

Schorcht, Hans-Jürgen:

Berechnung und Gestaltung von Flach- und Flachformfedern

Publikation entstand im Rahmen der Veranstaltung:
Seminar Kaltgeformte Federn - Vortrag 7. Technische Akademie
Esslingen. Ostfildern-Nellingen, 25. und 26. September 2006 -
Leitung: Prof. Dr.-Ing. habil. Hans-Jürgen Schorcht

Berechnung und Gestaltung von Flach- und Flachformfedern

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Hans-Jürgen Schorcht, Technische Universität Ilmenau

1 Einleitung

Flach- und Flachformfedern gehören zu den ältesten Federanwendungen. Anfangs hauptsächlich in Waffen eingesetzt, sind sie heute in Produkten vieler Industriezweige zu unverzichtbaren Konstruktionselementen geworden [1]. Hauptanwendungsgebiete sind der Maschinenbau, der Fahrzeugbau sowie die Feinwerk- und Elektrotechnik.

Zu allen Zeiten wurde vor allem ihre Eigenschaft genutzt, durch Aufnahme bzw. Übertragung von Kräften unter relativ großer Verformung mechanische Arbeit als potentielle Energie speichern und diese zu einem frei wählbaren Zeitpunkt wieder abgeben zu können. Die Eigenschaft zum Speichern und Wandeln von Energie ermöglicht ihre Verwendung für den Energie-, Kraft- und Wegausgleich. Da sie sowohl elastisch wie auch massebehaftet sind und mit bewegten, massebehafteten Bauteilen zusammenwirken (Federanordnungen), verkörpern sie schwingfähige Systeme. Dies muss beim Federeinsatz in Maschinen und Geräten berücksichtigt werden.

Maßgebliche Voraussetzung für den außerordentlich breiten Einsatz von Flach- und Flachformfedern in den genannten Anwendungsgebieten waren:

- Entwicklung geeigneter Werkstoffe, die außer der für Federn wichtigen hohen Festigkeit und Verformbarkeit bei Bedarf auch andere technische Eigenschaften besitzen (z.B. Wärmebeständigkeit, definierte Wärmedehnung, stromleitend, antimagnetisch usw.);
- Grundlagen zur Berechnung der Abmessungen von Federn, die den Forderungen vorgegebener technischer Aufgaben gerecht werden;
- Entwicklung von Fertigungsverfahren und Fertigungseinrichtungen zur effektiven und genauigkeitserfüllenden Herstellung;
- Messverfahren und -einrichtungen zum Ermitteln von Federkennwerten und zum Überprüfen der Federfunktion während bzw. nach Abschluss der Fertigung, aber auch bei der experimentellen Erprobung im Produkt.

Lange Zeit erfolgte der Entwurf von Baugruppen, in denen Federn zum Einsatz kommen, mit relativ hohem experimentellen Aufwand. Auch heute ist das teilweise noch der Fall. Die Ursachen dafür sind vielschichtig. Zum einen sind dafür konstruktionsbedingte Gründe verantwortlich, beispielsweise die zu späte Einbeziehung der Federn in den Baugruppenentwurf. Zum anderen werden die realen Einsatzbedingungen durch die verfügbaren Berechnungsverfahren oft nur unzureichend erfasst. Das gilt vor allem für dynamisch beanspruchte Federanwendungen, bei denen die Federn zumeist immer noch nach statischen Berechnungsvorschriften ausgelegt werden. Ebenso sind für bestimmte Federarten die Berechnungsverfahren zu kompliziert oder bisher noch völlig offen. Schließlich sind auch nicht alle vorhandenen Berechnungsmöglichkeiten in ausreichendem Maße bekannt. Im folgenden soll deshalb ein Überblick über die Berechnung von Flach- und Flachformfedern gegeben werden. Dabei werden, ausgehend von einer Klassifizierung der Anwendungsfälle und einigen Beispielen, sowohl die klassischen Berechnungsverfahren für Flach- und Flachformfedern als auch neuere Berechnungsgrundlagen behandelt. Die Finite-Elemente-Methode als Berechnungsmöglichkeit für Federn und Federanordnungen wird erwähnt.

2 Klassifizierung von Flach- und Flachformfederanwendungen, Beispiele

Die Vielfalt der Einsatzfälle und dabei verwendeter Flachfederformen ist kaum übersehbar. Sie reichen von einfachen Blattfedern bis hin zu komplizierten, an die Geometrie der sie umgebenden Bauteile genau angepassten Flachformfedern und Flachformfedersystemen. Trotz dieser Vielfalt lässt sich sowohl hinsichtlich Funktion bzw. Verwendungszweck als auch Federform und Feder-

anordnung eine Klassifizierung finden. Sie trägt zur Überschaubarkeit bei und erleichtert die Auswahl geeigneter Berechnungsverfahren. Hinsichtlich Funktion und Verwendungszweck sind Federanwendungen zu unterscheiden in [2]:

- **Speicherelemente**, deren Hauptaufgabe in der Energiespeicherung und -umformung besteht (z.B. Antriebsfedern in Uhren, Laufwerken, Waffen);
- **Messelemente**, bei denen der für viele Federn charakteristische lineare Zusammenhang zwischen Kraft und Weg ausgenutzt wird ("Federwaage", Kraft- und Momentensensoren);
- **Schwingungs- und Dämpfungselemente**, bei denen die Schwingungseigenschaft ebenso genutzt wird wie die Eigenschaft, Stöße abzufedern sowie Schwingungen durch innere Reibung oder in Verbindung mit Dämpfungsgliedern relativ schnell zum Abklingen zu bringen (Frequenzmesser, Unruhfeder, Kfz-Tragfedern);
- **Ruhelemente** mit Aufgaben der Kraftverteilung, des Kraft- und Wegausgleichs, der Erzeugung von Vorspannkraften und der Realisierung von Rückstellbewegungen (Spielausgleich, Kontaktgabe, Dichtungen, Sicherungselemente);
- **Lagerelemente**, bei denen die Biege- oder Verdrehelastizität des Werkstoffs für Bewegungen innerhalb eines begrenzten Bereiches ausgenutzt werden (Feder- und Kreuzfedergelenk, Spannbandlagerung).

Hinsichtlich der Federform unterscheidet man in **gerade, gekrümmte, gewundene und scheibenförmige Federn**. Da die Krafteinleitung bei diesen Federn überwiegend so erfolgt, dass im Federquerschnitt hauptsächlich Biegebeanspruchungen entstehen, spricht man in diesem Zusammenhang von **Biegefedern**. Eine Ausnahme davon bilden beispielsweise Spannbandlagerungen von Zeigern in Messinstrumenten. Sie bestehen aus Flachfedern mit Rechteckquerschnitt, die auf Torsion beansprucht werden.

Gerade Biegefedern aus Bandmaterial, auch **Biegestabfedern** oder **Blattfedern** genannt, können **konstanten oder veränderlichen Stabquerschnitt** aufweisen. Für die Gestaltung der Krafteinleitungsstelle und die Aufnahme der Feder gibt es zahlreiche Variationsmöglichkeiten. Blattfedern können

- **einseitig eingespannt** sein (**Bilder 1, 2, 4**),
- **beidseitig abgestützt bzw. eingespannt** werden (**Bilder 5, 6**) oder
- **einseitig eingespannt und elastisch bzw. starr unterstützt aufgenommen** werden (**Bilder 7 bis 9**).

Als **elastisch unterstützte Blattfederanordnungen** sind meist Kontaktsysteme elektrischer Schalteinrichtungen, beispielsweise in Relais, ausgeführt (**Bild 14**). Die Kontaktblattfedern können auf diese Weise vorgespannt eingebaut werden. Dadurch verkürzen sich die Schaltwege, und die erforderlichen Kontaktkräfte können ohne große Verformung der abgestützten Kontaktblattfeder erzeugt werden. Über die Stützfeder lassen sich außerdem die Lage federernd gelagerter Kontakte sowie die Größe der Vorspann- und Kontaktkräfte beeinflussen.

Starr unterstützte Anordnungen ergeben sich meist als Folge der Gestaltung von Blattfederanspannungen, -befestigungen und Krafteinleitungsstellen (**Bild 13**).

Hinsichtlich der Lage der Krafteinleitungsstelle gibt es keinerlei Einschränkungen. Sie wird durch die jeweiligen konstruktiven Bedingungen bestimmt.

Bei **gekrümmten Biegefedern** unterscheidet man **gekrümmte Blattfedern** und **Flachformfedern**. Dabei stellen **gekrümmte Blattfedern** einen Spezialfall dar. Die Federn sind aus Platzgründen aus Geraden- und Kreisbogenteilen zusammengesetzt. Ihre Berechnung lehnt sich sehr stark an die gerader Blattfedern an (**Bilder 11, 15**). Für **Flach- bzw. Bandformfedern** sind beliebige, der jeweiligen Aufgabe angepasste Federformen möglich (**Bild 16**). Die Berechnung ist meist problematisch. Es sind keine allgemeingültigen Berechnungsmodelle bekannt [3][4]. Nahezu immer

werden die Abmessungen durch grobe Näherungen und im Experiment festgelegt. Oft ist eine Berechnung auch nicht notwendig, weil untergeordnete Aufgaben mit niedriger Beanspruchung zu erfüllen sind. Bedeutsam sind in jedem Falle die Gestaltungsrichtlinien, wobei insbesondere die Mindestbiegeradien einzuhalten sind.

Unter **gewundenen Blattfedern** werden **Spiralfedern** mit und ohne Windungszwischenraum sowie **Rollfedern** zusammengefasst. Innerhalb dieser Federarten sind noch Variationen hinsichtlich Einspannung der Federenden und Anordnung der Federwickel möglich. Auf die Behandlung dieser Federarten wird im weiteren ebenso verzichtet wie auf scheibenförmige **Flachfedern**, zu denen **Tellerfedern** und **Federscheiben** gehören. Dies erfolgt in gesonderten Vorträgen[16][17].

Flach- und Flachformfedern können jeweils als **Einzelfeder** oder in **Federkombination** zum Einsatz kommen. Daraus erwachsen Konsequenzen für den jeweiligen Entwurf. Insbesondere muss das bei der Berechnung und der Toleranzfestlegung beachtet werden.

3 Aufgaben, Bedingungen und Vorgehensweise beim Federentwurf

3.1 Wesentliche Aufgaben beim Federentwurf

Beim Federentwurf sind eine ganze Reihe von Entscheidungen zu treffen. Sie beziehen sich auf Festlegungen zur Federart, zur Federform und zu den Abmessungen, zur Federbefestigung, zum Federwerkstoff und zu den Fertigungs- und Prüfmöglichkeiten. Entscheidungshilfen sind neben Katalogunterlagen der Hersteller vor allem Berechnungen zum Verformungsverhalten und zur Tragfähigkeit (Lebensdauer) der Federn. Grundlage dafür bilden die jeweils geltenden **Verformungs- und Spannungsbeziehungen**. Diese beiden, jeweils federabhängigen Bestimmungsgleichungen müssen die zahlreichen Forderungen an die Feder und die bestehenden Einflüsse berücksichtigen. Da aber mehr als zwei Federparameter festzulegen sind, ist beim Federentwurf eine iterative Vorgehensweise erforderlich.

Für die entworfene Feder muss stets ein **Funktions- und Festigkeitsnachweis** geführt werden. Beim **Funktionsnachweis** sind die Einhaltung der geforderten Federrate, der Kräfte und Wege innerhalb vorgegebener Toleranzen, das Schwingverhalten sowie weitere an die Feder gestellte Forderungen zu überprüfen. Aufgabe des **Festigkeitsnachweis** ist es zu klären, ob die zulässige Spannung eingehalten wird. Dies kann in Form eines Spannungs-, Sicherheits-, Tragfähigkeits- oder Lebensdauernachweises erfolgen [1].

Beim **Festlegen der Gestalt** einer Feder sind neben den aus funktionellen Forderungen resultierenden geometrischen Bedingungen vor allem fertigungs- und werkstofftechnische Belange zu berücksichtigen [5], um minimale Kosten zu erreichen. Die Gestaltung von Metallfedern erfordert vor allem Kenntnisse und Erfahrungswerte der Kaltumformung und der Wärmebehandlung.

Von der Federgestalt hängt jedoch nicht nur die Zuverlässigkeit der Federfunktion, sondern die des gesamten Produkts ab, in dem sie zum Einsatz gelangt. Ebenso wird davon in entscheidendem Maße die Wirtschaftlichkeit der Fertigung bestimmt. Bei der Gestaltfestlegung im Rahmen des Federentwurfs ist deshalb immer auch zu prüfen, ob nicht auf bereits vorhandene Lösungen zurückgegriffen werden kann, um Entwicklungs-, Werkzeug- und Fertigungsaufwand zu sparen.

3.2 Belastungs- und Beanspruchungsverläufe, Beanspruchungsgrenzen

Maßgeblich für den Entwurf von Flach- und Flachformfedern sind auch die Betriebsbedingungen. Werden Federn in Baugruppen eingesetzt, in denen dynamische Vorgänge ablaufen, dann muss dies sowohl bei der Wahl der Berechnungsmethode als auch der Festigkeitswerte berücksichtigt werden.

Für die Federberechnung bedeutsam sind daher weg- und zeitabhängige Belastungsverläufe. Die Wegabhängigkeit der Belastung $F = f(s)$ stellt ein wesentliches Funktionsmerkmal der Federn dar.

Ihre grafische Darstellung wird deshalb auch als **Federkennlinie** bezeichnet. Die Zeitabhängigkeit der Belastung $F = f(t)$ hat vor allem Bedeutung für den Festigkeitsnachweis.

Bei zeitabhängigen Belastungen werden **statische und dynamische Grundlastfälle** unterschieden. Diese Belastungen führen zu statischen und dynamischen Beanspruchungen des Federwerkstoffs.

Die Federberechnung berücksichtigt folgende Grundlastfälle des zeitlichen Belastungs- und Beanspruchungsverlaufs (**Bild 17**) [1][2]:

- **Rein statische Beanspruchung.** Sie liegt bei zeitlich konstanter Belastung (stationäre Belastung) der Feder vor.
- **Quasistatische Beanspruchungen.** Das sind zeitlich veränderliche Belastungen, die
 - + durch kleine Hübe s_h (bis 10% der Dauerhubfestigkeit) oder
 - + größere Hübe s_h , aber Schwingspielzahlen $< 10^4$
 verursacht werden (**Bild 17 a**).
- **Rein schwellende, sinusförmige Beanspruchung.** Sie tritt bei vorgespannten Federn auf, die periodischen Belastungsschwankungen ausgesetzt sind. Weiter wird vorausgesetzt, dass Schwingspielzahl $> 10^4$ ist und Hubspannungen auftreten, die mehr als 10% der Dauerhubfestigkeit betragen (**Bild 17 b und d**).
- **Stoßartige Beanspruchungen.** Sie entstehen bei kurzzeitig einwirkenden hohen Belastungen infolge auftretender Geschwindigkeitssprünge (**Bild 17 c**).
- **Wechselbeanspruchung.** Sie werden durch Belastungen mit Richtungsänderung (Vorzeichenwechsel) hervorgerufen.
- **Stochastische Beanspruchung.** Sie entstehen durch veränderliche, nichtperiodische Belastungsschwankungen (**Bild 17 e**). Bei derartig belasteten Federn mit zeitlich veränderlichen Hub- und Mittelspannungen sind bei Lebensdauerberechnungen statistische Analysen der Lastkollektive und Schadensakkumulationshypothesen anzuwenden.

Rein statische Beanspruchungen sind recht selten. Meist liegen Schwellbeanspruchungen verschiedener Form vor, beispielsweise bei Ventildedern in Verbrennungsmotoren. Wechselnde Beanspruchungen treten nur in einigen speziellen Anwendungsfällen auf. Hier sind die Feder und das Bauteil fest miteinander gekoppelt. Stoßartigen Beanspruchungen sind vor allem Waffenfedern und stochastischen Beanspruchungen sind Kfz-Tragfedern ausgesetzt. Bei allen dynamischen Belastungsformen wird bei der analytischen Behandlung von einem sinusförmigen Verlauf ausgegangen (**Bild 18**), um zu verwertbaren Ergebnissen zu kommen.

Damit die zu entwerfende Feder den Funktions- und Festigkeitsnachweis besteht, muss der Konstrukteur bei der Federdimensionierung von Beginn an die jeweiligen Beanspruchungsgrenzen berücksichtigen. Die Beanspruchungsgrenzen sind auf der Grundlage der in einschlägigen Normen und Datenblätter enthaltenen Werkstoffkennwerte festzulegen. Dabei sind die jeweils vorliegenden zeitlichen Belastungsverläufe zu berücksichtigen. Als Beanspruchungsgrenze ist dabei der Werkstoffkennwert anzusehen, bei dessen Überschreiten das Versagen der Feder eingeleitet wird. Wesentliche Versagensgründe sind neben Federbrüchen auch bleibende Verformungen in unzulässiger Größe. Sie führen zur Reduzierung der von der Feder aufzubringenden Kräfte.

Aufgrund der unterschiedlichen Anforderungen an Federn und der zahlreichen Einflüsse auf die Festigkeit der Werkstoffe darf bei der Federdimensionierung der Werkstoffkennwert nicht in voller Höhe ausgenutzt werden. Es wird mit zulässigen Spannungen gerechnet:

$$\sigma_{\text{bzul}} = \sigma_{\text{ertr}} / S. \quad (1)$$

Sie ergibt sich aus dem als ertragbare Spannung σ_{ertr} angesehenen Festigkeitswert und berücksichtigt den Sicherheitsfaktor S . Empfehlungen zur Wahl des Sicherheitsfaktors und der Festigkeits-

werte sind in der Literatur, in Berechnungsunterlagen, Konstruktionskatalogen und Normen niedergelegt [1][6][7][8].

Bei statischen und quasistatischen Beanspruchungen wird für biegebeanspruchte Flach- und Flachformfedern die Federbiegegrenze σ_{bE} (Ermittlung s. DIN 50151) als Festigkeitswert zugrunde gelegt. Da diese oft nicht verfügbar ist, wird mit Streckgrenze R_e gearbeitet. Diese wird im Zugversuch ermittelt (**Bild 19 a**). Federwerkstoffe weisen jedoch im Spannungs-Dehnungs-Schaubild keine ausgeprägte Streckgrenze R_e auf (**Bild 19 b**). Deshalb werden an ihrer Stelle die 0,2%-Proportionalitätsgrenze $R_{p0,2}$, aus Genauigkeitsgründen aber meist die technische Elastizitätsgrenze $R_{p0,01}$ verwendet. Wenn auch diese Werte nicht zur Verfügung stehen, wird die vom Werkstoffhersteller angegebene Bruchgrenze R_m in folgender Weise genutzt:

$$\sigma_{bzul} = 0,7 R_m \quad (S_{vorh} = 1,43) \quad (2)$$

Einflüsse durch das Biegen (Biegeradius, Richtung der letzten Biegung; Walzrichtung), Oberflächenausführung und Einsatztemperatur verändern die genannten Festigkeitswerte. Dies ist bei der Festlegung des endgültigen Sicherheitsfaktors zu beachten.

Bei dynamischen Beanspruchungen sind die Dauerschwingfestigkeit und die Zeitfestigkeit als ertragbare Spannungen maßgebend. Da die meisten dynamisch beanspruchten Federn vorgespannt eingebaut und somit schwellend beansprucht werden (Unterspannung $\sigma_u > 0$), sind die Dauerfestigkeitswerte für Federn aus Dauerfestigkeitsdiagrammen in der Darstellungsform nach *Goodman* als Funktion $\sigma_D = f(\sigma_m)$ abzulesen [9]. Die bekannten dauerfestigkeitsmindernden Faktoren sind auch bei Federn zu beachten. Großen Einfluss hat dabei die Oberflächenbeschaffenheit. Hochfeste Werkstoffe, wie sie bei Federn verwendet werden, sind besonders kerbempfindlich. Um herstellungsbedingte Oberflächenschädigungen und damit verbundene Kerbwirkungen zu reduzieren werden Federn daher meist kugelgestrahlt.

3.3 Prinzipieller Berechnungsgang

Bei statischer und quasistatischer Beanspruchung können die Berechnungen auf der Grundlage der im folgenden Abschnitt angegebenen Beziehungen für die Verformung s und die Spannung σ_b erfolgen. Innerhalb des **Funktionsnachweises** ist dann zu prüfen, ob die vorgegebenen Federwege bzw. -kräfte im Bereich der zugelassenen Toleranzen verwirklicht werden:

$$\begin{aligned} S_{vorh} \leq s \leq S_{erf} & \quad S_{max} \leq S_{grenz} \\ F_{min} \leq F \leq F_{max} & \quad F_{max} \leq F_{grenz} \\ R_{min} \leq R \leq R_{max} & \end{aligned} \quad (3)$$

Die Grenzwerte für den Federweg s_{max} bzw. für die Federkraft F_{max} ergeben sich aus der begrenzten Werkstoffbeanspruchbarkeit. Die Grenzwerte R_{min} und R_{max} für die Federrate R folgen bei zugrunde gelegter linearer Federkennlinie aus:

$$R_{min} = F_{min} / s_{max}; R_{max} = F_{max} / s_{min} \quad (4)$$

Durch den **Spannungsnachweis** wird überprüft, ob die Bedingung

$$\sigma_{bvorh} = \sigma_{bmax} \leq \sigma_{zul} \quad (5)$$

eingehalten ist. Dies kann auch durch den **Sicherheitsvergleich**

$$S_{vorh} \leq S_{erf} \quad (6)$$

geschehen. Die Berechnung der Nennspannungen σ_{bmax} ist nach den im nachfolgenden Abschnitt angegebenen Beziehungen vorzunehmen. Dabei sind federartspezifische Abweichungen und Besonderheiten zu berücksichtigen. Außerdem ist zu beachten, dass diese Spannungsbeziehungen

meist Näherungslösungen darstellen. Sie berücksichtigen nur Hauptbeanspruchungen. Vernachlässigbare Abweichungen ergeben sich daher nur bei kleinen Federwegen.

Bei dynamischen Beanspruchungen führt die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit zu erheblichem Rechenaufwand. Um diesen einzugrenzen, wird beim Federentwurf, insbesondere beim Erstentwurf (Überschlagsrechnung), meist statisch gerechnet. Dadurch entstehen beträchtliche Abweichungen. Sie können Federbrüche nach sich ziehen, wenn die Abweichungen zwischen dynamischer und statischer Spannung zum wesentlichen Überschreiten der zulässigen Spannung führt. Aber auch die Ermittlung der zulässigen Spannung auf der Grundlage der Dauerfestigkeit ist nicht ohne Probleme. Es gelingt meist nicht, alle dynamischen Einflüsse in ihrer tatsächlichen Größe zu berücksichtigen. Grenzen entstehen in dieser Hinsicht durch

- das Fehlen von Festigkeitswerten für die tatsächlich vorliegenden Betriebsbedingungen;
- fehlende Kenntnisse zu dauerfestigkeitsmindernden Einflüssen;
- Idealisierungen bei der Modellbildung.

Um die entstehenden Spannungsabweichungen zwischen Rechnung und Realität in Grenzen zu halten, ist von einer dynamischen Modellbildung auszugehen. Da fast immer schwingungsfähige Feder-Masse-Systeme vorliegen, ist die Bewegungsdifferentialgleichungen und deren Lösung als Grundlage für die Dimensionierung der Feder heranzuziehen. Für die Überprüfung gelten wiederum Funktions- und Spannungsnachweis mit dem Unterschied, dass hierbei dynamische Verhältnisse und Einflüsse zu beachten sind [1][10][11].

4 Berechnungsgrundlagen für statische Einsatzfälle

4.1 Berechnung von Einzelfedern

Unter den Biegestabfedern sind Rechteck-Blattfedern mit konstantem Querschnitt und einseitig eingespanntem Federende weit verbreitet. Daneben kommen aber auch Rechteck-Blattfedern mit beidseitiger Abstützung (Auflager oder feste Einspannung) und Federn mit veränderlicher Querschnittsform zum Einsatz. Wenn räumliche Beschränkungen bestehen, greift man auf gekrümmte Blattfedern zurück.

Die Berechnung der Verlagerung s des Kraftangriffspunktes dieser geraden Biegefedern geschieht auf der Grundlage der Elastizitätstheorie unter folgenden Voraussetzungen und Einschränkungen:

- Die Werkstoffbeanspruchung erfolgt nur im Gültigkeitsbereich des *Hooke'schen* Gesetzes.
- Die Krafteinleitungs- und -ableitungsstellen sind ideale Auflager oder Einspannungen, d.h. die Auflager sind reibungsfrei und die Einspannungen sind starr.
- Die im Querschnitt auftretenden Spannungen sind dem Abstand von der neutralen Faser bzw. Zone direkt proportional.
- Die Querschnitte bleiben unverändert in ihrer Form und eben.
- Die Verlagerung des Kraftangriffspunktes (Durchbiegung des freien Federendes) ist klein, und die Hebelverkürzung ist vernachlässigbar [12][13].

Die Größe der Verformung kann rechnerisch mit Hilfe der Differentialgleichung der elastischen Linie bzw. über die Formänderungsarbeit nach *Castigliano* berechnet werden [1]. Auch grafische Lösungen sind möglich. In Anbetracht des Standes der Rechentechnik sind diese aber kaum noch in Gebrauch.

Die Berechnungsgleichungen zum **Funktions- und Festigkeitsnachweis** sind für die einzelnen Varianten von Blattfedern zusammen mit den jeweiligen Prinzipdarstellungen aus den **Bildern 1 bis 12** zu entnehmen. Diese enthalten zugleich auch Darstellungen von Korrekturfaktoren. Mit diesen werden Näherungslösungen für Blattfedern möglich, die von der rechteckigen und gestreckten

Federform abweichen.

Für die Spannung ist in den Bildern immer die Berechnungsgleichung für den Größtwert

$$\sigma_{\text{bmax}} = \frac{M_{\text{bmax}}}{W_{\text{b}}} \quad (7)$$

angegeben. Er ist für den Vergleich mit der zulässigen Spannung σ_{bzul} maßgebend. Da für einseitig eingespannte, gestreckte und am freien Federende belastete Blattfedern der Größtwert des Biegemomentes M_{bmax} stets an der Einspannstelle auftritt, wird der Werkstoff hier – Stellen mit Querschnittsschwächungen infolge von Bohrungen oder Kerben ausgenommen - am stärksten beansprucht. Zum freien Federende hin nimmt das Biegemoment linear bis zum Wert Null ab. Für Blattfedern mit Rechteckform bedeutet dies, dass dann auch die Biegespannung den Wert Null erreicht. Daher ist außer an der Einspannstelle der Werkstoff nicht ausgelastet. Dieser Nachteil kann durch Einsatz von Federn mit veränderlicher Querschnittsform reduziert oder vermieden werden. Optimal hinsichtlich Werkstoffauslastung sind Federn mit konstantem Biegespannungsverlauf. Dies ist bei Federn mit Dreieckform ($t = \text{konst.}$) bzw. bei Federn mit parabelförmiger Dickenänderung der Fall (**Bilder 2,4 und 20**).

Die Dimensionierung von Blattfedern geht von der jeweiligen technischen Aufgabenstellung aus. Sie enthält Angaben

- zu den geforderten Federwegen (Verformungen),
- zu den auftretenden Belastungen (Kräfte),
- zu den konstruktiven Bedingungen (Einbauraum),
- zur Festigkeit (bei Werkstoffvorgabe bzw. nach Werkstoffauswahl) und
- zu technologischen Bedingungen (Herstellverfahren, Wärmebehandlung u.a.m.).

Mit diesen Angaben sind die jeweils geltenden Verformungs- und Spannungsbeziehungen dann so auszuwerten, dass sich die fehlenden Federgrößen ergeben. So folgt beispielsweise für gestreckte Blattfedern mit Rechteckform unter Verwendung der aus der vorgegebenen Federkennlinie entnehmbaren Kräfte F_1, F_2 und Wege s_1, s_2 nach Umstellung der im Bild 1 enthaltenen Beziehungen die Federdicke aus

$$t = \frac{2l^2(F_2 - F_1)}{3EF_2(s_2 - s_1)} \sigma_{\text{bzul}} \quad (8)$$

Die Berechnung der Federdicke setzt dabei voraus, dass die Federlänge l bekannt ist. Sollte sie nicht aus der Aufgabenstellung entnommen werden können, muss ihr Wert zunächst unter Berücksichtigung der bestehenden konstruktiven Bedingungen angenommen werden. Zur Ermittlung der benötigten zulässigen Biegespannung σ_{bzul} auf der Grundlage der Gleichung (7) sind die für den vorgegebenen bzw. gewählten Werkstoff geltenden Festigkeitswerte aus einschlägigen Werkstoffnormen zu entnehmen.

Die nach Gleichung (8) ermittelte Federdicke t muss noch auf genormte Federbanddicken t_{N} gerundet werden, ehe damit die Federbreite b gemäß

$$b = \frac{6F_2 l}{t_{\text{N}}^2 \sigma_{\text{bmax}}} \quad (9)$$

berechnet werden kann. Auch hier ist noch der Angleich an genormte Abmessungen notwendig, bevor die abschließenden Nachrechnungen zum Funktions- und Festigkeitsnachweises erfolgen können.

In gleicher Weise ist bei den anderen Flachfederarten vorzugehen. Allerdings kompliziert sich die Berechnung durch weitere hinzukommende Federparameter. Daher sind hier im Verlaufe der Berechnung zusätzliche Annahmen zu fehlenden Federgrößen zu treffen. Ohne iterative Vor-

gehensweise ist in diesen Fällen die Federberechnung nicht mehr zu bewältigen.

4.2 Berechnung von Federsystemen

Federsysteme (Federkombinationen) entstehen durch Anordnung mehrerer Federn. Als Federsysteme sind dabei auch gefederte Baugruppen zu verstehen, bei denen sich die Federraten von Bauteilen und Federn nicht um mehrere Größenordnungen unterscheiden. Einfache Federsysteme ergeben sich durch **Parallel- und Reihenschaltung** von Einzelfedern.

Im Falle des Einsatzes von Flach- bzw. Blattfedern sind hauptsächlich **Parallelschaltungen** verbreitet. Beispiele hierfür stellen Kontaktfedersätze elektrischer Schalteinrichtungen (**Bild 14**) oder geschichtete Blattfedern für Fahrzeugfederungen dar.

Reihenschaltungen aus Flach- bzw. Flachformfedern sind dagegen kaum bekannt. Meist werden Blattfedern nur mit anderen Federarten zu Reihenschaltungen kombiniert. Ein Beispiel liefert die Messtechnik mit der sogenannten *Michelson-Feder* (**Bild 21**). Mit dieser Federanordnung kann eine feine Auflösung von Bewegungen erreicht werden. Die Federwege $s_A = s_1$ und $s_B = s_2$ verhalten sich bei Zugrundelegen von $R_1 = \ddot{u} R_2$ aufgrund der geltenden Beziehungen wie

$$s_A / s_B = 1 / (\ddot{u} + 1). \quad (10)$$

Für die **Parallelschaltung** von Federn gelten allgemein folgende Beziehungen:

$$\text{Gesamtfederweg:} \quad s_{\text{ges}} = s_1 = s_2 = \dots s_n \quad (11)$$

$$\text{Gesamtkraft:} \quad F_{\text{ges}} = F_1 + F_2 + \dots F_n = \Sigma F_z \quad (12)$$

$$\text{Gesamtfederrate:} \quad R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + \dots R_n = \Sigma R_z. \quad (13)$$

Für die **Reihenschaltungen** von Federn erhält man:

$$\text{Gesamtfederweg:} \quad s_{\text{ges}} = s_1 + s_2 + \dots s_n = \Sigma s_z \quad (14)$$

$$\text{Gesamtkraft:} \quad F_{\text{ges}} = F_1 = F_2 = \dots F_n \quad (15)$$

$$\text{Gesamtfederrate:} \quad 1/R_{\text{ges}} = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots 1/R_n = \Sigma 1/R_z \quad (16)$$

Bei Kontaktfedersätzen sind zwei grundsätzliche Anordnungen von Interesse: der Öffner- bzw. Ruhekontakt ohne Kontaktabstand und der Schließer- bzw. Arbeitskontakt mit Kontaktabstand. Prinzipbilder und Federkennlinien dieser Kontakte, die oft in einem Federsatz zu sogenannten Umschaltern kombiniert werden, sind mit den dafür geltenden Berechnungsgleichungen im **Bild 22** dargestellt. Dabei wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit auf zusätzlich wirkende Stützfedern (**Bild 13**) verzichtet. Sie werden zur Kennlinienbeeinflussung verwendet und dienen der Erhöhung der Lebensdauer elektrischer Schalteinrichtungen. Berechnungsgrundlagen dafür enthält **Bild 9**.

Der Öffnerkontakt wird vorgespannt montiert (**Bild 22 a**). Zwischen den Kontaktstücken wirkt dann die Kontaktkraft F_K . Zum Öffnen des Kontaktes muss entsprechend dem Verspannungsdiagramm des Kontaktfederpaares (Federkennlinien) eine der beiden Federn mindestens um den Vorspannweg s_K aus dem geschlossenen Zustand herausbewegt werden. Dabei folgt die mitbewegte vorgespannte Feder der Bewegung des Kontaktstückes so lange, bis sie völlig entspannt ist. So muss beispielsweise bei Kraftangriff an der Feder 1 der Kontakt der Feder 2 den Vorspannweg $s_K = s_{2\text{vor}}$ zurücklegen, ehe die Feder 2 spannungsfrei ist. Dabei sinkt die Kontaktkraft F_K mit der Federrate R_2 auf den Wert Null ab. Gleichzeitig steigt die Betätigungskraft F_{Bet} (äußere Kraft) mit der Gesamtfederrate R_{ges} vom Wert Null auf den Wert F_{K0} an. Beim Weiterbewegen der Feder 1 wirkt diese dann als Einzelfeder mit der Federrate R_1 .

Der Schließerkontakt zeigt ebenfalls das charakteristische Verhalten einer Federparallelschaltung. Ehe allerdings dieser Zustand eintritt, muss erst eine der beiden Federn soweit bewegt werden, bis sich der Kontakt schließt. Dabei nimmt die Betätigungskraft F_{Bet} zunächst entsprechend der

Steigung der Kennlinie dieser Feder zu. Erst danach besitzt das Kontaktfederpaar die Gesamtfedersteife R_{ges} . Zum Erreichen einer vorgegebenen Kontaktkraft $F_K = R_2 s_K = R_2 s_2$ muss dann eine Betätigungskraft F_{Bet} aufgebracht werden, die gemäß den Beziehungen im **Bild 22 b** u.a. von der Gesamtfedersteife R_{ges} abhängt.

Die Beziehungen für die Verformung im Bild 22 nehmen zunächst keinen Bezug auf die Gestalt der verwendeten Kontaktfedern. Diese Abhängigkeit ist jedoch bei den Berechnungen berücksichtigen. Dazu muss dann im jeweiligen Anwendungsfall auf die in den Bildern 1 bis 4 angegebenen Verformungsbeziehungen zurückgegriffen werden.

Geschichtete Blattfederanordnungen als weiteres Beispiel für Federparallelschaltungen werden überwiegend im Fahrzeugbau eingesetzt. Da deren Herstellung warmgeformt erfolgt, wird auf die weitere Behandlung verzichtet.

5 Berechnung von Flachfedern für dynamische Betriebsbedingungen

Als wichtiger Anwendungsfall von Blattfedern, bei dem dynamische Betriebsbedingungen zu beachten sind, ist der Einsatz in Federantrieben anzusehen. Dabei sind die Federn stets mit bewegungsfähig angeordneten Bauteilen gekoppelt. Ihre Aufgabe besteht darin, als Energiespeicher und -wandler zu wirken und die zur Bewegungserzeugung erforderliche Energie bereitzustellen [1][10][11]. Für diesen Anwendungsfall versagen herkömmliche statische Berechnungsbeziehungen, da sie keine Möglichkeit bieten, die Trägheitswirkung der getriebenen Bauteile und die Zeitabhängigkeit funktionsbestimmender Größen zu berücksichtigen. Hierzu sind Berechnungsunterlagen notwendig, die auf dem Bewegungsverhalten des Antriebs aufbauen und die dynamischen Wechselwirkungen zwischen Feder und Bauteilen erfassen. Grundlage dafür bilden die Bewegungsdifferentialgleichung des Blattfederantriebs und ihre Lösungen. Dabei ist zumeist auch die Federeigenmasse m_F einzubeziehen, da sie die Eigenfrequenz als eine der dynamisch wirksamen Kenngrößen mitunter beträchtlich beeinflusst.

In Blattfederantrieben kommen sowohl gerade, gekrümmte als auch gewundene Blattfedern zum Einsatz (**Bild 23**). Während mit geraden bzw. gekrümmten Blattfedern massebehaftete Bauteile oft nur über linear bzw. annähernd linear geführte Koppelstellen K angetrieben werden, dienen gewundene Blattfedern der direkten Erzeugung von Drehbewegungen.

Antriebe mit gestreckter Blattfeder (**Bild 23 a**), wie sie häufig in Kontaktblattfederanordnungen anzutreffen sind, besitzen bei Belastung durch eine konstante Masse und konstante Kräfte eine lineare Bewegungsdifferentialgleichung. Sie gehorchen damit dem Bewegungsgesetz

$$s(t) = s_{A1B} (1 - \cos \omega_0 t). \quad (17)$$

Es leitet sich aus der Integration der Bewegungsdifferentialgleichung unter Vorgabe der Anfangsbedingungen $s(t=0) = s_{A1B}$; $v(t=0) = 0$ ab und berücksichtigt die Eigenkreisfrequenz ω_0 der Grundwelle. Die Eigenfrequenz berechnet sich dabei aus

$$\omega_0 = \lambda^2 \sqrt{\frac{R_{1B}}{3m_F}} = \frac{\lambda^2 t}{2l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}. \quad (18)$$

Sie hängt vom Eigenwert λ , vom Elastizitätsmodul E und von der Dichte ρ des Werkstoffs sowie von der Dicke t und der Länge l der Feder ab. Die Breite b geht nicht explizit ein.

Im Eigenwert λ kann man unterschiedliche Modellfälle zur Einbeziehung der Federeigenmasse m_F berücksichtigen:

- Modell der frei schwingenden massebehafteten Biegefeder mit der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y_F}{\partial t^2} = v_{wB}^2 \frac{\partial^4 y_F}{\partial x_F^4} \quad (19)$$

und der transzendenten Eigenwertgleichung

$$1 + \frac{1}{\cos \lambda_0 \cosh \lambda_0} - \kappa_m \lambda_0 (\tan \lambda_0 - \tanh \lambda_0) = 0. \quad (20)$$

Die Eigenwertgleichung berücksichtigt in Gestalt des Masseverhältnisses $\kappa_m = m_A / m_F$ nur die Trägheitsbelastung durch eine konstante Masse m_A .

Im Faktor

$$v_{wB} = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}} \quad (21)$$

A - Querschnittsfläche I - Flächenträgheitsmoment

wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wanderwellen in Blattfedern erfasst.

- Modell der masselosen Feder mit

$$\lambda^2 = \sqrt{\frac{3}{\kappa_m}}. \quad (22)$$

Die Dimensionierung von Antrieben mit gerader Blattfeder geht von der Bewegungsgleichung (17) aus. In ihr sind die Bewegungsgrößen s und t durch die Bewegungsforderungen s_B und t_B zu ersetzen. Damit ergibt sich die Dimensionierungsgrundgleichung

$$s_B = s_{A1B} (1 - \cos \omega_0 t_B). \quad (23)$$

Die Bewegungsforderungen müssen aus der antriebstechnischen Aufgabenstellung entnommen werden. Diese folgt aus einer übergeordneten technischen Aufgabe. Sie enthält außerdem noch Belastungsforderungen (anzutreibende Masse, statische Gegenkraft), konstruktive Forderungen (Einbauraum u.ä.), Festigkeitsforderungen und technologische Forderungen.

Die Dimensionierungsgrundgleichung lässt sich in eine normierte Form

$$1 - k_{1B} p = \cos p \quad (24)$$

überführen. Sie erfasst unter Berücksichtigung von Gleichung (18) mit

$$p = \omega_0 t_B = \lambda^2 t_B \sqrt{\frac{R_{1B}}{3m_F}} = \frac{\lambda^2 t_B}{2l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}} \quad (25)$$

und

$$s_{A1B} = \frac{2}{3} \frac{l^2}{E t} \sigma_{bA} \quad (26)$$

in

$$k_{1B} = \frac{3\sqrt{3E\rho}}{\lambda_0^2 \sigma_{bA}} \frac{s_B}{t_B} \quad (27)$$

den Zusammenhang zwischen Bewegungs- und Belastungsgrößen sowie Werkstoffdaten (Richtwert $\sigma_{bA} = 0,8 \sigma_{bE}$).

Die Kenntnis des Wertes von k_{1B} ist erforderlich, wenn man die transzendente Gleichung (24) auf grafischem Wege (**Bild 24**) oder mit Hilfe numerischer Verfahren lösen will. Da aber die

Aufgabenstellung nur über die Größen s_B , t_B , ρ , E , σ_{bA} Auskunft gibt, muss zur Berechnung von k_{1B} zunächst das Massenverhältnis κ_m als Schätzwert angenommen werden, um den benötigten Eigenwert λ_0 bzw. λ ermitteln zu können. Erst danach lassen sich dann der Lösungswert p der Gleichung (24) als Arbeitspunkt des Antriebs sowie die Federgrößen b , t und - soweit nicht bereits in den konstruktiven Forderungen vorgegeben - auch l bestimmen.

Bei der Wahl des Massenverhältnisses κ_m muss man jedoch berücksichtigen, dass die Neigung k_{1B} der Geraden $1 - k_{1B}p$ nicht beliebig groß werden kann. Wie die grafische Lösung der Gleichung (24) im Bild 24 zeigt, erreicht k_{1B} seinen Grenzwert, wenn die Gerade und die cos-Funktion einander tangieren. Das ist für Werte $k_{1B \max} = 0,7246$ und $p = 2,33$ der Fall. Sie bestimmen das Maximum der Lösungsfunktion $k_{1B}(p)$ (**Bild 25**).

Unter Berücksichtigung bisheriger Darlegungen sind bei der Lösung der Gleichung (23) bzw. (24) und der Bestimmung der Federabmessungen folgende Schritte zu durchlaufen:

1. Wahl von κ_m und Ermitteln von λ_0 gemäß Gleichung (20) bzw. (22);
2. Berechnen von k_{1B} und Bestimmen des Arbeitspunktes p des Antriebes (vgl. Bild 24);
3. Berechnen der Federmaterialdicke aus

$$t = \frac{2l^2 p}{\lambda_0^2 t_B} \sqrt{\frac{3\rho}{E}}. \quad (28)$$

Sie erfolgt in Abhängigkeit der platzmäßig zugelassenen Federlänge l und muss außerdem noch an eine normgerechte Federbanddicke t_N angepasst werden;

4. Ermitteln der Breite b der Feder aus

$$b = \frac{12l^3 m_A p^2}{\lambda_0^4 E t_N^2 \kappa_m t_B^2} \quad (29)$$

und deren Angleich an ein genormtes Maß;

5. Berechnen der Eigenkreisfrequenz ω_0 nach Gleichung (18) und der erforderlichen Anfangsauslenkung s_{A1B} nach Gleichung (26).

Wie bei allen Federarten schließen sich auch hier noch eine Reihe von Nachrechnungen, wie Festigkeits- und ev. Lebensdauernachrechnungen sowie Überprüfung der Einbaubedingungen an.

Die Dimensionierung gekrümmter und gewundener Blattfedern läuft in ähnlicher Weise ab. Hierfür sind analog zu Antrieben mit gestreckter Blattfeder zunächst die dynamischen Modelle und die für sie geltenden Bewegungsgleichungen zu entwickeln. Diese sind dann in geeigneter Weise auszuwerten. Darauf soll jedoch verzichtet werden, da dies unter den gegebenen Bedingungen zu weit führen würde [1][2].

6 Einsatz der Finite Elemente Methode

Die Finite Elemente Methode (FEM) stellt ein umfassendes Berechnungswerkzeug dar. Es wird aufgrund seiner Leistungsfähigkeit von vielen Disziplinen des Ingenieurwesens genutzt. Überall dort, wo Felder und Kontinua hinsichtlich ihres Verhaltens zu untersuchen sind, kommt diese Methode zunehmend zum Einsatz. Das trifft auch für die Analyse des Spannungsverhaltens, des Verformungsverhaltens sowie des dynamischen Verhaltens von Federn zu. Die gezielte Wahl von Lasten und Einspannbedingungen ermöglicht die Nachbildung unterschiedlicher Belastungs- und Einbaubedingungen der Feder (**Bilder 26 und 27**). Dadurch wird der Konstrukteur in die Lage versetzt, bereits in frühen Entwicklungsstadien von Maschinen und Geräten die Funktion gefederter Baugruppen zu simulieren. Damit kann er auf den Federentwurf gezielt Einfluss nehmen, ohne dass

die Feder bereits vorhanden ist [14]. Wie dabei vorzugehen ist, wird in einem gesonderten Beitrag behandelt [15].

7 Zusammenfassung

Zur Berechnung von Flach- und Flachformfedern existieren verschiedene Verfahren. Ihre Anwendung wird maßgeblich von Form und Einsatzzweck der Feder bestimmt. Nach wie vor besitzen die klassischen Berechnungsverfahren, die auf idealisierten Balkenmodellen und der Differentialgleichung der elastischen Linie aufbauen, große Bedeutung. Sie sind für die tägliche Arbeit des Konstrukteurs, insbesondere für Überslagsrechnungen, auch künftig unerlässlich. Wie oben dargelegt, versagen sie jedoch bei komplizierten Federformen ebenso wie bei der Berechnung von Federn für dynamische Einsatzbedingungen.

Beim Einsatz von Federn unter dynamischen Betriebsbedingungen müssen die zeitliche Abhängigkeit der Verformungs- und Belastungsgrößen und die für diese Betriebsbedingungen geltenden Festigkeitswerte des Federwerkstoffs berücksichtigt werden. Für den Fall der Anwendung von Blattfedern als Antriebselemente wurden Berechnungsbeziehungen angegeben. Sie ermöglichen den funktionsgerechten und gezielten Federentwurf. Bei anderen Federarten ist analog vorzugehen [1][2][10].

Für kompliziertere Flachfederformen bietet sich die Finite Elemente Methode als Berechnungsmöglichkeit an.

Außer den analytischen und numerischen Verfahren zur Federberechnung sind auch die bekannten Hilfsmittel (Nomogramme, Leitertafeln u.a.) für den Entwurf von Flach- und Flachformfedern einsetzbar. Auf deren Behandlung wurde allerdings verzichtet, da die Literatur [1] hierzu ausreichend Hinweise enthält und der Gebrauch derartiger Berechnungshilfen durch die zunehmende Anwendung der Rechentechnik eingeschränkt werden wird.

8 Beispiele zur Berechnung von Blattfedern

8.1 Beispiel 1: Dimensionierung einer Blattfeder als Ankerrückstellfeder

Für ein Relais soll eine Blattfeder aus Cu Zn 37 F44 DIN 1780 berechnet werden. Sie hat die Aufgabe, im nichterregtem Relais (Ruhezustand) die Ruhekontaktkräfte zu erzeugen und nach erfolgter Schaltung den Anker wieder in seine Ausgangslage zurückzubewegen. Die Abmessungen der Feder sind so zu bestimmen, dass folgende Forderungen erfüllt werden:

$$F_1 = 1,1 \text{ N}; F_2 = 1,5 \text{ N}; s_h = 1,6 \text{ mm}; T_R = \pm 10\%; l = 54 \text{ mm}; \\ B = 30 \text{ mm}; \text{Sollsicherheit } S_{\text{erf}} = 2.$$

Die berechnete Feder ist hinsichtlich Funktion und Festigkeit zu überprüfen.

Die Lösung der Aufgabe geschieht gemäß Abschn. 4.1 in folgenden Schritten:

1.) Ermitteln der Federrate aus

$$R_{\text{erf}} = \frac{F_2 - F_1}{s_h} = \frac{1,5 \text{ N} - 1,1 \text{ N}}{1,6 \text{ mm}} = 0,25 \text{ N/mm}$$

und der toleranzbedingten Grenzwerte $R_{\text{min}} = 0,225 \text{ N/mm}$ und $R_{\text{max}} = 0,275 \text{ N/mm}$.

2.) Berechnen der Federdicke gemäß Gleichung (8) und mit $E = 105000 \text{ N/mm}^2$ sowie $\sigma_{\text{zul}} = \sigma_{\text{bF}} / S_{\text{erf}} \approx R_{\text{p}0,2} / S_{\text{erf}} = (370 \text{ N/mm}^2) / 2 = 185 \text{ N/mm}^2$ aus

$$t = \frac{2 l^2 (F_2 - F_1)}{3 E F_2 s_h} \sigma_{b \text{ zul}} = \frac{2 \cdot (54 \text{ mm})^2 \cdot 0,4 \text{ N}}{3 \cdot 105000 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,5 \text{ N} \cdot 1,6 \text{ mm}} \cdot 185 \text{ N/mm}^2 = 0,571 \text{ mm}.$$

Gewählt wird Federband mit der Normdicke $t_N = 0,5 \text{ mm}$.

3.) Berechnen der erforderlichen Federbreite entsprechend Gleichung (9) zu

$$b_{\text{erf}} = \frac{6 F_2 l}{t_N^2 \sigma_{b \text{ zul}}} = \frac{6 \cdot 1,5 \text{ N} \cdot 54 \text{ mm}}{(0,5 \text{ mm})^2 \cdot 185 \text{ N/mm}^2} = 10,51 \text{ mm}.$$

Gewählt wird die Federbreite $b_N = 11 \text{ mm}$.

4.) Ermitteln der vorhandenen Federrate

$$R_{\text{vorh}} = \frac{E b_N t_N^3}{4 l^3} = \frac{105000 \text{ N/mm}^2 \cdot 11 \text{ mm} \cdot (0,5 \text{ mm})^3}{4 \cdot (54 \text{ mm})^3} = 0,229 \text{ N/mm}.$$

Die vorhandene Abweichung der Federrate gegenüber der Sollfederrate ΔR beträgt 8,33%.

5.) Nachrechnung der Festigkeit nach Umstellen der Gleichung (9) aus

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{6 F_2 l}{t_N^2 b_N} = \frac{6 \cdot 1,5 \text{ N} \cdot 54 \text{ mm}}{(0,5 \text{ mm})^2 \cdot 11 \text{ mm}} = 176,7 \text{ N/mm}^2 \leq \sigma_{b \text{ zul}} = 185 \text{ N/mm}^2.$$

6.) Ermitteln des Spannungsverhältnisses:

$$\eta_s = \frac{\sigma_{b \text{ vorh}}}{\sigma_{b \text{ zul}}} = \frac{176,7 \text{ N/mm}^2}{185 \text{ N/mm}^2} = 0,955.$$

7.) Gestalten der Feder

Die mögliche Gesamtbreite der Feder wird nur zu einem Teil benötigt. Zur besseren Kraftverteilung werden zwei seitliche Federstege mit der Breite $b_N/2$ vorgesehen.

Bemerkungen zum Lösungsweg:

Die Funktions- und Festigkeitsbedingungen werden nur im Schnittpunkt dieser beiden Funktionen exakt erfüllt. Da für die Blechdicke t nur genormte Werte t_N zu wählen sind, kann es neben einer nicht vollständigen Ausnutzung der zulässigen Spannung ($\eta_s < 1$) Abweichungen für die Federrate R geben. Funktions- und Festigkeitsbedingung lassen sich daher nur annähernd erfüllen. Die Funktionswerte müssen toleriert sein. In praktische Rechnungen sind außerdem auch Toleranzen geometrischer Parameter (b ; l ; t) einzubeziehen.

8.2 Beispiel 2: Dimensionierung einer Ankerrückstellfeder als Blattfederantrieb

In einem Relais soll die Rückstellbewegung des Ankers durch die stromführenden Umschaltfedern des Kontaktblattfedersatzes aus Neusilber (Cu Zn 37 F44 DIN 1780) verwirklicht werden. Der Kontaktblattfedersatz besteht aus vier seriell und parallel angeordneten Umschaltern. Die Forderungen der antriebstechnischen Aufgabenstellung sind, bezogen auf einen Umschalter, in **Tafel 1** zusammengestellt.

Die Lösung der Aufgabe erfolgt gemäß den in Abschnitt 5.5 genannten Schritten:

1. Ermitteln der Antriebsmasse m_A

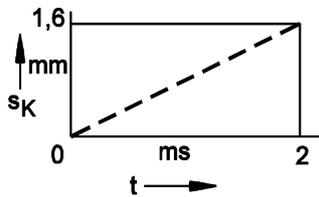
$$m_A = J_A / \overline{OK}^2 = 90 \text{ g cm}^2 / (30 \text{ mm})^2 = 10 \text{ g}.$$

Tafel 1. Aufgabenstellung zur Dimensionierung der Ankerrückholfeder für ein Relais

1. Bewegungsforderungen

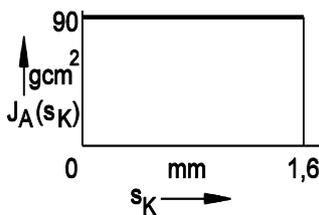
Endgeschwindigkeit mit Rücksicht auf die Lebensdauer:

$$v_B = 2 \text{ m/s}$$

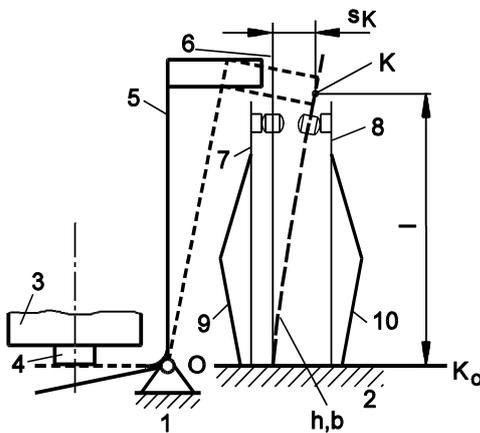


2. Belastungsforderungen:

anzutreibendes Trägheitsmoment

Dämpfungswerte: $k_{SR} = 0$; $k_{SN} = 0$ Statische Gegenkraft: $F_{st} = 0$ Vorspannkraft: $F_1 \geq 1 \text{ N}$ 

2. Konstruktive Bedingungen:



4. Festigkeitsforderungen; Materialkennwerte:

$$\sigma_{zul} = R_{p0.2} = 370 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 105000 \text{ N/mm}^2$$

$$\rho = 8,4 \text{ g/cm}^3$$

5. Fertigungstechnische Forderungen

Breitenverhältnis: $5 \leq b/h \leq 20$

Gütegrad 1 nach DIN 2192

Abstandstoleranzen nach DIN 7168

2. Wahl von $\kappa_m = 5$ und Bestimmen des Eigenwertes λ_0 näherungsweise aus

$$\lambda_0 = \sqrt[4]{3/\kappa_m} = \sqrt[4]{3/5} = 0,880117.$$

bzw. durch numerisches Lösen der Gl. (20) zu $\lambda_0 = 0,870022$.

3. Berechnen des Neigungsfaktors k_1 aus

$$k_{1B} = \frac{s_B}{t_B} \frac{3 \sqrt{3\rho E}}{\lambda_0^2 \sigma_{A1}} = \frac{1,6 \text{ mm}}{2 \text{ ms}} \frac{3 \sqrt{3 \cdot 8,4 \text{ g/cm}^3 \cdot 105000 \text{ N/mm}^2}}{(0,870022)^2 \cdot 296 \text{ N/mm}^2} = 0,551007.$$

Um Ausfällen bei der Spannungsnachrechnung vorzubeugen, wurde gesetzt:

$$\sigma_{A1} = 0,8 \sigma_{bE} = 0,8 R_{p0,2}.$$

4. Ermitteln des Arbeitspunktes p durch Lösen der transzendenten Gl. (24). Hierfür gibt es mehrere Wege:

1. Weg:

Aus Bild 25 mit k_{1B} einen Näherungswert für p ablesen, hier $p \approx 3\pi/8 \approx 1,18$, und dessen Genauigkeit verbessern, z.B. mit Hilfe der *Newton'schen Näherungsformel* [$f(p)$ -Dimensionierungsgrundgleichung (24) und $f'(p)$ als deren Ableitung nach p]:

$$\begin{aligned} p_{\text{neu}} &= p - \frac{f(p)}{f'(p)} = p - \frac{1 - k_1 p - \cos p}{k_1 + \sin p} = 1,18 - \frac{1 - 0,551007 \cdot 1,18 - \cos(3\pi/8)}{-0,551007 + \sin(3\pi/8)} \\ &= 1,18 - \frac{1 - 0,650188 - 0,380925}{-0,551007 + 0,924606} = 1,18 - \frac{-0,031113}{0,37356} = 1,263279. \end{aligned}$$

Nach weiteren zwei Iterationen ergibt sich für den Arbeitspunkt $p = 1,260213$

2. Weg:

Auswerten der Dimensionierungsgrundgleichung (24) für vorgegebene $p = 0,1; 0,2; 0,3; \dots 1,2; 1,3; 1,4; \dots$ bis zum Auftreten eines Vorzeichenwechsels und anschließende Genauigkeitssteigerung durch Anwenden der *Newton'schen Näherungsformel*, Anwenden eines Halbschrittverfahrens oder anderer Verfahren:

P	1,2	1,3	1,25	1,275	1,2625	...	1,2602141
$f(p) = 1 - k_1 p - \cos p$	-0,02356	+0,01619	-0,04081	+0,00596	+0,0091	...	+0,0000002

Die Nullstelle liegt zwischen $p = 1,2$ und $p = 1,3$. Der in der letzten Spalte angegebene Endwert wird nach zwölf weiteren Iterationsschritten erreicht.

3. Weg:

Anwenden verfügbarer mathematischer Software zur numerischen Lösung transzendenter Gleichungen, beispielsweise des Programms MATHEMATICA.

5. Ermitteln der Materialdicke aus Gl. (5.27):

$$t = \frac{2 l^2 p}{\lambda_0^2 t_B} \sqrt{\frac{3\rho}{E}} = \frac{2 \cdot (30 \text{ mm})^2 \cdot 1,260213}{(0,870022)^2 \cdot 2 \text{ ms}} \sqrt{\frac{3 \cdot 8,4 \text{ g/cm}^3}{105000 \text{ N/mm}^2}} = 0,721 \text{ mm}.$$

Gewählt wird als genormte Banddicke $t_N = 0,7 \text{ mm}$.

$$b = \frac{12 l^3 m_A p}{\lambda_0^4 E t_N^3 t_B^2 \kappa_m} = \frac{12 \cdot (30 \text{ mm})^2 \cdot 10 \text{ g} \cdot (1,260213)^2}{(0,870022)^4 \cdot 105000 \text{ N/mm}^2 \cdot (0,7 \text{ mm})^3 \cdot (2 \text{ ms})^2 \cdot 5} \\ = 12,18 \text{ mm.}$$

6. Berechnen der Federbreite aus Gl. (5.28):

Gewählt wird als Norm- und Fertigungsmaß $b_N = 13 \text{ mm}$.

7. Berechnen der Eigenkreisfrequenz nach Gl. (5.18) mit dem durch Rundungen veränderten

$$\omega_0 = \frac{\lambda_0^2 t_N}{2 l} \sqrt{\frac{E}{3\rho}} = \frac{(0,910732)^2 \cdot 0,7 \text{ mm}}{2 \cdot (30 \text{ mm})^2} \sqrt{\frac{105000 \text{ N/mm}^2}{3 \cdot 8,4 \text{ g/cm}^3}} = 658,42 \frac{1}{\text{s}}$$

Masseverhältnis $\kappa_M = 4,367$ bzw. Eigenwert $\lambda_0 = 0,910732$:

$$s_{A1B} = s_B / (1 - \cos \omega_0 t) = 2 \text{ mm} / [1 - \cos(658,42 \text{ s}^{-1} \cdot 0,002 \text{ s})] = 2,671 \text{ mm.}$$

8. Berechnen der erforderlichen Anfangsauslenkung

$$\sigma_{A1} = \frac{3 E t_N}{2 l^2} s_{A1B} = \frac{3 \cdot 105000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,7 \text{ mm}}{2 \cdot (30 \text{ mm})^2} \cdot 2,67 \text{ mm} \\ = 327,21 \text{ N/mm}^2 \leq \sigma_{b \text{ zul}} = 370 \text{ N/mm}^2.$$

9. Überprüfen der vorhandenen Biegespannung Gl. (5.120)

$$v_B = \omega_0 s_{A1B} \sin \omega_0 t = 658,4 \text{ s}^{-1} \cdot 2,67 \text{ mm} \cdot \sin(658,4 \text{ s}^{-1} \cdot 0,002 \text{ s}) = 1,735 \text{ m/s.}$$

10. Ermitteln und Überprüfen der erreichten Endgeschwindigkeit v_B aus
Sie liegt damit unterhalb der zulässigen Endgeschwindigkeit $v_{B \text{ zul}} = 2 \text{ m/s}$.

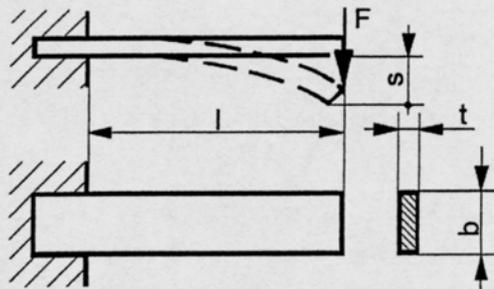
$$R_{1B} = \frac{3 E I}{l^3} = \frac{E b_N t_N^3}{4 l^3} = \frac{105000 \text{ N/mm}^2 \cdot 13 \text{ mm} \cdot (0,7 \text{ mm})^3}{4 \cdot (30 \text{ mm})^3} = 4,335 \text{ N/mm.}$$

11. Berechnen der Federrate gemäß

$$F_1 = R_{1B} (s_{A1B} - s_B) = 4,335 \text{ N/mm} \cdot (2,67 - 1,6) \text{ mm} = 4,638 \text{ N.}$$

12. Ermitteln der Vorspannkraft aus

9 Bilder



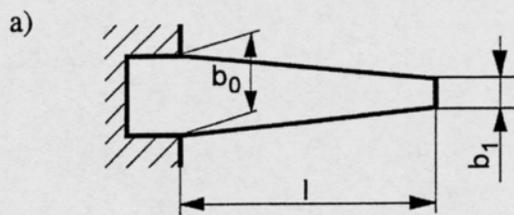
Verformung:

$$s = \frac{4Fl^3}{Ebt^3}$$

Spannung:

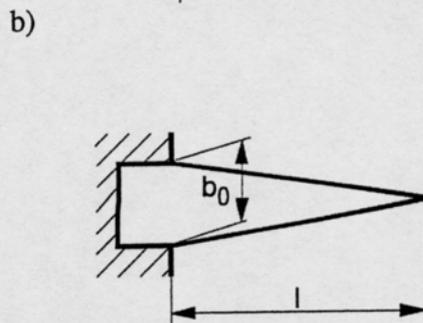
$$\sigma_{b \max} = \frac{6Fl}{bt^2}$$

Bild 1: Berechnungsbeziehungen für einseitig eingespannte Blattfedern mit konstantem Querschnitt



Verformung:

$$s = K_1 \frac{4Fl^3}{Eb_0 t^3}; \quad K_1 = \frac{2}{3} \left[\frac{1 - 4\beta + 3\beta^2 \ln \beta}{(1 - \beta)^3} \right]$$



$$s = \frac{6Fl^3}{Eb_0 t^3}$$

Spannungen für a) und b):

$$\sigma_{b \max} = \frac{6Fl}{b_0 t^2}$$

Bild 2: Berechnungsbeziehungen für einseitig eingespannte Blattfedern mit veränderlicher Breite b_x und konstanter Dicke t

a) Trapezform ($b = b_0$; $\beta = b_1 / b_0$; $K_1 = f(\beta)$ s. Bild 3)

b) Dreieckform ($b_1 = 0 \rightarrow \beta = 0$; $K_1 = 3/2$)

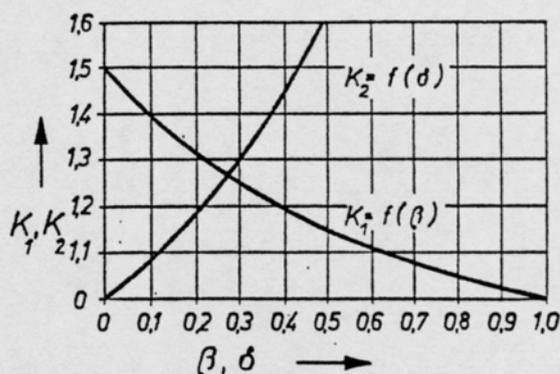


Bild 3:

Korrekturfaktoren K_1 und K_2 zur Berechnung der Verformung querschnittsveränderlicher Blattfedern

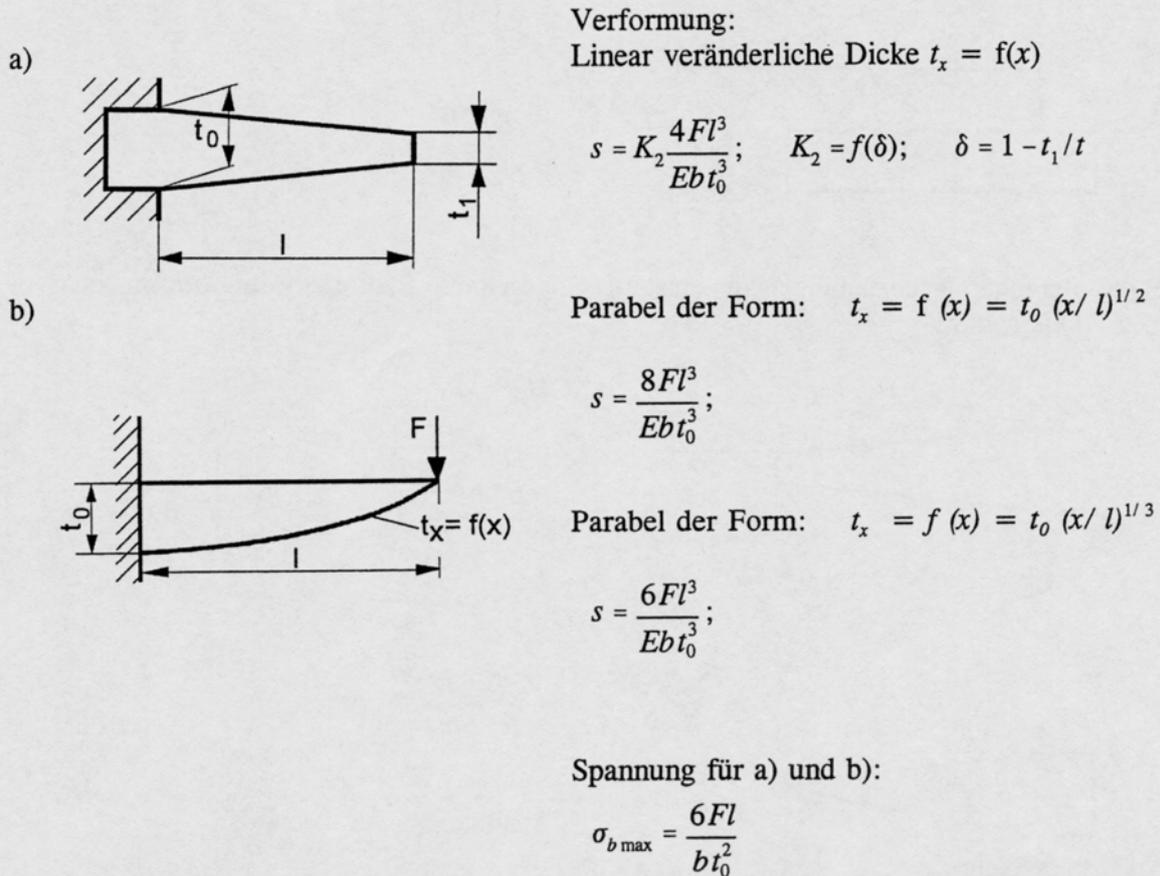


Bild 4: Berechnungsbeziehungen für einseitig eingespannte Blattfedern mit veränderlicher Dicke t_x und konstanter Breite b (K_2 s. Bild 3)

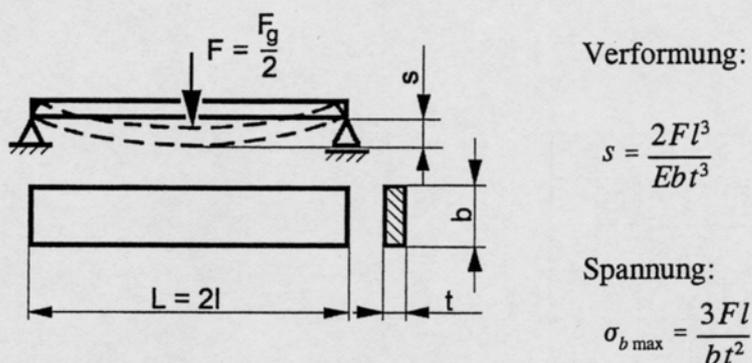
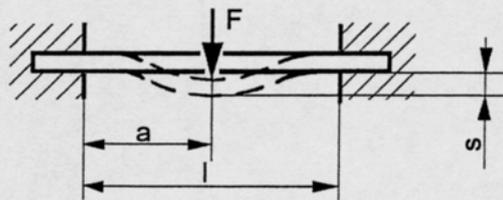


Bild 5: Berechnungsbeziehungen für beidseitig abgestützte Blattfedern mit Rechteckform und konstantem Querschnitt



Verformung:

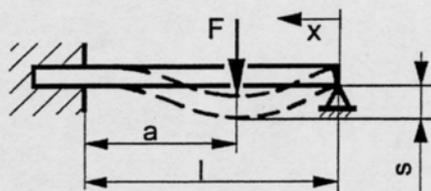
$$s = \frac{Fl^3}{2Ebt^3}$$

Spannung:

$$\sigma_{b \max} = \frac{3Fl}{2bt^2}$$

Bild 6: Berechnungsbeziehungen für beidseitig eingespannte Blattfedern mit Rechteckform und konstantem Querschnitt

a)

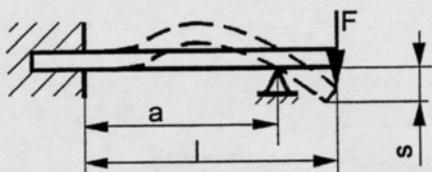
Verformung im Bereich $a/l \leq 2 - 2^{0.5}$:

$$s = \frac{Fa^3}{12EI} \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \left(4 - \frac{a}{l}\right)$$

Spannung:

$$\sigma_{b \max} = \frac{6Fl}{bt^2} k_1; \quad k_1 = \frac{a^2}{2l^2} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left(3 - \frac{a}{l}\right)$$

b)



Verformung:

$$s = \frac{Fl}{12EI} (l-a)^2 \left(4 - \frac{3a}{l}\right)$$

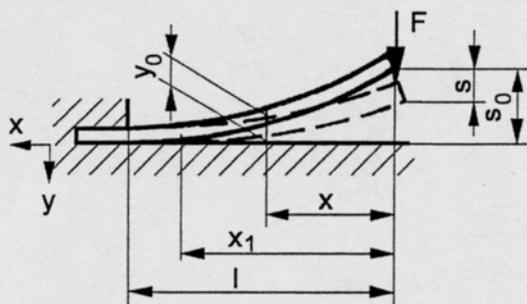
Spannung:

$$\sigma_{b \max} = \frac{6F(l-a)}{bt^2}$$

Bild 7: Berechnungsbeziehungen für einseitig eingespannte und einseitig abgestützte Blattfedern mit Rechteckform und konstantem Querschnitt

a) Variante 1: freies Federende abgestützt

b) Variante 2: freies Federende überkragend



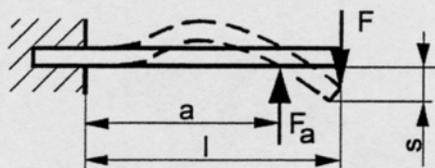
Verformung:

$$s = s_0 \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{EI}{Fl^3} s_0 \right)^2 \right]$$

Spannung:

$$\sigma_{b \max} = Et \frac{s_0}{l^2}$$

Bild 8: Berechnungsbeziehungen für eingespannte, eben unterstützte Blattfedern, gültig im Bereich $0 \leq x \leq x_1$ bei bis x_1 aufliegender Feder der Form $y = -s_0 (1 - x/l)^2$



Verformungen:

$$s = \frac{Fl^3}{3E_1 I_1} \left[1 - \frac{F_a a^2}{2Fl^3} (3l - a) \right]$$

Stützkraft der Stützfeder mit $E_2; I_2$:

$$F_a = \frac{3E_2 I_2 s_{a2}}{a^3}$$

Für $s_{a1} = s_{a2}$ gilt:

$$F = \frac{2aF_a}{(3l - a)} \left(\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} + 1 \right)$$

Bild 9: Berechnungsbeziehungen für einseitig eingespannte und einseitig elastisch abgestützte Blattfedern (s_a : Verformung an der Stützstelle bei a; Indes 2: Daten der Stützfeder)

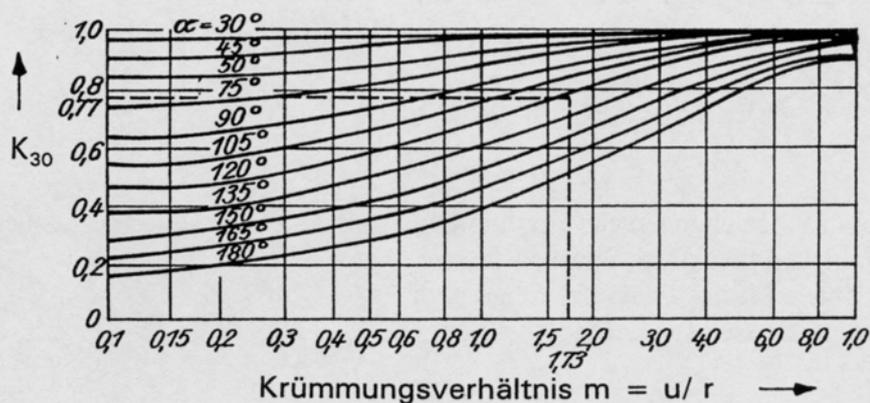
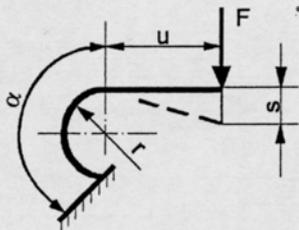


Bild 10: Korrekturfaktor $K_{30} = f(m, \alpha)$ zur Berechnung gekrümmter Blattfedern nach Form A

a) Form A



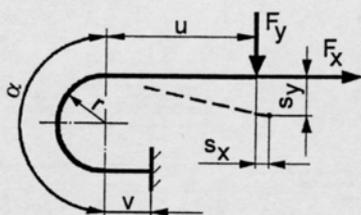
Verformung:

$$s = K_{30} \frac{F(u+r\alpha)^3}{3EI}; \quad K_{30} = f(m, \alpha) \quad \text{s. Bild 10}$$

Moment und Spannung:

$$M_{b \max} = F(u+r); \quad \sigma_{b \max} = \frac{6F(u+r)}{bt^2}$$

b) Form B



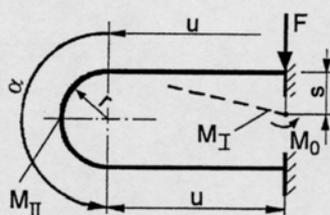
Verformungen:

$$s_y = \frac{r^3}{EI} (K_{31}F_y + K_{32}F_x); \quad s_x = \frac{r^3}{EI} (K_{32}F_y + K_{33}F_x)$$

Momente und Spannungen:

$$M_b = F_y(u+r) \quad \text{bzw.} \quad M_b = 2F_x r; \quad \sigma_b = \frac{6M_b}{bt^2}$$

c) Form C



Verformungen:

$$s = K_{34} \frac{Fr^3}{3EI}$$

Momente mit $m = u/r$ (Spannungen wie Form B):

$$M_I = -M_0; \quad M_0 = Fr \frac{m^2 + \pi m + 2}{2m + \pi}; \quad M_{II} = F(u+r \sin \alpha) - M_0$$

Bild 11: Berechnungsbeziehungen für gekrümmte Blattfedern mit Rechteckform

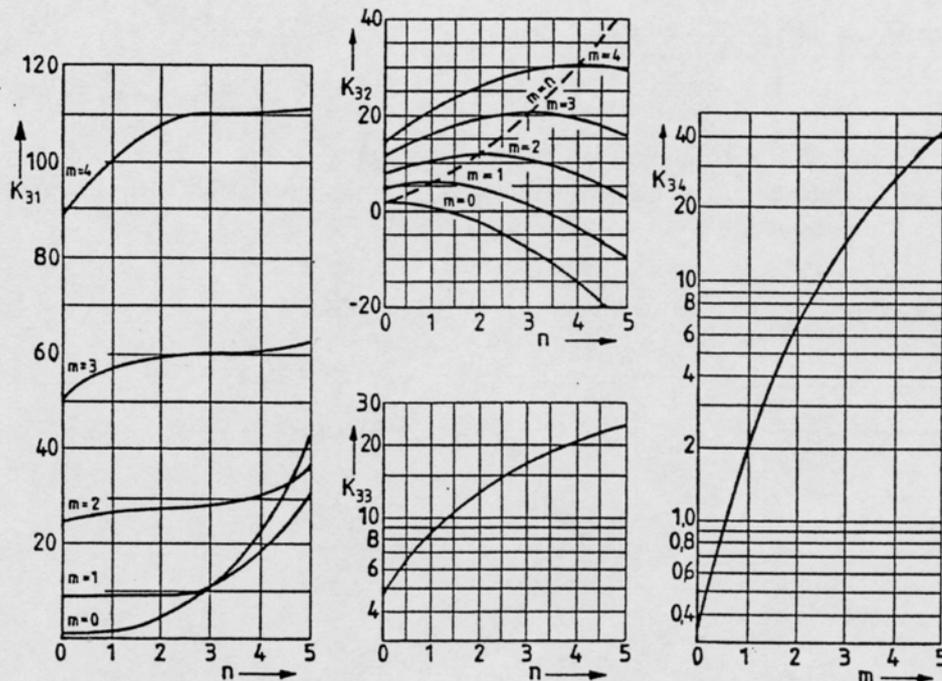


Bild 12: Korrekturfaktoren zur Berechnung gekrümmter Blattfedern der Formen B und C

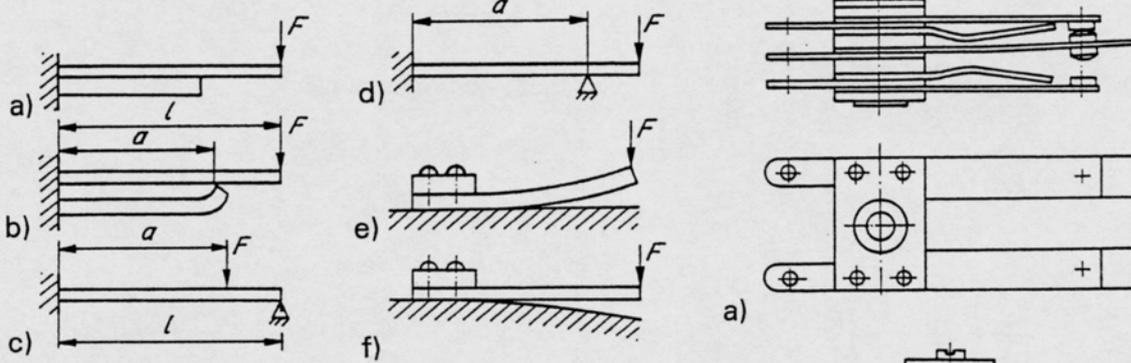


Bild 13:
Beispiele für unterstützte Blattfedern
a), b) Elastische Unterstützung
c) bis f) Starre Unterstützung

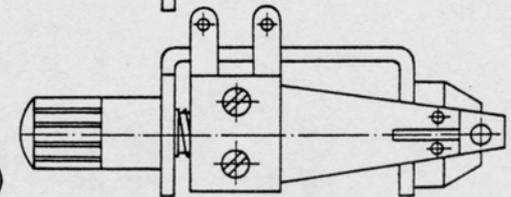
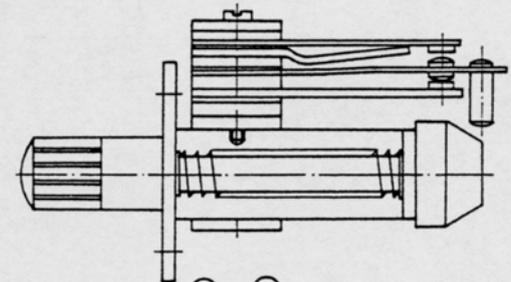
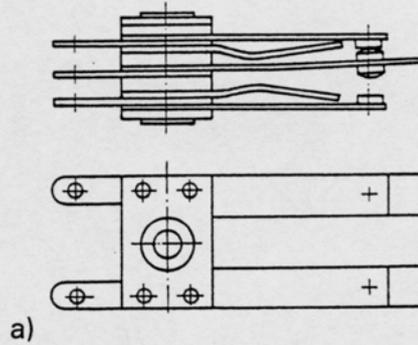


Bild 14:
Beispiele für Kontaktblattfederanwendungen
a) Elastische Abstützung in einem Relaisfedersatz
b) Drucktastenbetätigter Umschalter mit trapezförmiger Kontaktblattfeder

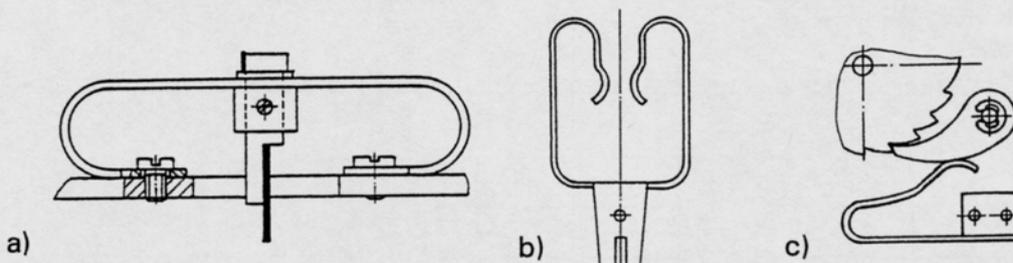


Bild 15: Beispiele für gekrümmte Blattfederanwendungen
a) Biegefeder für Meßelementeführung
b) Steckkontaktfeder
c) Rückstellfeder einer Sperrklinke

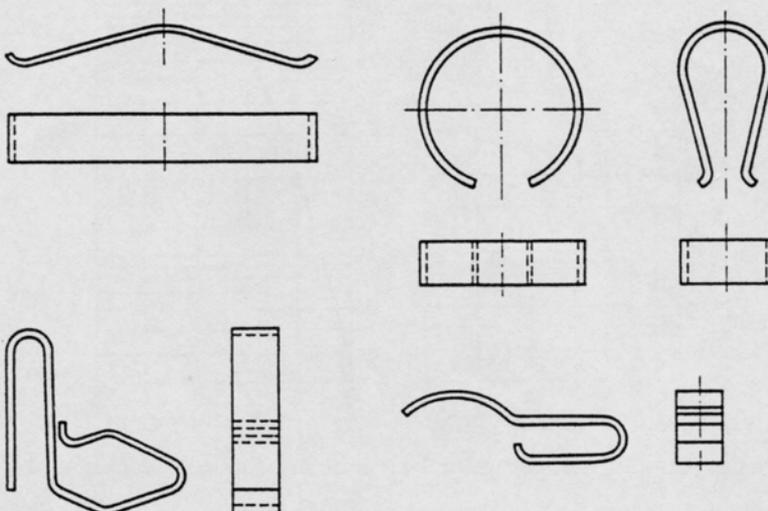


Bild 16:
Beispiele für Flachformfedern

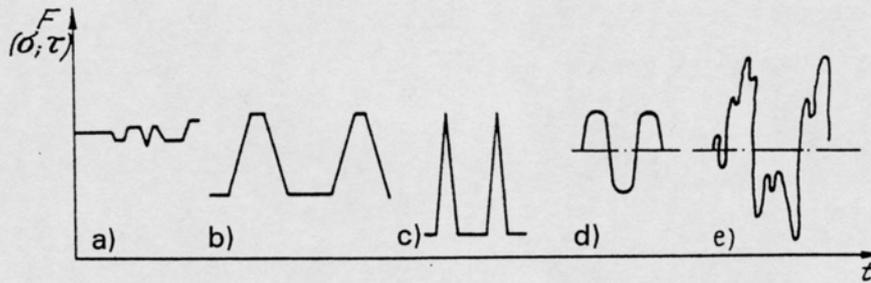


Bild 17: Typische zeitliche Belastungsverläufe für Federn

- a) Statische bzw. quasistatische Belastung (konstante Vorspannung; Spielausgleich)
- b) Schwellbelastung (Rückholfeder)
- c) Stoßbelastung (Schalterfeder)
- d) Schwellbelastung an schwingender, vorgespannter Feder (Ventilfeder)
- e) Stochastische Belastung (Kfz-Feder)

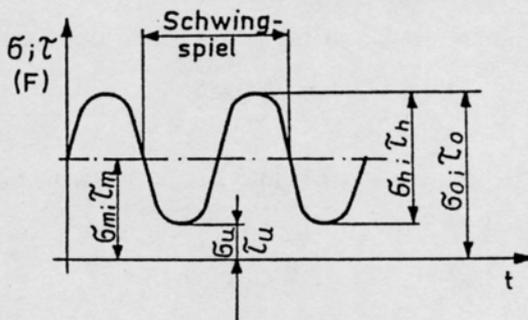


Bild 18: Periodische Schwellbelastung mit sinusförmigem Verlauf

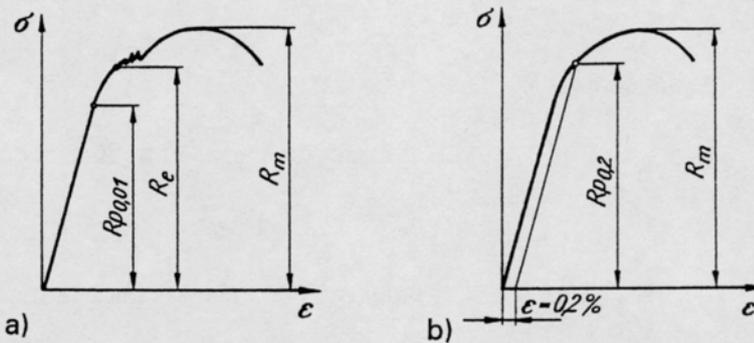


Bild 19: Spannungs-Dehnungs-Schaubild beim Zugversuch

- a) Zähle Werkstoffe
- b) Federwerkstoffe

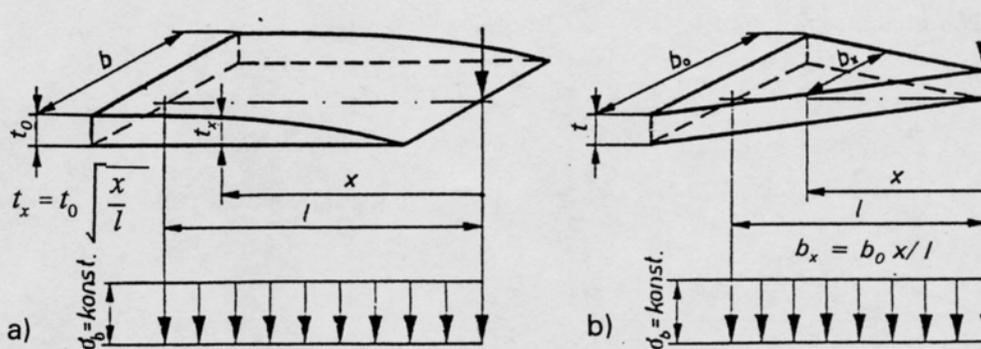
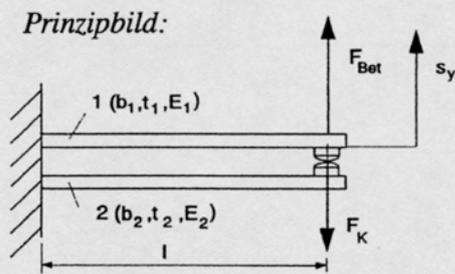


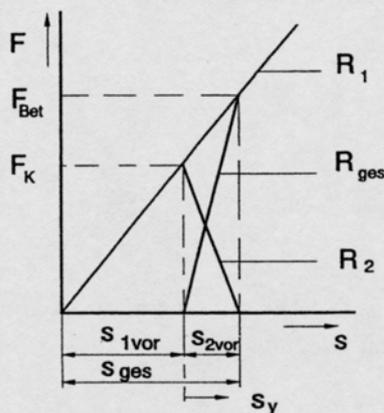
Bild 20: Biegefederformen mit konstanter Biegespannung in allen Querschnitten

- a) Dicke veränderlich nach $t_x = t_0 (x/l)^{0.5}$
- b) Breite veränderlich nach $b_x = b_0 (x/l)$

a) Öffnerkontakt (Ruhekontakt):



Kennliniendiagramm:



Gesamtweg:

$$s_{ges} = s_{1\text{vor}} + s_{2\text{vor}}$$

Kontaktweg bis zum Öffnen:

$$s_K = s_{2\text{vor}} = \frac{F_K}{R_2}$$

Kontaktkraft im Ruhezustand:

$$F_K = R_1 s_{1\text{vor}} = R_2 s_{2\text{vor}}$$

Betätigungskraft bis zum Öffnen des Kontaktes:

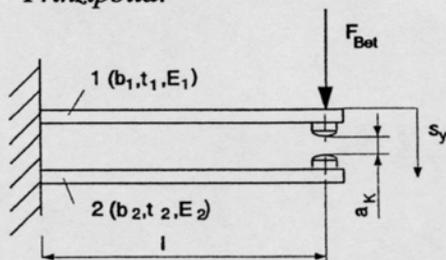
$$F_{Bet} = s_y (R_1 + R_2) = s_y R_{ges}$$

Betätigungskraft beim Öffnen des Kontaktes:

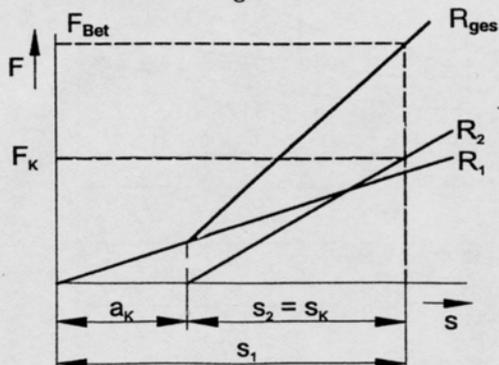
$$F_{Bet} = F_{K\ddot{O}} = R_1 s_{ges} = R_{ges} s_K$$

b) Schließerkontakt (Arbeitskontakt):

Prinzipbild:



Kennliniendiagramm:



Gesamtfederweg bis zum Erreichen der Kontaktkraft:

$$s_{ges} = s_1 = a_K + s_2$$

Kontaktweg bis zum Erreichen der Kontaktkraft:

$$s_K = s_2 = \frac{F_K}{R_2}$$

Kontaktkraft:

$$F_{KS} = R_2 s_2$$

Betätigungskraft beim Erreichen der Kontaktkraft:

$$F_{Bet} = F_1 + F_2 = R_1(a + s_2) + R_2 s_2 = R_1 a + R_{ges} s_2$$

Bild 22: Berechnungsbeziehungen für Kontaktfederpaare als Beispiel für parallelgeschaltete Federsysteme

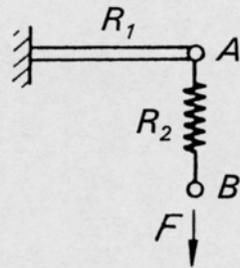


Bild 21:
Federanordnung nach *Michelson* (*Michelson-Feder*)

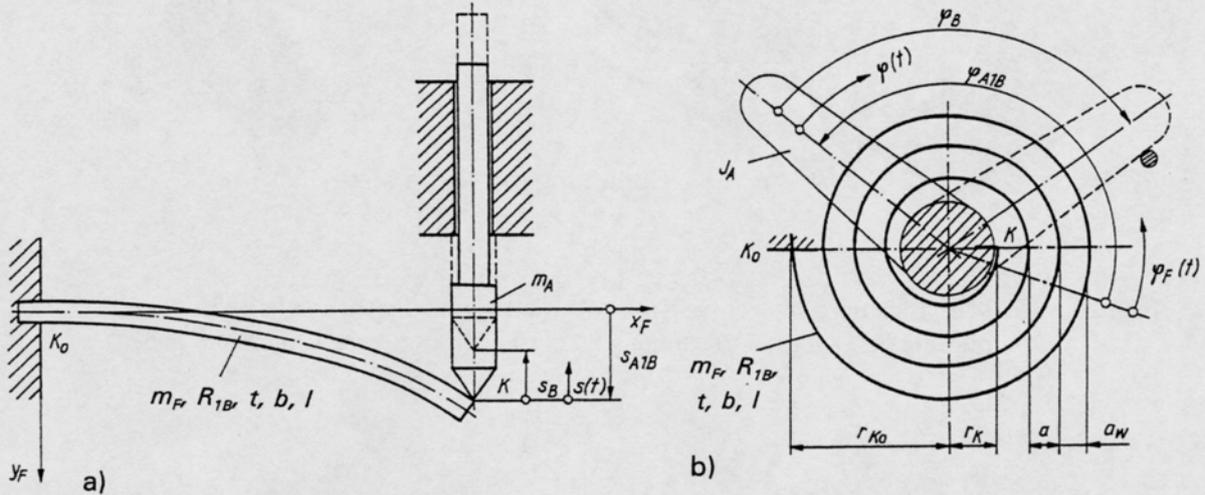


Bild 23: Federantriebe mit Flach- und Flachformfedern
a) Blattfederantrieb b) Spiralfederantrieb ohne Federhaus

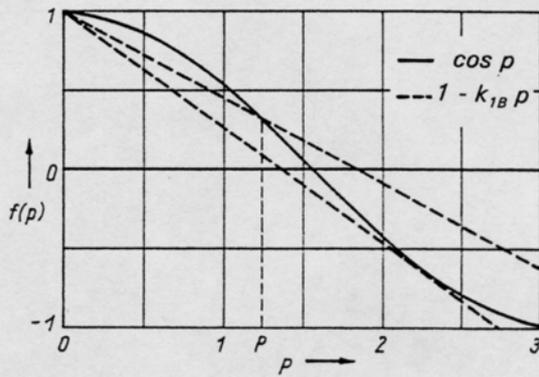


Bild 24:
Grafische Lösung der normierten
Dimensionierungsgleichung
 $1 - k_{1B} p = \cos(p)$

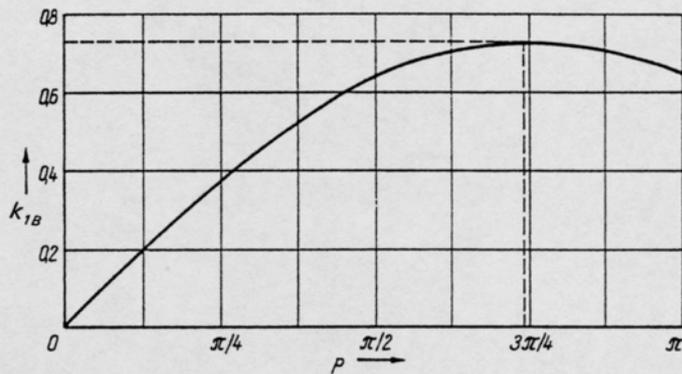


Bild 25:
Diagramm zur Ermittlung des Ar-
beitspunktes p bei Vorgabe des Stei-
gungsfaktors k_{1B}



Bild 26: FEM-Berechnungen an einer Kreisbogenfeder vom Typ C aus Federstahl zur Ermittlung der Vergleichsspannung an der Federoberfläche (innen und außen)

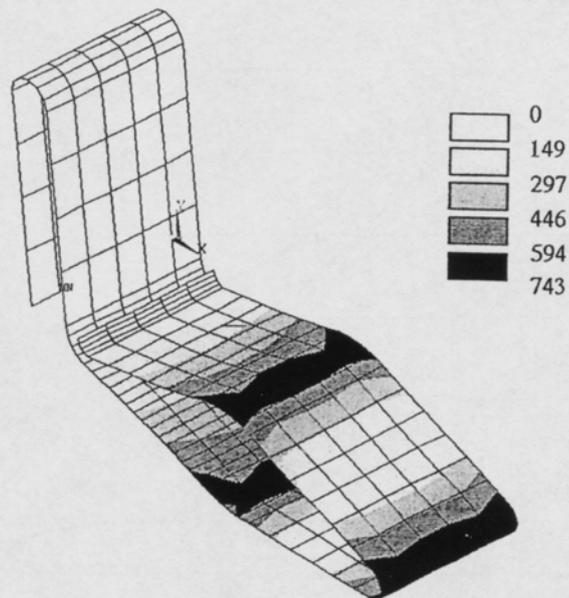


Bild 27:
FEM-Berechnungen an einer
Bandformfeder aus Federstahl
zur Ermittlung der Vergleichs-
spannung an der Federoberfläche

10 Literatur

- [1] Meissner, M.; Wanke, K.: Handbuch Federn. Berlin: Verlag Technik 1993, 2. Aufl.
- [2] Meissner, M.; Schorcht, H.-J.: Metallfedern: Berlin/ Heidelberg/...: Springer Verlag 1996
- [3] Geisel, A.: Berechnung, Gestaltung und Herstellung von Flachformfedern aus Kaltband. Draht 22 (1971) 6, S. 376-381
- [4] Palm, J.: Formfedern in der Feinwerktechnik. Feinwerktechnik + Messtechnik 83(1975)3, S. 105
- [5] Sperlich, H.: Zur Definition der Gestalt in der Konstruktion. Konstruktion 45 (1993) 2, S. 61-65
- [6] Niemann, G.: Maschinenelemente; Bd. 1 Berlin/ Heidelberg/...: Springer Verlag 1981
- [7] Krause, W.: Konstruktionselemente der Feinmechanik, 2. Aufl. München: Hanser Verlag 1993
- [8] Merkel, M.; Thomas, K.-H.: Technische Stoffe. Leipzig: Fachbuchverlag 1984
- [9] Kaiser, B.: Ermittlung von Dauerfestigkeitsdiagrammen für biegebeanspruchte Federbänder und Federdrähte. Forschungsbericht des Verbandes der Deutschen Federindustrie Nr. 7738
- [10] Kallenbach, E.; Bögelsack, G.: Gerätetechnische Antriebe. Berlin: Verlag Technik 1991
- [11] Schorcht, H.-J.: Beiträge zum Entwurf von Schraubenfederantrieben. Diss. TH Ilmenau 1979
- [12] Schüller, U.: Spezielle Probleme des Verformungsverhaltens von Blattfedern der Feinwerktechnik, Teil I: Kennlinienverhalten. Draht 42 (1991) 3, S. 155-157; Teil II: Nullpunktverhalten. Draht 42 (1991) 5, S. 347-351
- [13] Schüller, U.: Untersuchungen zum Verformungsverhalten einseitig eingespannter Blattfedern. Diss. TH Ilmenau 1985
- [14] Kletzin, U.: Finite-Elemente-basiertes Entwurfssystem für Federn und Federanordnungen. Diss. TU Ilmenau 2000
- [15] Micke, D.: FEM-Anwendung zur Federberechnung. Technische Akademie Esslingen, Weiterbildungszentrum. Lehrgang Kaltgeformte Federn 2004
- [16] Jahnke, J.: Spiral-, Trieb- und Rollfedern aus Bandstahl. Technische Akademie Esslingen, Weiterbildungszentrum. Lehrgang Kaltgeformte Federn 2004
- [17] Buchhagen, P.: Tellerfedern. Technische Akademie Esslingen, Weiterbildungszentrum. Lehrgang Kaltgeformte Federn 2004