knoten $v_k \in N(v_j) \cap N_{s-1}(v_i)$ bezeichnen wir als *Vorgänger von v_j* (vgl. Abbildung 2.1.1).

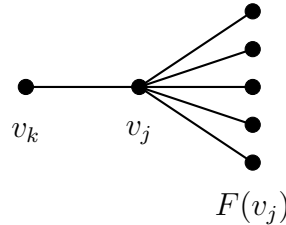


Abbildung 2.1.1: Vorgänger v_k von v_j und von v_j aufgespannter Fächer $F(v_j)$

Definition 2. Ein Knoten $v_i \in V$ heißt t -zulässig mit $3 \leq t \leq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor + 1$, falls $\forall v_k \in N_0(v_i) \cup N_1(v_i) \cup \dots \cup N_t(v_i)$ der Wert q_k noch nicht definiert ist.

Für einen t -zulässigen Knoten $v_i \in V$ definieren wir nun die Operation $O(v_i, t)$ im Graphen G , die für $v_k \in N_0(v_i) \cup \dots \cup N_{t-2}(v_i)$ den Wert q_k definiert.

Operation $O(v_i, t)$:

O_1 : $q_i = 1.$

O_2 : $q_k = 0 \forall v_k \in N_1(v_i).$

Für $s = 2, \dots, t - 2$ und für alle $v_k \in N_s(v_i)$ sei

O_3 : $q_k = 0$, falls $q_j = 1$ für den Vorgänger v_j von v_k .

O_4 : $q_k = 0$, falls $q_j = 1$ für das eindeutige $v_j \in N_{s-2}(v_i) \cap N_2(v_k)$.

O_5 : $q_k = 1$, falls $q_{j_1} = 0$ für den Vorgänger v_{j_1} von v_k , $q_{j_2} = 0$ für das eindeutige v_{j_2} in $N_{s-2}(v_i) \cap N_2(v_k)$ und für alle $v_j \in F(v_{j_1})$ das q_j noch nicht definiert ist.

O_6 : $q_k = 0$, falls $q_{j_1} = 0$ für den Vorgänger v_{j_1} von v_k , $q_{j_2} = 0$ für das eindeutige v_{j_2} in $N_{s-2}(v_i) \cap N_2(v_k)$ und $\exists v_{j_3} \in F(v_{j_1})$, für das bereits ein q_{j_3} mit $q_{j_3} = 1$ definiert ist.

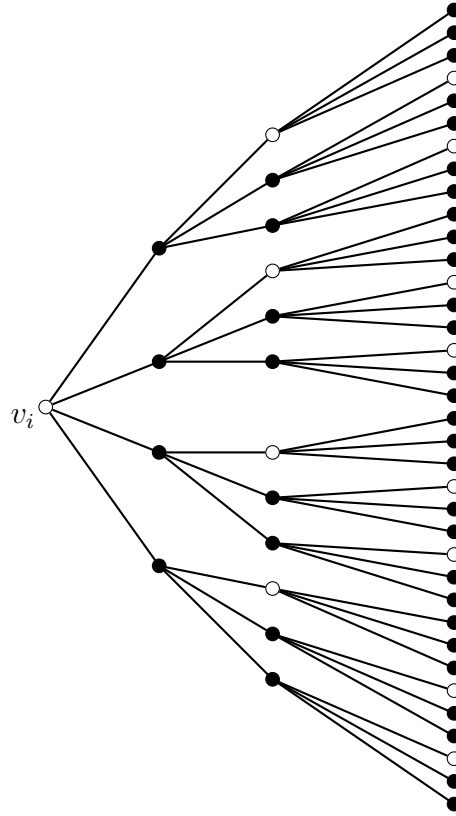


Abbildung 2.1.2: Ausschnitt eines Ergebnisses von $O(v_i, t)$ für einen 4-regulären Graphen

So wird bei dem Beispiel in Abbildung 2.1.2 durch die Operation $O(v_i, t)$ den weißen Knoten der Wert Eins zugewiesen und den schwarzen Knoten der Wert Null.

Für den Beweis der folgenden Lemmata 2.2 und 2.3 sei erneut auf [4] verwiesen.

Lemma 2.2. *Mit $O(v_i, t)$ wird für alle $v_k \in N_0(v_i) \cup \dots \cup N_{t-2}(v_i)$ der Wert q_k eindeutig definiert.*

In Lemma 2.3 bezeichne f_{p_k} die partielle Ableitung der Funktion f nach der k -ten Koordinate.

Lemma 2.3. *Sei $k \in \{1, \dots, n\}$ und seien $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ zwei $[0, 1]$ -Vektoren, die sich nur in der k -ten Koordinate unterscheiden. Dann gilt:*

$$f(\vec{a}) = f(\vec{b}) + f_{p_k}(\vec{b}) \cdot (a_k - b_k). \quad (2.3)$$

Mithilfe dieser beiden Lemmata kann man nun die Verbesserung W_j in jedem Teilschritt O_j für $j \in \{1, \dots, 6\}$ der Operation $O(v_i, t)$ berechnen. Anschließend lassen sich die in den Teilschritten auftretenden Verbesserungen zur Gesamtverbesserung $verb(l)$ bei Ausführung der kompletten Operation $O(v_i, t)$ zusammenführen.

Um Lemma 2.3 anwenden zu können, sei eine komplette Operation $O(v_i, t)$ bereits ausgeführt und seien $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ wie folgt gewählt

$$a_k = \begin{cases} q_k, & \text{falls } q_k \text{ bereits definiert und } v_k \notin N_0(v_i) \cup \dots \cup N_{t-2}(v_i); \\ p, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} q_k, & \text{falls } q_k \text{ bereits definiert;} \\ p, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ergibt sich für die erzielte Verbesserung im Übergang von \vec{a} zu \vec{b} unter differenzierter Betrachtung der Zwischenschritte:

Lemma 2.4 (ARTMANN [4]).

$$f(\vec{a}) - f(\vec{b}) = \text{verb}(t - 2),$$

wobei

$$\text{verb}(t - 2) = \begin{cases} 2rp(1 - p)^r, & \text{falls } t = 3; \\ rp(1 - p)^{r-1} \left(2(1 - p) + (r - 1)(1 - 2p) \right), & \text{falls } t = 4; \\ \text{verb}_{t-2}, & \text{falls } t \geq 5 \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} \text{verb}_{t-2} &= 2p(1 - p)^r \left(r + \sum_{s=3}^{t-2} K_1(s) \right) + p(1 - p)^{r-1} (3 - 2p) \sum_{s=3}^{t-2} K_0(s) \\ &\quad + p(1 - p)^{r-1} (1 - 2p) \left(r(r - 1) + \sum_{s=3}^{t-2} K_2(s) \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} K_2(s) &= \frac{\left(r(4r - 5) + \sqrt{5 - 4r} \cdot (2 - r) \right) r \left(\frac{2-2r}{1-\sqrt{5-4r}} \right)^s}{(4r - 5)(r + 1)(1 - \sqrt{5 - 4r})} \\ &\quad + \frac{r}{r + 1} (r - 1)^s - \frac{\left(r(4r - 5) + \sqrt{5 - 4r} \cdot (r - 2) \right) r \left(\frac{2-2r}{1+\sqrt{5-4r}} \right)^s}{(4r - 5)(r + 1)(1 + \sqrt{5 - 4r})}, \end{aligned}$$

$$K_0(s) = K_2(s - 1) \text{ und}$$

$$K_1(s) = K_0(s - 1) \cdot (r - 1).$$

Zusammengefasst bedeutet dies, dass eine Operation $O(v_i, t)$ angewendet auf einen Knotenpunkt v_i einen Vektor \vec{a} („vor der Operation $O(v_i, t)$ “) zu einem Vektor \vec{b} („nach der Operation $O(v_i, t)$ “) abändert und $f(\vec{a})$ sich um $\text{verb}(t - 2)$ zum Wert $f(\vec{b})$ verringert. Da nach \vec{a} auch $\vec{b} \in C^n$, gilt $\gamma(G) \leq f(\vec{b})$ (vgl. Theorem 1.3.1).

Die ausführliche Herleitung der Funktion $verb(l)$ über die Verbesserungen in den Teilschritten kann in [4] nachvollzogen werden.

Soll nach der Operation $O(v_i, t)$ die Operation $O(v_j, t)$ durchgeführt werden, so muss $(N_0(v_i) \cup \dots \cup N_{t-2}(v_i)) \cap (N_0(v_j) \cup \dots \cup N_t(v_j)) = \emptyset$ erfüllt sein. Beträgt der Abstand zwischen v_i und v_j mindestens $2t - 1$, so sind die betrachteten Nachbarschaften disjunkt. Damit gilt auch, dass dieser Knotenpunkt v_j , der vor $O(v_i, t)$ t -zulässig war, nach $O(v_i, t)$ immer noch t -zulässig ist. Das heißt Operation $O(v_j, t)$ kann durchgeführt und dabei erneut eine Verbesserung $verb(t - 2)$ gemäß Lemma 2.4 erzielt werden.

Es gilt also bei $|I_{2t-1}|$ -maliger Anwendung von Lemma 2.4

$$\gamma(G) \leq f(p, p, \dots, p) - |I_{2t-1}| \cdot verb(t - 2)$$

und mit $t = l + 2$ ist Aussage (i) von Theorem 2.1.1 bewiesen.

Auf den kurzen Beweis von Aussage (ii) in Theorem 2.1.1 verzichten wir an dieser Stelle. Er kann in [4] nachgelesen werden. Da wir den Algorithmus jedoch der Vollständigkeit halber angeben wollen, erläutern wir zunächst einen darin verwendeten Algorithmus von HARANT, PRUCHNEWSKI und VOIGT (vgl. [21]).

In [21] wird auf Seite 549 ein Algorithmus angegeben, der für eine multilineare Funktion f zu der Eingabe eines beliebigen Vektorarguments $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n) \in C_n$ einen Vektor $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \{0, 1\}^n$ ausgibt mit $f(\vec{q}) \leq f(\vec{p})$, wobei $\{v_i \mid q_i = 1\}$ dominierend in G ist.

Algorithmus A(G)

INPUT: Ein r -regulärer Graph G , der Vektor $\vec{p} = (p, \dots, p)$ mit $p = 1 - \sqrt{\frac{1}{r+1}}$, eine natürliche Zahl l und eine Menge $I_{2l+3} \subseteq V(G)$.

a) **S1.** Setze $t := l + 2$.

S2. Wähle einen Knoten v_i aus I_{2l+3} und führe die Operation $O(v_i, t)$ aus.

S3. Wiederhole S2 für alle Knoten aus I_{2l+3} .

Sei \vec{a} mit Koordinaten $\begin{cases} p, & \text{falls } q_k \text{ nicht definiert;} \\ q_k, & \text{sonst} \end{cases}$ der Vektor nach S3.

b) Führe mit \vec{a} den Algorithmus aus [21] (s. S. 549) durch. Dabei entstehen $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ mit $q_i \in \{0, 1\}$ und die dominierende Menge

$$D := \{v_i \in V \mid q_i = 1\}.$$

Der Funktionswert von f erhöht sich dabei nicht, es gilt also $f(\vec{q}) \leq f(\vec{a})$.

OUTPUT: Eine dominierende Menge D von G mit $|D| \leq B_1$. \square

Es folgt sofort, wenn Theorem 2.1.1 für jede $2l + 3$ -unabhängige Menge I_{2l+3} gilt, dann auch für eine solche mit maximaler Mächtigkeit $\alpha_{2l+3}(G)$.

Folgerung 2.1. *Mit den Voraussetzungen von Theorem 2.1.1 gilt:*

$$\gamma(G) \leq f(p, \dots, p) - \alpha_{2l+3}(G) \cdot \text{verb}(l)$$

Bemerkung: Betrachtet man nur die von uns ausgewählte Graphenklasse, der regulären Graphen mit großer Taillenweite und setzt man die in diesem Kapitel ermittelte Verteilung der Knoten mit Wert Eins in den Teilbäumen des Graphen voraus, so erhält man relativ schnell eine ähnliche obere Schranke für die Dominanzzahl, wie wir sie gefunden haben.

Unser Ziel war es in diesem Teil, an einer gut überschaubaren Graphenklasse (regulär und große Taillenweite) ein allgemeines Prinzip (Abstieg (vgl. Lemma 2.4) gemäß einer multilinearen Funktion) zu entwickeln und darzustellen. Dieses Prinzip soll auch für beliebige Graphenklassen, für die nicht unmittelbar kleine Dominanzmengen konstruiert werden können, ebenso nutzbar sein und zu guten realisierbaren oberen Schranken für $\gamma(G)$ führen (vgl. Kapitel 2.2).

2.1.2 Verbesserung mit Schranken für $\alpha_h(G)$

Dieses Unterkapitel ist nicht Kernpunkt der Arbeit und die hier bewiesenen Aussagen werden als Grundlage für die Anwendung dieses Verfahrens auf allgemeine Graphen nicht benötigt. Der Vollständigkeit halber werden wir die entsprechenden Ergebnisse aus [4] hier jedoch kurz angeben, um zu demonstrieren, wie man die entwickelte Theorie für konkrete Graphenklassen ausbauen kann. In Kapitel 2.1.3 werden wir noch einmal auf vorbereitende Überlegungen für den Übergang zu beliebigen Graphen zurückkommen.

Man überlegt sich leicht, je größer l wird, desto kleiner wird die Mächtigkeit einer maximalen Menge I_{2l+3} . Andererseits wird für einen geringen Abstand der Knoten in I_{2l+3} , also für kleines l , α_{2l+3} größer, aber dafür $\text{verb}(l)$ kleiner. Es stellt sich somit die Frage nach dem „optimalen“ l , also nach dem l , für welches das Produkt $\alpha_{2l+3}(G) \cdot \text{verb}(l)$ größtmöglich und damit die obere Schranke für $\gamma(G)$ kleinstmöglich wird.

Um dieses Problem anzugehen, suchen wir zunächst untere Schranken für $\alpha(H) = \alpha_2(H)$ zu einem Graphen H mit $V(H) = V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und versuchen daraus eine Schranke für $\alpha_h(G)$ herzuleiten.

Lemma 2.5. *Für einen (nicht vollständigen) Graphen H mit n Knoten und Maximalgrad $\Delta = \Delta(H) \geq 3$ gilt*

$$\alpha(H) = \alpha_2(H) \geq \lceil \frac{n}{\Delta} \rceil.$$

Beweis. Nach dem Theorem von BROOKS (vgl. [15], S.103) ist H mit $\Delta(H)$ Farben färbbar. Man nehme die größte Farbklasse als unabhängige Menge, diese beinhaltet nach dem Schubfachprinzip mindestens $\frac{n}{\Delta}$ Knoten. \square

Bemerkung: Für diese Schranke gibt es einen effizienten Algorithmus, das heißt, es ist möglich eine unabhängige Menge der angegebenen Mächtigkeit in einem Graphen H mit Hilfe eines Algorithmus in polynomial beschränkter Zeit zu finden.

Wir versuchen nun die maximale Mächtigkeit einer $2l + 3$ -unabhängigen Menge im von uns untersuchten regulären Graphen G möglichst gut abzuschätzen.

Theorem 2.1.2 (ARTMANN [4]). *Seien $l \geq 1$ und $r \geq 3$ natürliche Zahlen und G ein r -regulärer Graph mit Tailenweite $g \geq 2l + 3$ und der Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Dann gilt*

$$\alpha_{2l+3}(G) \geq \frac{n(r-2)}{r \binom{(r-1)^{2^{\lceil \log_2(2l+3) \rceil} - 1} - 1}} =: B_U = B_U(l, r, n).$$

Beweis. Sei $G = G_1$ r -regulär.

G_{s+1} entstehe aus G_s , indem alle Knoten mit Abstand 2 in G_s zusätzlich durch eine Kante verbunden werden.

Dann können wir die beiden folgenden Lemmata zeigen. Die einfachen Beweise finden sich wiederum in [4].

Lemma 2.6. *Seien $v_i, v_j \in V$. Dann gilt*

$$\text{dist}_{G_s}(v_i, v_j) = d \quad \Rightarrow \quad \text{dist}_{G_{s+1}}(v_i, v_j) = \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil.$$

Lemma 2.7. *Ist eine Knotenmenge I_h in G h -unabhängig, das heißt, die Knoten in I_h haben paarweise einen Abstand größer oder gleich h , so ist sie in G_s 2-unabhängig, falls $s = s(h) = \lceil \log_2 h \rceil$.*

Damit entspricht Theorem 2.1.2 Folgendem:

Für $h \geq 2$ besitzt $G_{\lceil \log_2 h \rceil}$ eine unabhängige Menge mit einer Mächtigkeit von mindestens B_U .

Sei v_i ein beliebiger Knoten im Graphen G , dann gilt wegen der Regularität von G :

$$d_s(v_i) \leq \Delta_{G_s} = \left| \bigcup_{k=1}^{2^{s-1}} N_k(v_i) \right| = r \cdot \left(\sum_{k=0}^{2^{s-1}-1} (r-1)^k \right),$$

$$\Delta_{G_s} = \Delta_{G_s}(h, r) = r \cdot \frac{(r-1)^{2^{\lceil \log_2 h \rceil} - 1} - 1}{r-2}.$$

Aufgrund der großen Tailenweite von G besitzt jeder Knoten v_i in G_s die gleiche Valenz, solange $h \leq \lceil \frac{g}{2} \rceil - 1$. G_s ist dann regulär vom Grad $\Delta_{G_s} = \Delta_{G_{\lceil \log_2 h \rceil}}$.

Für $h = 2l + 3$ folgt weiter $\alpha(G_s) \geq \frac{n(r-2)}{r(r-1)^{2^{\lceil \log_2(2l+3) \rceil} - 1} - r}$. \square

Mit Folgerung 2.1 (s. S.22), Theorem 2.1.2 und $verb(l)$ aus Gleichung (2.2) (s. S.16) gilt

Theorem 2.1.3 (ARTMANN [4]). *Seien $l \geq 1$ und $r \geq 3$ natürliche Zahlen, G ein r -regulärer Graph mit Tailenweite $g \geq 2l + 3$. Dann gilt*

$$(i) \quad \gamma(G) \leq f(p, \dots, p) - \frac{n(r-2)}{r(r-1)^{2^{\lceil \log_2(2l+3) \rceil} - 1} - r} \cdot verb(l) =: B_2.$$

(ii) *Es gibt einen Polynomzeit-Algorithmus, der zu gegebenen l und G eine dominierende Menge D mit $|D| \leq B_2$ findet.*

Beweis. (i) gilt wegen Folgerung 2.1 und Theorem 2.1.2.

Für (ii) nutzen wir den Algorithmus zum Theorem von BROOKS, um eine unabhängige Menge in G_s zu finden, deren Mächtigkeit die in Lemma 2.5 genannte Schranke realisiert.

Mit der so erhaltenen Menge führen wir in G den Algorithmus $A(G)$ aus. \square

Um mit den gewonnenen Schranken eine möglichst gute Verbesserung zu bestimmen, muss $\frac{n(r-2) \cdot verb(l)}{r(r-1)^{2^{\lceil \log_2(2l+3) \rceil} - 1} - r}$ möglichst groß sein. Man überlegt sich, dass dieser Term bei festem r in $\mathcal{O}((r-1)^{1-l})$ liegt und somit monoton fallend in l ist. Die größte Verbesserung wird demnach für ein l am unteren Intervallrand erzielt. Da wir immer $l \geq 1$ angenommen haben, werten wir das Produkt beispielhaft für $l = 1$ aus:

Folgerung 2.2. *Sei $r \geq 3$ eine natürliche Zahl und G ein r -regulärer Graph mit Tailenweite $g \geq 5$. Dann gilt*

$$\gamma(G) \leq f(p, \dots, p) - \frac{n(r-2) \cdot 2rp(1-p)^r}{r(r-1)^4 - r}.$$

Aus dem selben Grund liefert auch Theorem 2.1.1 für kleine l die größte Verbesserung, also die kleinste obere Schranke für $\gamma(G)$.

Nun ist es aber gar nicht einfach, aus einer gegebenen Menge I_h eine verhältnismäßig große Menge I_{h-1} zu konstruieren. Theorem 2.1.1 hat also seine Berechtigung, wenn eine gute (d.h. große) Menge I_h fest vorgegeben ist.

Theorem 2.1.1 und die Bemerkung zur Monotonie von B_2 geben trotzdem Anlass, nach einer Menge I_h mit kleinem h (z.B. mit $l = 1$ und damit I_5) zu suchen.

Dieser Idee kommt Theorem 2.1.4 entgegen:

Theorem 2.1.4. *Seien $h \geq 6$ und G ein r -regulärer Graph mit Tailenweite $g \geq \frac{4}{3}h$ und gegebener Menge I_h . Weiterhin seien $t = \lfloor \frac{h}{3} \rfloor$ und $s = \lceil \frac{1}{2}t \rceil + 1$. Dann besitzt G eine Menge I_t mit $|I_t| = (1 + r(r-1)^{s-1})|I_h|$, und es gilt damit*

$$\alpha_t(G) \geq (1 + r(r-1)^{s-1})\alpha_h(G).$$

Für den Beweis wollen wir erneut auf [4] verweisen. Hier sei lediglich erwähnt, dass die im dortigen Beweis angegebene Konstruktion auch bestmöglich ist, wie ein Kreis mit 18 Knoten, I_6 mit $|I_6| = 3$ und $s = t = 2$ zeigen. Es kann also durchaus passieren, dass beim Übergang von I_h (h gross) zu I_t (t klein) die Menge I_t gemäß Theorem 2.1.4 die beste ist.

2.1.3 Minimierung der oberen Schranke über p

Vorbereitend für den Übergang zu beliebigen Graphen, wollen wir nun andeuten, wie bei einem kleinen „Verbesserungsradius“ die Bestimmung der Minimalstelle $p \in (0, 1)$ erst nach den Verbesserungsschritten erfolgt. Dazu führen wir folgende Überlegung:

Sei $p \in (0, 1)$ beliebig, wir arbeiten mit $l = 1$ und demnach mit I_5 . Da wir den Schritt, $f(p, \dots, p) = n \cdot p + n \cdot (1-p)^{r+1}$ nach p zu minimieren, in diesem Kapitel weglassen wollen, gilt die Gleichung $1 = (r+1)(1-p)^r$ hier zunächst nicht.

Es sei aber bekannt, dass G eine Menge I_5 mit $|I_5| \geq a \cdot n$ mit $a \in (0, 1)$ enthält. Dann gilt mit obigen Überlegungen:

$$\begin{aligned} \gamma(G) &\leq f(p, \dots, p) - a \cdot n \cdot (f_p(p, \dots, p)(p-1) + r f_p(p, \dots, 1, \dots, p)(p-0)) \\ &\leq f(p, \dots, p) - a \cdot n \cdot ((1 - (r+1)(1-p)^r)(p-1) + r(1 - (r-1)(1-p)^r)p) \\ &= n \cdot (p + (1-p)^{r+1} - a \cdot ((1 - (r+1)(1-p)^r)(p-1) + r(1 - (r-1)(1-p)^r)p)) \\ &= n \cdot ((1 - a(r+1))(p + (1-p)^{r+1}) + a \cdot (1 + rp(r-1)(1-p)^r)) \\ &= n \cdot f_{a,r}(p) \end{aligned}$$

und damit folgt

Theorem 2.1.5 (ARTMANN [4]). *Seien $a, p \in (0, 1)$, G ein r -regulärer Graph mit Tailenweite $g \geq 5$ und I_5 eine unabhängige Menge von G , deren Knoten paarweise einen Abstand größer oder gleich 5 haben, mit $|I_5| \geq a \cdot n$. Dann gilt*

$$\gamma(G) \leq n \cdot f_{a,r}(p) \quad \text{mit}$$

$$f_{a,r}(p) = (1 - a(r+1))(p + (1-p)^{r+1}) + a \cdot (1 + rp(r-1)(1-p)^r).$$

Das Minimum von $f_{a,r}(p)$ ist in der Regel nicht so leicht zu berechnen. Für spezielle Werte r und a kann es jedoch numerisch bestimmt werden. Dieses fällt dann aber mindestens so gut aus wie Theorem 2.1.3 (s. S.24) für $l = 1$ bzw. Folgerung 2.2 (s. S.24).

2.1.4 Zusammenfassung und Auswertung

Wir haben in Kapitel 2.1 einige Sätze bewiesen, die jeweils eigenständige Resultate bilden.

Zunächst behandelt Theorem 2.1.1 (s. S.17) den Fall, dass wir zusätzlich zu einem Graphen eine (möglichst gute, das heißt möglichst große) h -unabhängige Menge I_h gegeben haben. Mit Hilfe der Operation $O(v_i, t)$ können wir um jeden Knoten aus I_h die größtmögliche Verbesserung erzielen. Gerade dann, wenn eine unabhängige Menge gegeben ist, deren Mächtigkeit viel größer als die von uns betrachtete Schranke für diese ist, liefert Theorem 2.1.1 sehr gute Ergebnisse.

Da nicht für jeden Graphen eine große unabhängige Menge vorgegeben ist, haben wir in den darauf folgenden Sätzen die maximale Mächtigkeit einer Menge I_h abgeschätzt (vgl. Theorem 2.1.2 (s. S.23)).

Nach dem Bestimmen der unteren Schranke B_U für $\alpha_{2l+3}(G)$ konnte man erkennen, dass das Produkt $verb(l) \cdot B_U$ monoton fallend in l ist. Mit Hilfe einer Konstruktion haben wir deswegen von guten unabhängigen Mengen eines großen Abstands kommend versucht, große unabhängige Mengen eines kleinen Abstands zu bilden (vgl. Theorem 2.1.4 (s. S.25)). Am Beispiel konnten wir zeigen, dass unsere gewählte Konstruktion bestmöglich ist.

Alle Resultate des Kapitel 2.1 wurden konstruktiv gezeigt. Mit Algorithmus $A(G)$ können die gezeigten Schranken nach eventuellen Vorarbeiten (Bestimmung oder Erweiterung der unabhängigen Menge) effizient realisiert werden.

Am Ende des Kapitels haben wir für $l = 1$ und I_5 angedeutet, inwiefern sich die Schranke für $\gamma(G)$ bzw. die Berechnungen verkomplizieren würden, falls die Bestimmung der Minimalstelle p nicht vor (vgl. p^* in Tabelle 2.1.1 auf S.27) sondern nach (vgl. p_{min} in Tabelle 2.1.1) den Verbesserungsschritten erfolgen würde.

Für größere l und h wird dieser Prozess immer komplexer. Aufgrund der hohen Rechenzeit wurde die Berechnung der p - und $f_{a,r}$ -Werte in Tabelle 2.1.1 und Tabelle 2.1.2 (s. S.28) für $r > 30$ bereits auf $r = 35$ beschränkt.

Für die folgenden Tabellen gilt $p^* = 1 - \sqrt[r]{\frac{1}{r+1}}$, und p_{min} ist die Stelle, an der die Funktion $f_{a,r}(p)$ ihr Minimum annimmt. Dabei bezeichnet $f_{a,r}(p)$ wieder den Faktor vor n und damit den Anteil der Knoten des Graphen in der ermittelten Schranke für $\gamma(G)$ (vgl. Theorem 2.1.5 (s. S.25)).

Ausgewertet haben wir die Funktion bei einer Verbesserung bis in die erste Nachbarschaft und der Schranke $a \cdot n = \frac{n}{\Delta(G_2)}$ für eine unabhängige Menge I_5 . Es gilt somit

$$f_{a,r}(p) = p + (1-p)^{r+1} - \frac{(1-(r+1)(1-p)^r)(p-1) + r(1-(r-1)(1-p)^r)p}{r + r(r-1) + r(r-1)^2 + r(r-1)^3}.$$

Tabelle 2.1.1 zeigt, dass mit wachsendem r die Differenz der beiden p -Werte kleiner wird. Noch stärker fällt jedoch die Differenz $f_{a,r}(p_{min}) - f_{a,r}(p^*)$. Für $r \geq 16$ weichen die Funktionswerte nur noch in der neunten Nachkommastelle voneinander ab, für $r > 23$ sogar erst nach der zehnten (vgl. Tabelle 2.1.2).

r	p_{min}	p^*	$p_{min} - p^*$
3	0,376132581	0,370039475	0,006093106
4	0,333835078	0,331259695	0,002575383
5	0,302464488	0,301172881	0,001291607
6	0,277703920	0,276979973	0,000723947
7	0,257442326	0,257002855	0,000439470
8	0,240447666	0,240164314	0,000283351
9	0,225927835	0,225736317	0,000191518
10	0,213341011	0,213206558	0,000134453
11	0,202299987	0,202202605	0,000097382
12	0,192518741	0,192446345	0,000072397
13	0,183780386	0,183725359	0,000055027
14	0,175916884	0,175874255	0,000042630
15	0,168795680	0,168762104	0,000033576
16	0,162310577	0,162283745	0,000026832
17	0,156375352	0,156353633	0,000021719
18	0,150919167	0,150901384	0,000017783
19	0,145883214	0,145868504	0,000014710
20	0,141218215	0,141205933	0,000012282
21	0,136882529	0,136872189	0,000010340
22	0,132840699	0,132831926	0,000008772
23	0,129062323	0,129054829	0,000007494
24	0,125521171	0,125514728	0,000006443
25	0,122194477	0,122188904	0,000005573
26	0,119062376	0,119057530	0,000004846
27	0,116107450	0,116103215	0,000004235
28	0,113314353	0,113310634	0,000003719
29	0,110669509	0,110666229	0,000003280
30	0,108160858	0,108157953	0,000002905
35	0,097320849	0,097319181	0,000001668

Tabelle 2.1.1: Minimierung über p im ersten oder zweiten Schritt

Sei $f_{alt} = f(p, \dots, p)$. Dann wird die maximale Verbesserung ($f_{alt} - f_{a,r}(p_{min})$) mit den gegebenen Schranken demnach auch von $f_{a,r}(p^*)$ mit steigendem r immer stärker angenähert. Zu beachten bleibt, dass wir für eine gute unabhängige Menge (mit einer Mächtigkeit $\gg a \cdot n$) schnell bessere Ergebnisse erzielen können.

r	$f_{a,r}(p_{min})$	$f_{a,r}(p^*)$	f_{alt}	$f_{a,r}(p^*) - f_{a,r}(p_{min})$	$f_{alt} - f_{a,r}(p_{min})$
3	0,515117790	0,515194957	0,527529606	0,000077167	0,012411816
4	0,461676239	0,461695159	0,465007756	0,000018920	0,003331517
5	0,416457155	0,416462998	0,417644068	0,000005842	0,001186912
6	0,379759109	0,379761259	0,380268549	0,000002150	0,000509440
7	0,349628522	0,349629426	0,349877499	0,000000904	0,000248976
8	0,324456656	0,324457077	0,324590502	0,000000421	0,000133846
9	0,303085298	0,303085511	0,303162686	0,000000213	0,000077387
10	0,284685846	0,284685960	0,284733234	0,000000115	0,000047389
11	0,268655322	0,268655388	0,268685721	0,000000065	0,000030399
12	0,254545594	0,254545633	0,254565857	0,000000039	0,000020262
13	0,242016742	0,242016766	0,242030690	0,000000024	0,000013948
14	0,230806103	0,230806118	0,230815971	0,000000016	0,000009868
15	0,220707323	0,220707333	0,220714472	0,000000010	0,000007149
16	0,211555885	0,211555892	0,211561172	0,000000007	0,000005287
17	0,203218894	0,203218899	0,203222875	0,000000005	0,000003981
18	0,195587738	0,195587742	0,195590785	0,000000003	0,000003047
19	0,188572714	0,188572716	0,188575078	0,000000003	0,000002365
20	0,182099030	0,182099032	0,182100889	0,000000002	0,000001859
21	0,176103792	0,176103793	0,176105271	0,000000001	0,000001479
22	0,170533697	0,170533698	0,170534886	0,000000001	0,000001189
23	0,165343246	0,165343247	0,165344211	0,000000001	0,000000965
24	0,160493349	0,160493349	0,160494139	0,000000000	0,000000790
25	0,155950218	0,155950218	0,155950870	0,000000000	0,000000652
26	0,151684487	0,151684488	0,151685029	0,000000000	0,000000542
27	0,147670503	0,147670503	0,147670957	0,000000000	0,000000454
28	0,143885747	0,143885747	0,143886129	0,000000000	0,000000382
29	0,140310364	0,140310364	0,140310688	0,000000000	0,000000325
30	0,136926776	0,136926776	0,136927052	0,000000000	0,000000276
35	0,122393515	0,122393515	0,122393648	0,000000000	0,000000134

Tabelle 2.1.2: Vergleich der Funktionswerte für $a = \frac{1}{\Delta}$

Bis jetzt haben wir die Verbesserung im zweiten Teil des Algorithmus $A(G)$ nicht genauer betrachtet. Hier wissen wir bis jetzt, dass sich keine Verschlechterung ergeben kann. An den meisten Knoten v_k wird jedoch sogar eine weitere Verbesserung beim Zuweisen von q_k erzielt, so dass die Mächtigkeit der durch $A(G)$ bestimmten Menge immer unterhalb der ermittelten Schranke liegt.

Einige der Resultate für allgemeine Graphen haben wir in Kapitel 1.4 bereits vorgestellt (vgl. REED [36], ARNAUTOV [3] und PAYAN [32] oder ALON und SPENCER [2]). Um neue Ergebnisse für diese Klasse von Graphen zu erhalten, wollen wir in Kapitel 2.2 zeigen, wie das eben beschriebene Prinzip auf nicht reguläre Graphen übertragen werden kann. Dabei tritt das Problem auf, dass p schon bei der Minimierung in Schritt 1 nicht genau bestimmt werden kann und wir als Ausweg mit einer oberen und unteren Schranke arbeiten müssen. Aus diesem Grund wird auch die Verbesserung nur innerhalb eines Intervalls angegeben werden können.

2.2 Kontrollierte Abstiege in beliebigen Graphen

Nachfolgend wollen wir die in Kapitel 2.1 entwickelten Strategien aus [4] auf beliebige Graphen übertragen und dadurch neue Schranken entwickeln.

Den Knotenpunkten sollen wieder – nach noch zu entwickelnden Kriterien – ausgehend von einem einheitlichen p die Werte Null und Eins zugewiesen werden. Dabei treten zusätzliche Schwierigkeiten auf, da das p , welches $f(p, \dots, p)$ minimiert, nicht allgemein für jeden Graphen bestimmt, sondern nur abgeschätzt werden kann.

Da wir hier ebenfalls die Funktion f aus Theorem 1.3.1 (s. S.10) nutzen wollen, bezeichne p erneut das im Intervall $[0, 1]$ eindeutige p , das Gleichung (2.1) löst. Diese sei kurz wiederholt:

$$n = \sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1)(1 - p)^{d(v_i)}$$

Für einen beliebigen Graphen G können wir damit Folgendes zeigen:

Theorem 2.2.1. *Sei G ein zusammenhängender Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und $|E| = m$. Weiter sei $\bar{d} = \frac{2m}{n}$ die Durchschnittsvalenz der Knoten in $V(G)$ und $C = \prod_{v_i \in V} (d(v_i) + 1)^{\frac{1}{n}}$.*

Dann gilt

$$\begin{aligned} \gamma(G) \leq & n \cdot \left(1 - \frac{1}{\delta \sqrt{\bar{d} + 1}}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt[\delta]{C}}\right)^{d(v_i)+1} \\ & - |I_5| \cdot \frac{2\delta \cdot (1 - (\bar{d} + 1)^{-\frac{1}{\delta}})^2}{(\bar{d} + 1)^{\frac{\delta-1}{\delta}} \cdot (C^{-\frac{1}{\delta}} - \delta \cdot (1 - (\bar{d} + 1)^{-\frac{1}{\delta}})^2)}. \end{aligned}$$

Bevor wir zum Beweis übergehen, wollen wir ein paar kurze Bemerkungen zum Aufbau der folgenden Abschnitte, die den Rahmen für den zu liefernden Nachweis bilden, anschließen.

Zunächst lässt sich p für allgemeine Graphen nicht als geschlossener Ausdruck, sondern nur als Lösung der Gleichung (2.1) numerisch berechnen, da die Valenzen in der Regel nicht einheitlich sind, wie es bei regulären Graphen der Fall ist. Mit Hilfe bekannter Ungleichungen können wir aber ein Intervall für p bestimmen. Dieser Aufgabenstellung widmet sich Kapitel 2.2.1. Die sich ergebenden Schranken für p können wir nicht nur nutzen, um den Wert von $f(p, \dots, p)$ einzugrenzen, sondern wir können sie auch für Abschätzungen in Kapitel 2.2.2 heranziehen.

Auf Grundlage der gewonnenen Schranken für p ermitteln wir in Kapitel 2.2.2 Kriterien, nach denen einem Knotenpunkt v_i der Wert $q_i \in \{0, 1\}$ zugewiesen wird, und bestimmen eine minimale einheitliche Verbesserung pro durchgeführter Änderung.

Beweis. Der Beweis von Theorem 2.2.1 wird sich, wie eben angedeutet, durch die Unterkapitel 2.2.1 und 2.2.2 ziehen und am Ende von Kapitel 2.2.2 abgeschlossen sein. Wir wissen bereits, dass gilt

$$\gamma(G) \leq f(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{v_i \in V} \left(p_i + \prod_{v_j \in N[v_i]} (1 - p_j) \right),$$

mit $p_i \in [0, 1]$ für $i = 1, \dots, n$,

bzw.
$$\gamma(G) \leq f(p, \dots, p) = np + \sum_{v_i \in V} (1 - p)^{d(v_i)+1}, \text{ mit } p \in [0, 1].$$

Insbesondere sei nun p als die Lösung der Gleichung (2.1) auf Seite 16 gewählt. Versuchen wir in Kapitel 2.2.1 zunächst Schranken für dieses p zu bestimmen.

2.2.1 Schranken für p

Da die nun betrachteten Graphen nicht regulär sind, ist es – wie schon gesagt – schwierig einen geschlossenen Ausdruck für die Lösung der Gleichung (2.1) anzugeben. Wir können jedoch für dieses p ein Intervall bestimmen, in dem es liegt, wie das folgende Theorem zeigt. Und dann arbeiten wir im Weiteren nicht mit p , sondern mit den Rändern des Intervalls als obere und untere Schranken für p .

Theorem 2.2.2. *Sei p die eindeutige Lösung von $n = \sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1)(1 - p)^{d(v_i)}$ im Intervall $(0, 1)$, dann gilt mit der Durchschnittsvalenz $\bar{d} = \frac{2m}{n}$ und $C = \prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1)^{\frac{1}{n}}$*

$$1 - \frac{1}{\sqrt[d]{C}} \leq p \leq 1 - \frac{1}{\sqrt[d]{\bar{d} + 1}} \quad (2.4)$$

bzw.

$$\frac{1}{\sqrt[d]{\bar{d} + 1}} \leq 1 - p \leq \frac{1}{\sqrt[d]{C}}. \quad (2.5)$$

Bemerkung: Setzt man diese Schranken in $f(p, \dots, p)$ ein, so erhält man zunächst als obere Schranke (vgl. Theorem 2.2.1)

$$f(p, \dots, p) \leq n \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[d]{\bar{d} + 1}} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt[d]{C}} \right)^{d(v_i)+1}.$$

Beweis. Bereits in [4] wurde für den allgemeinen Fall gezeigt, dass die Lösung von Gleichung (2.1) eindeutig ist. Lediglich dieser kurze Beweis soll als Ergebnis aus [4] in diesem Kapitel angegeben werden.

Beweis. (der Eindeutigkeit von p nach [4])

Annahme: Es gibt zwei Lösungen $p_1, p_2 \in [0, 1]$ mit $p_1 < p_2$. Dann folgt

$$\begin{aligned} & 1 - p_1 > 1 - p_2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (d(v_i) + 1)(1 - p_1)^{d(v_i)} > (d(v_i) + 1)(1 - p_2)^{d(v_i)}, \quad \forall v_i \in V(G) \\ \Leftrightarrow & n = \sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1)(1 - p_1)^{d(v_i)} > \sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1)(1 - p_2)^{d(v_i)} = n. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, daher gilt die Behauptung, dass Gleichung (2.1) eine eindeutige Lösung in $[0, 1]$ hat. \square

Widmen wir uns nun für den weiteren Beweis von Theorem 2.2.2 zunächst einmal der oberen Schranke $1 - \frac{1}{\sqrt[\delta]{\bar{d}+1}}$ von p .

Da $d(v_i) + 1$ monoton wachsend und $(1 - p)^{d(v_i)}$ monoton fallend in $d(v_i)$ sind, können wir die TSCHEBYSCHEFFSche Ungleichung (vgl. [10], S.32) auf Gleichung (2.1) anwenden. Damit folgt

$$\begin{aligned} n = \sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1)(1 - p)^{d(v_i)} & \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1) \right) \left(\sum_{i=1}^n (1 - p)^{d(v_i)} \right) \\ & = \frac{2m + n}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (1 - p)^{d(v_i)} \\ & = (\bar{d} + 1) \cdot \sum_{i=1}^n (1 - p)^{d(v_i)}. \end{aligned}$$

Weiter ist $(1 - p)^{d(v_i)} \leq (1 - p)^\delta$ für alle $v_i \in V$ und damit

$$n \leq (\bar{d} + 1) \cdot n \cdot (1 - p)^\delta.$$

Umgestellt nach p ergibt sich

$$1 - p \geq \sqrt[\delta]{\frac{1}{\bar{d} + 1}} \quad \Rightarrow \quad p \leq 1 - \frac{1}{\sqrt[\delta]{\bar{d} + 1}}, \quad (2.6)$$

womit die obere Schranke bewiesen ist.

Kommen wir zum Beweis der unteren Schranke $1 - \sqrt[d]{\frac{1}{C}}$ von p .

Schätzen wir das arithmetische gegen das geometrische Mittel ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 n = n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1)(1-p)^{d(v_i)}}{n} &\geq n \cdot \left(\prod_{i=1}^n ((d(v_i) + 1)(1-p)^{d(v_i)}) \right)^{\frac{1}{n}} \\
 &= n \cdot \left(\prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1) \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^n d(v_i)} \right)^{\frac{1}{n}} \\
 &= n \cdot \left(\prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1) \right)^{\frac{1}{n}} \cdot (1-p)^{\frac{\sum_{i=1}^n d(v_i)}{n}} \\
 &= n \cdot \prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1)^{\frac{1}{n}} \cdot (1-p)^{\bar{d}}.
 \end{aligned}$$

Mit $C = \prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1)^{\frac{1}{n}}$ folgt für p somit

$$1 - p \leq \sqrt[d]{\frac{1}{C}} \quad \Rightarrow \quad p \geq 1 - \frac{1}{\sqrt[d]{C}} =: u_1. \quad (2.7)$$

Damit ist der Beweis von Theorem 2.2.2 abgeschlossen. \square

Der Wert C kann für einen konkreten Graphen G mit gegebenen Valenzen leicht berechnet werden. Im Folgenden wollen wir aber zusätzlich eine untere Schranke für C beweisen, für die nicht alle Valenzen des Graphen bekannt sein müssen. Mit dem Optimierungsproblem \mathcal{P} versuchen wir zu bestimmen, wie groß C mindestens ist.

$$\mathcal{P} : \prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1) \rightarrow \min, \quad \text{Nebenbedingungen: } \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m, \quad \delta \leq d(v_i) \leq \Delta$$

In Lemma 2.8 untersuchen wir, für welche Kombination von Valenzen das zu optimierende Produkt minimal wird, und berechnen anschließend diesen minimalen Wert.

Lemma 2.8. (d_1, \dots, d_n) löse \mathcal{P} , das heißt $\prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1) = \min$.

Dann gilt: Es existiert höchstens ein i mit $\delta < d(v_i) < \Delta$.

Beweis. Annahme: $\exists i, j : \delta < d(v_i) \leq d(v_j) < \Delta$, o.B.d.A. $v_i = v_1, v_j = v_2$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1) = (d_1 + 1) \cdot (d_2 + 1) \cdot \prod_{i=3}^n (d(v_i) + 1)$$

Dann ist aber $(d_1 - 1, d_2 + 1, d_3, \dots, d_n)$ ebenfalls zulässig, da mit

$$2m = \sum_{i=1}^n d(v_i) = d_1 + d_2 + \sum_{i=3}^n d(v_i) = (d_1 - 1) + (d_2 + 1) + \sum_{i=3}^n d(v_i)$$

und $\delta \leq d_1 - 1 < \Delta$ bzw. $\delta < d_2 + 1 \leq \Delta$ die Nebenbedingungen weiterhin erfüllt sind.

Da allgemein $\prod_{i=3}^n (d(v_i) + 1) > 0$ gilt und unter der gestellten Annahme $d_1 < d_2 + 1$ ist, folgt

$$\begin{aligned} & ((d_1 - 1) + 1) \cdot ((d_2 + 1) + 1) \cdot \prod_{i=3}^n (d(v_i) + 1) \\ &= d_1 \cdot (d_2 + 2) \cdot \prod_{i=3}^n (d(v_i) + 1) \\ &= d_1 d_2 + \underbrace{2d_1}_{< d_1 + d_2 + 1} \prod_{i=3}^n (d(v_i) + 1) \\ &< (d_1 + 1) \cdot (d_2 + 1) \cdot \prod_{i=3}^n (d(v_i) + 1) \\ &= \prod_{v_i \in V(G)} (d(v_i) + 1) \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme, dass \mathcal{P} für (d_1, d_2, \dots, d_n) minimal war. \square

Nachdem wir die Struktur der Lösungen des Optimierungsproblems \mathcal{P} kennen, versuchen wir jetzt den Wert von $\prod_{v_i \in V(G)} (d(v_i) + 1)$ für ein Element der Lösungsmenge abzuschätzen. Wir wissen: r Knoten haben die Valenz δ und s Knoten die Valenz Δ und für höchstens einen Knoten ist die Valenz x unklar ($\delta \leq x \leq \Delta$). Es gilt also $n = r + s + 1$.

Aus

$$\begin{aligned} 2m &= r\delta + s\Delta + x \\ &\geq n\delta + s(\Delta - \delta) \\ \Rightarrow s &\leq \frac{2m - n\delta}{\Delta - \delta} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2m &= r\delta + s\Delta + x \\ &\leq n\delta + s(\Delta - \delta) + \Delta - \delta \\ \Rightarrow s &\geq \frac{2m - n\delta}{\Delta - \delta} - 1 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1) &\geq (\delta + 1)^{r+1} (\Delta + 1)^s \\ &= (\delta + 1)^{n-s} (\Delta + 1)^s \\ &\geq (\delta + 1)^{n - \frac{2m - n\delta}{\Delta - \delta} + 1} (\Delta + 1)^{\frac{2m - n\delta}{\Delta - \delta}}. \end{aligned}$$

Damit gilt

Folgerung 2.3. (d_1, \dots, d_n) löse \mathcal{P} , dann gilt mit $\delta \leq x \leq \Delta$, $r + s + 1 = n$ und $r \cdot \delta + s \cdot \Delta + x = 2m$

$$\prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1) = (\delta + 1)^r (\Delta + 1)^s (x + 1)$$

und weiter

$$(\delta + 1)^{n+1-\frac{2m-n\delta}{\Delta-\delta}} (\Delta + 1)^{\frac{2m-n\delta}{\Delta-\delta}} \leq \prod_{i=1}^n (d(v_i) + 1).$$

Mit Lemma 2.8 und dieser Folgerung ist Lemma 2.9 gezeigt.

Lemma 2.9.

$$C = \prod_{v_i \in V(G)} (d(v_i) + 1) \geq (\delta + 1)^{n+1-\frac{2m-n\delta}{\Delta-\delta}} (\Delta + 1)^{\frac{2m-n\delta}{\Delta-\delta}} \quad (2.8)$$

Mit $c_1 = \frac{2m-n\delta}{\Delta-\delta}$ folgt daraus

$$n = \sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1) \cdot (1-p)^{d(v_i)} \geq n \cdot (1-p)^{\bar{d}} \cdot (\delta + 1)^{n+1-c_1} \cdot (\Delta + 1)^{c_1}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1-p)^{\bar{d}} &\leq \frac{1}{(\delta + 1)^{n+1-\frac{2m-n\delta}{\Delta-\delta}} \cdot (\Delta + 1)^{\frac{2m-n\delta}{\Delta-\delta}}} \\ &= \frac{1}{(\delta + 1)^{1+\frac{n\Delta-2m}{\Delta-\delta}} \cdot (\Delta + 1)^{\frac{2m-n\delta}{\Delta-\delta}}} \\ \Rightarrow p &\geq 1 - \frac{1}{\sqrt[\bar{d}]{(\delta + 1)^{1+\frac{n\Delta-2m}{\Delta-\delta}} \cdot (\Delta + 1)^{\frac{2m-n\delta}{\Delta-\delta}}}} =: u_2. \end{aligned}$$

Ein anderer Weg zu einer unteren Schranke für p zu gelangen, wäre die direkte Abschätzung

$$(1-p)^{d(v_i)} \geq (1-p)^\Delta \quad \forall v_i \in V.$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} n = \sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1)(1-p)^{d(v_i)} &\geq (1-p)^\Delta \sum_{i=1}^n (d(v_i) + 1) \\ &= (1-p)^\Delta (2m + n) \\ \Rightarrow \quad 1-p &\leq \sqrt[\Delta]{\frac{1}{d+1}} \\ p &\geq 1 - \frac{1}{\sqrt[\Delta]{d+1}} =: u_3. \end{aligned}$$

Vergleichen wir u_3 aber mit der ersten unteren Schranke u_1 , bedeutet folgendes Theorem, dass die direkte Abschätzung den kleineren und damit als untere Schranke schlechteren Wert liefert.

Theorem 2.2.3 (THIERFELDER [37]). *Für Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$ mit $a_{max} := \max\{a_1, \dots, a_n\}$ gilt die Ungleichung:*

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right)^{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right)} \leq \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\right)^{a_{max}}.$$

Wir geben hier den Beweis nach [37] an:

Beweis. Bekanntlich ist die Funktion $f(x) = x \cdot \ln(x)$ (streng) konvex ($f''(x) = \frac{1}{x} > 0$). Deshalb gilt aufgrund der JENSENSchen Ungleichung (vgl. [27], S.351) und der Tatsache $\ln(a_i) \geq 0$

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \ln(a_i) \leq a_{max} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i)\right) = a_{max} \ln \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\right).$$

Die Anwendung der e -Funktion liefert das Ergebnis. Die Ungleichung gilt sogar streng, falls nicht $a_1 = \dots = a_n$. \square

Die Ungleichung $u_3 < u_1$ folgt für $a_i = d(v_i)$ für nicht reguläre Graphen.

Anmerkung: In Kapitel 2.2.2 arbeiten wir mit den Schranken u_1 für p aus Theorem 2.2.2. Analoge Betrachtungen können aber auch mit u_2 und u_3 durchgeführt werden.

2.2.2 Verbesserungen

Nachdem wir ein Intervall für p festlegen konnten, wollen wir nun Kriterien bestimmen, die angeben, welcher Wert $q_i \in \{0, 1\}$ einem Knoten v_i – ausgehend vom Vektor (p, \dots, p) – zugewiesen werden soll. In Kapitel 2.1 haben wir dazu ausgewertet, ob f_{p_i} für den aktuellen Vektor \vec{p} größer, kleiner oder gleich Null ist. $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ beschrieb dabei die momentanen Werte der Knoten $v_i \in V$.

Da für p nur Schranken bekannt sind, kann auch die Nullstelle von f_{p_i} nicht exakt bestimmt werden. Demnach gestaltet sich die Fragestellung, ob $f_{p_i}(\vec{p})$ positiv, negativ oder gleich Null ist, im allgemeinen Fall schwierig.

Um diese Problematik zu umgehen, wählen wir zwei feste Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ und definieren die Operation $Q(v_i)$ für einen 3-zulässigen Knoten v_i .

Operation $Q(v_i)$:

$$Q_1: q_i = 0, \text{ falls } f_{p_i} > c_1.$$

$$Q_2: q_i = 1, \text{ falls } f_{p_i} < -c_2.$$

$$Q_3: q_i = 1 \text{ und } q_j = 0 \forall v_j \in N(v_i), \text{ falls } f_{p_i}, f_{p_j} \in [-c_2; c_1] \forall v_j \in N(v_i).$$

$$Q_4: \text{ Falls } -c_2 < f_{p_i} < c_1, \\ q_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_{p_j} < -c_2; \\ 0, & \text{falls } f_{p_j} > c_1; \end{cases} \text{ für ein(!) beliebiges } v_j \in N(v_i) \\ \text{mit } f_{p_j} \notin [-c_2, c_1].$$

Bemerkung: Wie man leicht sieht, wird beim Ausführen der Operation $Q(v_i)$ immer nur eine der vier Unteroperationen Q_1 bis Q_4 ausgeführt.

Seien \vec{a} und $\vec{b} \in C^n$ wie in Kapitel 2.1 zwei Hilfsvektoren, wobei für alle $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt

$$a_k = \begin{cases} q_k, & \text{falls } q_k \text{ vor } Q(v_i) \text{ bereits definiert ist;} \\ p, & \text{sonst;} \end{cases} \quad \text{und}$$

$$b_k = \begin{cases} q_k, & \text{falls } q_k \text{ nach } Q(v_i) \text{ definiert ist;} \\ p, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung: Für Q_1, Q_2 und Q_4 unterscheiden sich \vec{a} und \vec{b} nur in einer Koordinate, für Q_3 in höchstens $\Delta + 1$ Koordinaten.

Versuchen wir nun auf dieser Grundlage eine minimale einheitliche Verbesserung bei Ausführung eines jeden Verbesserungsschrittes Q_1 bis Q_4 zu berechnen.

Lemma 2.10. Für $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ sei W_k die Verbesserung, die das Ausführen von Q_k bewirkt. Dann gilt $f(\vec{b}) = f(\vec{a}) - W_k$ mit

$$W_k \geq \begin{cases} c_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[d]{C}}\right), & \text{falls } k = 1; \\ c_2 \cdot \frac{1}{\sqrt[\delta]{d+1}}, & \text{falls } k = 2; \\ c_1 \cdot (p-1) + \delta \cdot p \cdot (-c_2 + 2(1-p)^\Delta), & \text{falls } k = 3; \end{cases}$$

$$\text{und } W_4 = \begin{cases} W_1, & \text{falls eine Änderung auf } 0 \\ W_2, & \text{erfolgt.} \end{cases}$$

Beweis. Zunächst wollen wir die minimale Verbesserung für $k = 1$ und $k = 2$ zeigen. In Q_1 wird $q_i = 0$ gesetzt, so folgt mit Lemma 2.3 (s. S.19) und den Schranken für p

$$W_1 = (p-0) \cdot f_{p_i}(\vec{b}) \geq p \cdot c_1 \geq c_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[d]{C}}\right).$$

Analog ergibt sich für Q_2

$$W_2 = (p-1) \cdot f_{p_i}(\vec{b}) \geq (1-p) \cdot c_2 \geq c_2 \cdot \frac{1}{\sqrt[\delta]{d+1}}.$$

Je nachdem, ob in Q_4 ein $v_i \in V$ auf Null oder auf Eins geändert wird, erzielen wir die gleiche Verbesserung wie in Q_1 bzw. Q_2 . Da v_i 3-zulässig ist, ist folglich auch in der ersten und zweiten Nachbarschaft eines Knoten $v_j \in N(v_i)$ nur der Wert p vorhanden.

Abschließend wollen wir bestimmen, welche Verbesserung durch Q_3 erwirkt wird. Dazu betrachten wir einzeln die Änderung von v_i und die seiner Nachbarn. Dabei beschreibe – wie auch in den anderen Fällen – \vec{a} den Zustand vor Ausführung der Operation. \vec{b}_1 sei der Zwischenschritt nach Ändern von p_i und \vec{b} der Vektor am Ende des Operationsschrittes.

Untersuchen wir als erstes welche Auswirkung das Ändern des Wertes q_i zu Eins auf den Funktionswert von f hat.

Sei W_{3_1} die durch Zuweisen von $q_i = 1$ verursachte Veränderung. Es gilt

$$W_{3_1} = (p-1) \cdot f_{p_i}(\vec{b}_1) \geq (p-1) \cdot c_1 (\leq 0),$$

wobei die Veränderung des Funktionswertes von f durch eine (geringe) Verschlechterung abgeschätzt wird.

Betrachten wir nun die Änderung der p_j von p auf Null für $v_j \in N(v_i)$. Diese soll mit W_{3_2} bezeichnet werden. Für alle $v_j \in N(v_i)$ vergrößert sich durch den ersten Schritt der Wert von f_{p_j} . Es gilt

$$f_{p_j}(\vec{a}) + w_i = f_{p_j}(\vec{b}_1)$$

mit

$$\begin{aligned} w_i &\geq \prod_{v_k \in N(v_j)} (1 - p_k) + (1 - p_i) \cdot \prod_{v_l \in N(v_i) \setminus \{v_j\}} (1 - p_l) \\ &= (1 - p)^{d(v_j)} + (1 - p) \cdot (1 - p)^{d(v_i) - 1} = (1 - p)^{d(v_j)} + (1 - p)^{d(v_i)}, \end{aligned}$$

denn die Subtraktion der in w_i zusammengefassten Terme fällt beim Übergang von $f_{p_j}(\vec{a})$ zu $f_{p_j}(\vec{b}_1)$ weg.

Vergleiche:

$$\begin{aligned} f_{p_j}(\vec{a}) &= 1 - \prod_{k \in N(v_j)} (1 - p_k) - \sum_{v_k \in N(v_j)} (1 - p_k) \cdot \prod_{v_l \in N(v_k) \setminus \{v_j\}} (1 - p_l), \\ f_{p_j}(\vec{b}) &= 1 - 0 - \sum_{v_k \in N(v_j) \setminus \{v_i\}} (1 - p_k) \cdot \prod_{v_l \in N(v_k) \setminus \{v_j\}} (1 - p_l). \end{aligned}$$

Die beiden Summanden in w_i sind genau dann größer Null, wenn alle Knoten in der ersten und zweiten Nachbarschaft von v_i einen Wert ungleich Eins besitzen. Dies ist durch die Forderung 3-zulässiger Knoten als Eingabe für $Q(v_i)$ erfüllt. Hierin liegt begründet, dass die Knoten $v_i \in V$, mit denen die Operation $Q(v_i)$ durchgeführt werden soll, mindestens den Abstand 5 besitzen müssen.

Für $f_{p_j}(\vec{a})$ gilt also

$$\begin{aligned} f_{p_i}(\vec{a}) &\geq -c_2 + w_i \geq -c_2 + (1 - p)^{d(v_j)} + (1 - p)^{d(v_i)} \\ &\geq -c_2 + 2(1 - p)^\Delta. \end{aligned}$$

Die Verbesserung beim Ändern des Wertes p_j für ein $v_j \in N(v_i)$ ist folglich

$$W_{3_2} \geq (p - 0) \cdot (-c_2 + 2(1 - p)^\Delta).$$

Fassen wir die gewonnenen Erkenntnisse zusammen und berücksichtigen, dass v_i mindestens δ Nachbarn hat, so tritt bei Ausführung von Q_3 mindestens die Verbesserung W_3 auf.

$$W_3 \geq W_{3_1} + \delta \cdot W_{3_2} \geq (p-1) \cdot c_1 + \delta \cdot p \cdot (-c_2 + 2(1-p)^\Delta)$$

□

Um die Ergebnisse kompakt darstellen und auswerten zu können, fordern wir jetzt, dass bei jeder Ausführung von $Q(v_i)$ die gleiche minimale Verbesserung erfolgt. So können wir zum Einen leicht die minimale Gesamtverbesserung berechnen und zum Anderen c_1 und c_2 allgemein bestimmen.

Lemma 2.11. *Die minimale Verbesserung W bei Ausführen der Operation $Q(v_i)$ beträgt*

$$W = \frac{2\delta \cdot (1 - (\bar{d} + 1)^{-\frac{1}{\delta}})^2}{(\bar{d} + 1)^{\frac{\Delta-1}{\delta}} \cdot \left(C^{-\frac{1}{\delta}} - \delta \cdot (1 - (\bar{d} + 1)^{-\frac{2}{\delta}})^2 \right)}.$$

Beweis. Setzen wir zunächst die Verbesserungen W_1 und W_2 in Q_1 und Q_2 gleich, dann muss gelten

$$c_1 \cdot p = c_2 \cdot (1-p) \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = c_1 \cdot \frac{p}{1-p}.$$

Damit erzielt dann nach Definition auch Q_4 diese Verbesserung. Dieser Zusammenhang liefert in W_3 eingesetzt

$$\begin{aligned} W_3 &\geq (p-1) \cdot c_1 + \delta \cdot p \cdot (-c_2 + 2(1-p)^\Delta) \\ &= 2\delta p(1-p)^\Delta - c_1(1-p + \delta \cdot \frac{p^2}{1-p}). \end{aligned}$$

Da auch diese Verbesserung den gleichen Wert haben soll, wie W_1 und W_2 , können wir die Werte für c_1 und c_2 wie folgt bestimmen

$$\begin{aligned} c_1 \cdot p &= 2\delta p(1-p)^\Delta - c_1 \cdot (1-p + \delta \frac{p^2}{1-p}) \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{2\delta p(1-p)^\Delta}{1 + \frac{\delta p^2}{1-p}} \\ \Rightarrow c_2 &= c_1 \cdot \frac{p}{1-p} = \frac{2\delta p^2(1-p)^\Delta}{1-p + \delta p^2}. \end{aligned}$$

Mit den so gewonnenen Zahlen c_1 und c_2 haben alle Unteroperationen in $Q(v_i)$ die gleiche Verbesserung zur Folge. Es reicht daher, diese an einem Beispiel (hier Q_1) zu berechnen.

Neben c_1 und c_2 setzen wir die Schranken für p bei der Berechnung der Verbesserung ein.

$$\begin{aligned}
W \geq c_1 \cdot p &= \frac{2\delta}{1 + \frac{\delta p^2}{1-p}} p^2 (1-p)^\Delta \\
&= \frac{2\delta p^2 (1-p)^{\Delta-1}}{1-p + \delta p^2} \\
&\geq \frac{2\delta \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[\delta]{\bar{d}+1}}\right)^2 \left(\frac{1}{\bar{d}+1}\right)^{\frac{\Delta-1}{\delta}}}{\frac{1}{\sqrt[\delta]{C}} - \delta \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[\delta]{\bar{d}+1}}\right)^2} \\
&= \frac{2\delta \cdot \left(1 - (\bar{d}+1)^{-\frac{1}{\delta}}\right)^2}{(\bar{d}+1)^{\frac{\Delta-1}{\delta}} \cdot \left(C^{-\frac{1}{\delta}} - \delta \cdot \left(1 - (\bar{d}+1)^{-\frac{1}{\delta}}\right)^2\right)}
\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 2.11 bewiesen. \square

Theorem 2.2.1 folgt, wenn wir Operation $Q(v_i)$ für jeden Knoten einer 5-unabhängigen Menge I_5 ausführen. Die Gesamtverbesserung dabei ist $|I_5| \cdot W$ und Theorem 2.2.1 ist gezeigt. \square

Die Diskussion von Schranken für $|I_5|$ lassen wir in diesem Kapitel weg. Bereits für reguläre Graphen gestaltete sich diese aufwändig, für allgemeine Graphen führten mehrere Ansätze zu keinen bedeutenden Ergebnissen. In Kapitel 3 wird nun aber ein verallgemeinerter Ansatz der Idee dieses Kapitels vorgestellt, der gute neue und vor allem darstellbare Ergebnisse liefert.

3 Abstiegsverfahren

Wie im vorangegangenen Kapitel soll auch hier eine gute Ausgangsschranke in Form einer multilinearen Funktion durch ein Abstiegsverfahren verbessert werden. Anders als bisher wollen wir jedoch keine feste Operation an einer vorgegebenen Menge von Knoten ausführen, sondern einen allgemeinen Algorithmus für alle Knoten definieren, der ihre Werte auf Null bzw. Eins ändert.

Zudem behandeln wir in diesem Kapitel einen verallgemeinerten Ansatz, der für verschiedene multilineare Funktionen f , die Schranken für die Dominanzzahl bilden, angewendet werden kann. Am Beispiel einer festen Funktion werden die so erhaltenen neuen Schranken analysiert.

Zunächst entwickeln wir in Kapitel 3.1 das Abstiegsverfahren für allgemeine Graphen und versuchen anschließend in Kapitel 3.2 für bipartite Graphen weitere Verbesserungen zu erzielen. Die präsentierten Ergebnisse wurden in [5] (allgemeiner Fall) und [6] (bipartiter Fall) publiziert bzw. zur Veröffentlichung eingereicht.

3.1 Abstiegsverfahren in allgemeinen Graphen

Wie bereits in Kapitel 1.4 beschrieben, gibt es für jeden Graphen G obere Schranken in Form verschiedener multilinearere Funktionen $f(p_1, \dots, p_n)$ für die Dominanzzahl $\gamma(G)$. Es gilt in diesen Fällen

$$\gamma(G) \leq \min_{(p_1, \dots, p_n) \in C^n} f(p_1, \dots, p_n). \quad (3.1)$$

Auf Grundlage einer solchen multilinearen Funktion und ihrer partiellen Ableitungen f_{p_i} nach den Koordinaten p_i können wir einen Algorithmus $A_b(p)$ angeben, der nach noch zu erläuternden Kriterien die Werte p_i der Knoten $v_i \in V$ auf Null oder Eins abändert. Wir legen zudem die Parameter $p \in (0, 1)$ und $b \geq 0$ fest, die vom Algorithmus verwendet werden.

Algorithmus $A_b(p)$:

INPUT: $f : C^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in (0, 1)$ und $b \geq 0$

1. For i from 1 to n do: $p_i := p$.
2. For i from 1 to n do: Wenn $f_{p_i}(p_1, \dots, p_n) > -b$, dann $p_i := 0$, sonst $p_i := 1$.
3. For i from 1 to n do: Falls $f_{p_i}(p_1, \dots, p_n) \leq -b$, dann $p_i := 1$.

OUTPUT: (p_1, \dots, p_n) .

In diesem Abschnitt soll der Algorithmus dahingehend analysiert werden, dass die erzielten Verbesserungen abgeschätzt werden können. Es gelingt uns in [5] zu beweisen, dass folgendes Theorem gilt.

Theorem 3.1.1 (ARTMANN, GÖRING, HARANT, RAUTENBACH, SCHIERMEYER [5]). Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und Minimalvalenz δ . Weiter sei $f(p_1, \dots, p_n)$ eine multilineare Funktion, für die Gleichung (3.1) gilt.

Der Algorithmus $A_b(p)$ gebe für ein $b \geq 0$ und jedes $p \in (0, 1)$ einen Vektor (p_1, p_2, \dots, p_n) aus mit der Eigenschaft, dass aus $p_k = 0$ für alle $1 \leq k \leq n$ mit $v_k \in N[v_i] \cup N[v_j]$ mit $v_i, v_j \in V$ folgt $\text{dist}_G(v_i, v_j) \geq 3$.

Dann gilt

$$\gamma(G) \leq \min_{p \in [0,1]} \left(\frac{\delta}{\delta(1+b)+b} \cdot f(p, \dots, p) + \frac{b(\delta p + 1)}{\delta(1+b)+b} \cdot n \right).$$

Bemerkung: Gegeben sei die Situation nach Ausführung des Algorithmus $A_b(p)$, wie sie in Theorem 3.1.1 vorausgesetzt wird. Wir nennen einen Knoten $v_i \in V$ *kritisch*, falls $p_k = 0$ für alle $v_k \in N[v_i]$. Die im Theorem beschriebene Eigenschaft besagt dann, dass der Algorithmus $A_b(p)$ einen Vektor (p_1, p_2, \dots, p_n) ausgibt, in dem alle kritischen Knoten paarweise einen Abstand größer oder gleich drei haben. Besitzt die Funktion f – die zum Graphen G assoziiert ist – diese Eigenschaft, so sagen wir f *besitzt die Eigenschaft \mathcal{P}_b* .

Mit dieser Sprechweise wollen wir nun die Aussage des Theorems beweisen.

Beweis. Da wir fordern, dass f multilinear ist, gilt für alle $p_1, \dots, p_n, hp_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + hp_i, p_{i+1}, \dots, p_n) &= \\ f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n) + f_{p_i}(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n) \cdot hp_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels sei (p_1, \dots, p_n) die Ausgabe von $A_b(p)$ unter Nutzung des ausgewählten $p \in (0, 1)$. Wie im Algorithmus beschrieben, gilt

$$p_i \in \{0, 1\} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Wir fassen die Knoten, denen der Wert Eins zugewiesen wurde, in der Menge M zusammen.

$$M = \{v_i \in V \mid p_i = 1\} \tag{3.3}$$

Demnach ist ein Knoten v_i genau dann kritisch, wenn $N[v_i] \cap M = \emptyset$ gilt.

Da $\gamma(G)$ nach Gleichung (3.1) das Minimum der Funktion f über C^n ist, gilt für jedes $p \in [0, 1]$, dass $\gamma(G) \leq f(p, \dots, p)$.

Schauen wir uns nun die einzelnen Schritte des Algorithmus $A_b(p)$ genauer an.

- Am Ende von Schritt 1 gilt $(p_1, \dots, p_n) = (p, \dots, p)$.
- Wird im zweiten Schritt für ein p_i der Wert p durch Eins ersetzt, so ist $f_{p_i} > -b$, und es folgt nach Gleichung (3.2), dass der Funktionswert von f um mindestens $b(1-p)$ sinkt. Analog gilt, dass in dem Fall, wenn p_i im zweiten Schritt von p auf Null geändert wird, der Wert von f um höchstens bp steigt.
- Betrachten wir Schritt 3, und wird dort ein $p_i = 0$ durch Eins ersetzt, so wurde es im zweiten Schritt von p auf Null geändert. Summiert man die beiden Effekte aus Schritt 2 und 3 für diesen Knoten auf, so ergibt sich, dass der Funktionswert für f insgesamt um mindestens $b(1-p)$ sinkt.

Wir erinnern uns an die Definition der Menge M in Gleichung (3.3) und daran, dass ihre Mächtigkeit die Anzahl der Knoten mit Wert Eins angibt. Damit wurde (bei Ausführung von $A_b(p)$) $|M|$ Knoten der Wert Eins zugeordnet und dabei jeweils die Verbesserung mindestens $b(1-p)$ erzielt. Zudem erhöhten $(n - |M|)$ Knoten den Funktionswert von f um jeweils höchstens bp , als ihnen der Wert Null zugeordnet wurde. Es folgt also

$$f(p_1, \dots, p_n) \leq f(p, \dots, p) - b(1-p)|M| + bp(n - |M|)$$

und damit

$$\gamma(G) \leq f(p, \dots, p) - b|M| + bpn. \tag{3.4}$$

Sei k die Anzahl kritischer Knoten nach Ausführung des Algorithmus $A_b(p)$, also aller Knoten, deren abgeschlossener Nachbarschaft der Wert Null zugeordnet wurde. Weiter definieren wir die Menge D als Vereinigung aller kritischen Knoten mit M . Offensichtlich ist D eine dominierende Menge in G , und es gilt

$$\gamma(G) \leq |D| = |M| + k. \tag{3.5}$$

Damit lässt sich $\gamma(G)$ durch geschickte Aufspaltung wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
\gamma(G) &= \left(\frac{1}{1+b} + \frac{b}{1+b} \right) \gamma(G) \\
&\stackrel{(3.4) \text{ u. } (3.5)}{\leq} \frac{1}{1+b} (f - b|M| + bpn) + \frac{b}{1+b} |D| \\
&\stackrel{(3.5)}{=} \frac{1}{1+b} (f - b(|D| - k) + bpn) + \frac{b}{1+b} |D| \\
&= \frac{1}{1+b} f + \frac{b}{1+b} (k + pn). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Da f die Eigenschaft \mathcal{P}_b besitzt, sind die abgeschlossenen Nachbarschaften der kritischen Knoten disjunkt. Sei K die Menge der kritischen Knoten von G , dann gilt

$$\gamma(G) \leq |V \setminus N(K)| \leq n - \delta k, \tag{3.7}$$

da die Menge $V \setminus N(K)$ dominierend ist und höchstens $n - \delta k$ Elemente besitzt.

Mit $\frac{\delta(1+b)}{\delta(1+b)+b} + \frac{b}{\delta(1+b)+b} = 1$ führt eine Konvexkombination der Gleichungen (3.6) und (3.7) zu

$$\begin{aligned}
\gamma(G) &\leq \frac{\delta(1+b)}{\delta(1+b)+b} \left(\frac{1}{1+b} f(p, \dots, p) + \frac{b}{1+b} (k + pn) \right) + \frac{b}{\delta(1+b)+b} (n - \delta k) \\
&= \frac{\delta}{\delta(1+b)+b} f(p, \dots, p) + \frac{b(\delta p + 1)}{\delta(1+b)+b} n.
\end{aligned}$$

Da p beliebig aus $[0, 1]$ gewählt war, gilt die Aussage auch für das Minimum der rechten Seite. Also folgt die Aussage von Theorem 3.1.1. \square

Dieses allgemeine Resultat wollen wir nun auf eine konkrete multilineare Funktion anwenden. Die hierzu präsentierten Ergebnisse sind ebenfalls in [5] zu finden. Dafür geben wir eine obere Schranke für die Dominanzzahl in Form einer multilinearen Funktion an und zeigen, dass diese Funktion die Eigenschaft \mathcal{P}_b für ein $b \geq 0$ besitzt.

Behauptung 3.1.2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, dann gilt

$$\gamma(G) = \min_{(p_1, \dots, p_n) \in C^n} f(p_1, \dots, p_n) \quad (3.8)$$

mit

$$f(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n \left(p_i + \prod_{v_j \in N[v_i]} (1 - p_j) - \frac{1}{1 + d(v_i)} \prod_{v_j \in N[v_i]} p_j \right). \quad (3.9)$$

Des Weiteren hat f die Eigenschaft \mathcal{P}_1 .

Ähnliche Schranken für $\gamma(G)$ können in [19] gefunden werden.

Beweis. Um zu beweisen, dass diese Funktion eine Schranke für $\gamma(G)$ darstellt, nutzen wir die probabilistische Methode.

Sei $(p_1, \dots, p_n) \in C^n$ und $X \subseteq V$ eine Teilmenge der Knotenmenge von G , die jedes $v_i \in V$ unabhängig mit einer Wahrscheinlichkeit p_i enthält. Dieser Schritt erfolgte analog zum Vorgehen von ALON und SPENCER. Weiter wählen wir eine Menge

$$X' = \{v_i \in V \mid N[v_i] \subseteq X\},$$

das heißt die Menge aller Knoten, deren abgeschlossene Nachbarschaft komplett zu X gewählt wurde. Im von dieser Knotenmenge X' induzierten Untergraphen $G[X']$ sei I eine maximum unabhängige Menge.

Wenn – wiederum analog zu ALON und SPENCER – alle von X nicht dominierten Knoten in der Menge Y zusammengefasst werden,

$$Y = \{v_i \in V \mid N[v_i] \cap X = \emptyset\},$$

dann ist $(X \setminus I) \cup Y$ eine dominierende Menge in G und es gilt

$$\gamma(G) \leq \mathbb{E}[|X|] + \mathbb{E}[|Y|] - \mathbb{E}[|I|].$$

Wie bereits in Kapitel 1.3 gezeigt, ist $\mathbb{E}[|X|] = \sum_{i=1}^n p_i$ und $\mathbb{E}[|Y|] = \sum_{i=1}^n \prod_{v_j \in N[v_i]} (1 - p_j)$.

Mit Hilfe der CARO-WEI Ungleichung (1.2) [11, 38] lässt sich auch die Mächtigkeit einer maximum unabhängigen Menge in $G[X']$ abschätzen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|I|] &\geq \sum_{v \in X'} \frac{1}{1 + d_{G[X']}(v)} \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d(v)} \mathbb{P}[v \in X'] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + d(v_i)} \prod_{v_j \in N[v_i]} p_j. \end{aligned}$$

Fassen wir die drei Erwartungswerte zusammen, so gilt

$$\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^n \left(p_i + \prod_{v_j \in N[v_i]} (1 - p_j) - \frac{1}{1 + d(v_i)} \prod_{v_j \in N[v_i]} p_j \right).$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass das Minimum dieser Funktion in C^n tatsächlich gleich $\gamma(G)$ ist. Sei dafür D eine kleinste dominierende Menge, das heißt $|D| = \gamma(G)$. Dann gilt aufgrund der Dominanz von D für jeden Knoten $v_i \in V$, dass $N[v_i] \cap D \neq \emptyset$. Da D eine kleinste dominierende Menge ist, gilt weiter $N[v_i] \cap D \neq N[v_i] \forall v_i \in V$.

Setzen wir nun $p_i^* = \begin{cases} 1 & v_i \in D \\ 0 & v_i \in V \setminus D \end{cases}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \gamma(G) &\leq \sum_{i=1}^n \left(p_i^* + \prod_{v_j \in N[v_i]} (1 - p_j^*) - \frac{1}{1 + d(v_i)} \prod_{v_j \in N[v_i]} p_j^* \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (p_i^* + 0 - 0) = |D| = \gamma(G), \end{aligned}$$

also Gleichheit und der Beweis von Gleichung (3.8) ist abgeschlossen.

Für Behauptung 3.1.2 müssen wir weiter zeigen, dass f die Eigenschaft \mathcal{P}_1 besitzt. Dafür sei $p \in (0, 1)$ und (p_1, \dots, p_n) die Ausgabe des Algorithmus $A_1(p)$. Außerdem seien v_l und v_m zwei kritische Knoten. Nach Definition müssen diese einen Abstand von mindestens drei besitzen, damit die Eigenschaft \mathcal{P}_1 vorliegt.

Um einen Widerspruchsbeweis zu führen, nehmen wir an, dass der Abstand der beiden Knoten kleiner drei sei, daraus folgt $N[v_l] \cap N[v_m] \neq \emptyset$. Man kann sich leicht überlegen, dass dann nach der Ausführung des zweiten Schritts in $A_1(p)$ die p_i für alle $v_i \in N[v_l] \cup N[v_m]$ gleich Null sind und dies vor allem auch während der Ausführung des dritten Schritts bleiben, da v_l und v_m kritisch sind.

Also schauen wir uns an, wie in Schritt 3 entschieden wird, ob für einen Knoten der Wert auf Eins geändert wird. Dies geschieht, wenn $f_{p_i}(p_1, \dots, p_n) \leq -b$ bzw. in unserem Fall ≤ -1 gilt. Allgemein ist die partielle Ableitung von f nach p_i für $1 \leq i \leq n$

$$f_{p_i}(p_1, \dots, p_n) = 1 - \sum_{v_j \in N[v_i]} \left(\prod_{v_k \in N[v_j] \setminus \{v_i\}} (1 - p_k) + \frac{1}{1 + d(v_j)} \prod_{v_k \in N[v_j] \setminus \{v_i\}} p_k \right). \quad (3.10)$$

Zunächst bemerken wir, dass alle Terme in der Summe in Gleichung (3.10) positiv sind. Einen Widerspruch zu der Annahme, dass in Schritt 3 keine Änderungen an den Werten der Knoten in $N[v_m] \cup N[v_l]$ vorgenommen werden, erhalten wir, sobald wir zeigen können, dass diese Summe mindestens zwei ist.

1. Fall: Sei der Abstand zwischen v_m und v_l gleich eins also o.B.d.A. $v_m \in N(v_l)$. Dann gilt in Schritt 3

$$f_{p_m}(p_1, \dots, p_n) \leq 1 - \prod_{v_k \in N[v_m] \setminus \{v_m\}} (1 - p_k) - \prod_{v_k \in N[v_m] \setminus \{v_l\}} (1 - p_k) = -1,$$

Widerspruch!

2. Fall: Sei der Abstand zwischen v_m und v_l gleich zwei. Dann existiert ein $v_j \in N(v_l) \cap N(v_m)$, für das während der Ausführung von Schritt 3 gilt

$$f_{p_j}(p_1, \dots, p_n) \leq 1 - \prod_{v_k \in N[v_l] \setminus \{v_j\}} (1 - p_k) - \prod_{v_k \in N[v_m] \setminus \{v_j\}} (1 - p_k) = -1,$$

Widerspruch!

In beiden Fällen wird im dritten Schritt von $A_1(p)$ der Wert eines Knoten aus $N[v_l] \cup N[v_m]$ auf Eins gesetzt, wodurch v_l , v_m oder beide nicht mehr kritisch sind, im Widerspruch zu der Voraussetzung. Treten zwei kritische Knoten nach dem Algorithmus auf, so müssen diese demnach im Abstand mindestens drei liegen. \square

Theorem 3.1.1 und Behauptung 3.1.2 implizieren sofort das folgende Ergebnis für $b = 1$.

Folgerung 3.1 (ARTMANN, GÖRING, HARANT, RAUTENBACH, SCHIERMEYER [5]). *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und Minimalvalenz δ , dann gilt*

$$\gamma(G) \leq \frac{1}{2\delta + 1} \left((2\delta p + 1)n + \delta \sum_{v_i \in V} \left((1 - p)^{d(v_i)+1} - \frac{1}{1 + d(v_i)} p^{d(v_i)+1} \right) \right) \quad (3.11)$$

für alle $p \in (0, 1)$.

Wenn wir im Folgenden $\delta \geq 3$ voraussetzen, können wir die Summe in Gleichung (3.11) weiter abschätzen. Es gilt dann

Folgerung 3.2 (ARTMANN, GÖRING, HARANT, RAUTENBACH, SCHIERMEYER [5]). *Sei G ein Graph der Ordnung n mit Minimalvalenz $\delta \geq 3$. Dann hat die Gleichung $(\delta + 1)(1 - p)^\delta + p^\delta = 2$ eine eindeutige Lösung $p_0 \in [0, \frac{1}{2}]$, mit der gilt*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2\delta + 1} \left((2\delta p_0 + 1) + \delta \left((1 - p_0)^{\delta+1} - \frac{1}{1 + \delta} p_0^{\delta+1} \right) \right) =: B_3.$$

Beweis. (von Folgerung 3.2) Wir wollen zunächst zeigen, dass der Anteil eines einzelnen Knoten an der rechten Seite in Gleichung (3.11) mit steigender Valenz monoton fällt, wenn p innerhalb eines festen Bereichs liegt.

Behauptung 3.1.3. Für $d \geq \delta \geq 3$ und $p \in \left[\frac{1}{\delta^3}, \frac{1}{3}\right]$ gilt

$$(1-p)^{d+1} - \frac{1}{1+d}p^{d+1} \leq (1-p)^{\delta+1} - \frac{1}{1+\delta}p^{\delta+1}.$$

Beweis. (von Behauptung 3.1.3) Für $d \geq \delta + 1 \geq 4$ und $p \in \left[\frac{1}{\delta^3}, \frac{1}{3}\right]$ genügt es

$$(1-p)^{d+1} - \frac{1}{1+d}p^{d+1} \leq (1-p)^d - \frac{1}{d}p^d$$

zu zeigen. Dies ist jedoch equivalent zu

$$\frac{1}{d} - \frac{p}{1+d} \leq p \left(\frac{(1-p)}{p} \right)^d,$$

da $(1-p)^{d+1} = (1-p)^d - p(1-p)^d$.

Mit $p \leq \frac{1}{3}$ ist $\frac{(1-p)^d}{p^d} \geq 2^d$ und es ist hinreichend zu zeigen, dass $\frac{1}{d} \leq p2^d$ für $d \geq \delta + 1 \geq 4$ gilt. Diese Forderung ist für $p \geq \frac{1}{\delta^3} > \frac{1}{d^3} \geq \frac{1}{d2^d}$ erfüllt und der Beweis somit abgeschlossen. \square

Mit Behauptung 3.1.3 ergibt sich aus Folgerung 3.1 für $p \in \left[\frac{1}{\delta^3}, \frac{1}{3}\right]$

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2\delta+1} \left((2\delta p + 1) + \delta \left((1-p)^{\delta+1} - \frac{1}{1+\delta}p^{\delta+1} \right) \right) \quad (3.12)$$

und wir versuchen, die rechte Seite von Gleichung (3.12) im Bezug auf $p \in \left[\frac{1}{\delta^3}, \frac{1}{3}\right]$ zu minimieren. In diesem Zusammenhang definieren wir

$$h(p) = (\delta+1)(1-p)^\delta + p^\delta.$$

Mit dieser Bezeichnung gilt

$$\frac{\partial}{\partial p} \left((2\delta p + 1) + \delta \left((1-p)^{\delta+1} - \frac{1}{1+\delta}p^{\delta+1} \right) \right) = \delta(2 - h(p)).$$

Behauptung 3.1.4. Die Funktion $h(p)$ ist streng monoton fallend für $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ mit $h\left(\frac{1}{\delta^3}\right) \geq 2$ und $h\left(\frac{1}{3}\right) \leq 2$.

Beweis. (von Behauptung 3.1.4) Da $\frac{\partial}{\partial p}h(p) < 0$ equivalent zu $\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\delta-1} < \delta+1$ ist und $\frac{p}{1-p} < 1$ für $p \leq \frac{1}{3}$ gilt, ist die Funktion $h(p)$ streng monoton fallend für $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Offensichtlich ist $h\left(\frac{1}{\delta^3}\right) \geq 2$ genau dann, wenn $(\delta + 1)\left(1 - \frac{1}{\delta^3}\right)^\delta + \left(\frac{1}{\delta^3}\right)^\delta \geq 2$. Dies kann für $3 \leq \delta \leq 5$ leicht gezeigt werden. Für die übrigen Werte von δ ist es hinreichend zu zeigen, dass $\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^\delta \geq \frac{2}{\delta+1}$. Da $\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^\delta \geq \frac{8}{27}$ für $\delta \geq 3$ erfüllt ist, ist die letzte Ungleichung für $\delta \geq 6$ wahr.

Für $\delta = 3$ ist $h\left(\frac{1}{3}\right) \leq 2$ leicht nachzurechnen und für $\delta \geq 4$ folgt

$$h\left(\frac{1}{3}\right) = (\delta + 1)\left(\frac{2}{3}\right)^\delta + \left(\frac{1}{3}\right)^\delta < 2(\delta + 1)\left(\frac{2}{3}\right)^\delta \leq 2,$$

womit Behauptung 3.1.4 gilt. \square

Nach Behauptung 3.1.4 gibt es ein eindeutiges $p_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ mit $h(p_0) = 2$, welches im Intervall $\left[\frac{1}{\delta^3}, \frac{1}{3}\right]$ liegt, und der Beweis ist abgeschlossen. \square

Die folgende Tabelle enthält einige numerische Ergebnisse zur Schranke B_3 in Folgerung 3.2 und die jeweiligen Werte von p_0 . Zudem wird sie durch $f(p_0, \dots, p_0)$ für die Funktion f aus Gleichung (3.9) (s. S.45) ergänzt. Dadurch können wir die mit dem hier vorgestellten Algorithmus erzielte Verbesserung der Schranke B_3 gegenüber $f(p_0, \dots, p_0)$ herausstellen. Das Resultat von ARNAUTOV und PAYAN (kurz AP, vgl. Gleichung (1.4.3), S.11) bildet eine sehr attraktive obere Schranke für die Dominanzzahl in Graphen. Die Verbesserung, die wir ihr gegenüber erzielen können, soll durch die zusätzliche Angabe dieser Schranke in der Tabelle aufgezeigt werden.

δ	p_0	B_3	AP	$f(p_0, \dots, p_0)$
3	0.207482786	0.4895676537	0.520833	0.601508
4	0.204904569	0.4344421097	0.456667	0.522590
5	0.197282429	0.3918579884	0.408333	0.464805
6	0.188440488	0.3578840276	0.370408	0.420308
7	0.179664998	0.3300593960	0.339732	0.384748
8	0.171393348	0.3067865527	0.314330	0.355528
9	0.163748973	0.2869859624	0.292897	0.330999
10	0.156735668	0.2699010113	0.274534	0.310056

Tabelle 3.1.1 Numerische Ergebnisse zu Folgerung 3.2

3.2 Abstiegsverfahren in bipartiten Graphen

Analog zu Kapitel 3.1 soll nun ein allgemeines Verbesserungskonzept für bipartite Graphen aufgestellt werden. Wir lehnen uns dabei an die Ergebnisse und das Vorgehen des vorherigen Abschnitts an, versuchen aber die speziellen Eigenschaften bipartiter Graphen bestmöglich auszunutzen, um die vorherigen allgemeinen Ergebnisse für diese Graphenklasse deutlich zu verbessern. Dieses Kapitel gibt dabei die Inhalte aus [6] wieder.

Bipartite Graphen zeichnen sich dadurch aus, dass alle Nachbarn eines Knoten in der anderen Partitionsklasse als dieser liegen. Dadurch ist es möglich, den Knoten der beiden Partitionsklassen im ersten Schritt zwei unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p für V_1 und q für V_2 zuzuordnen.

Dann sieht der neue Algorithmus $A_b(p, q)$ gegenüber $A_b(p)$ wie folgt aus.

Algorithmus $A_b(p, q)$:

INPUT: $f : C^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p, q \in [0, 1]$ und $b \geq 0$

1. For i from 1 to n do: $p_i := p$ wenn $v_i \in V_1$ sonst $p_i := q$.
2. For i from 1 to n do: wenn $f_{p_i}(p_1, \dots, p_n) > -b$, dann $p_i := 0$, sonst $p_i := 1$.
3. For i from 1 to n do: wenn $f_{p_i}(p_1, \dots, p_n) \leq -b$, dann $p_i := 1$.

OUTPUT: (p_1, \dots, p_n) .

Übertragen wir Theorem 3.1.1 mithilfe des neuen Algorithmus auf bipartite Graphen, dann gilt

Theorem 3.2.1 (ARTMANN, HARANT [6]). *Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph auf der Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$ und mit Minimalvalenz δ . Sei $f(p_1, \dots, p_n)$ eine multilineare Funktion, für die gilt*

$$\gamma(G) \leq \min_{(p_1, \dots, p_n) \in C^n} f(p_1, \dots, p_n). \quad (3.13)$$

Weiter gebe der Algorithmus $A_b(p, q)$ für ein $b \geq 0$ und jedes Paar $p, q \in [0, 1]$ einen Vektor (p_1, p_2, \dots, p_n) aus mit der Eigenschaft, dass aus $p_k = 0$ für alle $v_k \in N[v_l] \cup N[v_m]$ mit $v_l, v_m \in V$ folgt $\text{dist}_G(v_l, v_m) \geq 3$.

Für $p, q \in [0, 1]$ sei $z_i = \begin{cases} p & \text{wenn } v_i \in V_1, \\ q & \text{wenn } v_i \in V_2 \end{cases}$ für $i = 1, \dots, n$.

Dann gilt

$$\gamma(G) \leq \min_{p, q \in [0, 1]} \left(\frac{\delta}{\delta(1+b) + b} f(z_1, \dots, z_n) + \frac{b(\delta p + 1)}{\delta(1+b) + b} n_1 + \frac{b(\delta q + 1)}{\delta(1+b) + b} n_2 \right).$$

Die Definitionen für *kritisch* und die *Eigenschaft* \mathcal{P}_b übernehmen wir aus Kapitel 3.1.

Beweis. (von Theorem 3.2.1) Seien G , b und f wie in Theorem 3.2.1 gefordert. Da f multilinear ist, gilt auch im bipartiten Fall die Gleichung (3.2) von Seite 42. Ebenso können wir die Menge M genau wie in Gleichung (3.3) (s. S.43) definieren.

$$M = \{v_i \in V | p_i = 1\}$$

Zusätzlich lässt sich M jetzt aufspalten in den Teil, der in V_1 liegt und den Teil in V_2 . Wir wollen diese Mengen mit M_1 und M_2 bezeichnen, wobei $M = M_1 \cup M_2$.

In den folgenden Überlegungen kommen nun die speziellen Eigenschaften bipartiter Graphen zum Tragen. Die „bipartite Formulierung“ von Gleichung (3.4) (s. S.43) lautet damit

Behauptung 3.2.2. $\gamma(G) \leq f(z_1, \dots, z_n) - b|M| + bpn_1 + bqn_2$.

Beweis. Da auch dieser Beweis ähnlich dem allgemeinen Fall verläuft, stellen wir vor allem die Differenzierung für bipartite Graphen heraus. Nach Gleichung (3.13) gilt $\gamma(G) \leq f(z_1, \dots, z_n)$, und wir verfolgen darauf aufbauend die Schritte des Algorithmus $A_b(p, q)$. Der Vektor (p_1, \dots, p_n) bezeichne hier jeweils die aktuelle Belegung der Werte der Knoten mit 0, 1, p oder q .

Nach dem ersten Schritt gilt $(p_1, \dots, p_n) = (z_1, \dots, z_n)$. Falls im zweiten Schritt ein $p_i = \begin{cases} p \\ q \end{cases}$ durch Eins ersetzt wird, dann fällt nach (3.2) der Wert von $f(p_1, \dots, p_n)$

um mindestens $\begin{cases} b(1-p) \\ b(1-q) \end{cases}$. Ebenso steigt, wenn im zweiten Schritt ein $p_i = \begin{cases} p \\ q \end{cases}$

durch Null ersetzt wird, nach (3.2) der Wert von $f(p_1, \dots, p_n)$ um höchstens $\begin{cases} bp \\ bq \end{cases}$.

Weiterhin gilt, falls während Schritt 3 ein $p_i = 0$ durch Eins ersetzt wird, dass

$p_i = \begin{cases} p \\ q \end{cases}$ im zweiten Schritt durch Null ersetzt wurde, und die Summe der Effekte der beiden Veränderungen an p_i den Funktionswert $f(p_1, \dots, p_n)$ um insgesamt mindestens $\begin{cases} b(1-p) \\ b(1-q) \end{cases}$ verringern.

Insgesamt gilt somit

$$\begin{aligned} f(p_1, \dots, p_n) &\leq f(z_1, \dots, z_n) - b(1-p)|M_1| + bp(n_1 - |M_1|) \\ &\quad - b(1-q)|M_2| + bq(n_2 - |M_2|) \\ &= f(z_1, \dots, z_n) - b|M| + bpn_1 + bqn_2, \end{aligned}$$

womit Behauptung 3.2.2 bewiesen ist. □

Bezeichne k wiederum die Anzahl kritischer Knoten und D die (dominierende) Vereinigung aller kritischen Knoten mit M . Mit $\gamma(G) \leq |D| = |M| + k$ aus Gleichung (3.5) (s. S.43) und Behauptung 3.2.2 folgt analog zu der Entwicklung von Gleichung (3.6) (s. S.44) aus $\gamma(G) = (\frac{1}{1+b} + \frac{b}{1+b})\gamma(G)$

$$\begin{aligned}\gamma(G) &\leq \frac{1}{1+b}(f(z_1, \dots, z_n) - b(|D| - k) + bpn_1 + bq n_2) + \frac{b}{1+b}|D| \\ &= \frac{1}{1+b}f(z_1, \dots, z_n) + \frac{b}{1+b}(k + pn_1 + qn_2).\end{aligned}\quad (3.14)$$

Auch Gleichung (3.7) (s. S.44) behält für bipartite Graphen ihre Gültigkeit. Sei K wiederum die Menge der kritischen Knoten, dann gilt

$$\gamma(G) \leq |V \setminus N(K)| \leq n - \delta k.$$

Eine Konvexkombination der Gleichungen (3.14) und (3.7) mit dem gleichen Ansatz wie in Kapitel 3.1 führt für bipartite Graphen damit zu

$$\begin{aligned}\gamma(G) &\leq \frac{\delta(1+b)}{\delta(1+b)+b} \left(\frac{1}{1+b}f(z_1, \dots, z_n) + \frac{b}{1+b}(k + pn_1 + qn_2) \right) + \frac{b}{\delta(1+b)+b}(n - \delta k) \\ &= \frac{\delta}{\delta(1+b)+b}f(z_1, \dots, z_n) + \frac{b(\delta p + 1)}{\delta(1+b)+b}n_1 + \frac{b(\delta q + 1)}{\delta(1+b)+b}n_2.\end{aligned}$$

Da aber p und q beliebig aus $[0, 1]$ gewählt wurden, folgt Theorem 3.2.1. \square

Es ist leicht zu sehen, dass für feste p und q die oberen Schranken für $\gamma(G)$

$$T(b) = \frac{\delta}{\delta(1+b)+b}f(z_1, \dots, z_n) + \frac{b(\delta p + 1)}{\delta(1+b)+b}n_1 + \frac{b(\delta q + 1)}{\delta(1+b)+b}n_2$$

und $f(z_1, \dots, z_n)$ für $b = 0$ übereinstimmen, und dass $T(b)$ streng monoton fallend in b ist, wenn $f(z_1, \dots, z_n) > \frac{\delta pn_1 + \delta q n_2 + n}{\delta + 1}$. Sei b_0 (falls es existiert) das größte b , so dass f die Eigenschaft \mathcal{P}_b besitzt. Ist $f(z_1, \dots, z_n)$ groß, das heißt keine besonders gute Schranke für $\gamma(G)$, dann ist – wegen der erwähnten Monotonie – $T(b_0)$ eine attraktive Schranke für $\gamma(G)$.

Wählen wir auch in diesem Kapitel die Funktion

$$f(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n \left(p_i + \prod_{v_j \in N[v_i]} (1 - p_j) - \frac{1}{1 + d(v_i)} \prod_{v_j \in N[v_i]} p_j \right)$$

aus Gleichung (3.9) (s. S.45), so wissen wir bereits, dass diese die Eigenschaft \mathcal{P}_1 besitzt.

Aus diesem Umstand und Theorem 3.2.1 ergibt sich sofort das folgende Ergebnis für $b = 1$.

Folgerung 3.3 (ARTMANN, HARANT [6]). *Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit der Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$ und der Minimalvalenz δ , dann gilt*

$$\begin{aligned} \gamma(G) \leq \frac{1}{2\delta+1} & \left((2\delta p + 1)n_1 + (2\delta q + 1)n_2 \right. \\ & + \delta \sum_{v \in V_1} \left((1-p)(1-q)^{d(v)} - \frac{1}{1+d(v)} p q^{d(v)} \right) \\ & \left. + \delta \sum_{v \in V_2} \left((1-q)(1-p)^{d(v)} - \frac{1}{1+d_G(v)} q p^{d(v)} \right) \right) \end{aligned}$$

für alle $p, q \in [0, 1]$.

Stellen wir die Schranke für $\gamma(G)$ etwas um, schreiben ρn für n_1 bzw. $(1-\rho)n$ für n_2 , lassen die Subtrahenden weg und schätzen wir die Summen ab, indem wir die Valenzen durch die Minimalvalenz ersetzen, so gilt offensichtlich

Folgerung 3.4 (ARTMANN, HARANT [6]). *Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit der Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, den Minimalvalenzen δ_1 und δ_2 in den Partitionsklassen V_1 und V_2 . Weiter gelte o.B.d.A. $\delta_1 \leq \delta_2$ und sei $\rho \in [0, 1]$ so gewählt, dass $|V_1| = \rho|V|$.*

Dann ist $\gamma(G) \leq h(p, q) \cdot n \leq g(p, q) \cdot n$ für alle $p, q \in [0, 1]$, mit

$$h(p, q) = \frac{2\delta_1 p \rho + 2\delta_1 q(1-\rho) + 1 + \delta_1 \rho(1-p)(1-q)^{\delta_1} + \delta_1(1-\rho)(1-q)(1-p)^{\delta_2}}{2\delta_1 + 1}$$

und

$$g(p, q) = \frac{2\delta_1 p \rho + 2\delta_1 q(1-\rho) + 1 + \delta_1 \rho(1-p)(1-q)^{\delta_1} + \delta_1(1-\rho)(1-p)^{\delta_2}}{2\delta_1 + 1}.$$

Da diese Abschätzungen eher grob sind, versuchen wir für Folgerung 3.5 im Falle $p, q \in [0, \frac{1}{2}]$ etwas feiner abzuschätzen. Wir können dann zeigen, dass auch die nächste Aussage gilt.

Folgerung 3.5 (ARTMANN, HARANT [6]). Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit der Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, den Minimalvalenzen von V_1 und V_2 δ_1 und δ_2 . Sei weiter o.B.d.A. $\delta_1 \leq \delta_2$ und $\rho \in [0, 1]$ so gewählt, dass $|V_1| = \rho|V|$. Dann gilt für alle $p, q \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\gamma(G) \leq \phi(p, q) \cdot n,$$

mit

$$\begin{aligned} \phi(p, q) = \frac{1}{2\delta_1+1} & \left(2\delta_1 p\rho + 2\delta_1 q(1-\rho) + 1 + \delta_1 \rho \left((1-p)(1-q)^{\delta_1} - \frac{1}{1+\delta_1} p q^{\delta_1} \right) \right. \\ & \left. + \delta_1(1-\rho) \left((1-q)(1-p)^{\delta_2} - \frac{1}{1+\delta_2} q p^{\delta_2} \right) \right). \end{aligned}$$

Beweis. (von Folgerung 3.5) Von Folgerung 3.3 kommend wollen wir die dort gegebene Schranke für $\gamma(G)$ weiter abschätzen. Dafür beweisen wir zunächst folgende allgemeine Behauptung, die wir anschließend zum Abschätzen der Summen in der Schranke aus Folgerung 3.3 nutzen können.

Behauptung 3.2.3. Für $0 \leq p, q \leq \frac{1}{2}$ (p und q reelle Zahlen) und $m \geq l$ (m und l natürliche Zahlen) gilt

$$(1-p)(1-q)^m - \frac{1}{m+1} p q^m \leq (1-p)(1-q)^l - \frac{1}{l+1} p q^l.$$

Beweis. (von Behauptung 3.2.3) Für $p = 0$ oder $q = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $p, q > 0$. Dann gilt für den Spezialfall $m = k+1$, $l = k$ und $k \geq 1$

$$(1-p)(1-q)^{k+1} - \frac{1}{k+2} p q^{k+1} \leq (1-p)(1-q)^k - \frac{1}{k+1} p q^k.$$

Dies ist mit $(1-p)(1-q)^{k+1} = (1-p)(1-q)^k - (1-p)q(1-q)^k$ äquivalent zu

$$\frac{1}{q(k+1)} \leq \left(\frac{1-p}{p}\right) \left(\frac{1-q}{q}\right)^k + \frac{1}{k+2}.$$

Für $p \leq \frac{1}{2}$ ist außerdem $\frac{1-p}{p} \geq 1$, daher genügt es zu zeigen, dass

$$\frac{1}{q(k+1)} \leq \left(\frac{1-q}{q}\right)^k = \left(\frac{1}{q} - 1\right)^k. \quad (3.15)$$

Da aber $\frac{1}{q} \geq 2$ und $(k+1)(z-1)^k - z$ für $z \geq 2$ und $k \geq 1$ monoton wachsend in z ist, gilt diese Aussage. Wenn die zu beweisende Aussage aber für zwei aufeinander folgende Zahlen $m = k+1$ und $l = k$ gilt, dann gilt sie auch allgemein für $m \geq l$, und damit ist Behauptung 3.2.3 gezeigt. \square

Für $0 \leq p, q \leq \frac{1}{2}$ folgt aus Behauptung 3.2.3 und Folgerung 3.3 sofort

$$\begin{aligned} \gamma(G) \leq \frac{1}{2\delta+1} & \left((2\delta p + 1)n_1 + (2\delta q + 1)n_2 + \delta n_1 \left((1-p)(1-q)^{\delta_1} - \frac{1}{1+\delta_1} p q^{\delta_1} \right) \right. \\ & \left. + \delta n_2 \left((1-q)(1-p)^{\delta_2} - \frac{1}{1+\delta_2} q p^{\delta_2} \right) \right). \end{aligned}$$

Setzen wir noch $n_1 = \rho|V|$, $n_2 = (1-\rho)|V|$ und $\delta = \delta_1$ ein, so steht Folgerung 3.5 da. \square

Wir wollen nun versuchen die drei Schranken für $\gamma(G)$ aus den letzten beiden Folgerungen vergleichbar zu machen. Da die Minima der Schranken sich nicht in allen Fällen leicht bestimmen lassen, gehen wir wie folgt vor:

Wie definieren allgemein für eine Funktion $f(p, q)$ über C^2 : $\min(f) = \min\{f(p, q) \mid 0 \leq p, q \leq 1\}$. Dann kann in unserem Fall der Wert $\min(g)$ mithilfe analytischer Methoden leicht berechnet werden (vgl. z.B. [20]). Es gilt $\min(g) = g(p^*, q^*)$ mit

$$p^* = \max \left\{ 0, 1 - \left(\frac{2(1-\rho)}{\delta_1 \rho} \right)^{\frac{1}{\delta_1-1}} \right\}$$

und

$$q^* = \max \left\{ 0, 1 - \left(\frac{2\rho}{\delta_2(1-\rho)} \right)^{\frac{1}{\delta_2-1}} \right\}.$$

Diesen Wert können wir auch in die Funktion h einsetzen. Für $\delta_1 \geq 1$ und $\frac{\delta_1}{2\delta_1} \leq \frac{1-\rho}{\rho} \leq \frac{2\delta_2}{\delta_2}$ gilt weiter $p^*, q^* \leq \frac{1}{2}$, und wir können die für $g(p, q)$ ermittelten Minimalstellen zudem auch in ϕ auswerten.

Weil die Funktionen sich sehr ähnlich sind, bilden die Minimalstellen von g gute Näherungen für die Minima von h und ϕ .

Folgerung 3.6 (ARTMANN, HARANT [6]).

$$\frac{\gamma(G)}{|V|} \leq h(p^*, q^*)$$

und für $\frac{\delta_1}{2\delta_1} \leq \frac{1-\rho}{\rho} \leq \frac{2\delta_2}{\delta_2}$ zudem

$$\frac{\gamma(G)}{|V|} \leq \phi(p^*, q^*).$$

Da überdies sowohl V_1 als auch V_2 dominierend sind, folgt $\frac{\gamma(G)}{|V|} \leq \min\{\rho, 1 - \rho\}$. Für $\frac{\delta_1}{2^{\delta_1}} > \frac{1-\rho}{\rho}$ oder $\frac{1-\rho}{\rho} > \frac{2^{\delta_2}}{\delta_2} \geq \frac{2^{\delta_1}}{\delta_1}$ – wenn also die Voraussetzungen für den zweiten Teil von Folgerung 3.6 nicht erfüllt sind – gilt $\min\{\rho, 1 - \rho\} < \frac{\delta_1}{\delta_1 + 2^{\delta_1}}$ und für den Fall, dass δ_1 groß ist, ist $\min\{\rho, 1 - \rho\}$ eine attraktive Schranke für $\frac{\gamma(G)}{|V|}$.

Numerische Berechnungen zeigen, dass häufig die triviale obere Schranke $\min\{\rho, 1 - \rho\}$ kleiner ist als $\min(h)$ oder $\min(\phi)$. Daher fassen wir alle diese Ergebnisse in einer Schranke B_4 zusammen

$$B_4 := \min\{\min(h), \min(\phi), \rho, 1 - \rho\}. \quad (3.16)$$

Als Abschluss des Kapitels wollen wir nun einige numerische Ergebnisse für B_4 mit einigen Werten für ρ , δ_1 und δ_2 anschließen, wobei wir $\delta_1 \leq \delta_2$ voraussetzen (s. Tabelle 3.2.1). In Tabelle 3.2.2 auf Seite 57 werden diese mit den Schranken AP, CR, B_3 und HP (vgl. Kapitel 1.4 und für B_3 Folgerung 3.2 auf S.47) verglichen. Dabei hängen AP, CR und B_3 nicht von der Wahl von ρ und δ_2 ab, denn diese Schranken sind für allgemeine Graphen gültig. Der Vergleich soll hier lediglich deutlich machen, wie groß die Verbesserungen in der ausgewählten Graphenklasse gegenüber den allgemein gültigen Resultaten sind.

Es zeigt sich im Vergleich von HP und B_4 , dass beide Schranken ihre Berechtigung haben und in manchen Fällen die eine bessere Schranken liefert, in manchen Fällen jedoch die andere.

ρ	δ_2	$\delta_1 = 3$	$\delta_1 = 5$	$\delta_1 = 10$	$\delta_1 = 20$	$\delta_1 = 40$
0.1	3	0.1	-	-	-	-
	30	0.1	0.1	0.1	0.0831	-
	60	0.1	0.1	0.1	0.0788	0.0606
	100	0.1	0.1	0.0989	0.0769	0.0576
0.3	3	0.3	-	-	-	-
	30	0.2927	0.2498	0.1961	0.1443	-
	60	0.2837	0.2403	0.1826	0.1286	0.0896
	100	0.2796	0.2360	0.1760	0.1213	0.0818
0.5	3	0.4890	-	-	-	-
	30	0.3761	0.3012	0.2164	0.1564	-
	60	0.3609	0.2835	0.1964	0.1349	0.0949
	100	0.3535	0.2746	0.1862	0.1240	0.0835
0.7	3	0.3	-	-	-	-
	30	0.3	0.2721	0.1932	0.1411	-
	60	0.3	0.2549	0.1728	0.1191	0.0859
	100	0.3	0.2455	0.1621	0.1075	0.0739
0.9	3	0.1	-	-	-	-
	30	0.1	0.1	0.1	0.0857	-
	60	0.1	0.1	0.1	0.0777	0.0574
	100	0.1	0.1	0.1	0.0714	0.0503

Tabelle 3.2.1: Werte von B_4 für verschiedene Wahlen δ_1 , δ_2 und ρ

ρ	δ_1	δ_2	B_4	HP	AP	CR	B_3
0.1	3	30	0.1	0.1	0.521	0.528	0.490
0.1	3	60	0.1	0.1			
0.1	3	100	0.1	0.1			
0.1	10	30	0.1	0.1	0.275	0.285	0.270
0.1	10	60	0.1	0.1			
0.1	10	100	0.099	0.1			
0.1	20	30	0.083	0.092	0.174	0.182	0.174
0.1	20	60	0.079	0.087			
0.1	20	100	0.077	0.085			
0.1	40	60	0.061	0.065	0.105	0.111	0.107
0.1	40	100	0.058	0.062			
0.5	3	30	0.376	0.360			
0.5	3	60	0.361	0.339			
0.5	3	100	0.353	0.329			
0.5	10	30	0.216	0.214			
0.5	10	60	0.196	0.189			
0.5	10	100	0.186	0.177			
0.5	20	30	0.156	0.160			
0.5	20	60	0.135	0.133			
0.5	20	100	0.124	0.121			
0.5	40	60	0.095	0.097			
0.5	40	100	0.084	0.084			
0.9	3	30	0.1	0.1			
0.9	3	60	0.1	0.1			
0.9	3	100	0.1	0.1			
0.9	10	30	0.1	0.095			
0.9	10	60	0.1	0.081			
0.9	10	100	0.1	0.071			
0.9	20	30	0.086	0.085			
0.9	20	60	0.077	0.067			
0.9	20	100	0.071	0.056			
0.9	40	60	0.057	0.057			
0.9	40	100	0.050	0.046			

Tabelle 3.2.2: Vergleich von B_4 mit ausgewählten Schranken

4 Iterationsverfahren

Nachdem wir in den beiden vorigen Kapiteln analysiert haben, wie man bekannte Schranken für die Dominanzzahl in Graphen, die über die probabilistische Methode entwickelt wurden, mit Hilfe von konstruktiven Methoden in Form von Operationen oder Algorithmen weiter verbessern kann, wollen wir uns nun abschließend noch einmal mit der probabilistischen Methode an sich beschäftigen und neue Schranken durch Verallgemeinerung des Ansatzes von ALON und SPENCER gewinnen.

Die Grundidee ist die Folgende: Im Gegensatz zu ALON und SPENCER, die direkt nach der Auswahl einer zufälligen Menge diese mit allen noch nicht dominierten Knoten zu einer dominierenden Menge vereinigen, wollen wir nun Knoten in mehreren Runden auswählen.

Eine erste natürliche Herangehensweise wäre es, auch hier zunächst eine zufällige Knotenmenge zu wählen, im zweiten Schritt dann eine zufällige Menge an Knoten aus den nicht durch die erste Menge dominierten Knoten zu wählen, im dritten Schritt wiederum eine zufällige Menge aus den nicht von den ersten beiden Mengen dominierten Knoten zu wählen usw. Das Problem bei diesem Vorgehen ist jedoch, dass die betroffenen Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte aufgrund der bedingten Wahrscheinlichkeiten schwer zu analysieren sind.

Ein realisierbarer Ansatz soll in den beiden folgenden Kapiteln für allgemeine (Kapitel 4.1) und bipartite (Kapitel 4.2) Graphen dargestellt werden. Die Ergebnisse wurden bereits in [5] und [7] veröffentlicht.

4.1 Iterationsverfahren in allgemeinen Graphen

Wir wählen k unabhängige, zufällige Knotenmengen X_1, \dots, X_k mit Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_k , das heißt $\mathbb{P}(v \in X_i) = p_i$ für alle $v \in V$, und setzen Y_i für jedes $i = 2, \dots, k$ gleich der Menge von Knoten aus X_i , die noch nicht durch $X_1 \cup \dots \cup X_{i-1}$ dominiert werden. Demnach sind die Mengen Y_i den in der Kapiteleinleitung beschriebenen Mengen ähnlich. Um Abhängigkeiten zu vermeiden, fügen wir zu Y_i eine Menge Z_i hinzu, um sicher zu stellen, dass $(Y_1 \cup Z_1) \cup \dots \cup (Y_i \cup Z_i)$ alle Knoten dominiert, die auch durch $X_1 \cup \dots \cup X_i$ dominiert werden.

Um diese Untersuchung zu ermöglichen, müssen wir zudem annehmen, dass der Graph keine Kreise der Länge kleiner fünf enthält, das heißt dass seine Tailenweite mindestens fünf ist.

Bemerkung: In diesem Kapitel sind die p_i nicht wie bisher die Einzelwahrscheinlichkeiten der Knoten v_i zu einer Menge zu gehören, vielmehr werden alle Knoten in jeder der k Runden mit einer jeweils einheitlichen Wahrscheinlichkeit p_i für $i = 1, \dots, k$ ausgewählt. $p_{<i}$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Knoten bereits in einer der ersten $i - 1$ Runden gewählt wurde.

Dieses Konzept liefert uns in der Auswertung das folgende Ergebnis.

Theorem 4.1.1 (ARTMANN, GÖRING, HARANT, RAUTENBACH, SCHIERMEYER [5]). *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Maximalvalenz Δ und Tailenweite mindestens fünf. Für ein $k \in \mathbb{N}$ seien $p_1, \dots, p_k \in [0, 1]$.*

Mit $p_{<1} = 0$ und $p_{<i} = 1 - \prod_{j=1}^{i-1} (1 - p_j)$ für $2 \leq i \leq k$ gilt dann

$$\begin{aligned} \gamma(G) \leq & \sum_{v \in V} \left(\sum_{i=1}^k p_i \cdot (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \right. \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i) \cdot \left((1 - p_i(1 - p_{<i})^{(\Delta-1)})^{d(v)} - (1 - p_i)^{d(v)} \right) \\ & \left. + (1 - p_{<k})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_k) \cdot \left(1 - p_k(1 - p_{<k})^{(\Delta-1)} \right)^{d(v)} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Für $1 \leq i \leq k$ sei X_i – wie bereits erwähnt – die Teilmenge von V , die entsteht, wenn jeder Knoten von G zufällig und unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit p_i gewählt wird. Es gilt $Y_1 = X_1$ und $Z_1 = \emptyset$. Für $2 \leq i \leq k$ seien weiter

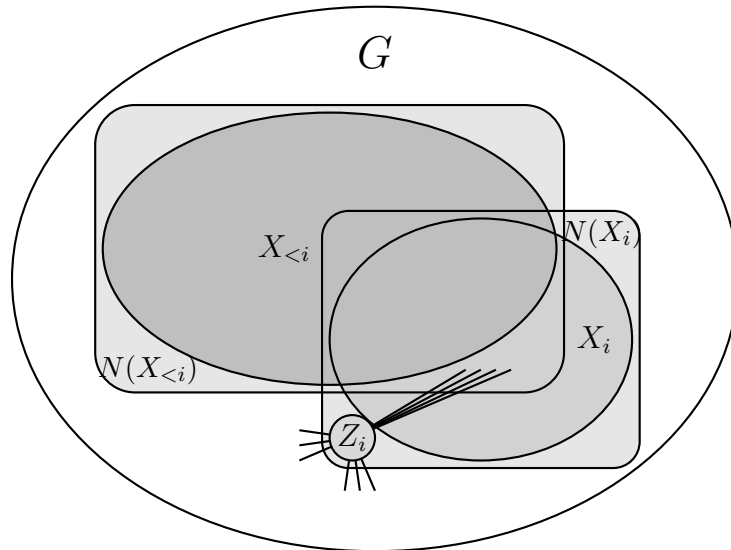
$$X_{<i} = \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j,$$

$$Y_i = X_i \setminus N[X_{<i}]$$

und

$$Z_i = N[X_i] \setminus N[X_{<i} \cup Y_i].$$

Die folgende Grafik soll dies etwas veranschaulichen. Man sieht darin insbesondere, dass die Menge Z_i dadurch gekennzeichnet ist, dass sie nur Nachbarn in $X_i \setminus (Y_i \cup X_{<i})$ und außerhalb von $N[X_{<i+1}]$ besitzt.

Abbildung 4.1.1: Charakterisierung der Menge Z_i

Sei abschließend

$$R = V \setminus N \left[\bigcup_{j=1}^k X_j \right].$$

Behauptung 4.1.2.

$N[X_1 \cup \dots \cup X_i] \subseteq N[(Y_1 \cup Z_1) \cup \dots \cup (Y_i \cup Z_i)]$ für $1 \leq i \leq k$.

Beweis. (von Behauptung 4.1.2) Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion. Für $i = 1$ ist die Aussage trivial, da $X_1 = Y_1 \cup Z_1$. Sei nun $i \geq 2$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $N[X_{<i}] \subseteq N[(Y_1 \cup Z_1) \cup \dots \cup (Y_i \cup Z_i)]$ und es ist hinreichend zu zeigen, dass $N[X_i] \subseteq N[(Y_1 \cup Z_1) \cup \dots \cup (Y_i \cup Z_i)]$. Sei dafür $v \in N[X_i]$.

1. Fall: Sei $v \in X_i$. Dann gilt entweder $v \in Y_i$ oder $v \in N[X_{<i}]$. In beiden Fällen sind wir fertig.
2. Fall: Sei $v \in N(X_i)$. Dann gilt entweder $v \in N[X_{<i}]$ oder $v \in N[Y_i]$, oder – per Definition – $v \in Z_i$. Auch hier sind wir in allen Fällen fertig, womit der Beweis der Behauptung abgeschlossen ist.

□

Mit Behauptung 4.1.2 ist sichergestellt, dass die Vereinigung der Mengen Y_1, \dots, Y_n und Z_1, \dots, Z_n alle Knoten dominiert, die auch durch $\bigcup_{j=1}^i X_j$ dominiert sind. Damit folgt aus Behauptung 4.1.2 und der Definition von R , dass die Menge

$$D = R \cup \bigcup_{i=1}^k (Y_i \cup Z_i)$$

eine dominierende Menge in G ist.

Um die Mächtigkeit der Menge D abschätzen zu können, bestimmen wir nun die Erwartungswerte der beteiligten Mengen Y_i, Z_i und R . Beginnen wir mit Y_i . Hier gilt $\mathbb{E}(|Y_1|) = p_1 n$. Betrachten wir weiter $2 \leq i \leq k$. Da die Mengen X_1, \dots, X_{i-1} unabhängig gewählt werden, kann man auch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Knoten in $X_{<i}$ liegt angeben mit

$$p_{<i} = \mathbb{P}[v \in X_{<i}] = \mathbb{P}[v \in \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j] = 1 - \mathbb{P}[v \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j] = 1 - \prod_{j=1}^{i-1} (1 - p_j).$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}[v \in Y_i] = \mathbb{P}[v \in X_i \wedge \forall w \in N[v] : w \notin X_{<i}] = p_i \cdot (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)}$$

für alle $v \in V$.

Etwas schwieriger zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Knoten $v \in V$ zu Z_i gehört. Es gilt $v \in Z_i$ genau dann, wenn $v \notin N[X_{<i}]$, $v \notin X_i$ und wenn es eine nicht leere Menge $U \subseteq N(v)$ gibt, für die gilt $(N(v) \cap N(X_{<i}) \cap X_i) = U$ und $N(v) \cap (V \setminus X_i) = N(v) \setminus U$.

Für eine feste solche Menge U lassen sich die $d(v)$ Nachbarn eines Knoten $v \in Z_i$ aufteilen in

$$N(v) \setminus U = \{v_1, v_2, \dots, v_{d(v)-l}\}$$

und

$$U = \{v_{d(v)-l+1}, v_{d(v)-l+2}, \dots, v_{d(v)}\}.$$

Die folgenden Berechnungen werden beeinflusst durch die Unabhängigkeit der Wahl der Elemente der Menge X_i (gekennzeichnet durch „(i)“) und die Tailenweitenbedingung (gekennzeichnet durch „(g)“). Zudem nutzen wir die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit im unabhängigen und nicht unabhängigen Fall (vgl. Kapitel 1.3.1).

Weil wir zunächst die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[v \in Z_i]$ für eine feste Menge U mit $|U| = l$ untersuchen wollen, gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[v \in Z_i | (N(v) \cap (N(X_{<i}) \cap X_i) = U) \wedge (N(v) \cap (V \setminus X_i) = N(v) \setminus U)] \\ = & \mathbb{P} \left[(v \notin N[X_{<i}]) \wedge (v \notin X_i) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{d(v)-l} (v_j \notin X_i) \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=d(v)-l+1}^{d(v)} (v_j \in N(X_{<i}) \cap X_i) \right) \right], \end{aligned}$$

da die X_i unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p_i gewählt werden, können wir die beiden ersten Terme aus der Wahrscheinlichkeit herausziehen (als Bedingung für die restliche Wahrscheinlichkeit bleiben sie jedoch teilweise erhalten):

$$\stackrel{(i)}{=} (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i) \cdot (1 - p_i)^{(d(v)-l)} \\ \cdot \mathbb{P} \left[\left(\bigwedge_{j=d(v)-l+1}^{d(v)} (v_j \in N(X_{<i}) \cap X_i) \right) \middle| v \notin N[X_{<i}] \right],$$

wenden wir nun die Multiplikationsformel (vgl. Kapitel 1.3.1) an, so folgt weiter:

$$= (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i)^{(d(v)-l+1)} \\ \cdot \prod_{j=d(v)-l+1}^{d(v)} \mathbb{P} \left[(v_j \in N(X_{<i}) \cap X_i) \middle| \left(\bigwedge_{r=d(v)-l+1}^{j-1} (v_r \in N(X_{<i}) \cap X_i) \right) \wedge (v \notin N[X_{<i}]) \right],$$

da $v_j \in X_i$ unabhängig gewählt und $\mathbb{P}[v_j \in X_i]$ unabhängig vom Laufindex, gilt

$$\stackrel{(i)}{=} (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i)^{(d(v)-l+1)} \cdot p_i^l \\ \cdot \prod_{j=d(v)-l+1}^{d(v)} \mathbb{P} \left[(v_j \in N(X_{<i})) \middle| \left(\bigwedge_{r=d(v)-l+1}^{j-1} (v_r \in N(X_{<i})) \right) \wedge (v \notin N[X_{<i}]) \right],$$

aufgrund der gegebenen Tailenweitenbedingung sind die Ereignisse $v_j \in N(X_{<i})$ untereinander unabhängig und es gilt

$$\stackrel{(g)}{=} (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i)^{(d(v)-l+1)} \cdot p_i^l \cdot \prod_{j=d(v)-l+1}^{d(v)} \mathbb{P} [(v_j \in N(X_{<i})) | v \notin N[X_{<i}]],$$

weiter

$$\stackrel{(g)}{=} (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i)^{(d(v)-l+1)} \cdot p_i^l \cdot \prod_{j=d(v)-l+1}^{d(v)} \left(1 - (1 - p_{<i})^{(d(v_j)-1)} \right),$$

und letztlich schätzen wir die Valenzen der v_j nach oben mit Δ ab

$$\leq (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i)^{(d(v)-l+1)} \cdot p_i^l \cdot \left(1 - (1 - p_{<i})^{(\Delta-1)} \right)^l.$$

Für eine feste Aufteilung der Nachbarschaft von v können wir also $\mathbb{P}[v \in Z_i]$ bestimmen. Nun können in U jedoch nicht nur l sondern ein bis $d(v)$ Knoten aus $N(v)$ liegen. Hinzu kommt die Auswahlmöglichkeit, welche der Nachbarn in U liegen.

Bringen wir diese beiden Überlegungen mit ein, so gilt allgemein für einen Knoten $v \in V$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[v \in Z_i] \\
& \leq (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i) \cdot \sum_{l=1}^{d(v)} \binom{d(v)}{l} \cdot (1 - p_i)^{(d(v)-l)} \cdot p_i^l \cdot \left(1 - (1 - p_{<i})^{(\Delta-1)}\right)^l \\
& = (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i) \cdot \left(\left((1 - p_i) + p_i \left(1 - (1 - p_{<i})^{(\Delta-1)}\right) \right)^{d(v)} - (1 - p_i)^{d(v)} \right) \\
& = (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i) \cdot \left(\left(1 - p_i(1 - p_{<i})^{(\Delta-1)}\right)^{d(v)} - (1 - p_i)^{d(v)} \right).
\end{aligned}$$

Damit können wir $\mathbb{E}[|Y_i|]$ und $\mathbb{E}[|Z_i|]$ bestimmen. Überlegen wir uns schließlich noch, dass für alle $v \in V$ gilt

$$\mathbb{P}[v \in R] = \mathbb{P}[v \notin \bigcup_{i=1}^k X_i] = \prod_{i=1}^k (1 - p_i)^{(d(v)+1)}.$$

Aus der Linearität des Erwartungswertes (vgl. Gleichung (1.4), S.8) folgt

$$\begin{aligned}
\gamma(G) & \leq \mathbb{E}[|D|] \\
& = \mathbb{E}[|R|] + \sum_{i=1}^k (\mathbb{E}[|Y_i|] + \mathbb{E}[|Z_i|]) \\
& \leq \sum_{v \in V} \left(\prod_{i=1}^k (1 - p_i)^{(d(v)+1)} + \sum_{i=1}^k p_i \cdot (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^k (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i) \cdot \left(\left(1 - p_i(1 - p_{<i})^{(\Delta-1)}\right)^{d(v)} - (1 - p_i)^{d(v)} \right) \right) \\
& = \sum_{v \in V} \left(\sum_{i=1}^k p_i \cdot (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^{k-1} (1 - p_{<i})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_i) \cdot \left(\left(1 - p_i(1 - p_{<i})^{(\Delta-1)}\right)^{d(v)} - (1 - p_i)^{d(v)} \right) \right. \\
& \quad \left. + (1 - p_{<k})^{(d(v)+1)} \cdot (1 - p_k) \cdot \left(1 - p_k(1 - p_{<k})^{(\Delta-1)}\right)^{d(v)} \right)
\end{aligned}$$

und der Beweis ist vollständig. \square

Theorem 4.1.1 gibt keine Auskunft, wie man zu guten Werten für p_1, \dots, p_k kommt. Mit üblichen Verfahren der numerischen Optimierung kann man solche Probleme jedoch angehen. Um dieses Ergebnis beispielsweise mit der Schranke aus Gleichung (1.10) von ALON und SPENCER (kurz AS) zu vergleichen, geben wir einige numerische Ergebnisse für r -reguläre Graphen und verschiedene Rundenzahlen an.

Tabelle 4.1.1 gibt den numerisch optimalen Wert der Schranke für $\frac{\gamma(G)}{|V|}$ in Theorem 4.1.1 für $3 \leq d \leq 10$ und 1, 2, 3 und 11 Runden an. Zum Vergleich führen wir ebenfalls die Werte von AS auf.

r	$\frac{\ln(r+1)+1}{r+1}$	Anzahl Runden			
		1	2	3	11
3	0.59657359	0.52752960	0.46398402	0.45378488	0.45258151
4	0.52188758	0.46500775	0.40965805	0.40614010	0.40609337
5	0.46529324	0.41764406	0.36881380	0.36756994	0.36756737
6	0.42084430	0.38026854	0.33667455	0.33620842	0.33620824
7	0.38493019	0.34987749	0.31055501	0.31037371	0.31037370
8	0.35524717	0.32459050	0.28880727	0.28873522	0.28873522
9	0.33025850	0.30316268	0.27035398	0.27032500	0.27032500
10	0.30889957	0.28473323	0.25445619	0.25444447	0.25444447

Tabelle 4.1.1 Numerische Ergebnisse für Theorem 4.1.1

Für die Ergebnisse mit 11 Runden führen wir die numerisch optimalen p_i s in Tabelle 4.1.2 auf.

i	Valenzen der Regularität r			
	3	4	5	10
1	0.1580249527086	0.1796128208332	0.1762584372015	0.1361362120038
2	0.2675813028920	0.3447571201572	0.3694498828858	0.3725521673790
3	0.3772827463357	0.4553092715827	0.4780207234806	0.4999988578039
4	0.4363945542355	0.4855741147773	0.4999950191440	0.4999999999999
5	0.4578931324876	0.4999612573102	0.499999966091	0.5000000000000
6	0.4646370670097	0.499998578250	0.49999999967	0.5000000000000
7	0.4994614512562	0.499999994491	0.49999999999	0.5000000000000
8	0.4999916903905	0.49999999978	0.5000000000000	0.5000000000000
9	0.499998706163	0.49999999999	0.5000000000000	0.5000000000000
10	0.499999980111	0.5000000000000	0.5000000000000	0.5000000000000
11	0.49999999999	0.5000000000000	0.5000000000000	0.5000000000000

Tabelle 4.1.2 Optimale Werte für die p_i s

4.2 Iterationsverfahren in bipartiten Graphen

Wir versuchen nun die in Kapitel 4.1 vorgestellte Methode auf bipartite Graphen zu übertragen. Die erzielten Ergebnisse wurden in [7] veröffentlicht.

Wir wählen wiederum k zufällige unabhängige Mengen X_1, \dots, X_k . Auch die Mengen Y_i und Z_i sind analog definiert. Da die zugrunde liegenden Graphen in diesem Kapitel bipartit sind, können wir jede zu betrachtende Menge M zerlegen in $M \cap V_1 = M^{V_1}$ und $M \cap V_2 = M^{V_2}$.

Um die Analyse der erwarteten Mächtigkeiten durchzuführen, brauchen wir erneut die zusätzliche Annahme, dass der Graph keine Kreise einer Länge kleiner als fünf enthält. In bipartiten Graphen bedeutet dies, dass seine Tailenweite mindestens sechs ist. Dass das Dominanzproblem auch in diesem Fall NP-vollständig ist, haben wir in Theorem 1.2.1 in Kapitel 1.2 gezeigt.

Theorem 4.2.1 (ARTMANN, PRUCHNEWSKI [7]). *Sei $G = (V_1, V_2, E)$ ein bipartiter Graph mit den Maximalvalenzen Δ^{V_1} und Δ^{V_2} in V_1 bzw. V_2 und Tailenweite mindestens sechs. Für $k \in \mathbb{N}$ seien p_1, \dots, p_k und $q_1, \dots, q_k \in [0, 1]$.*

Mit $p_{<1} = q_{<1} = 0$, $p_{<i} = 1 - \prod_{j=1}^{i-1} (1 - p_j)$ und $q_{<i} = 1 - \prod_{j=1}^{i-1} (1 - q_j)$ für $2 \leq i \leq k$ gilt

$$\begin{aligned} \gamma(G) \leq & \sum_{v \in V_1} \left(\prod_{i=1}^k (1 - p_i)(1 - q_i)^{d(v)} + \sum_{i=1}^k \left[p_i \cdot (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d(v)} + \right. \right. \\ & \left. \left. (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - p_i) \cdot \left((1 - q_i(1 - p_{<i})^{(\Delta^{V_2}-1)})^{d(v)} - (1 - q_i)^{d(v)} \right) \right] \right) \\ & + \sum_{v \in V_2} \left(\prod_{i=1}^k (1 - q_i)(1 - p_i)^{d(v)} + \sum_{i=1}^k \left[q_i \cdot (1 - q_{<i}) \cdot (1 - p_{<i})^{d(v)} + \right. \right. \\ & \left. \left. (1 - q_{<i}) \cdot (1 - p_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - q_i) \cdot \left((1 - p_i(1 - q_{<i})^{(\Delta^{V_1}-1)})^{d(v)} - (1 - p_i)^{d(v)} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

Beweis. Auch in diesem Kapitel werden wir zunächst k zufällige Mengen X_1, \dots, X_k wählen. Da der Graph bipartit ist, können wir zum einen X_i aufspalten in $X_i^{V_1}$ sowie $X_i^{V_2}$ und zum anderen die Knoten aus V_1 mit einer anderen Wahrscheinlichkeit wählen als die aus V_2 . (Im Gegensatz zu Kapitel 4.1 arbeiten wir hier also mit $2k$ statt k Wahrscheinlichkeiten.) Da alle Knoten aus V_1 nur Nachbarn in V_2 haben und umgekehrt, bleiben die Überlegungen und Rechnungen überschaubar. Demnach gilt: Für $1 \leq i \leq k$ sei $X_i^{V_1}$ ($X_i^{V_2}$) eine Teilmenge von V_1 (V_2), die entsteht, wenn jeder Knoten aus V_1 (V_2) zufällig und unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit p_i (q_i) gewählt wird.

Analog zu Kapitel 4.1 bilden wir Mengen $X_{<i}$, Y_i und Z_i jedoch nun mit Einschränkung auf die beiden Partitionsklassen.

Wir definieren $Y_1^{V_1} = X_1^{V_1}$, $Y_1^{V_2} = X_1^{V_2}$ und $Z_1^{V_1} = Z_1^{V_2} = \emptyset$. Für $2 \leq i \leq k$ seien

$$X_{<i}^{V_1} = \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j^{V_1}, \quad X_{<i}^{V_2} = \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j^{V_2},$$

$$Y_i^{V_1} = X_i^{V_1} \setminus (X_{<i}^{V_1} \cup N(X_{<i}^{V_2})), \quad Y_i^{V_2} = X_i^{V_2} \setminus (X_{<i}^{V_2} \cup N(X_{<i}^{V_1}))$$

und

$$Z_i^{V_1} = N(X_i^{V_2}) \setminus (X_{<i}^{V_1} \cup Y_i^{V_1} \cup N(X_{<i}^{V_2} \cup Y_i^{V_2}))$$

$$Z_i^{V_2} = N(X_i^{V_1}) \setminus (X_{<i}^{V_2} \cup Y_i^{V_2} \cup N(X_{<i}^{V_1} \cup Y_i^{V_1})).$$

Abschließend können wir auch die „Rest“menge aufspalten in $R^{V_1} = R \cap V_1$ und $R^{V_2} = R \cap V_2$:

$$R^{V_1} = V_1 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k X_j^{V_1} \cup N \left(\bigcup_{j=1}^k X_j^{V_2} \right) \right), \quad R^{V_2} = V_2 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k X_j^{V_2} \cup N \left(\bigcup_{j=1}^k X_j^{V_1} \right) \right).$$

Behauptung 4.2.2. Für $1 \leq i \leq k$ gilt

$$\begin{aligned} & N(X_1^{V_1} \cup \dots \cup X_i^{V_1}) \cup X_1^{V_2} \cup \dots \cup X_i^{V_2} \\ & \subseteq (Y_1^{V_2} \cup Z_1^{V_2}) \cup \dots \cup (Y_i^{V_2} \cup Z_i^{V_2}) \cup N((Y_1^{V_1} \cup Z_1^{V_1}) \cup \dots \cup (Y_i^{V_1} \cup Z_i^{V_1})) \end{aligned} \quad (4.1)$$

und

$$\begin{aligned} & N(X_1^{V_2} \cup \dots \cup X_i^{V_2}) \cup X_1^{V_1} \cup \dots \cup X_i^{V_1} \\ & \subseteq (Y_1^{V_1} \cup Z_1^{V_1}) \cup \dots \cup (Y_i^{V_1} \cup Z_i^{V_1}) \cup N((Y_1^{V_2} \cup Z_1^{V_2}) \cup \dots \cup (Y_i^{V_2} \cup Z_i^{V_2})). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Beweis. (von Behauptung 4.2.2) Wir beweisen hier lediglich Gleichung (4.1) durch Induktion. Gleichung (4.2) folgt analog. Für $i = 1$ gilt

$$\begin{aligned} & N[X_1^{V_1} \cup X_1^{V_2}] \cap V_1 \subseteq (Y_1^{V_1} \cup Z_1^{V_1}) \cup N(Y_1^{V_2} \cup Z_1^{V_2}) \\ \Leftrightarrow & X_1^{V_1} \cup N(X_1^{V_2}) \subseteq (Y_1^{V_1} \cup Z_1^{V_1}) \cup N(Y_1^{V_2} \cup Z_1^{V_2}) \end{aligned}$$

wie man leicht sieht, da $X_1^{V_1} = Y_1^{V_1} \cup Z_1^{V_1}$ und $X_1^{V_2} = Y_1^{V_2} \cup Z_1^{V_2}$. Für $i \geq 2$ gilt nach Induktion

$$\begin{aligned} & N(X_1^{V_1} \cup \dots \cup X_{i-1}^{V_1}) \cup X_1^{V_2} \cup \dots \cup X_{i-1}^{V_2} \\ & \subseteq (Y_1^{V_2} \cup Z_1^{V_2}) \cup \dots \cup (Y_{i-1}^{V_2} \cup Z_{i-1}^{V_2}) \cup N((Y_1^{V_1} \cup Z_1^{V_1}) \cup \dots \cup (Y_{i-1}^{V_1} \cup Z_{i-1}^{V_1})) \end{aligned}$$

und es genügt zu zeigen, dass

$$X_i^{V_2} \cup N(X_i^{V_1}) \subseteq (Y_1^{V_2} \cup Z_1^{V_2}) \cup \dots \cup (Y_i^{V_2} \cup Z_i^{V_2}) \cup N((Y_1^{V_1} \cup Z_1^{V_1}) \cup \dots \cup (Y_i^{V_1} \cup Z_i^{V_1})).$$

1. Fall: Sei zunächst $v \in X_i^{V_2}$, dann gilt entweder $v \in Y_i^{V_2}$ oder $v \in N(X_{<i}^{V_1}) \cup X_{<i}^{V_2}$. In beiden Fällen sind wir fertig.
2. Fall: Sei nun $v \in N(X_i^{V_1})$, dann gilt entweder $v \in N(X_{<i}^{V_1}) \cup X_{<i}^{V_2}$ oder $v \in Y_i^{V_2} \cup N(Y_i^{V_1})$ oder – nach Definition – $v \in Z_i^{V_2}$. Wieder sind wir in allen Fällen fertig und der Beweis ist abgeschlossen.

□

Damit ist auch im bipartiten Fall gesichert, dass die Vereinigung der Mengen Y_i und Z_i alle Knoten dominiert, die auch durch $\cup X_i$ dominiert werden. Damit und nach der Definition von R^{V_1} und R^{V_2} ist die Menge

$$D = R^{V_1} \cup R^{V_2} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k (Y_i^{V_1} \cup Z_i^{V_1}) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k (Y_i^{V_2} \cup Z_i^{V_2}) \right)$$

eine dominierende Menge in G .

Für diese wollen wir nun die erwartete Mächtigkeit berechnen. Wir beginnen mit den Mengen, die in V_1 liegen, und darin mit den Mengen $Y_i^{V_1}$. Für $Y_1^{V_1}$ ist $\mathbb{E}(|Y_1^{V_1}|) = p_1|V_1| = p_1n_1$. Sei nun $2 \leq i \leq k$. Da die Mengen X_1, \dots, X_{i-1} unabhängig gewählt werden, entsteht die Menge $X_{<i}^{V_1}$, indem jeder Knoten aus G unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_{<i} = 1 - \prod_{j=1}^{i-1} (1 - p_j)$$

gewählt wird. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[v \in Y_i^{V_1}] &= \mathbb{P}[v \in X_i^{V_1} \wedge v \notin X_{<i}^{V_1} \wedge N(v) \notin X_{<i}^{V_2}] \\ &= p_i \cdot (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d_{V_1}(v)} \end{aligned}$$

für jedes $v \in V_1$.

Analog erhalten wir $\mathbb{E}(|Y_1^{V_2}|) = q_1|V_2| = q_1n_2$, sowie $q_{<i} = 1 - \prod_{j=1}^{i-1} (1 - q_j)$ und

$$\mathbb{P}[v \in Y_i^{V_2}] = q_i \cdot (1 - q_{<i}) \cdot (1 - p_{<i})^{d_{V_2}(v)}$$

für jedes $v \in V_2$.

Weiter liegt ein Knoten $v \in V_1$ genau dann in $Z_i^{V_1}$, wenn $v \notin X_{<i}^{V_1}$, $v \notin N(X_{<i}^{V_2})$ und $v \notin X_i^{V_1}$ und wenn es eine nicht leere Menge $U \subseteq N(v) \subseteq V_2$ gibt mit den Eigenschaften $N(v) \cap (N(X_{<i}^{V_1}) \cap X_i^{V_2}) = U$ und $N(v) \cap (V_2 \setminus X_i^{V_2}) = N(v) \setminus U$.

Wir wählen zunächst eine beliebige feste Menge U mit $|U| = l$, so dass gilt

$$N(v) \setminus U = \{v_1, v_2, \dots, v_{d(v)-l}\}$$

und

$$U = \{v_{d(v)-l+1}, v_{d(v)-l+2}, \dots, v_{d(v)}\}.$$

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[v \in Z_i]$ ist analog zu der in Kapitel 4.1 aufgebaut. Auch die Umformungen bei dieser Berechnung geschehen auf die gleiche Weise, sie werden hier nur kurz wiederholt.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[v \in Z_i^{V_1} \cap (N(v) \cap N(X_{<i}^{V_1}) \cap X_i^{V_2} = U) \wedge (N(v) \cap (V_2 \setminus X_i^{V_2}) = (N(v) \setminus U)) \right] \\ = & \mathbb{P} \left[(v \notin X_{<i}^{V_1}) \wedge (v \notin N(X_{<i}^{V_2})) \wedge (v \notin X_i^{V_1}) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{d(v)-l} (v_j \notin X_i^{V_2}) \right) \right. \\ & \left. \wedge \left(\bigwedge_{j=d^{V_1}(v)-l+1}^{d^{V_1}(v)} (v_j \in N(X_{<i}^{V_1}) \cap X_i^{V_2}) \right) \right], \end{aligned}$$

aufgrund der Unabhängigkeit der Ereignisse, können wir die beiden ersten Terme aus der Wahrscheinlichkeit herausziehen:

$$\begin{aligned} & \stackrel{(i)}{=} (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - p_i) \cdot (1 - q_i)^{d(v)-l} \\ & \cdot \mathbb{P} \left[\left(\bigwedge_{j=d^{V_1}(v)-l+1}^{d(v)} (v_j \in N(X_{<i}^{V_1}) \cap X_i^{V_2}) \right) \mid (v \notin X_{<i}^{V_1} \wedge v \notin N(X_{<i}^{V_2})) \right], \end{aligned}$$

wir wenden auch hier die Multiplikationsformel (vgl. Kapitel 1.3.1) an:

$$\begin{aligned} & \stackrel{(i)}{=} (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - p_i) \cdot (1 - q_i)^{d(v)-l} \\ & \cdot \prod_{j=d^{V_1}(v)-l+1}^{d(v)} \mathbb{P} \left[(v_j \in N(X_{<i}^{V_1}) \cap X_i^{V_2}) \mid \left(\bigwedge_{r=d^{V_1}(v)-l+1}^{j-1} (v_r \in N(X_{<i}^{V_1}) \cap X_i^{V_2}) \right) \right. \\ & \left. \wedge (v \notin X_{<i}^{V_1} \wedge v \notin N(X_{<i}^{V_2})) \right], \end{aligned}$$

erneut kann die Unabhängigkeit der Wahl der v_i ausgenutzt werden:

$$\begin{aligned} & \stackrel{(i)}{=} (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - p_i) \cdot (1 - q_i)^{d(v)-l} \cdot q_i^l \\ & \cdot \prod_{j=d^{V_1}(v)-l+1}^{d(v)} \mathbb{P} \left[(v_j \in N(X_{<i}^{V_1})) \mid \left(\bigwedge_{r=d^{V_1}(v)-l+1}^{j-1} v_r \in N(X_{<i}^{V_1}) \right) \wedge (v \notin X_{<i}^{V_1} \wedge v \notin N(X_{<i}^{V_2})) \right], \end{aligned}$$

durch die Tailenweitenbedingung ist auch hier Unabhängigkeit gegeben:

$$\stackrel{(g)}{=} (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - p_i) \cdot (1 - q_i)^{(d(v)-l)} \cdot q_i^l \\ \cdot \prod_{j=d(v)-l+1}^{d(v)} \mathbb{P} \left[(v_j \in N(X_{<i}^{V_1})) \mid (v \notin X_{<i}^{V_1} \wedge v \notin N(X_{<i}^{V_2})) \right],$$

weiter gilt

$$\stackrel{(g)}{=} (1 - p_{<i})(1 - q_{<i})^{d(v)}(1 - p_i)(1 - q_i)^{(d(v)-l)} q_i^l \prod_{j=d(v)-l+1}^{d(v)} \left(1 - (1 - p_{<i})^{(d(v_j)-1)} \right)$$

und letztlich schätzen wir die Valenzen der $v_j \in V_2$ nach oben mit Δ^{V_2} ab.

$$\leq (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - p_i) \cdot (1 - q_i)^{(d(v)-l)} \cdot q_i^l \cdot \left(1 - (1 - p_{<i})^{(\Delta^{V_2}-1)} \right)^l.$$

Beziehen wir alle möglichen Mächtigkeiten von U und alle Wahlmöglichkeiten, welche der $d(v)$ Nachbarn von v in U liegen und welche nicht, mit ein, so ergibt sich allgemein für alle $v \in V$:

$$\mathbb{P}[v \in Z_i^{V_1}] \\ \leq (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - p_i) \cdot \sum_{l=1}^{d(v)} \binom{d(v)}{l} \cdot (1 - q_i)^{(d(v)-l)} \cdot q_i^l \cdot \left(1 - (1 - p_{<i})^{(\Delta^{V_2}-1)} \right)^l \\ = (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - p_i) \cdot \left(\left((1 - q_i) + q_i \left(1 - (1 - p_{<i})^{(\Delta^{V_2}-1)} \right) \right)^{d(v)} - (1 - q_i)^{d(v)} \right) \\ = (1 - p_{<i}) \cdot (1 - q_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - p_i) \cdot \left(\left(1 - q_i (1 - p_{<i})^{(\Delta^{V_2}-1)} \right)^{d(v)} - (1 - q_i)^{d(v)} \right)$$

und symmetrisch dazu

$$\mathbb{P}[v \in Z_i^{V_2}] \leq (1 - q_{<i}) \cdot (1 - p_{<i})^{d(v)} \cdot (1 - q_i) \cdot \left(\left(1 - p_i (1 - q_{<i})^{(\Delta^{V_1}-1)} \right)^{d(v)} - (1 - p_i)^{d(v)} \right).$$

Letztlich gelten

$$\mathbb{P}[v \in R^{V_1}] = \prod_{i=1}^k (1 - p_i)(1 - q_i)^{d(v)}$$

und

$$\mathbb{P}[v \in R^{V_2}] = \prod_{i=1}^k (1 - q_i)(1 - p_i)^{d(v)}$$

für alle $v \in V$.

Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\gamma(G) &\leq \mathbb{E}[|D|] \\
&= \mathbb{E}[|R^{V_1}|] + \mathbb{E}[|R^{V_2}|] + \sum_{i=1}^k \left(\mathbb{E}[|Y_i^{V_1}|] + \mathbb{E}[|Y_i^{V_2}|] \right) + \sum_{i=1}^k \left(\mathbb{E}[|Z_i^{V_1}|] + \mathbb{E}[|Z_i^{V_2}|] \right) \\
&\leq \sum_{v \in V_1} \left(\prod_{i=1}^k (1-p_i)(1-q_i)^{d(v)} + \sum_{i=1}^k \left[p_i \cdot (1-p_{<i}) \cdot (1-q_{<i})^{d(v)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1-p_{<i}) \cdot (1-q_{<i})^{d(v)} \cdot (1-p_i) \cdot \left((1-q_i(1-p_{<i})^{(\Delta^{V_2}-1)})^{d(v)} - (1-q_i)^{d(v)} \right) \right] \right) \\
&+ \sum_{v \in V_2} \left(\prod_{i=1}^k (1-q_i)(1-p_i)^{d(v)} + \sum_{i=1}^k \left[q_i \cdot (1-q_{<i}) \cdot (1-p_{<i})^{d(v)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1-q_{<i}) \cdot (1-p_{<i})^{d(v)} \cdot (1-q_i) \cdot \left((1-p_i(1-q_{<i})^{(\Delta^{V_1}-1)})^{d(v)} - (1-p_i)^{d(v)} \right) \right] \right),
\end{aligned}$$

und der Beweis ist vollständig. \square

Für r - s -reguläre Graphen wollen wir dieses Ergebnis abschließend numerisch darstellen. Wir wählen dabei den Ansatz über zwei Runden und stellen die gewonnene Schranke dem Resultat aus Kapitel 4.1 gegenüber. Als Vergleichsschranken werden die Ergebnisse von ALON und SPENCER (kurz AS) für allgemeine Graphen und von HARANT und PRUCHNEWSKI (kurz HP, vgl. hierzu Kapitel 1.4) für bipartite Graphen angegeben.

		allgemeine Graphen		bipartite Graphen	
r	s	AS	2 Runden	HP	2 Runden
1	2	0,84657359	0,650898	0,333333	0,333333
1	3		0,573343	0,25	0,25
1	5		0,464088	0,166666	0,166666
1	10		0,323649	0,090909	0,090909
2	2	0,69953743	0,596325	0,5	0,426062
2	3		0,541691	0,4	0,37984
2	5		0,457228	0,285714	0,285714
2	10		0,337451	0,166666	0,166666
3	3	0,59657359	0,499870	0,5	0,367340
3	5		0,432477	0,375	0,320023
3	10		0,333735	0,230769	0,230769
5	5	0,465293245	0,385762	0,417649	0,292534
5	10		0,311052	0,319350	0,244798
10	10	0,30889957	0,256895	0,285899	0,203927

Tabelle 4.2.1: Numerische Ergebnisse

Insbesondere stellt sich heraus, dass im Falle $r = s$ – also für reguläre und bipartite Graphen – bereits viel kleinere Schranken erreicht werden können als mit dem Vorgehen in Kapitel 4.1 für beliebige r -reguläre Graphen.

5 Zusammenfassung

Grundlage für die Resultate dieser Arbeit bildete immer wieder die probabilistische Methode. Mit welchen Ansätzen wir diese bearbeitet haben, war in den einzelnen Kapiteln hingegen sehr unterschiedlich.

In Kapitel 2 haben wir versucht, diejenigen Verbesserungen zu bestimmen, die bei dem in [21] eingeführten Abstiegsverfahren erzielt werden. Unter verschiedenen Vorgaben konnten wir für reguläre Graphen neue Ergebnisse erzielen, die jedoch teilweise (z.B. bei der Verwendung von Schranken für die Mächtigkeit der Mengen I_5) im Vergleich mit bereits bekannten Schranken schlechtere Ergebnisse lieferten.

Die Ergebnisse für reguläre Graphen dienten in erster Linie als Vorbereitung für das Übertragen des Konzeptes auf allgemeine Graphen und lieferten für große vorgegebene Mengen I_5 auch gute neue Schranken.

Ein verallgemeinerter Ansatz für die Bestimmung der Verbesserung von Schranken für $\gamma(G)$ durch Abstiegsverfahren wurde in Kapitel 3 entwickelt. Der dort beschriebene allgemeine Algorithmus kann für jede multilineare Funktion, die eine obere Schranke für die Dominanzzahl bildet und die Eigenschaft \mathcal{P}_b erfüllt, angewandt werden und liefert in jedem Fall neue, verbesserte Ergebnisse gegenüber der Ausgangsschranke. Für eine gewisse Funktion wurden der Fall $b = 1$ explizit ausgeführt und numerische Ergebnisse vorgestellt.

Für bipartite Graphen konnten mehrere Resultate gezeigt werden, die die Ergebnisse für diese Graphenklasse gegenüber allgemeinen Graphen weiter verbessern.

Die Flexibilität dieses Ansatzes, durch die Möglichkeit mit verschiedenen multilinearen Funktionen zu arbeiten, bietet darüber hinaus weitere Forschungsansätze. So ließe sich zusätzlich untersuchen, ob für eine „bessere“ Ausgangsschranke ähnliche Verbesserungen erzielt werden können, oder ob sogar eine „verbesserte“ größere Ausgangsschranke das stärkere Gesamtergebnis liefert.

Abschließend stellten wir einen ganz anderen neuen Ansatz vor. Durch die Verallgemeinerung der Methode von ALON und SPENCER konnten direkt bessere Schranken für die Dominanzzahl erreicht werden. Dabei bleibt die Zahl der Argumente in der entstehenden multilinearen Funktion beschränkt.

Beim Schritt zu bipartiten Graphen verdoppelt sie sich und bringt dadurch noch mehr Variabilität und liefert somit weitere Verbesserungen für diese Graphenklasse.

Das Hauptziel dieser Arbeit, neue Schranken für die Dominanzzahl in bipartiten Graphen zu finden, haben wir in einigen konkreten Ergebnissen über Abstiegsverfahren und durch einen neuen probabilistischen Ansatz erreicht. Die Ergebnisse zu Dominanz in allgemeinen (und regulären) Graphen stellen zudem eine Erweiterung der bereits vorhandenen, ausführlichen Diskussion dar.

Symbolverzeichnis

$\alpha(G)$	Unabhängigkeitszahl
Δ	Maximalvalenz in einem Graphen
δ	Minimalvalenz in einem Graphen
$\gamma(G)$	Dominanzzahl
\mathbb{E}	Erwartungswert
\mathbb{P}	Wahrscheinlichkeitsmaß
\mathcal{P}_b	Eigenschaft in Kapitel 3
$A(G)$	Algorithmus in Kapitel 2
A_b	Algorithmus in Kapitel 3
B_1	Schranke für $\gamma(G)$, vgl. S.17
B_2	Schranke für $\gamma(G)$, vgl. S.24
B_3	Schranke für $\gamma(G)$, vgl. S.47
B_4	Schranke für $\gamma(G)$, vgl. S.56
B_U	Schranke für $\alpha(G)$, vgl. S.23
C^n	n-dimensionaler Einheitswürfel
D	eine dominierende Menge
$d_G(v), d(v)$	Valenz eines Knoten v in G
$dist_G(v_i, v_j)$	Abstand der Knoten v_i und v_j im Graphen G
E	Kantenmenge

f_{p_i}	Ableitung der Funktion $f(p_1, \dots, p_n)$ nach der i -ten Koordinate
G	Graph
g	Tailenweite eines Graphen (engl. girth)
G_s	s -te Graphenpotenz
I	eine unabhängige Menge (engl. independent set)
i, j, k	natürliche Zahlen
M	Menge der Knoten mit Wert 1 nach Algorithmus $A_b(p)$ in Kapitel 3
$N(v)$	Nachbarschaft eines Knoten v in G
$N_s(v)$	s -te Nachbarschaft eines Knoten v in G
$O(v_i, t), Q(v_i)$	Operationen in Kapitel 2.1 und 2.2
p_i, q_i	Wahrscheinlichkeiten
P_j	Weg der Länge j
r	Regularitätsgrad
V	Knotenmenge
V_1, V_2	Partitionsklassen bipartiter Graphen
v_i, v	Knoten
$ E = m$	Anzahl Kanten, Größe des Graphen
$ V = n$	Anzahl Knotenpunkte, Ordnung des Graphen
AP	Abkürzung für die Schranke von ARNAUTOV und PAYAN, Theorem 1.4.3, S.11
AS	Abkürzung für die Schranke von ALON und SPENCER, Theorem 1.3.2, S.10
CR	Abkürzung für die Schranke von CARO und RODITTY, Theorem 1.4.4, S.11

- HP Abkürzung für die Schranke von HARANT und PRUCHNEWSKI,
Theorem 1.4.6, S.12
- HR Abkürzung für die Schranke von HARANT und RAUTENBACH,
Theorem 1.4.7, S.12

Literaturverzeichnis

- [1] N.Alon: *Transversal numbers of Uniform Hypergraphs*, Graphs and Combinatorics **6**, 1-4, 1990.
- [2] N.Alon, J.Spencer: *The Probabilistic Method*, 3. Edition, John Wiley and Sons, Inc., 2008.
- [3] V.I.Arnautov: *Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of the vertices*, (Russian), Prikl. Mat. Programm. **11**, 3-8, 1974.
- [4] S.Artmann: *Über die Dominanzzahl regulärer Graphen unter Nutzung multilinearer Funktionen*, Diplomarbeit an der TU Ilmenau, 2007.
- [5] S.Artmann, F.Göring, J.Harant, D.Rautenbach und I.Schiermeyer: *Random procedures for dominating sets in graphs*, eingereicht bei The Electronic Journal of Combinatorics (E-JC 08239), Preprint an der TU Ilmenau (08-10, 14).
- [6] S.Artmann, J.Harant: *Random Procedures for dominating sets in bipartite graphs*, akzeptiert in Discussiones Mathematicae Graph Theory, **30(2)**, 2010.
- [7] S.Artmann, A. Pruchnewski: *Constructing a Dominating Set for bipartite graphs in several Rounds*, Preprint an der TU Ilmenau (09-37), 2009.
- [8] C.Berge: *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.
Englische Ausgabe: *The Theory of Graphs and its applications*, Wiley, New York, 1961.
- [9] A.A.Bertossi: *Dominating sets for split and bipartite graphs*, Information Processing Letters **19**, 37-40, 1984.
- [10] I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew, G.Musiol, H.Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, 5. überarbeitete und erweiterte Auflage, 2001.
- [11] Y.Caro: *New results on the independence number*, Technical Report, Tel Aviv University, 1979.
- [12] Y.Caro, Y.Roditty: *On the vertex-independence number and star decomposition of graphs*, Ars Combin. **20**, 167-180, 1985.
- [13] Y.Caro, Y.Roditty: *A note on the k -domination number of a graph*, The International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **13**, 205-206, 1990.

-
- [14] G.J.Chang, G.L.Nemhauser: *The k -domination and k -stability problems in sun-free chordal graphs*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods **5**, 332-345, 1984.
- [15] R.Diestel: *Graphentheorie*, Springer, 3. Auflage, 2006.
- [16] P.Erdős, J.Spencer: *Probabilistic Methods in Combinatorics*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.
- [17] M.R. Garey, D.S.Johnson: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.
- [18] T.Gerlach, J.Harant: *A Note on Domination in Bipartite Graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory **22**, 229-231, 2002.
- [19] F.Göring, J.Harant: *On domination in graphs*, Discuss. Math., Graph Theory **25**, 7-12, 2005.
- [20] J.Harant, A.Pruchnewski: *A Note on the Domination Number of a Bipartite Graph*, Annals of Combinatorics **5**, 175-178, 2001.
- [21] J.Harant, A.Pruchnewski, M. Voigt: *On Dominating Sets and Independent Sets of Graphs*, Combinatorics, Probability and Computing **8**, 547-553, 1999.
- [22] J.Harant, D.Rautenbach: *Domination in bipartite graphs*, Discrete Mathematics **309**, 113-122, 2009.
- [23] T.W.Haynes, S.T.Hedetniemi, P.J.Slater: *Fundamentals of Domination in Graphs*, Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Marcel Dekker Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1998.
- [24] T.W.Haynes, S.T.Hedetniemi, P.J.Slater: *Domination in graphs advanced topics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.
- [25] M.A.Henning, C.Löwenstein, D.Rautenbach: *Remarks about disjoint dominating sets*, Discrete Mathematics **309**, 6451-6458, 2009.
- [26] C.Hesse: *Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1. Auflage, Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, Wiesbaden, 2003.
- [27] H.Heuser: *Lehrbuch der Mathematik, Teil 1*, 14. Auflage, B.G. Teubner GmbH, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2001.
- [28] A.V.Kostochka, B.Y.Stodolsky: *On domination in connected cubic graphs*, Discrete Mathematics **304** No. 1-3, 45-50, 2005.
- [29] H.Lin, L.Sun: *On Domination Number of 4-regular Graphs*, Czech. Math. J. **54**, No.4, 889-898, 2004.
- [30] W.McCuaig, B.Shepherd: *Domination in graphs with minimum degree two*, J. Graph Theory **13**, 749-762, 1989.
- [31] O.Ore: *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **38**, 206-212, 1962.

-
- [32] C.Payan: *Sur le nombre d'absorption d'un graphe simple*, (French), Cah. Cent. Étud. Rech. Opér. **17**, 307-317, 1975.
- [33] A.Pruchnewski: *Das graphentheoretische Dominanzproblem als stetiges Optimierungsproblem*, Dissertation, TU Ilmenau, 2004.
- [34] A.Poghosyan, V.Zverovich: *On Roman, Global and Restrained Domination in Graphs*, submitted, arXiv:0901.2862v2 [math.CO], 2009.
- [35] D.Rautenbach: *A Note on domination, girth and minimum degree*, to appear in Discrete Math.
- [36] B.Reed: *Paths, Stars and the Number Three*, Combinatorics, Probability and Computing **5**, 277-295, 1996.
- [37] J.Thierfelder, private Mitteilung, TU Ilmenau, 2009.
- [38] V.K.Wei: *A lower bound on the stability number of a simple graph*, Bell Laboratories Technical Memorandum 81-11217-9, Murray Hill, NJ, 1981.