

Gasplanetenentstehung und der Corot-Planetenzensus

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomischen Fakultät
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Phys. Christopher Hans Broeg

geboren am 16. Februar 1977 in Dachau

Gutachter:

1. Prof. Dr. Ralph Neuhäuser
2. Prof. Dr. Artie P. Hatzes
3. Prof. Dr. Werner M. Tscharnuter

Tag des Rigorosums: 6. Juli 2006

Tag der öffentlichen Verteidigung: 13. Juli 2006

Peter F. Hamilton

für seine Inspiration

Danksagung

Zu Beginn möchte ich allen danken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Betreuer und Leiter der Planetenentstehungsgruppe, Dr. Günther Wuchterl. Er war stets äußerst interessiert am Fortgang der Arbeit und immer bereit, sein schier unerschöpfliches Wissen aus der Stern- und Planetenentstehung weiterzugeben. So gab es oftmals mehrstündige Diskussionen über Probleme und neue Erkenntnisse, die ich nicht missen möchte. Für diese alles andere als selbstverständliche, herausragende Betreuung bin ich außerordentlich dankbar.

In diesem Zusammenhang danke ich der gesamten Planetenentstehungsgruppe – Bojan Pečnik, Sebastian Krause und Johannes Schönke – für die hervorragende Atmosphäre. Nur durch die vielen Diskussionen und das gemeinsam erlangte Verständnis der isothermen Modelle, die Grundlage dieser Arbeit sind, war meine Arbeit überhaupt möglich.

Ebenso danke ich meinen Zimmerkollegen, insbesondere Matthias Ammler und Markus Mugauner, die in den letzten drei Jahren stets gute Kollegen und Freunde waren. Auch dem ganzen Institut danke ich für die schöne Atmosphäre, die mich jahrelang mit Freude ins Institut gehen ließ. Vor allem die heitere Aufbruchstimmung zu Beginn habe ich in guter Erinnerung und ich wünsche dem Institut, dass sie wieder aufflammt.

Weiterhin danke ich Prof. R. Neuhäuser dafür, dass er mich immer voll und ganz unterstützt hat und meinen Fähigkeiten vertraut hat. So konnte ich auf viele Konferenzen und Summer Schools gehen, aus denen ich unglaublich viel gelernt habe. In diesem Zusammenhang danke ich auch Prof. G. Morfill, der mich schon als Diplomand am Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik immer voll und ganz unterstützt hat und diese Unterstützung trotz meines Arbeitsplatzwechsels nach Jena weitergeführt hat. Insbesondere die Teilnahme an der Summer School in Japan hat für diese Arbeit einen großen Sprung nach vorne bedeutet, da ich Masahiro Ikoma persönlich treffen konnte. Dr. Masahiro Ikoma danke ich für seine starke Mithilfe bei der Suche nach den Ursachen für die Diskrepanzen in meinen Kontrollrechnungen. Ich danke auch der Kobe University, die den Großteil der Japanreise finanziert hat.

Natürlich gilt mein besonderer Dank dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt, das meine Doktorarbeit im Rahmen der COROT-Mission finanziert hat. Weiterhin danke ich allen Beteiligten am COROT-Projekt, die sich auf den vielen COROT-Weeks nicht zu schade waren, mit „kleinen Doktoranden“ zu diskutieren.

Meiner Familie danke ich für die Unterstützung im Studium und in allen Lebenslagen. Sie haben mir immer voll und ganz vertraut und mich so ermutigt, meinen Weg zu gehen – Danke. Meinem Vater danke ich dafür, dass er in mir das Interesse am „wie funktioniert das alles“ geweckt hat, indem er (fast) alles erklären konnte. Meiner Mutter danke ich dafür, dass sie, obwohl sie „das ganze nicht versteht“, immer Interesse an meiner Arbeit gezeigt hat. Außerdem haben ihre außergewöhnlichen Korrekturlesefähigkeiten dieser Arbeit etwa 1 Million Rechtschreib- und Kommafehler erspart.

Last but not least danke ich Anne dafür, das Leben noch schöner zu machen.

Kurzfassung

Das Ziel dieser Arbeit war die Erarbeitung einer Vorhersage möglicher Planetenpopulationen um andere Sterne. Mittel der Wahl ist die so genannte Mannigfaltigkeit: die Menge aller möglichen Gleichgewichte im Sinne des Sternaufbaus, die ein fester Gesteinskern mit verschiedenen ihn umgebenden Nebeln einnehmen kann. Die Gleichgewichte werden hierfür in-situ, im Rahmen der Kerninduzierten Gasinstabilitätshypothese, berechnet.

Der Fokus liegt dabei auf engen Planeten mit Umlaufzeiten von weniger als 64 Tagen. Aber auch Jupiters Position wird mit der gleichen Methode untersucht. Hierbei gibt es eine Überraschung: Offenbar unterscheidet sich die Entstehung der sehr engen, nach ihrem ersten Vertreter oft Pegasi-Planeten genannten Planeten, grundlegend von der Entstehung von Jupiter. Es gibt keine dynamische Gasakkretionsphase, vielmehr läuft die gesamte Entwicklung quasistatisch ab.

Für HD 149026 b – den bis dato unerklärlichen Transitplaneten mit extrem großem Kern – wird die statische Entwicklung dann auch mit numerischen, strahlungshydrodynamischen Rechnungen überprüft. Die berechnete Mannigfaltigkeit erlaubt die Bestimmung der genauen Anfangsbedingungen, um diesen Planeten zu formen. Damit ist es uns erstmals gelungen, eine mögliche Entstehung von HD 149026 b zu präsentieren.

Den Höhepunkt dieser Arbeit stellt schließlich der COROT-Survey Mark 1 dar: Es handelt sich um die Vorhersage der relativen Häufigkeiten von Planetenmassen für verschiedene Umlaufzeiten und Zentralgestirne. Insgesamt wurden für den Survey 48 verschiedene Mannigfaltigkeiten mit jeweils mehr als 10000 Planetenmodellen berechnet. Das Ergebnis zeigt sehr vielfältige Massenverteilungen, die bei verschiedenen Umlaufzeiten stark variieren. Dies lässt auf eine große Vorhersagekraft der Theorie schließen.

Weiterhin führen die Ergebnisse zu einer Einteilung der Gasplaneten in drei Klassen: Die Klasse G der ganz heißen, die Klasse H der heißen und die Klasse J der jupiterähnlichen Gasplaneten. Die Abstandsgrenzen sind Parameterabhängig und müssen noch genau bestimmt werden. Eine mögliche Wahl für Bedingungen um unsere Sonne ist die Trennung bei etwa 2 (Grenze G/H) sowie 28 (Grenze H/J) Tagen Umlaufzeit.

Diese Fülle an Information wird prägnant in 7 Thesen zusammengefasst, die schon bald mit Hilfe von Beobachtungen überprüft werden können.

Abstract

It was the goal of this work to come up with a prediction of planetary populations around other stars than the sun. The tool of my choice is the so-called manifold: The set of all possible equilibrium states in terms of stellar structure of a solid core embedded in a surrounding nebula. These equilibria are calculated in-situ, in the framework of the nucleated instability hypothesis.

The main focus lies on close-in planets with orbital periods of less than 64 days. However, I also analysed Jupiter's position with this method. This shows that the evolution of Jupiter-like planets and very close-in planets—after the first representative often called Pegasi-planets—differs fundamentally: Pegasi-planets lack the phase of dynamical accretion, the entire formation takes place quasi-statically.

For HD 149026 b—the so far inexplicable heavy core planet—I verify the static evolution using radiation hydrodynamics. The calculated manifold provides the correct initial conditions to form this planet and indeed the hydrodynamics confirm the static formation process. This is the first plausible formation scenario for HD 149026 b.

The highlight of this work is the COROT-survey mark 1: the prediction of the relative frequency of planetary masses in orbit around stars of various spectral types with a range of orbital periods. In total 48 manifolds were calculated consisting of more than 10000 planetary models, each. The result is a wide range of mass distributions that depend strongly on orbital period. This stands to reason that this theory will have a large predictive power.

Motivated by the results, I separate the giant planets in three classes: class G (very hot), class H (hot), and class J (Jupiter-like) planets. The boundaries between the classes are parameter dependent and have yet to be determined precisely. For our sun one possible separation lies at orbital periods of 2 (class G/H) and 28 (class H/J) days.

The results are condensed in seven *Thesen* that can be verified by observations in the near future.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Das Problem der Planetenentstehung	1
1.1.1	Sternentstehung und zirkumstellare Scheibe	1
1.1.2	Planetesimalentstehung und Kernwachstum	3
1.1.3	Pegasi-Planeten in-situ	5
1.2	Zielsetzung und Konzept dieser Arbeit	6
1.3	Annahmen	6
1.4	Vorgehensweise	7
1.5	COROT	8
I	Methoden	9
2	Gleichungen und Lösungsverfahren	11
2.1	Variablen	11
2.2	Strukturgleichungen	11
2.2.1	Massensumme und hydrostatisches Gleichgewicht	12
2.2.2	Leuchtkraft	12
2.2.3	Temperaturschichtung	13
2.3	Randbedingungen	15
2.4	Materialgleichungen	16
2.4.1	Zustandsgleichung	17
2.4.2	Massenabsorptionskoeffizient – Opazität	18
2.5	Zusammenfassung der zu lösenden Gleichungen	19
2.6	Lösungsverfahren – Integration der Gleichungen	19
2.6.1	Numerische Umsetzung in Ada95	19
2.6.2	Einschritt- und Mehrschrittverfahren	20
2.6.3	Zweiseitiges Randwertproblem	21
2.7	Genauigkeit der Lösung	22
3	Die Mannigfaltigkeit als Repräsentant aller Gleichgewichte	25
3.1	Über die Wahl der freien Parameter bei der Klassifikation der Gleichgewichte	25
3.2	Mannigfaltigkeit als einseitiges Randwertproblem	26
3.3	Bereiche einer Mannigfaltigkeit	27
3.4	Mannigfaltigkeit als zweiseitiges Randwertproblem	31
3.4.1	Bestimmung der Leuchtkraft aus einer konstanten Akkretionsrate	31
3.4.2	Protoplaneten mit fixierter Außentemperatur	33
4	Massenspektren von Planeten	35
4.1	Die Berechnung des planetaren Massenspektrums aus der Mannigfaltigkeit	35
4.2	Implizite Annahmen bei der Erzeugung der Massenspektren	37

II	Ergebnisse	39
5	Vergleichsrechnungen	41
5.1	Vergleich mit Mizuno	41
5.2	Vergleich mit Ikoma	43
6	Planetenrechnungen	47
6.1	Jupiter	47
6.1.1	Beschreibung der Gleichgewichte	47
6.1.2	Vergleichende Betrachtung der Gleichgewichte	52
6.1.3	Schlussfolgerungen aus der Struktur des Massenspektrums von Jupiter	53
6.2	51 Pegasi b	54
6.2.1	Alle möglichen Gleichgewichte bei 0,05 AE	54
6.2.2	Massenspektrum für 51 Peg b	58
6.3	HD 149026 b	58
6.3.1	Bestimmung der Rahmenbedingungen für eine vorgegebene kritische Masse	60
6.3.2	Fluid-dynamische Rechnungen	63
6.3.3	Das Massenspektrum für HD 149026 b	64
6.3.4	Offene Probleme	65
6.4	Das Massenproblem bei den Pegasi-Planeten	66
7	Klassischer Zugang als Projektion einer Mannigfaltigkeit	69
8	Corot-Durchmusterung	73
8.1	Überlegungen zu Beginn	73
8.1.1	Parameterbereich	73
8.1.2	Parameterbereich von COROT	74
8.1.3	Bestimmung sinnvoller Akkretionsraten	74
8.2	COROT Mass Spectra Mark 1 (v1.1)	74
8.2.1	Parameter für COROT-Survey Mark 1	75
8.2.2	Ergebnisse der Durchmusterung – Beispiel: $^{-4}[\mathbf{1},\mathbf{0}]^{1-64}$	76
8.2.3	Ergebnisse der Durchmusterung für $\dot{M} = 10^{-4} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$	80
8.2.4	Ergebnisse für die anderen beiden Werte von \dot{M}	80
8.3	Interpretation der Ergebnisse der COROT-Durchmusterung	80
8.3.1	Allgemeines	80
8.3.2	Globale Eigenschaften	83
8.3.3	Der L-Peak	87
8.3.4	Der H-Peak	87
8.3.5	L- und H-Peak	89
8.3.6	Drei Klassen von Gasplaneten	89
III	Diskussion	91
9	Kritische Zusammenfassung	93
10	Grenzen und Kritik	97
11	Thesen	99
12	Ausblick	101

Literaturverzeichnis	103
IV Anhang	115
A Ergänzungen zum Text	117
A.1 Massenspektren	117
A.1.1 Interpretation der Massenspektren	117
A.1.2 Beschränkung des (M_c, P_c) -Bereichs für die Erstellung der Massenspektren	118
A.2 Abbildungen zu den Testrechnungen	120
A.3 Radiale Strukturen aus der Jupiter Mannigfaltigkeit	120
A.4 Exkurs – Numerische Probleme und Stabilität	127
B Der vollständige Corot-Survey – Corot Mass Spectra Mark 1 (v1.1)	131
B.1 Akkretionsrate $\dot{M} = 10^{-4} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$	131
B.1.1 Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung	131
B.2 Akkretionsrate $\dot{M} = 10^{-6} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$	136
B.2.1 Massenspektren	136
B.2.2 Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung	140
B.3 Akkretionsrate $\dot{M} = 10^{-2} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$	144
B.3.1 Massenspektren	144
B.3.2 Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung	148
B.4 Peak-Positionen tabellarisch	148
B.5 Massenspektren für einen $1 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$) – feinere T_{orb} -Abstufung	155

Abbildungsverzeichnis

2.1	Testintegration für Protoplaneten nahe der kritischen Masse mit klassischem bzw. modifiziertem Schwarzschild-Kriterium	23
3.1	Mögliche Darstellungsformen einer Mannigfaltigkeit für den Außendruck	28
3.2	Massen-Mannigfaltigkeiten	29
3.3	Definition der typischen Bereiche einer Mannigfaltigkeit	30
3.4	Radiale Profile zu Abbildung 3.3	32
3.5	Hüllenmassendarstellung für Jupiters Position mit konstanter Akkretionsrate	33
4.1	Das Massenspektrum für Jupiters Position	36
5.1	Rechnungen aus Mizuno (1980)	42
5.2	Vergleichsrechnungen zu Mizuno (1980)	43
5.3	Der adiabatische Temperaturgradient, ∇_s , bei konstantem Druck	44
5.4	Vergleichsrechnung mit Ikoma u. a. (2001)	45
6.1	Außendruckdarstellung für Jupiters Position mit fester Außentemperatur und konstanter Akkretionsrate	48
6.2	Hüllenmassendarstellung für Jupiters Position mit fester Außentemperatur und konstanter Akkretionsrate	50
6.3	Kerntemperaturdarstellung für Jupiters Position mit fester Außentemperatur und konstanter Akkretionsrate	51
6.4	Bereiche der Mannigfaltigkeit mit fixierter Außentemperatur	53
6.5	Außendruckdarstellung für 51 Peg b-artige Planeten	56
6.6	Hüllenmassendarstellung für 51 Peg b-artige Planeten	57
6.7	Radiale Strukturen an der Position von 51 Peg b	59
6.8	Massenspektrum für 51 Peg b	60
6.9	Innere Struktur von HD 149026 b im Vergleich zum Inneren des Jupiter	61
6.10	Hüllenmassendarstellung für HD 149026 b	62
6.11	Mögliche zeitliche Entwicklung von HD 149026 b (logarithmisch)	64
6.12	Massenspektrum für HD 149026 b	65
7.1	Rotationssequenz der Gesamtmassendarstellung für Jupiters Position	70
7.2	Vergleich von Projektion und direkter Rechnung	71
8.1	Planetares Massenspektrum und zugehörige Gesamtmassendarstellung, $T_{\text{orb}} = 1$ bzw. 4 Tage	77
8.2	Planetares Massenspektrum und zugehörige Gesamtmassendarstellung, $T_{\text{orb}} = 16$ bzw. 64 Tage	78
8.3	Massenspektren für einen $0,4 M_{\odot}$ -Stern	81
8.4	Massenspektren für einen $0,8 M_{\odot}$ -Stern	82
8.5	Massenspektren für einen $1 M_{\odot}$ -Stern	83
8.6	Massenspektren für einen $2 M_{\odot}$ -Stern	84

A.1	Gesamtmassendarstellung $^{-4}[\mathbf{1},\mathbf{0}]^1$ und zugehöriges Massenspektrum – gesamter Bereich	119
A.2	Gesamtmassendarstellung $^{-4}[\mathbf{1},\mathbf{0}]^1$ und zugehöriges Massenspektrum – Bereich: $\lg M_c \geq 20$	119
A.3	Gesamtmassendarstellung $^{-4}[\mathbf{1},\mathbf{0}]^1$ und zugehöriges Massenspektrum – $\lg M_c \geq 20, \lg P_c \geq 7,0$	120
A.4	Testintegration für Protoplaneten nahe der kritischen Masse mit klassischem Schwarzschild-Kriterium	121
A.5	Testintegration für Protoplaneten nahe der kritischen Masse mit modifiziertem ∇	122
A.6	Radiale Strukturen an Jupiters Position bei $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 20$	123
A.7	Radiale Strukturen an Jupiters Position bei $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 22$	124
A.8	Radiale Strukturen an Jupiters Position bei $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 24$	125
A.9	Radiale Strukturen an Jupiters Position bei $\lg M_c \text{ kg}^{-1} \sim 25$	126
A.10	Radiale Strukturen in Region IV beim Übergang zu einer inneren radiativen Zone	128
A.11	Radiale Strukturen als Funktion des Druckes in Region IV beim Übergang zu einer inneren radiativen Zone	129
B.1	Mannigfaltigkeiten für einen $0,4 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	132
B.2	Mannigfaltigkeiten für einen $0,8 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	133
B.3	Mannigfaltigkeiten für einen $1 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	134
B.4	Mannigfaltigkeiten für einen $2 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	135
B.5	Massenspektren für einen $0,4 M_\odot$ -Stern	136
B.6	Massenspektren für einen $0,8 M_\odot$ -Stern	137
B.7	Massenspektren für einen $1 M_\odot$ -Stern	138
B.8	Massenspektren für einen $2 M_\odot$ -Stern	139
B.9	Mannigfaltigkeiten für einen $0,4 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	140
B.10	Mannigfaltigkeiten für einen $0,8 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	141
B.11	Mannigfaltigkeiten für einen $1 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	142
B.12	Mannigfaltigkeiten für einen $2 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	143
B.13	Massenspektren für einen $0,4 M_\odot$ -Stern	144
B.14	Massenspektren für einen $0,8 M_\odot$ -Stern	145
B.15	Massenspektren für einen $1 M_\odot$ -Stern	146
B.16	Massenspektren für einen $2 M_\odot$ -Stern	147
B.17	Mannigfaltigkeiten für einen $0,4 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	148
B.18	Mannigfaltigkeiten für einen $0,8 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	149
B.19	Mannigfaltigkeiten für einen $1 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	150
B.20	Mannigfaltigkeiten für einen $2 M_\odot$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_\oplus \text{ a}^{-1}$)	151
B.21	Massenspektren für einen $1 M_\odot$ -Stern mit feinerer T_{orb} Abstufung.	155

Tabellenverzeichnis

2.1	Die Variablen der Modellgleichungen	11
2.2	In dieser Arbeit verwendete Kombinationen der Randbedingungen	16
8.1	Übersicht über die Durchmusterungsparameter	76
8.2	Übersicht über die Peak-Positionen bei $^{-4}[\mathbf{1},\mathbf{0}]^{1-64}$	79
B.1	Übersicht über die Peak-Positionen bei $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$	152
B.2	Übersicht über die Peak-Positionen bei $\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$	153
B.3	Übersicht über die Peak-Positionen bei $\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$	154

1 Einleitung

1.1 Das Problem der Planetenentstehung

1.1.1 Sternentstehung und zirkumstellare Scheibe

Man geht heute davon aus, dass Planeten in einer Scheibe aus Gas und kondensierbarer Materie um das Zentralgestirn herum gebildet werden. Somit ist die Entstehung der Planeten eng an den Entstehungsprozess der Sterne gekoppelt. Darin erklärt sich auch das Dilemma der Planetenentstehung: Um den Ursprung der Planeten umfassend zu beschreiben, muss die Planetenentstehung synchron mit der Sternentstehung betrachtet – und eigentlich auch modelliert – werden. Leider ist bis dato aber nicht einmal die Sternentstehung komplett verstanden. Die meisten Modellrechnungen beginnen einfach mit einer Gaskugel im hydrostatischen Gleichgewicht. Die Existenz einer zirkumstellaren Scheibe in den Phasen, die für die Planetenentstehung entscheidend sind, wird schlichtweg vorausgesetzt. Lediglich Wuchterl u. Tscharnuter (2003) haben überhaupt den Kollaps von der Wolke bis zum Stern modelliert. Allerdings sind diese Rechnungen in sphärischer Symmetrie gerechnet und erlauben daher keine Aussagen über die Existenz und Eigenschaften der zirkumstellaren Scheibe. Andere Rechnungen wiederum konzentrieren sich auf die Entwicklung von der Wolke zur Scheibe. Morfill u. a. (1985) haben versucht, den Kollaps der Wolke zum akkretierenden Protostern in einer Akkretionsscheibe zu rechnen. Überraschenderweise kam es nicht zu einer quasistatischen Akkretion ohne strenge Annahmen hinzuzufügen. Vielmehr kam es zu sich wiederholenden dynamischen Explosionen des Protostern-Kerns. Auch die verbesserten Rechnungen von Tscharnuter (1987) zeigten erneut dieses Phänomen. Somit ist die Theorie noch weit davon entfernt, den nahtlosen Übergang von der Wolke zur Planetenentstehung in der zirkumstellaren Scheibe zu vollziehen – schließlich bereitet in diesem Zusammenhang bereits die Sternentstehung große Probleme.

Für die genauen Eigenschaften der Scheibe kommt es enorm auf die Anfangszustände der angenommenen kollabierenden Wolke an – vor allem auf die ursprüngliche Drehimpuls- und Massenverteilung. Weiterhin ist ein Drehimpulstransportmechanismus notwendig, um die Akkretion in der Scheibe voranzutreiben. Die Natur dieses Prozesses ist jedoch nach wie vor unbekannt. Mehrere Prozesse konkurrieren als Kandidaten und erlauben kaum allgemeine quantitative Schlüsse. Man muss aber annehmen, dass die Art und Weise wie der Drehimpuls transportiert wird Einfluss auf die Struktur der Scheibe hat.

Auch Tscharnuter u. Boss (1993) kommen in ihrem Übersichtsartikel zu dem Schluss, dass

selbst für einen bestimmten vorgegebenen Anfangszustand die Entwicklung noch nicht weit genug gerechnet werden kann, um eine Verbindung mit der Planetenentstehung herzustellen:

"Given one set of these initial conditions, the challenge is to calculate the collapse as far as possible, ideally far enough to make contact with theoretical models of planetary formation. This goal has not yet been fully achieved, largely because of numerical difficulties and because the resulting protosolar nebula must undergo significant dynamical evolution in order to transfer mass inward to form the Sun, and to transfer angular momentum outward."

Obwohl die Details des Kollapses unklar sind, gibt es dennoch eine Reihe von Fakten, die alle Modelle gemein haben (Für eine gute Übersicht über protostellare Scheiben empfehle ich den Übersichtsartikel von Cassen u. a. 1985):

- Der Kollaps der Molekülwolke führt zur Bildung einer zirkumstellaren Scheibe um einen Proto-Stern.
- Es gibt einen Prozess, der den Drehimpuls nach außen transportiert und es somit erlaubt, weitere Masse zum Stern zu transportieren (jeder dissipative Prozess funktioniert, denn das Ergebnis ist bei festgehaltenem Drehimpuls energetisch günstiger).
- Die zirkumstellare Scheibe enthält stets einen signifikanten Bruchteil der Sternmasse.
- Die zirkumstellare Scheibe ist zunächst „aktiv“: d.h. es gibt einen starken Massenfluss von ca. $10^{-5} M_{\odot} a^{-1}$ und dieser dominiert die Struktur der Scheibe.
- Erst nach dem Ende der Akkretion erhält man eine so genannte „passive“ Scheibe mit geringem Massenfluss.

Da der starke Massenfluss in aktiven Scheiben eine in-situ Entstehung von Planeten mit Zeitskalen von $\geq 10^5$ Jahren nahe am Stern meiner Ansicht nach nicht gestattet, gehe ich wie auch schon Hayashi u. a. (1985) davon aus, dass sich die Planetenentstehung in einer „passiven“ Scheibe abspielt (siehe auch Hayashi 1980; Sasselov u. Lecar 2000 und Referenzen darin). Tatsächlich haben typische T Tauri Scheiben, mit einem Alter von ≈ 1 Ma, relativ kleine Akkretionsraten von weniger als $10^{-8} M_{\odot} a^{-1}$. Hartmann u. a. (1998) schreiben:

„The median accretion rate for T Tauri stars of age ~ 1 Ma is $10^{-8} M_{\odot} a^{-1}$; the intrinsic scatter at a given age may be as large as 1 order of magnitude.“

Konkret für unser Sonnensystem gibt es das Konzept des *Nebels minimaler rekonstituierender Masse* oder englisch *minimum mass solar nebula* (MMSN). Er gibt die Mindestmasse des Nebels an, die nötig ist, um alle heute vorhandenen Planeten zu bilden. Um ihn zu konstruieren, wird die Masse unserer neun Planeten verschmiert, und die schweren Elemente durch

Wasserstoff und Helium auf solare Häufigkeit ergänzt. Jedoch gibt dieser MMSN nur eine untere Grenze für die Gesamtmasse des Nebels an. Bei anderen Sonnensystemen ist er ferner ohne jedweden Bezug (Für eine weiterführende Nebeldiskussion siehe Safronov 1969; Kusaka u. a. 1970; Weidenschilling 1977; Hayashi u. a. 1977; Hayashi 1980, 1981).

Ich resümiere daher, dass die zirkumstellaren Scheiben, in denen potenziell Planeten entstehen, kaum eingeschränkt sind. Auch gegenwärtige Beobachtungen, z. B. der spektralen Energieverteilung von T Tauri Sternen, erlauben keine quantitativen Angaben über die Scheibenstruktur. Lediglich die Scheibenlebensdauer ist gut beobachtbar (siehe Hillenbrand, für Einschränkungen aus Beobachtungen). Man kann lediglich annehmen, dass sie sich in einem gravitativ stabilen Regime befinden, d.h. es gibt eine obere Grenze für die Dichte bzw. Gesamtmasse des Nebels. Ich gehe deshalb davon aus, dass im Universum eine Vielzahl von Scheibenstrukturen und -massen realisiert sind, sowohl bei Sternen solarer Masse als auch in noch stärkerem Maße bei Sternen, die eine andere Masse und/oder andere Elementhäufigkeiten aufweisen.

1.1.2 Planetesimalentstehung und Kernwachstum

Wenn sich eine zirkumstellare Scheibe ausgebildet hat, müssen Planetesimale gebildet werden. Diese Bausteine werden für die Planetenentstehung benötigt. Dieser Prozess ist sehr komplex und ein eigenständiges Forschungsgebiet. Für einen Einstieg in das Thema empfehle ich Lissauer (1993), für einen sehr ausführlichen Review Goldreich u. a. (2004).

Zuerst muss sich die kondensierbare Materie zu Planetesimalen verbinden. Ob dies durch Gravitationsinstabilitäten oder durch turbulenzgetriebene Kollisionen passiert, ist noch unklar. Jedoch ist in beiden Fällen das Absinken des Staubs der langsamste und somit dominierende Prozess für die Planetesimalentstehung. Man weiß daher, dass sich Kilometer große Planetesimale auf relativ kurzen Zeitskalen bilden – $\mathcal{O}(10^4)$ Jahre (Hueso u. Guillot 2003).

Es folgt das Wachstum der Planetesimale zu Planetenembryos durch gegenseitige Kollisionen. Der einfachste analytische Zugang zur Berechnung der Wachstumsraten ist die particle-in-a-box Näherung. Dabei wird der Einfluss der Sonne ignoriert und die Kollision eines Körpers mit dem Schwarm der Planetesimale getrennt betrachtet. Dies ergibt folgende Akkretionsrate eines Körpers in einem Planetesimalschwarm der Dichte ρ_{sw} mit der Relativgeschwindigkeit v :

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{\text{PiB}} = \rho_{\text{sw}} v \pi R_s^2 \left[1 + \left(\frac{v_e}{v} \right)^2 \right] \quad (1.1)$$

R_s ist der Radius des Körpers, v_e die Fluchtgeschwindigkeit auf der Oberfläche:

$$v_e = \left[\frac{2G(m_1 + m_2)}{R_s} \right]^{1/2}. \quad (1.2)$$

Der Klammerausdruck in Gleichung (1.1) repräsentiert die Erhöhung des effektiven Wirkungsquerschnitts durch die Schwerkraft. Die Größe $F_g = 1 + (v_e/v)^2$ wird als *gravitational enhance-*

cement factor bezeichnet; man verwendet alternativ auch die *Safronov Zahl* $\theta \equiv (v_e/v)^2/2$, damit ist $F_g = 1 + 2\theta$.

Die Schwierigkeit steckt hierbei in der Bestimmung der mittleren Relativgeschwindigkeit v der Planetesimale. Safronov (1969) gelang dies für einen Planetesimalschwarm im dynamischen Gleichgewicht. Die Planetesimale werden dabei typischerweise auf Geschwindigkeiten knapp über der Fluchtgeschwindigkeit des größten Körpers beschleunigt. Auf diese Weise erhält man jedoch einen sehr kleinen Wert für die Safronov Zahl ($\theta \approx 2$). Dies führte damals zum sog. Zeitskalenproblem; denn Jupiters Kern konnte auf diese Weise unmöglich in der Lebensdauer der Scheibe wachsen.

Heutzutage kann man den Wert von F_g mittels N-Körperrechnungen bestimmen. Es zeigt sich, dass der größte Körper unter gewissen Umständen viel schneller wächst als alle anderen. Dabei können F_g -Werte bis zu 10000 (Greenzweig u. Lissauer 1990) erreicht werden. Diese Phase des schnellen Wachstums wird als *runaway growth* bezeichnet. Der von Safronov bestimmte Gleichgewichtszustand wird dabei nie erreicht. Erst wenn in der dynamischen Umgebung des Körpers die Planetesimaldichte stark abfällt, also die sog. Fresszone fast leer ist, wird der Gleichgewichtszustand langsam erreicht. In dieser Endphase, man bezeichnet sie als *oligarchic growth*, sinkt F_g schließlich auf Werte kleiner als acht (Lissauer 1993).

In einer Scheibe mit vorgegebener Flächenmassendichte σ kann man bei Annahme einer isotropen Geschwindigkeitsverteilung Gleichung (1.1) auch anders schreiben:

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{\text{PiB}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma \Omega \pi R_s^2 F_g \quad (1.3)$$

(Ω ist die Keplersche Kreisfrequenz). Mit der Dichte des MMSN nach Hayashi (1980):

$$\sigma_{\text{MMSN}} = 71 \cdot f_e \left(\frac{a}{\text{AU}} \right)^{-3/2} \text{ kg m}^{-2} \quad \text{und} \quad (1.4)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a^3}} \quad \text{erhält man} \quad (1.5)$$

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{\text{PiB}} = 2,03 \times 10^{-14} f_e F_g \left(\frac{R_s}{10 \text{ km}} \right)^2 \left(\frac{a}{\text{AU}} \right)^{-3} M_\odot a^{-1}, \quad (1.6)$$

bzw. mit $\rho_s = 5500 \text{ kg m}^{-3}$:

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{\text{PiB}} = 8,26 \times 10^{-9} f_e F_g \left(\frac{M}{M_\oplus} \right)^{2/3} \left(\frac{a}{\text{AU}} \right)^{-3} M_\oplus a^{-1}, \quad (1.7)$$

Der Parameter f_e beschreibt die Erhöhung der Staubbichte außerhalb der sog. Eislinie – an dieser nimmt die Dichte der kondensierten Materie sprunghaft ab, weil die Eise (CO_2 -, Methan-, Wassereis, etc.) sublimieren. Bei den Pegasi-Planeten ist f_e 1, bei Jupiter 4,2 zu setzen.

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man nun Werte für die Akkretionsrate \dot{M} für verschiedene Abstände a abschätzen: Für Jupiter ($f_e = 4,2$, $F_g = 5000$, $R = 6000 \text{ km}$, $a = 5,2 \text{ AU}$) erhält

man den kanonischen Wert von $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$. Weiterhin zeigt Gleichung (1.6) sehr gut die a -Abhängigkeit von \dot{M} : nahe am Stern ist mit einer deutlich erhöhten Akkretionsrate zu rechnen. Für $f_e = 1$, $a = 0,05 \text{ AU}$ und $M_{\text{kern}} = 20 M_{\oplus}$ genügt bereits ein F_g -Wert von 21, um $\dot{M} = 10^{-2} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$ zu erreichen. Obwohl dynamische 3-Körper-Effekte den F_g -Wert so nahe am Stern vermutlich auf Werte deutlich kleiner als 10000 beschränken, ist ein Wert von 21 sicher leicht erreichbar.

Neben der Akkretionsrate interessieren v.a. die Zeitskalen. Die Zeit $\tau_e = M/\dot{M}$ in der sich ein Körper ver- e -facht ergibt sich aus Gleichung (1.7) zu:

$$\tau_e = \frac{M}{\dot{M}} = \frac{1,21 \cdot 10^8}{f_e F_g} \left(\frac{a}{\text{AU}} \right)^3 \left(\frac{M}{M_{\oplus}} \right)^{1/3} \text{ a.} \quad (1.8)$$

Ebenso lässt sich aus Gleichung (1.7) die Gesamtwachstumszeit τ_{grow} berechnen:

$$\tau_{\text{grow}} = 3 \cdot \tau_e. \quad (1.9)$$

Für kleines a stellen daher die Wachstumszeitskalen bereits für MMSN und oligarchic growth kein Problem dar. Vielmehr entstehen die Kerne praktisch „sofort“ nach der Bildung der Planetesimale.

1.1.3 Pegasi-Planeten in-situ

Alle Planeten, deren Entstehung im Rahmen dieser Arbeit betrachtet wird, entstehen an Ort und Stelle – in-situ. Bei den sternnahen oder „close-in“ Planeten – nach dem prominentesten Vertreter auch Pegasi-Planeten genannt – bedarf dies weiterer Erläuterung.

Der erste Vertreter dieser Gattung war 51 Pegasi b, entdeckt durch Mayor u. Queloz (1995) in einem Abstand von nur 0,052 AE um den sonnenähnlichen Stern 51 Pegasi. Er ist damit der Prototyp der nahen Planeten. 51 Pegasi b (von nun an 51 Peg b) löste große Spekulationen aus, da er mit den gängigen Theorien der Planetenentstehung unvereinbar schien, sollten doch alle Gasplaneten in einer Entfernung von mindesten 4-5 AE entstehen (Boss 1995). Denn dort schien am meisten Material für die Akkretion zur Verfügung zu stehen (Pollack u. a. 1996). Die Entdeckung eines Planeten mit $0,468 M_{\oplus}$ so nahe am Stern löste daher Spekulationen über orbitale Migration aus. So gab es z. B. Theorien über kontinuierliche Migration (Lin u. a. 1996), aber auch plötzliche Migration durch multiple Protoplaneten, die sog. „Jumping Jupiters“ von Weidenschilling u. Marzari (1996). Ebenso gab es auch schon Rechnungen, die eine in-situ Entstehung von 51 Peg b zeigen (Wuchterl 1996, 1997).

Ich gehe in dieser Arbeit folgenden Weg: Um zu untersuchen, ob Migration generell nötig ist, betrachte ich die Entstehung an Ort und Stelle – in-situ.

Da ich mich in dieser Arbeit primär mit Pegasi-Planeten beschäftige, habe ich die speziellen Probleme der äußeren Planeten vernachlässigt. Hierzu verweise ich auf Lissauer (2005).

1.2 Zielsetzung und Konzept dieser Arbeit

Es ist das Ziel dieser Arbeit, eine Vorhersage über Gasplaneten um andere Sterne zu machen und zwar ganz konkret über die relativen Häufigkeiten unterschiedlich massiver Planeten. Die im letzten Abschnitt erläuterten Probleme, konkrete Nebelparameter anzugeben, verbieten in meinen Augen den expliziten Weg: Die Verfolgung der Planetesimalbildung mit anschließendem Wachstum und schließlich Gasakkretion bis zum fertigen Planeten für ganz konkrete Nebelbedingungen. Hinzu kommt noch, dass solche Rechnungen extrem aufwendig sind, und es beim heutigen Stand der Technik selbst bei exakt vorgegebenen Anfangswerten nicht möglich ist, den ganzen Prozess mit realistischer Physik zu verfolgen. Nichtsdestotrotz gibt es Forschungsgruppen, die diesen Weg gehen und mit Monte-Carlo-ähnlichen Methoden eine Reihe von Planetesimalen verfolgen, um eine statistische Information zu erhalten (siehe Benz u. a. 2006; Alibert u. a. 2005a,b,c). Wenngleich ich der Meinung bin, dass solche Methoden beim heutigen Wissensstand über die zirkumstellaren Scheiben (noch) keine „robusten Prognosen“ liefern werden, ist dies sicherlich ebenfalls ein vernünftiger Lösungsansatz für die Zukunft.

Ich jedoch beschreibe im Rahmen dieser Arbeit einen anderen Weg. Um dem Problem der weitgehend unbekanntem Scheibe möglichst aus dem Weg zu gehen, versuche ich, über die Menge *aller* Gleichgewichte einen Einblick zu erlangen. Oftmals ist es in der Physik so, dass sehr komplizierte Nichtgleichgewichtsprozesse ablaufen und das System dennoch am Ende in einen Gleichgewichtszustand übergeht. So ist es z. B. in der Thermodynamik meist ausreichend, die relativen Häufigkeiten aller möglichen Zustände zu vergleichen, um zu verstehen, welcher Zustand am Ende eingenommen wird.

In diesem Sinne möchte ich für die Gasplaneten alle möglichen Gleichgewichtszustände bestimmen, die es für einen in einen Nebel eingebetteten Protoplaneten gibt. Tritt dabei eine Masse besonders häufig auf, ist bei genügend großer Variation der Anfangs- und Randbedingungen damit zu rechnen, dass Planeten dieser Masse häufiger vorkommen. Dies setzt natürlich voraus, dass es keinen anderen Prozess gibt, der gerade diese Gleichgewichte verbietet oder einen bestimmten Endzustand ungeachtet der Anfangsbedingungen bevorzugt.

1.3 Annahmen

Diese Arbeit bezieht sich ausschließlich auf die kerninduzierte Gasinstabilitätshypothese, auch bekannt als Kernakkretionsmodell. Das zugrundeliegende Modell ist im Wesentlichen vergleichbar mit Mizuno (1980): Ein *Planet* ist ein sphärisch symmetrisches Objekt, bestehend aus einem festen Kern, welcher von einer Hülle aus Gas und Staub umgeben ist. Dieser *Planet* ist in einen Nebel eingebettet und endet dort, wo der gravitative Einfluss des Zentralgestirns zu dominieren beginnt: am Hill-Radius.

Das Gebilde aus festem Kern zusammen mit der durch die Schwerkraft gebundenen Gashülle wird in dieser Arbeit schlicht als Planet oder Protoplanet bezeichnet.

Am Außenrand ist der Planet im Druckgleichgewicht sowie im thermischen Gleichgewicht im Sinne des Sternaufbaus, also im thermischen Kontakt mit dem ihn umgebenden Nebel. Weiterhin akkretiert der Kern des Planeten mit einer als konstant angenommenen Akkretionsrate \dot{M}_c Planetesimale. Diese deponieren ihre potentielle Energie auf der Kernoberfläche, welche dann an die „Oberfläche“ des Planeten transportiert werden muss. Über diese Planetesimalakkretion wächst der Kern langsam an und mit ihm auch seine gravitativ gebundene Hülle. Das System bewegt sich von einem Gleichgewichtszustand zum nächsten, also quasi-statisch. Dies geschieht bis zur so genannten *kritischen Masse*. Ab diesem Punkt existieren keine hydrostatischen Gleichgewichte mehr; es muss also etwas mit dem Planeten „passieren“. Oft beginnt eine dynamische Kontraktion verbunden mit weiterer Aufnahme von Gas aus dem Nebel; es können aber auch Pulsationen auftreten oder gar Teile der Hülle abgeworfen werden (siehe Wuchterl u. a. 2000). Grundsätzlich geht man davon aus, dass jenseits der *kritischen Masse* kein weiteres Kernwachstum stattfindet, da die dynamischen Zeitskalen in der Regel viel kürzer sind als die der Planetesimalakkretion.

Ich möchte nicht vergessen zu erwähnen, dass neben dem Kernakkretionsmodell auch die gravitative Scheibeninstabilität ein mögliches Planetenentstehungsszenario ist (Boss 2002). Jedoch sind die bis dato entdeckten Planeten in besserem Einklang mit dem Kernakkretionsmodell (siehe dazu das Review von Santos u. a. 2005).

In dieser Arbeit berechne ich im Rahmen der kerninduzierten Gasinstabilitätshypothese stets Gleichgewichte bestehend aus einem festen, inkompressiblen Kern mit einer Gashülle aus Wasserstoff und Helium. Die für die Bestimmung der Gleichgewichte angewendeten physikalischen Gleichungen werden in Kapitel 2 erläutert.

1.4 Vorgehensweise

Kennt man die genauen Bedingungen im Nebel – sind also die Nebeltemperatur T , der Nebel-
druck P und die Kernakkretionsrate \dot{M}_c bekannt – so lässt sich im Prinzip für jede beliebige Kernmasse die zugehörige Gleichgewichtslösung bestimmen, falls ein Gleichgewicht existiert.

Eine mögliche Vorgehensweise – sie wurde von Mizuno (1980) gewählt – ist daher, den Planetenkern kontinuierlich zu vergrößern und alle Hüllengleichgewichte zu bestimmen. Man muss jedoch in diesem Fall die Nebelbedingungen festlegen. Insbesondere ist es notwendig, den Nebeldruck und die Nebeltemperatur anzugeben. Damit ist es dann möglich, für einen festen Abstand vom Zentralgestirn die statische Phase der Planetenentstehung zu verfolgen. Wie bereits erwähnt, sind die Nebelbedingungen wie sie im ursprünglichen Sonnensystem herrschten weitgehend unbekannt. Viel schwieriger wird es noch, wenn man Aussagen über andere Planetensysteme machen möchte, deren Nebel noch weniger eingeschränkt sind als der solare. Dies trifft insbesondere auf die Regionen sehr nahe am Zentralgestirn zu.

Weiterhin kann man für fest vorgegebene Startwerte auch voll dynamische Rechnungen

durchführen (siehe z.B. Wuchterl 1991a,b; Wuchterl u. Tscharnuter 2003, letzteres für den Fall der Sternentstehung). Dafür müssen aber ebenso exakte Anfangsbedingungen spezifiziert werden, und es kommen noch weitere Annahmen hinzu, wie z. B. der Start mit einer marginal gravitativ instabilen sphärisch symmetrischen Gaskugel. Außerdem ist eine Rechnung für eine Ausgangskonfiguration sehr rechenintensiv; es können daher nur wenige Startwerte untersucht werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es jedoch, einen globalen Überblick über alle Planetenkonfigurationen zu erhalten. Das heißt, es sollen Planeten für alle denkbaren Drücke im protostellaren Nebel, beliebige große Halbachsen, sowie bei Zentralgestirnen verschiedenen Spektraltyps charakterisiert werden. Es muss also von der Idee des festen Nebeldrucks abgewichen werden. Die neue Vorgehensweise wird in Kapitel 3 als Mannigfaltigkeit aller Gleichgewichtslösungen vorgestellt.

Da diese Arbeit ganz konkrete Vorhersagen für COROT produzieren soll, beschränke ich mich jedoch auf einen Parameterbereich, der Messungen des Satelliten COROT zugänglich sein wird (siehe Abschnitt 8).

Die Grundidee ist also folgende: sind einmal alle Gleichgewichtszustände, die überhaupt physikalisch möglich sind, bekannt, dann kann man aus den Strukturen dieser Gleichgewichte Schlüsse ziehen über die globalen Vorgänge bei der Planetenentstehung.

1.5 Corot

COROT ist ein Satellit der französischen Raumfahrtagentur CNES in Zusammenarbeit mit vielen europäischen und südamerikanischen Institutionen, darunter dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR). COROT steht für „**CO**nvection, **RO**tation & planetary **T**ransits“. Der Satellit verfolgt eine zweigeteilte Mission: Zum einen soll er im Rahmen der Astroseismologieemission (convection, rotation) stellare Parameter genau bestimmen, zum anderen wird er über die Transitmethode (planetary transits) nach Planeten im Orbit um andere Sterne suchen. Beide Missionen benötigen eine hohe photometrische Präzision, d. h. die Helligkeitsschwankungen vieler Sterne werden so präzise wie möglich vermessen. Der Satellit wird in der Lage sein, Planeten mit Umlaufzeiten von bis zu 50 Tagen bis hinunter zu Größen von einigen Erdradien zu entdecken (siehe Bordé u. a. 2003). Für weitere Informationen zu dieser Satellitenmission verweise ich auf die Webseite (CNES COROT 2006), speziell die Astroseismologieemission wird erklärt in Baglin u. The COROT Team (1998) und die Transitmethode in Borucki u. Summers (1984); Charbonneau u. a. (2000); Rouan u. a. (2000).

Teil I

Methoden

2 Gleichungen und Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt werden die Modellannahmen in Form von Gleichungen formuliert. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um die wohlbekannteren Sternaufbaugleichungen, jedoch mit dem Radius als Koordinate anstelle der Masse. Dies erscheint sinnvoll, da bei Planeten, anders als bei Sternen, die Masse nicht vorgegeben ist, sondern erst durch die Gleichungen bestimmt wird. Die Sternaufbaugleichungen findet man z.B. in Kippenhahn u. Weigert (1990).

2.1 Variablen

Die in den Modellgleichungen verwendeten Variablen sind in Tab. 2.1 zusammengefasst.

Tabelle 2.1: **Die Variablen der Modellgleichungen**

Variable	Einheit	Bedeutung
M	kg	Masse innerhalb des Radius, r , oder
M	kg	Gesamtmasse des Planeten
M_*	kg	Masse des Zentralgestirns
ρ	kg/m ³	Dichte des Gases
P	Pa	Druck
T	K	Temperatur
L	W	Leuchtkraft
Φ	J/kg	Gravitationspotential
G	Nm ² /kg ²	Gravitationskonstante
κ	m ² /kg	Rosselandmittel des Massenabsorptionskoeffizienten
σ	W/(m ² K ⁴)	Stefan-Boltzmann-Konstante
a	m	Große Halbachse des betrachteten Planeten

2.2 Strukturgleichungen

Die Strukturaufbaugleichungen werden in dieser Arbeit in Kugelsymmetrie behandelt. Da die dominanten Prozesse in der Planetenentstehung untersucht werden sollen, wird davon ausgegangen, dass Abweichungen von der Kugelsymmetrie lediglich kleine Störungen darstellen und die globalen Gleichgewichte davon unverändert bleiben. Mögliche Ursachen für eine Abweichung von der Kugelsymmetrie sind beispielsweise eine mögliche bevorzugte Akkretionsrichtung in der Scheibe oder eine schnelle Rotation (vergleiche Götz 1989) des Protoplaneten. Bei

Gleichgewichten spielt nur letzteres eine Rolle, da die Anfangsbedingungen im Gleichgewichtszustand vergessen sind. Wie Simulationen von Götz (1989) zeigen, kann auch die Rotation in allen außer den extremsten Regimen vernachlässigt werden.

Im Folgenden werden die verwendeten Gleichungen kurz skizziert.

2.2.1 Massensumme und hydrostatisches Gleichgewicht

Das Schwerefeld zu gegebener Dichteverteilung ρ erhält man aus der Poissongleichung

$$\Delta\Phi = -4\pi G\rho. \quad (2.1)$$

In Kugelkoordinaten identifiziert man leicht als erstes Integral von Φ die Masse M :

$$r^2 \frac{d\Phi}{dr} = G \int 4\pi r'^2 \rho dr' = GM_r.$$

Inklusive Planetenkern definiert sich also die Masse M_r am Radius r zu:

$$\begin{aligned} dM &= 4\pi r^2 \rho dr, & \text{bzw.} \\ M_r &= \int_{r_c}^r 4\pi r'^2 \rho dr' + M_c \end{aligned} \quad (2.2)$$

und man erhält durch erneute Integration der Poissongleichung

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{MG}{r^2} + C. \quad (2.3)$$

das Gravitationspotential Φ . Das hydrostatische Gleichgewicht ergibt sich als Kompensation der Schwerkraft durch den Druckgradienten:

$$\begin{aligned} F_{\text{Druck}} &= \frac{dP}{dr} A dr = \frac{dP}{dr} dV, \\ \frac{F_{\text{grav}}}{m} &= -\nabla\Phi \stackrel{(2.3)}{=} -\frac{MG}{r^2}, & \text{also} \\ \frac{dP}{dr} \frac{dV}{\rho dV} &= -\frac{GM}{r^2}, \\ \Rightarrow \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM\rho}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hierbei ist A die Fläche und m das Volumenelement ρdV .

2.2.2 Leuchtkraft

Die Leuchtkraft wird auf der Kernoberfläche durch die akkretierten Planetesimale erzeugt (siehe Abschnitt 2.3, Randbedingungen). In der Hülle wird sie jedoch als konstant angenommen, da wir ja statische Modelle ohne weitere Energiequellen – d.h. „ ϵ -Terme“ = 0 – betrachten und

somit keine potentielle Energie aus der Hülle freigesetzt wird. Es gilt also:

$$\frac{dL}{dr} = 0. \quad (2.5)$$

2.2.3 Temperaturschichtung

Etwas komplizierter wird die Beschreibung der Temperaturschichtung, da diese durch den Energietransport bestimmt wird. Hierzu führe ich zunächst die bei Sternstrukturrechnungen übliche Größe ∇ ein. Sie beschreibt die Änderung der Temperatur als Funktion des Druckes in logarithmischen Variablen:

$$\nabla \equiv \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \frac{dr}{dP}. \quad (2.6)$$

Damit gilt für den Temperaturgradienten:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \nabla. \quad (2.7)$$

Die Bestimmung des Temperaturgradienten ist somit auf die Bestimmung von ∇ zurückgeführt. Die Art des Energietransports bestimmt die Form von ∇ ; ich betrachte drei verschiedene Transportmechanismen: Energietransport durch Strahlung, Wärmeleitung und Konvektion.

Der Strahlungstransport wird in dieser Arbeit stark vereinfacht im Diffusionslimes berechnet. Dies ist bei Gleichgewichten im optisch dicken Fall gerechtfertigt. Es zeigt sich in der Tat bei den Rechnungen, dass alle Protoplaneten auf sehr kurzen Skalen optisch dick werden – der dadurch verursachte Fehler ist also vernachlässigbar. Daher ist es ausreichend, das Rosseland-Mittel des Massenabsorptionskoeffizienten zu kennen (siehe Abschnitt 2.4). Weiterhin haben in der Diffusionsnäherung Wärmeleitung und Strahlungstransport die gleiche mathematische Grundstruktur. Somit kann die Wärmeleitfähigkeit in den Massenabsorptionskoeffizienten integriert werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird nur noch vom Strahlungstransport die Rede sein. Der (sehr kleine) Anteil durch Wärmeleitung ist implizit in κ enthalten. Für die Temperaturschichtung im Gleichgewicht bei Strahlungstransport erhält man dann $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ (für eine Herleitung der Diffusionsnäherung siehe Mihalas u. Weibel-Mihalas 1999, Kap. 6.5), mit:

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{64\pi\sigma G} \frac{\kappa L P}{T^4 M}. \quad (2.8)$$

Im Falle von Konvektion wird ebenfalls eine vereinfachende Annahme gemacht: Konvektion als Transportmechanismus sei 100% effizient. Dies bedeutet, dass die resultierende Temperaturschichtung gerade einen Weg konstanter Entropie darstellt, also isentrop ist. Es gilt also im Falle von Konvektion:

$$\nabla = \nabla_{\text{s}}. \quad (2.9)$$

Dies stellt eine gewisse Vereinfachung dar, da Konvektion in der Realität nie 100% effizient ist.

Jedoch befinden sich die Abweichungen des Temperaturgradienten von Gleichung (2.9) z.B. in der Sonne unterhalb der Photosphäre im Promille-Bereich. Somit scheint diese Annahme gerechtfertigt, um einen globalen prinzipiellen Überblick zu erhalten.

Wann tritt nun Konvektion auf? Hierfür ist die Stabilität der Schichtung gegenüber auf- oder absteigenden Gasblasen ausschlaggebend. Man kann sich leicht überlegen, dass die Schichtung gerade dann stabil ist, wenn gilt (siehe Kippenhahn u. Weigert 1990):

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT}{dP} \right|_{\text{konv}} > \left. \frac{dT}{dP} \right|_{\text{Schichtung}} & \quad \text{also wenn} \\ \nabla_s > \nabla_{\text{rad}} & \quad \text{(Stabilitätskriterium)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dies ist das so genannte Schwarzschild-Kriterium: Wenn ∇_{rad} größer werden würde als der konvektive Gradient ∇_s , wird die Schichtung instabil und Konvektion setzt ein.

Leider führt das Schwarzschild-Kriterium in dieser Formulierung zu numerischen Schwierigkeiten. Dort, wo die Konvektion einsetzt, besitzt der Temperaturgradient einen Knick – er ist nicht stetig differenzierbar. Dies führt insbesondere bei expliziten Integrationsmethoden mit variabler Schrittweitenkontrolle zu großen Problemen (siehe Abschnitt 2.7). Daher verwende ich ein modifiziertes Schwarzschild-Kriterium:

$$\nabla = \min_{\text{glatt}} \{ \nabla_{\text{rad}}, \nabla_s \}. \quad (2.11)$$

Der wichtige Unterschied zu (2.10) besteht in der Bezeichnung *glatt*. Dies bedeutet, dass das Minimum der beiden Funktionen beim Übergang stetig differenzierbar bleibt. Konkret verwende ich folgenden modifizierten T-Gradienten für Strahlung und Konvektion:

$$\nabla = \nabla_{\text{rad}} (1 - \Theta_\epsilon(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_s)) + \nabla_s \Theta_\epsilon(\nabla_{\text{rad}} - \nabla_s), \quad \text{mit} \quad (2.12)$$

$$\Theta_\epsilon(x) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{1}{2}. \quad (2.13)$$

$\Theta_\epsilon(x)$ aus (2.13) ist eine Darstellung der Heavyside-Funktion und für $\epsilon \rightarrow 0$ ist Gleichung (2.12) gleichbedeutend mit (2.11). Für $\epsilon \neq 0$ ist dies nun beliebig oft differenzierbar. Für die Rechnungen dieser Arbeit ist $\epsilon = 10^{-4}$. Der Wert von ϵ sowie die Funktion Θ sind so gewählt, dass für große Abstände vom Übergangspunkt die jeweils „ausgeschaltete“ Komponente sehr stark gegen Null geht, und dennoch am Übergang die numerische Differenzierbarkeit gewahrt bleibt. Auf diese Weise stellt der modifizierte Energietransport keine Probleme mehr für die numerische Integration dar.

2.3 Randbedingungen

Prinzipiell lassen sich die Gleichungen (2.2), (2.4), (2.5) und (2.7) nun für vorgegebene Anfangs- oder Randwerte lösen. In dieser Arbeit werden folgende Randbedingungen gesetzt:

- Die Kernoberfläche ist gegeben durch einen Kern konstanter Dichte:

$$r_{\text{core}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \frac{M_c}{\rho_c}}. \quad (2.14)$$

Die Dichte ρ_c beträgt 5500 kg m^{-3} .

- Der Außenradius ist durch den Hill Radius r_{Hill} gegeben. Hier herrscht Strahlungsgleichgewicht mit dem Nebel. Will man den Planeten in einen konkreten Nebel einbetten, herrscht hier auch Druckgleichgewicht (siehe Abschnitt 5).

$$r_{\text{Hill}} = a \sqrt[3]{\frac{M}{3M_*}}. \quad (2.15)$$

- Die Leuchtkraft wird durch mit konstanter Akkretionsrate einfallende Planetesimale erzeugt und auf der Kernoberfläche deponiert:¹

$$\begin{aligned} \Phi(r_{\text{core}}) &\stackrel{(2.3)}{=} - \int_{r_c}^{r_{\text{Hill}}} \frac{GM_r}{r^2} dr && \text{also} \\ L &= -(\Phi - \Phi_0)\dot{M}, && \text{mit } \dot{M} = \text{konst (z.B. } 10^{-6} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}\text{)} \quad \text{und} \quad (2.16a) \\ & && \Phi_0 = \Phi(r_{\text{Hill}}). \end{aligned}$$

Dieses vereinfachte Konzept scheint mir für einen globalen Überblick angebracht. Weiterhin ist es so nicht nötig, weitere Parameter, wie z. B. die mittlere Planetesimalgröße und -zusammensetzung, in die Theorie einzubauen.

Ich sehe die Akkretionsrate auch eher als Proxy für die Leuchtkraft. Auf diese Weise skaliert sie zumindest bei kleinen Hüllen sinnvoll mit der Kerngröße. Zukünftig könnte man untersuchen, welchen Einfluss eine bessere Behandlung der Planetesimalakkretion auf die Hüllenstrukturen hat.

- Die Nebeltemperatur muss (siehe Abschnitt 3) im Gegensatz zum Nebeldruck vorgegeben werden. Sie wird als Gleichgewichtstemperatur im Strahlungsfeld des Zentralsterns

¹Hier muss man sich fragen ob die Planetesimale überhaupt ganz auf den Kern vordringen können und wo die meiste Energie deponiert wird. Dies hat Mordasini u. a. (2006) untersucht: Ab einer Hüllenmasse von $0,1 M_{\text{J}}$ dringen kleine Planetesimale nicht mehr ganz bis zum Kern vor. Planetesimale mittlerer Größe ($\approx 1 \text{ km}$) deponieren noch bis zu Hüllenmassen von $1 M_{\text{J}}$ alle Energie auf der Kernoberfläche. Bei viel massiveren Hüllen wird der Kern schließlich kaum mehr erreicht. Also stellt Gleichung (2.16) nur eine Vereinfachung dar, die bis zu Hüllen von einer M_{J} eine gute Näherung ist. Bei größeren Hüllen ergibt sich ein anderer Energieeintrag durch die Planetesimale, und die Leuchtkraft ist nicht mehr konstant.

berechnet. Dabei wird angenommen, dass der Planet auf seiner Querschnittsfläche Strahlung absorbiert und diese aufgrund von Rotation und Wärmeleitung auf seiner gesamten Oberfläche emittiert. Auf diese Weise erhält man dieselbe Formel wie Hayashi u. a. (1985)

$$T_{\text{neb}} = 280 \cdot \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1/2} \left(\frac{L_*}{L_{\odot}} \right)^{1/4} \text{ K.} \quad (2.17)$$

- Für die Vergleichsrechnungen (Abschnitt 5) muss auch der Nebeldruck vorgegeben sein. Nach dem Nebel minimaler rekonstituierender Masse (engl. minimum mass solar nebula, MMSN), der aus der Massenverteilung des heutigen Sonnensystems bestimmt wurde (siehe Hayashi 1981; Hayashi u. a. 1985), gilt:

$$\rho_{\text{neb}} = 1.2 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-11/4} \text{ kg m}^{-3}. \quad (2.18)$$

Zur besseren Übersicht sind die in dieser Arbeit tatsächlich auftretenden Kombinationen von Randbedingungen in Tabelle 2.2 zusammengefasst und benannt.

Tabelle 2.2: **In dieser Arbeit verwendete Kombinationen der Randbedingungen.** Jeder Kombination von Randbedingungen wird eine Bezeichnung zugewiesen. Es gibt drei Varianten (\mathcal{M}_x) für die Mannigfaltigkeiten und eine (\mathcal{V}), die nur für die Vergleichsrechnungen verwendet wird. Die Variante \mathcal{M}_c wird für den COROT-Survey verwendet.

Symbol	Kombination der Randbedingungen
\mathcal{M}_A	Gleichungen (2.14), (2.15), L und T_c vorgegeben
\mathcal{M}_B	Gleichungen (2.14), (2.15), L aus (2.16), T_c vorgegeben
\mathcal{M}_C	Gleichungen (2.14), (2.15), L aus (2.16), T_x aus (2.17)
\mathcal{V}	Gleichungen (2.14), (2.15), L aus (2.16), P_x aus (2.18)

2.4 Materialgleichungen

Um die Gleichungen lösen zu können, fehlt nun noch die Angabe der Materialgleichungen, insbesondere von $\rho(P, T)$, $\kappa(\rho, T)$ und $\nabla_s(P, T)$. Diese Werte liegen in tabellierter Form vor und wurden mit mikrophysikalischen Modellen berechnet und an Laborwerte angepasst. Um damit umgehen zu können, müssen die resultierenden Funktionen stetig differenzierbar sein. Um dies zu gewährleisten, werden die eingelesenen Funktionen zweier Parameter mit rationalen Splines nach Spät (1986) interpoliert. Dadurch sind sie einmal stetig differenzierbar und liefern ebenfalls die ersten und zweiten Ableitungen der Splines an gegebener Stelle (P, T) . Falls möglich wurde stets eine im Falle des idealen Gases konstante Größe tabelliert und dieser

Wert dann am Tabellenrand konstant fortgesetzt. So wird z.B. bei der Zustandsgleichung $\lg(\rho T/P)$ tabelliert, anstelle von $\lg(\rho)$.

2.4.1 Zustandsgleichung

Für die Zustandsgleichung verwende ich die Wasserstoff-Helium-Zustandsgleichung von Saumon u. a. (1995) (von nun an SCVH). Die Wahl fiel auf diese Zustandsgleichung, weil sie bei der Modellierung von Jupiter und Saturn im Mehrschichtenmodell eine Übereinstimmung mit den Messungen im Rahmen der Messungenauigkeit erlaubt (siehe Guillot 1999, 2005). In dieser Zustandsgleichung sind sowohl ρ als auch ∇_s als Funktionen von (P, T) tabelliert. Die Autoren haben zwei Versionen der Zustandsgleichung berechnet: mit und ohne Plasma-Phasenübergang. Ich verwende die Version ohne Plasma-Phasenübergang, da dieser bis dato nicht experimentell nachgewiesen ist. Saumon u. a. (1995) geben je eine vollständige Zustandsgleichung für Wasserstoff und Helium an. Für die Mischung ist dann eine Vorschrift angegeben: „additive Volume“. Dies funktioniert bei ρ , jedoch nicht für den Adiabatenexponenten. Für diesen muss die (ebenfalls tabellierte) Entropie inklusive der neu hinzukommenden Mischentropie bestimmt werden und ∇_s dann aus den partiellen Ableitungen – siehe Gleichungen (2.19)-(2.22) – berechnet werden. Da die angegebenen Formeln in Saumon u. a. (1995) teilweise falsch sind, gebe ich hier nochmals die verwendeten Formeln an. Partielle Ableitungen nach P, T sind mit Indizes P, T bezeichnet. Für eine genaue Bedeutung der Symbole siehe Saumon u. a. (1995). Die Unterschiede zum Artikel sind durch Fettschrift hervorgehoben. Die Berechnung von ∇_s erfolgt folgendermaßen:

$$\nabla_s = \left. \frac{\partial \log T}{\partial \log P} \right|_s = -\frac{S_P}{S_T}, \quad (2.19)$$

mit folgender Gesamtentropie $S(P, T)$:

$$S = (1 - Y)S^{\mathbf{H}} + YS^{\mathbf{He}} + S_{\text{mix}}, \quad (2.20)$$

und den daraus resultierenden Ableitungen:

$$S_T = (1 - Y) \frac{S^{\mathbf{H}}}{S} S_T^{\mathbf{H}} + Y \frac{S^{\mathbf{He}}}{S} S_T^{\mathbf{He}} + \frac{S_{\text{mix}}}{S} \left. \frac{\partial \log S_{\text{mix}}}{\partial \log T} \right|_P, \quad (2.21)$$

$$S_P = (1 - Y) \frac{S^{\mathbf{H}}}{S} S_P^{\mathbf{H}} + Y \frac{S^{\mathbf{He}}}{S} S_P^{\mathbf{He}} + \frac{S_{\text{mix}}}{S} \left. \frac{\partial \log S_{\text{mix}}}{\partial \log P} \right|_T. \quad (2.22)$$

Die Mischentropie ergibt sich zu

$$\frac{S_{\text{mix}}}{k_B} = \frac{1-Y}{m_{\text{H}}} \frac{2}{(1+X_{\text{H}}+3X_{\text{H}_2})} \times \left\{ \ln(1+\beta\gamma) - X_e^{\text{H}} \ln(1+\mathbf{1}/\delta) + \beta\gamma [\ln(1+1/(\beta\gamma)) - X_e^{\text{He}} \ln(1+\delta)] \right\}, \quad (2.23)$$

wobei β, γ, δ folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{m_{\text{H}}}{m_{\text{He}}} \frac{Y}{1-Y}, \\ \gamma &= \frac{3}{2} \frac{(1+X_{\text{H}}+3X_{\text{H}_2})}{(1+2X_{\text{He}}+X_{\text{He}^+})}, \\ \delta &= \frac{X_e^{\text{He}}}{X_e^{\text{H}}} \beta\gamma = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \frac{(2-2X_{\text{He}}-X_{\text{He}^+})}{1-X_{\text{H}_2}-X_{\text{H}}} \beta\gamma. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die relativen Anzahl-Häufigkeiten der ionisierten Zustände sowie von molekularem bzw. atomarem Wasserstoff ($X_{\text{H}^+}, X_{\text{He}^+}, X_{\text{H}_2}, X_{\text{H}}$) sind ebenfalls tabelliert. Y ist der Massenanteil von Helium. Für die gesamte Arbeit verwende ich den solaren Wert von $Y = 0,24$.

2.4.2 Massenabsorptionskoeffizient – Opazität

Für die Berechnung des Strahlungstransports wird das Rosseland-Mittel des Massenabsorptionskoeffizienten benötigt.

Hierfür gibt es eine Reihe von verschiedenen Tabellen, die verwendet werden könnten. Meist liegen diese getrennt nach Staub- (Kondensate), Molekül- und Hochtemperaturopazitäten (atomare Absorption) vor. Lediglich die neuen Tabellen von Ferguson u. a. (2005) wurden konsistent für den gesamten Temperatur- und Druckbereich bestimmt und bereitgestellt.

Ich habe mich dennoch dafür entschieden, die Opazitäten von Pollack u. a. (1985) (für $\lg T < 2.3$) in Verbindung mit Molekülopazitäten von Alexander u. Ferguson (1994) und Hochtemperaturopazitäten von Weiss u. a. (1990) zu verwenden. Lediglich bei der Vergleichsrechnung mit Ikoma u. a. (2001) wird mit einer weiteren Wahl von tabellierten Opazitäten gerechnet, um die Unterschiede abzuschätzen.

Die Wahl fiel auf die Tabellen von Pollack u. a. (1985), weil diese speziell für Zustände im Urnebel, in dem die Planeten entstanden sind, gemacht wurden. Die Opazitäten nach Ferguson u. a. (2005) dagegen, nehmen interstellare Staubeigenschaften an. Dies steht nicht im Widerspruch zu einer solaren Heliumhäufigkeit Y wie im letzten Abschnitt beschrieben. Vielmehr kommt es hierbei auf die chemische Struktur und nicht zuletzt die Größe und Form des Staubes an, welche die Absorptionseigenschaften entscheidend beeinflussen, ohne von den solaren Elementhäufigkeiten abzuweichen.

2.5 Zusammenfassung der zu lösenden Gleichungen

Die schlussendlich zu lösenden Gleichungen sind hier nochmals zusammengefasst, die implizit enthaltenen Materialgleichungen sind mit Fettschrift hervorgehoben.

$$\begin{aligned}
 \frac{dM}{dr} &= 4\pi r^2 \boldsymbol{\rho}(\mathbf{P}, \mathbf{T}) & \frac{dT}{dr} &= \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \nabla(\mathbf{P}, \mathbf{T}) \\
 \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM}{r^2} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{P}, \mathbf{T}) & \frac{dL}{dr} &= 0 \\
 \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{GM}{r^2}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Die Gleichung für Φ dient dabei ausschließlich der Formulierung der Randbedingung (2.16).

2.6 Lösungsverfahren – Integration der Gleichungen

Nun muss das Gleichungssystem (2.25) integriert werden. Es handelt sich um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Dieses wird mit einem expliziten Schrittverfahren integriert.

Falls alle Randbedingungen – Gleichungen (2.14)-(2.17) – verwendet werden, handelt es sich um ein zweiseitiges Randwertproblem und es muss „auf die richtige Lösung geschossen“ werden. Dies wird in Abschnitt 2.6.3 beschrieben. Eine weitere Möglichkeit wäre ein implizites Verfahren, welches dann auch beliebige Randbedingungen erlaubt.

2.6.1 Numerische Umsetzung in Ada95

Nachdem das Gleichungssystem (2.25) nicht analytisch gelöst werden kann, müssen numerische Näherungen am Computer berechnet werden. Dabei stellt sich zunächst die Frage der Plattform: Mit welcher Programmiersprache wird das Problem formuliert? Ich habe mich für Ada95 entschieden, und zwar aus folgenden drei Hauptgründen:

Sicherheit Ada95 wurde für die Steuerung von Echtzeitsystemen und hochkritischen Systemen konzipiert. Die oberste Priorität beim Design der Programmiersprache war deshalb die Sicherheit des Codes. Der Code sollte, sobald er erfolgreich übersetzt ist, genau das tun, was der Programmierer sich gedacht hat. So ist es z.B. nicht möglich, durch Weglassen eines Semikolons die Ausführung des Codes zu verändern. Vielmehr wird der Code dadurch illegal. Ebenso ist es nicht möglich, durch Hinzufügen oder Wegnehmen eines „include“-Befehls einen bereits überprüften Code zu anderer (falscher) Ausführung zu bringen.

Objekt-Orientierung Es sollte eine objektorientierte Programmiersprache verwendet werden, damit komplizierte Sachverhalte gut abstrahiert werden können. Damit können wesentlich kompliziertere Verfahren leichter implementiert werden. Der Code wird viel leichter

wartbar und einzelne Komponenten sind austauschbar. So ist es z.B. problemlos möglich, die Zustandsgleichung durch eine andere zu ersetzen oder den Fließkommatyp zu ändern.

Geschwindigkeit Bei Verwendung eines guten Compilers ist Ada95 genauso schnell wie C oder Fortran 90. Dieser Grund war jedoch nur sekundär, da die meiste Zeit mit der Softwarewartung und Veränderung und nicht mit der Ausführung des Codes verbraucht wird. Es wurde lediglich überprüft, ob die Programmiersprache nicht deutlich langsamer als die Konkurrenz ist. Dies ist nicht der Fall, vielmehr können durch strenge Typkontrolle (engl.: strong typing) die meisten Index-Checks zur Laufzeit vermieden werden, und der Code wird dadurch eher schneller ausgeführt, ohne auf die Sicherheitschecks verzichten zu müssen (die in Fortran meist aus Geschwindigkeitsgründen deaktiviert werden).

Da es bei numerischen Simulationen (fast) keine Möglichkeiten zur Überprüfung der Richtigkeit des eingegebenen Codes gibt, ist der Punkt Sicherheit besonders wichtig. Schließlich stellen bereits die Gleichungen extreme Vereinfachungen der Realität dar, und man möchte zumindest sicher gehen, dass diese Gleichungen korrekt gelöst werden. Bis auf interne Konsistenz-Checks und Vergleichsrechnungen (siehe Kapitel 2.7 und 5) gibt es aber keine Möglichkeit, den Code zu überprüfen. Dies steht im krassen Gegensatz zu Treibern oder Office-Anwendungen, wo der User feststellt, ob das Programm tut was er will oder eben nicht.

2.6.2 Einschritt- und Mehrschrittverfahren

Bei einem expliziten Schrittverfahren wird das System von Differentialgleichungen entlang der Koordinate (in unserem Fall r) vom Startwert zum Endwert integriert. Dabei wird jeder Zwischenschritt so klein gewählt, dass die Ableitungen diskret verstanden werden können. Bei Verfahren mit Schrittweitenkontrolle wird der nächste Schritt Δr gerade so groß gewählt, dass der dabei aufgrund der Diskretisierung auftretende Fehler unter einer zuvor festgelegten Schranke ϵ bleibt. Wird der Schritt Δr jedoch zu klein gewählt, übersteigen die Rundungsfehler in der endlichen Fließkommaarithmetik den Zugewinn an Genauigkeit durch den kleineren Schritt. Dies bedeutet, dass es eine maximal erreichbare Genauigkeit gibt. Durch Hinzunahme höherer Ordnungen, d.h. durch bessere Diskretisierungen der Differentiale, die auch die höheren Ordnungen der Funktionen berücksichtigen, kann der Fehler bei gleicher Schrittgröße verringert werden, wenn die Funktion hinreichend oft stetig differenzierbar ist. Handelt es sich z.B. um ein Polynom 4. Grades, so erreicht man mit einer Diskretisierung 4. Ordnung bereits die exakte Lösung bei beliebiger Schrittweite.

Die wichtigste Klasse der Einschrittverfahren sind die Runge-Kutta Verfahren. In dieser Arbeit wurde zunächst das eingebettete Runge-Kutta Verfahren 4./5. Ordnung modifiziert nach Cash u. Karp (1990) verwendet. Der Algorithmus wird beschrieben in *Numerical Recipes in Fortran* (von nun an: N.R., Press u. a. 2003) und der Quellcode wurde nach Ada95 portiert aus

N.R. in Fortran 90 (Press u. a. 1996). Mit diesem Verfahren können die Gleichungen erfolgreich integriert werden.

Um die Rechenzeit zu verkürzen, wurde außerdem ein Mehrschrittverfahren verwendet: Die Bulirsch-Stoer-Richardson Extrapolation. Das Verfahren beruht darauf, einen relativ großen Schritt Δr in unterschiedlich viele Teilschritte immer kleinerer Schrittgröße zu unterteilen. Dann wird das Ergebnis für $\Delta r \rightarrow 0$ extrapoliert. Für diese Arbeit wurde der Quellcode aus N.R. in Fortran 90 (Press u. a. 1996) nach Ada95 portiert, und zwar in der Version mit Extrapolation durch rationale Funktionen. Es hat sich gezeigt, dass dieser Integrator im vorliegenden Fall bis zu 50 mal schneller ist als Fehlberg-Cash-Karp-Runge-Kutta.

Für eine genauere Beschreibung der beiden Verfahren verweise ich den interessierten Leser auf Engeln-Müllges u. Reutter (1990); ganz besonders zu empfehlen ist Stoer u. Bulirsch (1983, 1978).

2.6.3 Zweiseitiges Randwertproblem

Durch die im letzten Abschnitt vorgestellten Integrationsverfahren lassen sich bereits Anfangswertprobleme berechnen. Jedoch liegt hier ein zweiseitiges Randwertproblem vor. Man muss die Anfangswerte daher mit einem Schießverfahren variieren bis alle Randbedingungen erfüllt sind.

Diese Aufgabenstellung stellt die Suche nach einer Nullstelle für nichtlineare Gleichungen dar. Es muss quasi die Nullstelle der äußeren Randbedingungen als Funktion der Anfangswerte bestimmt werden. Da bei Funktionen mehrerer Variabler gar nicht garantiert werden kann, dass eine Nullstelle überhaupt existiert, gibt es keine „sicheren“ Verfahren, also Verfahren die immer konvergieren (wie z.B. das Bisektions-Verfahren in einer Dimension). Man muss schlicht innerhalb eines Konvergenzradius einen Versuch starten, und wenn dann das Verfahren konvergiert, weiß man, dass man zumindest eine der Nullstellen gefunden hat.

Ich verwende für die Nullstellensuche das Newton-Raphson Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme, auch bekannt als Schießverfahren, wenn es auf die Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen angewendet wird. Unsere Funktion F , deren Nullstelle gesucht werden soll, ist also jeweils eine Integration über das Gleichungssystem. Die Ergebnisse der Integration werden dann in die äußeren Randbedingungen eingesetzt, um die Funktion F zu erhalten. Für die Nullstellensuche werden die Ableitungen der nichtlinearen Funktion nach den zu schießenden Variablen benötigt. Da die Funktion in unserem Fall gerade aus der Auswärtsintegration der Anfangsbedingungen zustandekommt, gibt es keine analytische Darstellung der Ableitungen, sie müssen daher aus dem Differenzenquotienten numerisch bestimmt werden. Dies ist der anfälligste Schritt der Integrationsmethode, weil die Bestimmung der Schrittweite für die Bestimmung des Differenzenquotienten nicht trivial ist. Ist die Schrittweite schlecht gewählt, werden unsinnige Werte für die Ableitung ermittelt, und das Verfahren konvergiert nicht.

Ich verwende eine auf Ada95 übertragene Implementierung des Schießverfahrens aus N.R. in Pascal (Press u. a. 1992).

2.7 Genauigkeit der Lösung

Ein erster wichtiger Schritt ist die Überprüfung des Algorithmus auf Konsistenz. Dafür betrachte ich exemplarisch ein Modell nahe der kritischen Masse: Alle Parameter werden vorgegeben, dann wird zuerst einwärts und mit den erhaltenen Werten wieder auswärts integriert. Es handelt sich also um zwei Anfangswertprobleme. Der relative Fehler wird überprüft und soll hier an einem Beispiel gezeigt werden.

Zunächst wird die Integration mit dem klassischen Schwarzschildkriterium durchgeführt. Dafür wird stets eine Einwärtsintegration bis zur Kernoberfläche durchgeführt und anschließend mit den ermittelten Werten zurückgerechnet. Dann werden die beiden radialen Profile verglichen. Dazu muss eine der beiden Rechnungen interpoliert werden, da bei den Integrationsverfahren mit adaptiver Schrittweitenkontrolle die Stützstellen verschieden sind. Dann kann der relative Fehler berechnet werden. Dies soll hier am Beispiel des Temperaturverlaufs – dort ist der Fehler am größten – gezeigt werden. Es stellt sich heraus, dass die Einwärtsintegration auch bei höchster Integrationsgenauigkeit nicht reproduziert werden kann!²

Schlussfolgerung daraus ist, dass die Integratoren mit dem abrupten Wechsel der Gleichungen nicht zurecht kommen. Daher wurde das Schwarzschildkriterium (siehe Gleichungen (2.11), (2.12) und (2.13)) modifiziert.

Durch das modifizierte Schwarzschildkriterium verschwinden diese Probleme.³ Für kleines ϵ wird eine sehr gute Gesamtgenauigkeit von 10^{-10} erreicht. Den direkten Vergleich beider Varianten bei niedriger Genauigkeit ϵ zeigt Abbildung 2.1: Trotz geringerer Genauigkeit des Integrators gelingt in der modifizierten Variante die Auswärtsintegration, wohingegen es beim klassischen Schwarzschildkriterium nicht gelingt, die Einwärtsintegration zu reproduzieren.

Somit ist der interne Konsistenzcheck erfolgreich abgeschlossen. Die Lösungen sind in allen Variablen selbst bei moderater Wahl des Genauigkeitsparameters ϵ besser als 10^{-5} global bestimmt. Ein weiterer wichtiger Schritt bei der Überprüfung der Algorithmus folgt in Abschnitt 5, wo Ergebnisse von anderen Autoren nachgerechnet werden.

²Das Ergebnis für verschiedene Wahl des Genauigkeitsparameters ϵ zeigt Abbildung A.4. Dort werden Temperatur $\log_{10} T$ und der relative Fehler $\log_{10}(T_{\text{in}} - T_{\text{out}})/T_{\text{in}}$ als Funktion des Radius r am Beispiel eines willkürlich ausgewählten Modells geplottet. Fehler größer als 100% werden nicht dargestellt. Es wurde mit RK integriert. Die Einwärtsintegration wurde dabei immer mit maximaler Genauigkeit ($\epsilon = 10^{-18}$) durchgeführt. Man kann zwei Dinge feststellen: a) Selbst bei maximaler Genauigkeit weicht die Auswärtsintegration von der Einwärtsintegration ab. b) Der Fehler steigt beim Wechsel von konvektiver Zone (rot/magentarot) zu radiativer Zone (blau/zyan) plötzlich drastisch an (bei $\log r \approx 7.1$).

³Der endgültige Test besteht darin, die Einwärts- und Auswärtsintegration mit verschiedenen Integratoren durchzuführen. Dies ist in Abbildung A.5 gezeigt. In der linken Spalte wird jeweils mit RK einwärts integriert und mit BS auswärts. In der rechten Spalte erfolgte die Einwärtsintegration mit BS und auswärts mit RK. Die vorgegebene Genauigkeit für einen einzelnen Schritt ϵ variiert von oben nach unten: $\epsilon = 10^{-9}, 10^{-12}, 10^{-18}$. Auch hier musste wieder interpoliert werden, um die zwei Integrationswege miteinander vergleichen zu können. Für eine hohe Genauigkeit der Interpolation wurde stets die RK-Integration interpoliert, bei BS sind so wenige Datenpunkte vorhanden, dass eine exakte Interpolation nicht möglich ist. Man erkennt, dass bereits die geringe Genauigkeit ausreichend ist, um die Integration zu reproduzieren.

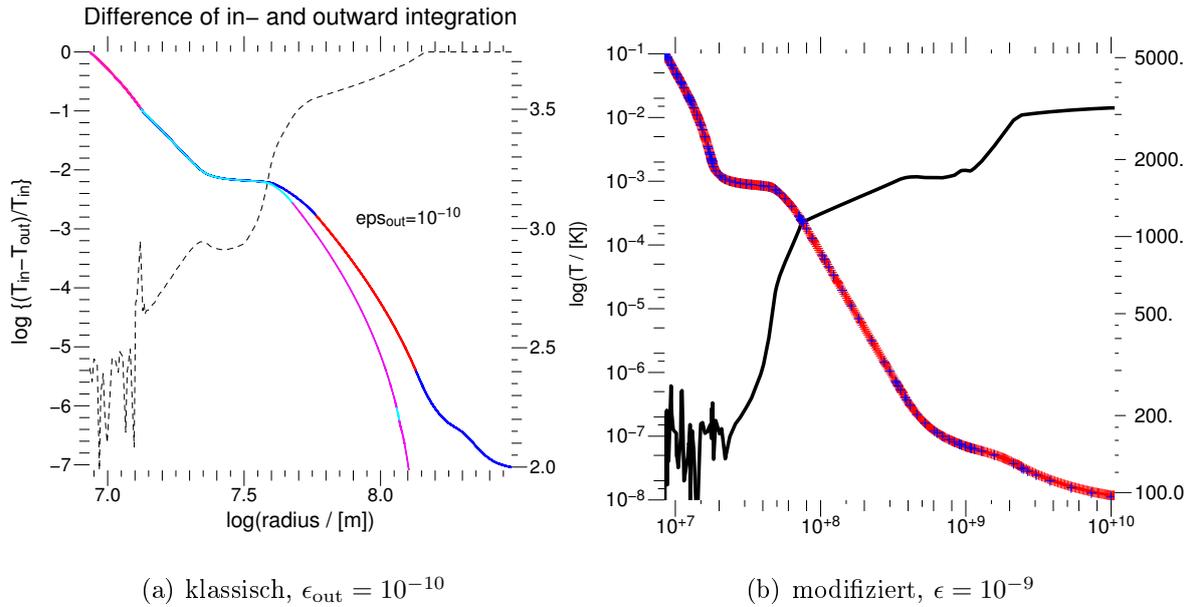


Abbildung 2.1: **Testintegration für Protoplaneten nahe der kritischen Masse mit klassischem bzw. modifiziertem Schwarzschild-Kriterium.** Vergleich einer Auswärtsintegration mit einer Einwärtsintegration höchster Genauigkeit ($\epsilon = 10^{-18}$) als Referenz. Einmal mit klassischem Schwarzschildkriterium (a) sowie mit der modifizierten Variante (b). Aufgetragen ist die Temperatur als Funktion des Radius sowie der relative Fehler bei der Auswärtsintegration. Bei (a) sieht man den plötzlichen Anstieg des relativen Fehlers um mehrere Größenordnungen beim Wechsel konvektiv/radiativ. Blau/zyan sind hier radiative Bereiche, rot/magentarot sind konvektive Bereiche. Bei (b) wird die Einwärtsintegration (rot) durch die Auswärtsintegration (blau) gut reproduziert. Auch bei höheren Genauigkeiten ist die korrekte Auswärtsintegration bei klassischem Schalter nicht möglich (siehe Abbildungen A.4 und A.5 für weitere Integrationen unterschiedlicher Genauigkeit).

3 Die Mannigfaltigkeit als Repräsentant aller Gleichgewichte

Will man alle möglichen Gleichgewichte charakterisieren, stellt sich die Frage, wie a) alle Gleichgewichte gefunden werden können und wie b) diese dargestellt werden können. Auf diese Fragen soll in diesem Kapitel eine Antwort gegeben werden.

3.1 Über die Wahl der freien Parameter bei der Klassifikation der Gleichgewichte

Welche Größen soll man für die Übersicht über alle Gleichgewichte variieren? Es ist zunächst naheliegend, die Klassiker, wie z.B. Mizuno (1980), zu betrachten: Hier wird in einer Rechnung nur die Gesamtmasse variiert. Es werden dann verschiedene Rechnungen für verschiedene Nebeldrücke durchgeführt. Man muss sich nun folgende Frage stellen: Können auf diese Weise alle Gleichgewichte gefunden werden? Wie man aus den Ergebnissen dieser Arbeit leicht sieht, lautet die Antwort nein. Schließlich gibt es für einen vorgegebenen Außendruck und vorgegebene Kernmasse oft mehrere mögliche Lösungen (siehe Abschnitt 3.2), und diese können durch klassische Rechnungen nicht ohne weiteres gefunden werden. Dies wird auch nochmal bei der Betrachtung der Vergleichsrechnungen (Kapitel 5) sowie bei der Berechnung der klassischen M_c - M_{tot} -Kurve aus den neuen Rechnungen (Kapitel 7) deutlich werden.

Die Wahl fällt auf die Kernmasse M_c und den Druck auf der Kernoberfläche P_c als freie Parameter. Durch die Variation dieser beiden Parameter zusammen mit der Wahl von L bzw. von \dot{M}_c können vermutlich alle Gleichgewichte erreicht werden. Dies hat noch einen weiteren Vorteil: Da die Nebeldrücke im Urnebel weitestgehend unbekannt sind, ist es fragwürdig, den Nebeldruck vorzugeben. Somit ist es besser, den Innendruck P_c zu variieren, weil dadurch automatisch alle Nebel durchmustert werden. Auch bei der Nebeltemperatur wäre es prinzipiell besser, keine Vorgaben zu machen. Hier ist es aber leider nicht möglich, die Temperatur auf der Kernoberfläche zu fixieren (siehe Abschnitt 3.2) wie das beim Druck gemacht wird. Jedoch kann man für optisch dünne oder „passive“ Nebel im Allgemeinen zumindest eine physikalisch plausible Nebeltemperatur angeben: Die Gleichgewichtstemperatur im Strahlungsfeld des Zentralgestirns. Für den Druck dagegen lässt sich keine simple Plausibilitätsüberlegung anstellen. Man muss sich daher ad hoc entscheiden und z.B. den Nebel minimaler rekonsti-

tuierender Masse verwenden, welcher für andere Systeme als unser Sonnensystem ohne Bezug ist. Schließlich extrapoliert er aus den heute vorhandenen Planeten unseres Sonnensystems auf die Massenverteilung des ursprünglichen Nebels.

Die Menge aller radialen Strukturen, also aller Gleichgewichtslösungen, bezeichne ich als Mannigfaltigkeit der Protoplaneten. Um mit dieser Mannigfaltigkeit arbeiten zu können, benötigt man eine Darstellungsform. Es ist nicht möglich, alle radialen Profile zu betrachten, schließlich würde man von der Informationsfülle erschlagen. In dieser Arbeit werden daher bestimmte – möglichst aussagekräftige Größen – als Funktion von M_c und P_c dargestellt. Es sind dies insbesondere:

P_x der Außendruck (extern) oder Nebeldruck

M_{tot} die Gesamtmasse des Planeten

M_{env} die Hüllenmasse des Planeten

$T_{x/c}$ die Nebel- oder Kerntemperatur des Planeten (je nach Typ der Mannigfaltigkeit)

Diese Funktion zweier Parameter, z. B. $M_{\text{env}}(M_c, P_c)$, kann dann graphisch dargestellt werden. Entweder als zweidimensionale Graphik, auf der die Größe X über eine Farbtabelle abgebildet wird, oder als Schrägriß der Fläche $X(M_c, P_c)$, in der die Größe X durch die Höhe der Fläche repräsentiert wird. Da sowohl die Kernmasse als auch der Druck auf der Kernoberfläche über viele Größenordnungen variiert wird, werden die X- und Y-Achse (M_c, P_c) stets logarithmisch dargestellt.

Kombiniert man die beiden Graphiken, ist es möglich, zwei Größen gleichzeitig, z. B. M_{env} in Richtung z und P_x als Farbe der Oberfläche, darzustellen. Diese Form der Darstellung wird in dieser Arbeit bevorzugt angewandt.

3.2 Mannigfaltigkeit als einseitiges Randwertproblem

Zunächst sollten für diese Arbeit alle Größen innen, also nur auf einer Seite fixiert werden. Damit erhält man dann ein Anfangswertproblem, welches viel einfacher als ein zweiseitiges Randwertproblem integriert werden kann. Die Überlegung war folgende: Da die Anfangswerte sowieso über viele Größenordnungen variiert werden, ist es ausreichend, alle Randbedingungen auf nur einer Seite zu variieren. Durch die Variation werden dann automatisch auch am anderen Integrationsrand alle Werte erreicht. Anders formuliert: Es werden ja ohnehin *alle Gleichgewichte* gesucht, also macht es keinen Sinn, ein zweiseitiges Randwertproblem (RWP) zu lösen. Die Lösung des entsprechenden einseitigen RWPs genügt, um auch alle Außenränder abzutasten. Diese Überlegung ist für ein nur schwach nichtlineares System sicher richtig. Leider ist das Gleichungssystem (2.25) extrem nicht-linear und dieses Konzept geht nicht auf.

Nichtsdestotrotz werde ich das Konzept der Mannigfaltigkeit zunächst anhand einer solchen Mannigfaltigkeit vorstellen, also einer die durch eine Menge einseitiger Anfangswertprobleme gegeben ist: Sowohl Temperatur als auch Leuchtkraft auf der Kernoberfläche sind für die ganze Mannigfaltigkeit, also für alle Werte von (M_c, P_c) , konstant, es handelt sich also um den Satz von Randbedingungen \mathcal{M}_A (siehe Tabelle 2.2). Ich wähle zur Demonstration die folgenden Werte:

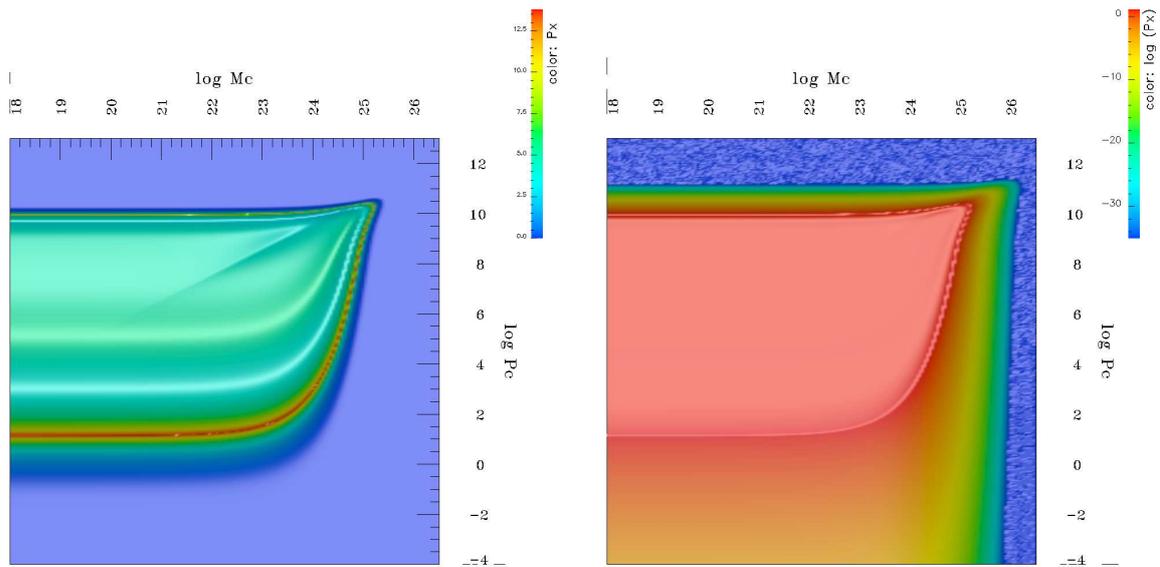
- $a = 5.2 \text{ AE}$,
- $\log_{10} T_c / [\text{K}] = 3.1$,
- $\log_{10} L / [\text{W}] = 11$.

Sie charakterisieren einen sehr leuchtschwachen Protoplaneten und machen daher einen Vergleich mit isothermen Protoplaneten so einfach wie möglich. Diese Werte sind jedoch lediglich bei den allerfrühesten Phasen der Planetenentstehung realistisch. Die mit diesen Werten berechnete Mannigfaltigkeit enthält alle Protoplaneten (Kern-Hüllenstrukturen) im gewählten Bereich der M_c - P_c -Ebene.

Betrachten wir zunächst den Außendruck. Dies ist in Abbildung 3.1 gezeigt: die Mannigfaltigkeit in Außendruckdarstellung. Wie bereits erläutert sind im Wesentlichen zwei Darstellungen einer Funktion zweier Variabler denkbar: (a) Abbildung über eine Farbtabelle und (b) in z-Richtung. Außerdem kann man zwischen linearer und logarithmischer Darstellung wählen. Somit ergeben sich vier verschiedene Kombinationen, die in den Abbildungen 3.1 (a-d) gezeigt sind. Variante (a) wird in Zukunft schlicht als Farbdarstellung oder Farbe bezeichnet (Abb.3.1 a,b), Variante (b) nenne ich Höhendarstellung (Abb.3.1 c,d). Wird nichts angegeben, ist stets die Höhendarstellung gemeint. (Hinweis: Bei der Darstellung in der Ebene wird in dieser Arbeit dennoch von der dreidimensionalen Darstellung ausgegangen, diese dann beleuchtet und in die Ebene projiziert. Auf diese Weise werden die Strukturen deutlicher sichtbar, die Farbskala aber geringfügig verfälscht). Man sieht an der Farbskala von Abbildung (b) dass der Außendruck bis 10^{-35} Pa herunter reicht. Bei kleineren Drücken wurde die Rechnung abgebrochen. In Abbildung (d) beträgt der kleinste dargestellte Druckwert 10^{-4} Pa , um die interessanten Bereiche hervorzuheben, die Farbskala ist weiterhin komplett. In dieser Arbeit wird in erster Linie die logarithmische Variante beider Darstellungen in Kombination angewandt. Auf diese Weise lassen sich zwei Größen gleichzeitig darstellen.

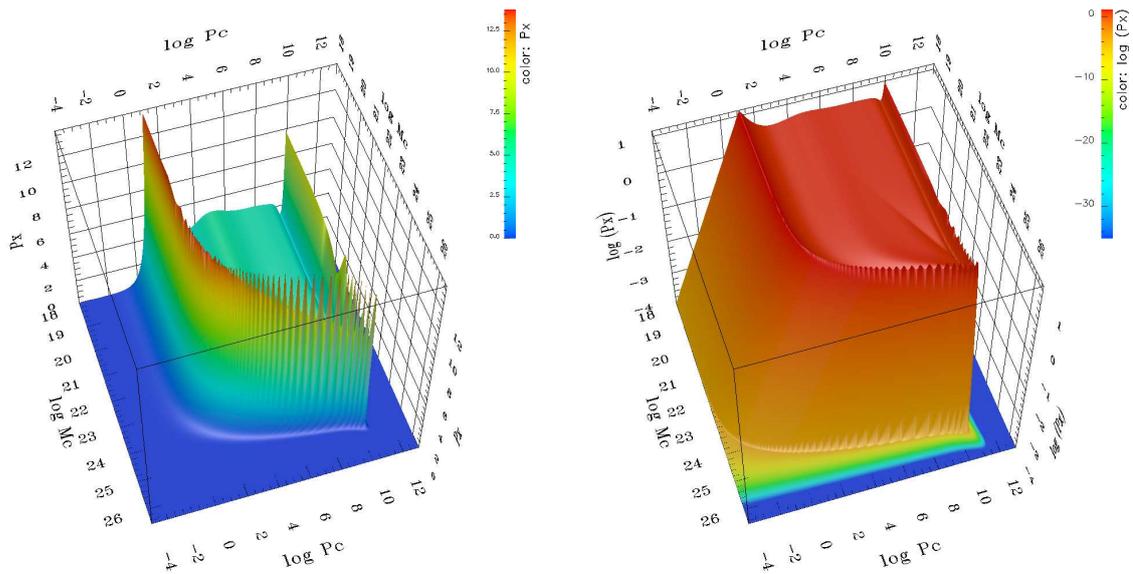
3.3 Bereiche einer Mannigfaltigkeit

Offenbar lässt sich die Mannigfaltigkeit anhand der Graphiken, wie auch schon im isothermen Fall (siehe Pečnik, B. 2005), zumindest rein phänomenologisch in klar voneinander getrennte Regionen einteilen. Bevor ich die einzelnen Bereiche der Mannigfaltigkeit vorstelle, betrachten



(a) Farbtabelle P_x

(b) Farbtabelle $\log_{10} P_x$



(c) linear (Farbtabelle + Fläche)

(d) logarithmisch (Farbtabelle + Fläche),
kleinster dargestellter Wert: -4

Abbildung 3.1: **Mögliche Darstellungsformen einer Mannigfaltigkeit für den Außendruck** am Beispiel von Planeten mit festgehaltener Leuchtkraft und Innentemperatur. Der Außendruck P_x wird als Funktion von M_c und P_c dargestellt. Dies geschieht durch Umsetzung über eine Farbtabelle (obere Hälfte) und/oder durch Abbildung auf eine dreidimensionale Fläche (untere Hälfte). Dabei kann der Druck P_c linear (linke Hälfte) oder logarithmisch (rechte Hälfte) dargestellt werden. Bei den Abbildungen (a,b) werden die Konturen dadurch betont, dass die dreidimensionale Fläche durch Lichteffekte akzentuiert und dann in die M_c - P_c -Ebene projiziert wird.

wir zunächst zwei weitere Größen: M_{tot} und M_{env} . Abbildung 3.2 zeigt die beiden Massendarstellungen. Die z-Komponente zeigt die Gesamt- bzw. Hüllenmasse als Funktion von M_c und P_c . Die Farbe zeigt weiterhin den Außendruck P_x .

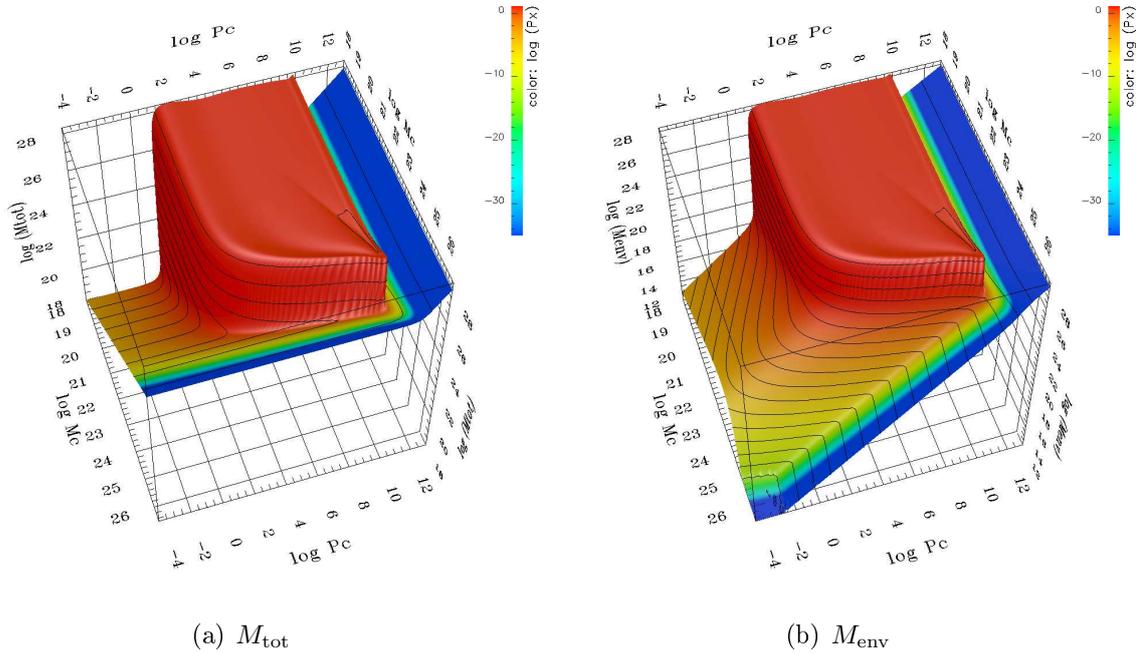


Abbildung 3.2: **Massen-Mannigfaltigkeiten:** Die (a) Gesamtmasse M_{tot} und (b) Hüllenmasse M_{env} als Funktion von M_c und P_c . Für jede Größenordnung ist eine Konturlinie gezeichnet. Die Farbskala gibt weiterhin den Außendruck an.

Die verschiedenen Bereiche sind auch in Abbildung 3.2 deutlich zu erkennen: Die Mannigfaltigkeit lässt sich in vier Zonen einteilen. Am besten lassen sich alle Bereichsgrenzen jedoch in einer Mannigfaltigkeit aus M_{tot} und M_{env} darstellen. Dies ist in Abbildung 3.3 getan. Die Abbildung zeigt eine Draufsicht auf die M_{tot} - M_{env} -Mannigfaltigkeit. Für jede Größenordnung ($10^n, n \in \mathbb{Z}$) ist eine Konturlinie gezeichnet, die schwarzen Konturen gehören zu M_{tot} , die grauen zu M_{env} . Die dicke schwarze Linie grenzt die verschiedenen Bereiche voneinander ab. Sie lassen sich nach Pečnik u. Wuchterl (2005) durch zwei Charakteristika in vier Regionen einteilen: KOMPAKT/AUSGEDEHNT und SELBSTGRAVITIEREND/NICHT SELBSTGRAVITIEREND. KOMPAKT bedeutet, dass es bei großen Radien keine nennenswerten Massenanteile gibt, die Dichte fällt nach außen zu stark (stärker als $\rho \propto r^{-2}$, damit stärker als das Volumen $\Delta V \propto r^2$) ab. AUSGEDEHNTE Objekte dagegen haben Massenbeiträge bis zum Hill Radius. Meist sitzt bei ihnen sogar ein Großteil der Masse in den Außenschalen. SELBSTGRAVITIEREND bedeutet, dass die Hüllenmasse einen signifikanten Anteil der Gesamtmasse ausmacht, also vergleichbar oder größer als die Kernmasse ist. Bei diesen Objekten beeinflusst die Hülle ihre eigene Struktur. Im Gegensatz dazu ist das Gravitationspotential bei den NICHT SELBSTGRAVITIERENDEN Objekten allein durch die Masse des Kerns gegeben. Mit diesen zwei Eigenschaften lassen sich die Planeten in vier verschiedene Regionen einteilen (vgl. Abbildung 3.3):

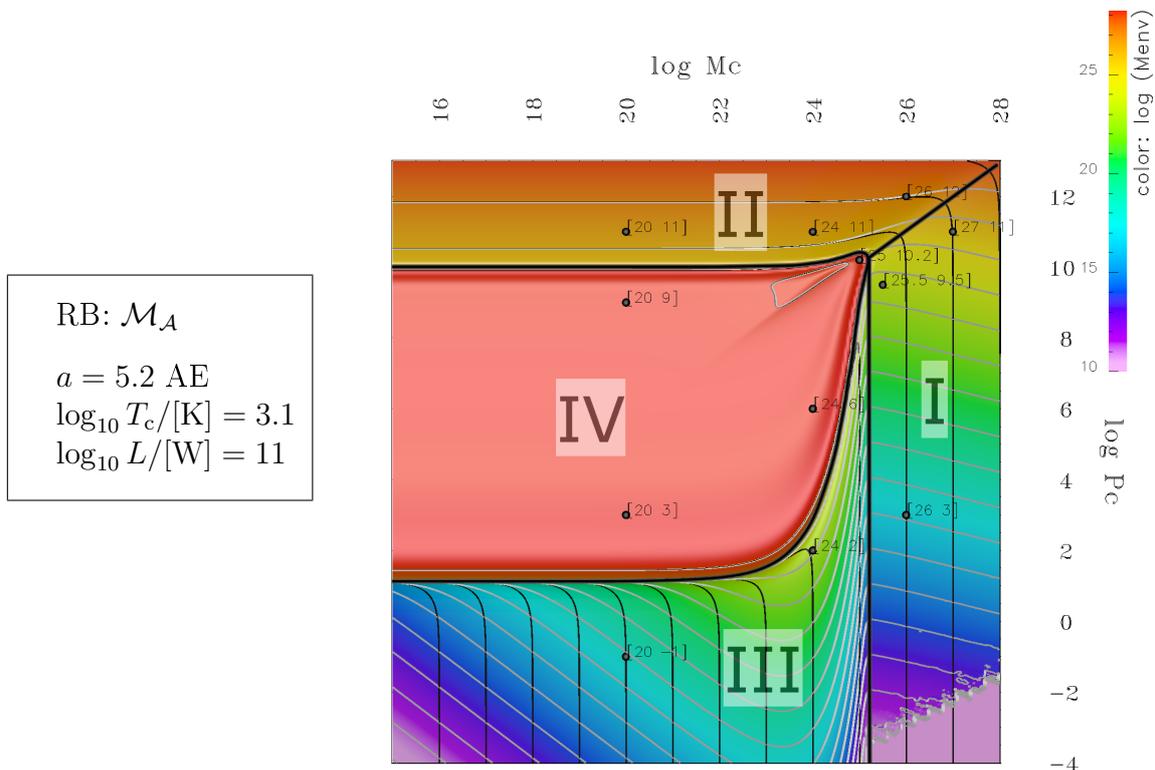


Abbildung 3.3: **Definition der typischen Bereiche einer Mannigfaltigkeit.** Massendarstellung mit Bereichsgrenzen sowie mit Markierungen für verschiedene radiale Plots. Gezeigt ist M_{tot} (Höhe, schwarze Konturen) zusammen mit M_{env} (Farbe, graue Konturen).

Region I – „voll entwickelte terrestrische Planeten“ (KOMPAKT & NICHT SELBSTGRAVITIEREND) Diese Objekte sind kompakt und nicht selbstgravitierend. Die Gesamtmasse entspricht im Wesentlichen der Kernmasse (erkennbar an den senkrechten Konturen von M_{tot} in Abbildung 3.3). Es handelt sich also um kompakte Objekte mit kleiner Atmosphäre, die in etwa der barometrischen Höhenformel genügt.

Region II – „voll entwickelte Gasplaneten“ (KOMPAKT & SELBSTGRAVITIEREND) In dieser Region befinden sich sehr kompakte, selbstgravitierende Gaskugeln. Die Gesamtmasse ist im Wesentlichen gleich der Hüllenmasse (Konturen von M_{tot} und M_{env} liegen parallel sehr eng nebeneinander). Der Kern hat keine Bedeutung. Im Gegensatz zu Region IV ist die Eigengravitation so stark, dass sich in den äußeren Schalen keine signifikanten Massenanteile mehr befinden.

Region III – „Planetesimale im Nebel“ (AUSGEDEHNT & NICHT SELBSTGRAVITIEREND) Diese Objekte haben eine quasihomogene Hülle, die Gravitation des Kerns ist zu schwach, um das Hüllenprofil (Dichte, Druck, Temperatur) stark zu beeinflussen. Gleiches gilt für die Gashülle. Der Außendruck entspricht im Wesentlichen dem Innendruck (siehe auch Abbildung 3.1(d)).

Region IV – „Protoplaneten“ oder „Insel“ (AUSGEDEHNT & SELBSTGRAVITIEREND)
 Die Hüllenmasse ist in erster Näherung unabhängig von Kerngröße und Gasdruck am

Kern. Von der unteren zur oberen Begrenzung (in P_c) nimmt die Eigengravitation zu. Die Grenze zu den niedrigen Drücken entspricht gerade der Rochedichte¹, d.h. eine Vergrößerung des Radius führt über die Massenzunahme zu einer ausreichenden Vergrößerung des Hill-Radius, somit würde die Gesamtmasse ohne Eigengravitation divergieren. Das Einsetzen der Eigengravitation bestimmt die Massengrenze der „Insel“. Somit zeigen alle Protoplaneten EIGENGRAVITATION. Im isothermen Fall sind alle Objekte in dieser Region AUSGEDEHNT.

Die Region der Insel mit den größten Kernmassen M_c wird in Zukunft auch als Spitze, oder Region nahe der kritischen Masse bezeichnet.

Diese vier Bereiche, die auch schon im isothermen Fall auftreten (siehe Pečnik u. Wuchterl 2005; Pečnik, B. 2005), bleiben auch für kompliziertere Randbedingungen \mathcal{M}_B & \mathcal{M}_C (\rightarrow Tabelle 2.2) im Wesentlichen erhalten (siehe Abbildung 6.4). Jedoch lassen sich die Regionen I und II bei festgehaltener Außentemperatur T_x nur noch in kleinen Bereichen berechnen, da der Hill-Radius meist numerisch nicht mehr erreicht wird, weil der Außendruck P_x bei den kompakten Lösungen sehr stark abfällt. Bei den Pegasi-Planeten ist Region IV deutlich schwächer ausgeprägt und eine solche Einteilung mitunter nicht mehr möglich.

In der Abbildung 3.3 sind außerdem einige Stellen markiert und mit den Werten von M_c und P_c gekennzeichnet. Für jeden dieser ausgewählten Planeten ist in Abbildung 3.4 der Verlauf von Masse, Temperatur und Druck gezeigt.

3.4 Mannigfaltigkeit als zweiseitiges Randwertproblem

3.4.1 Bestimmung der Leuchtkraft aus einer konstanten Akkretionsrate

Es erscheint unphysikalisch, wenn die Leuchtkraft über die gesamte Mannigfaltigkeit konstant ist, da Objekte von Mondgröße nicht gleich leuchtstark sein werden wie z. B. jupitergroße Objekte. Wie soll man also die Leuchtkraft definieren? Ich treffe eine mögliche Wahl, wie sie auch schon Hayashi u. a. (1979, 1985) und Mizuno (1980) getroffen haben: die Planetesimal-Massenakkretionsrate sei konstant. Die Leuchtkraft ergibt sich dann durch die auf der Kernoberfläche deponierte Energie (siehe Gleichung (2.16)). Dies hat den Vorteil, dass auf diese Weise die Leuchtkraft mit der Größe des Planeten skaliert. Für nicht selbstgravitierende Hüllen ergibt sich für konstante Akkretionsrate \dot{M} , $L \propto M_c^{2/3}$ (Stevenson 1982). Eine weitere Möglichkeit wäre es, die Akkretionsrate an die Masse des Planeten (Erhöhung des effektiven Wirkungsquerschnitts durch Gravitation) sowie an die Außendichten anzupassen. Um die Zusammenhänge einfach zu halten, habe ich mich dagegen entschieden. Mir war es wichtiger,

¹Eine Masse im Orbit um eine Primärmasse definiert ihren eigenen Hill Radius, Gleichung (2.15). Denkt man sich diese Masse mit konstanter Dichte über das ganze Hillvolumen verteilt, nennt man diese Dichte die Rochedichte. Sie berechnet sich zu $\rho_{\text{roche}} = (3M_\star)/(\frac{4\pi}{3}a^3)$.

den Einfluss der einzelnen Größen zu verstehen, als die „bestmöglichen“ Randbedingungen zu wählen. Denn sind die Größen zu sehr miteinander verwoben, dann ist ihr jeweiliger Einfluss nur schwer nachvollziehbar.

Eine solche Mannigfaltigkeit mit konstanter Akkretionsrate (Tabelle 2.2: Randbedingungen \mathcal{M}_B) für die Jupiterposition zeigt Abbildung 3.5. Gezeigt sind Hüllenmasse (Höhe) und Außentemperatur (Farbe). Man sieht deutlich, dass an der Spitze der Insel – zu großen Kern drücken und -massen hin – der Temperaturabfall maßgeblich für die Form der Mannigfaltigkeit verantwortlich ist. Dies ist auch der Grund, weshalb die Region II für diese Wahl der Randbedingungen nicht existiert: Wird der Temperaturgradient im Mittel zu groß, dann erreicht die Temperatur im radialen Verlauf und vor allem an der Oberfläche einen zu kleinen Wert, und es ist selbst für einen Schwarzen Körper, der ins Vakuum abstrahlt, nicht mehr möglich, die vorgegebene Leuchtkraft abzustrahlen – die Gleichungen haben in diesem Fall keine Lösung. Die Objekte an der Grenze sind voll konvektiv: Diese Linie entspricht der Hayashi Linie – jenseits existieren keine stabilen Gleichgewichte.

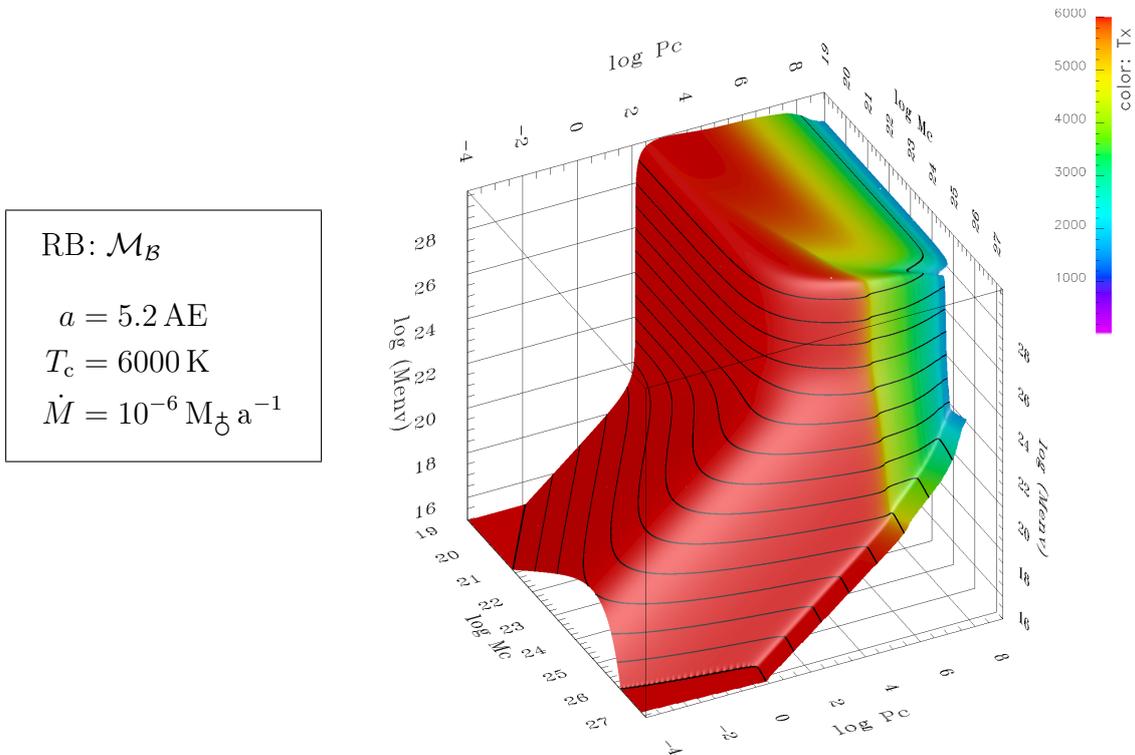


Abbildung 3.5: **Hüllenmassendarstellung für Jupiters Position mit konstanter Akkretionsrate.** Die Farbe gibt die Außentemperatur T_x an. Offenbar wird die Struktur an der Spitze (hohe Werte von M_c und P_c) durch den Temperaturabfall dominiert.

3.4.2 Protoplaneten mit fixierter Außentemperatur

Es ist daher leider notwendig, statt der Innentemperatur T_c die Außentemperatur T_x vorzugeben. Dies impliziert Annahmen über die Struktur des protoplanetaren Nebels, in welchem der

jeweilige Planet entsteht. Ich betrachte die Planetenentstehung in einem passiven Nebel (siehe Abschnitt 1.1.1).

Der Temperaturverlauf eines solchen Nebels wird durch die Einstrahlung vom Mutterstern bestimmt und folgt Gleichung (2.17). Auf diese Weise erhält man für einen gegebenen Abstand vom Stern eine wohldefinierte Nebeltemperatur T_x , die nun als zusätzliche äußere Randbedingung verwendet wird.

Diese Wahl der Randbedingungen (siehe Tabelle 2.2: \mathcal{M}_c) stellt die für diese Durchmusterung endgültige Wahl dar: M_c und P_c werden variiert, die Nebeltemperatur T_x wird festgehalten und die Leuchtkraft definiert sich über die Differenz im Gravitationspotential von Kernoberfläche und Hill-Radius. Eine erste solche Mannigfaltigkeit wird im Abschnitt 6.1 für die Jupiterposition präsentiert.

4 Massenspektren von Planeten

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist es, Vorhersagen über Planetensysteme bei anderen Sternen zu machen. Dies gilt insbesondere für den „Entdeckungsraum“ von COROT, also für sternnahe Planeten. Da es mir unmöglich erscheint, allgemein gültige, konkrete Umgebungsbedingungen zu formulieren, habe ich einen statistischen, der Thermodynamik ähnlichen Zugang gewählt (siehe Kapitel 1). Hierfür liefert die im letzten Abschnitt vorgestellte Mannigfaltigkeit alle möglichen Gleichgewichte. Nimmt man alle diese Zustände als gleichwahrscheinlich an, kann man durch simples Abzählen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die (statischen) Protoplaneten bestimmen. Kann man weiterhin zeigen, dass die Entwicklung komplett quasi-statisch abläuft und Verlustprozesse während der Entwicklung bis zum beobachteten Alter keine Rolle spielen, dann sollte die Verteilung der Planeten gleich der der Protoplaneten sein.

Wie Rechnungen für den Planeten HD 149026b zeigen (siehe Kapitel 6.3), läuft die Entwicklung bei sehr kleinen Abständen vom Mutterstern mitunter tatsächlich quasi-statisch ab. Für weiter entfernte Planeten dagegen ist dies nicht der Fall. So ist etwa für Jupiter bekannt, dass jenseits der kritischen Masse eine dynamische Phase eingesetzt haben muss (er ist massiver als die berechneten Gleichgewichte, Abbildung 4.1). Jedoch ist es auch für eine Abschätzung der Planetenmassen bei großen Distanzen sicherlich notwendig, zunächst einmal die Massenverteilung der Protoplaneten vor dem Kollaps zu bestimmen, um die endgültige Massenverteilung bestimmen zu können. Das hier vorgestellte Massenspektrum soll gerade eine solche Massenverteilung approximieren.

4.1 Die Berechnung des planetaren Massenspektrums aus der Mannigfaltigkeit

In diesem Abschnitt soll nun exemplarisch das Massenspektrum für Jupiters Position vorgestellt werden. Es wird dann im Abschnitt über die COROT-Durchmusterung (Kapitel 8) das zentrale Instrument sein, um die Planetenpopulationen zu charakterisieren. Das Ergebnis der Abzählung für die Jupiterposition zeigt Abbildung 4.1: Die Anzahl der in einem bestimmten Massenintervall $d \lg M_{\text{tot}}$ liegenden Planetenmodelle als Funktion der Masse $\lg M_{\text{tot}}$ (Abbildung 4.1(a)). Dies entspricht – bei geeigneter Normierung – gerade den relativen Häufigkeiten in der Mannigfaltigkeit. Die Normierung wähle ich so, dass die Summe über die Verteilung eins ergibt. Das Ergebnis ist Abbildung 4.1(b). Die normierte Darstellung hat den Vorteil der bes-

seren Vergleichbarkeit verschiedener Verteilungen. Dafür ist die im jeweiligen Bin enthaltene Anzahl an Modellen, also die statistische Genauigkeit, nicht mehr zugänglich.

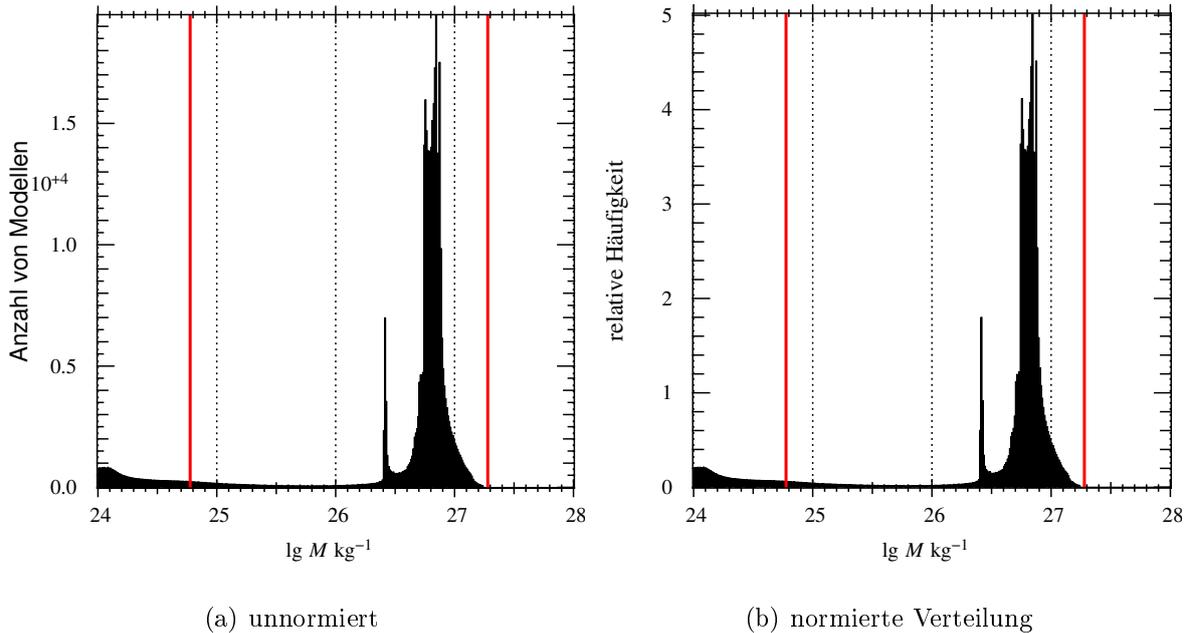


Abbildung 4.1: **Das Massenspektrum für Jupiters Position.** Es zeigt die Anzahl von Modellen bzw. die relative Häufigkeit aller Gleichgewichtszustände pro Massenintervall $d \lg M_{\text{tot}}$ als Funktion der Gesamtmasse $\lg M_{\text{tot}}$. Die beiden vertikalen roten Linien markieren die Position einer Erdmasse, M_{\oplus} , bzw. einer Jupitermasse, M_J .

Das Massenspektrum von Jupiter hat offenbar einen deutlichen Peak bei $\lg M \sim 26,7$. Um die Positionen der unter Umständen mehreren Maxima quantifizieren zu können, werde ich stets zwei Größen bestimmen: den Modus und den Median der Anzahlhäufigkeiten.¹

Im dem hier vorgestellten Beispiel gibt es nur ein Maximum, welches stark auf Null abfällt: Modus: 26,878 (0,001), Median: 26,814 (26,52–28).² Dies entspricht 0,40 bzw. 0,35 M_J .

¹Der Modus hat den Vorteil, dass er unabhängig vom gewählten Intervall ist. Dafür ist er abhängig vom der „binsize“, also der Breite der gewählten Diskretisierung der kontinuierlichen Verteilung. Ebenso gibt er die Position des höchsten Peaks an, nicht notwendigerweise das, was man unter dem ‚Mittel‘ versteht. Der Median dagegen braucht keine Diskretisierung und ist von Ausreißern unabhängiger als das arithmetische Mittel. Jedoch hängt er bei Verteilungen, die nicht auf Null abfallen, vom gewählten Bereich ab. So ist z.B. die Wahl der Trennung zweier Maxima etwas willkürlich. Ich werde das Minimum zwischen je zwei Maxima abschätzen und dies als Grenze nehmen. Da sowohl der Modus als auch der Median Vor- und Nachteile haben, werde ich in Tabellen stets beide angeben. Jedoch werde ich den Modus als primären Wert verwenden.

Bei der Berechnung des Modus muss man die Fließkommazahlen runden, da sonst bei einer endlichen Stichprobe jeder Wert nur einmal auftritt. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: Auf eine gewisse Intervallbreite runden, oder die Nachkommastellen abschneiden. Schneidet man die Nachkommastellen ab, reduziert man die Zahlen im Mittel um eine halbe Intervallbreite. Diese muss man anschließend zum berechneten Wert wieder dazuzählen. Um möglichst der Vorgehensweise bei der Erstellung eines Histogramms zu entsprechen, habe ich mich für den zweiten Weg entschieden: Erst Nachkommastellen streichen, dann um eine halbe Binbreite korrigieren. Bei sehr großen Zahlen ergeben beide Methoden den selben Wert. Um den Einfluss der Binbreite zu berücksichtigen, werde ich die verwendete Binsize stets mit angeben. Ebenso werde ich den Median stets zusammen mit dem zu Grunde liegenden Intervall angegeben, es sei denn es ist offensichtlich.

²Die Klammern geben die Binsgröße bzw. den gewählten Bereich für die Bestimmung von Modus bzw. Median an.

Insgesamt enthält der Peak 341 000 Modelle. Die Verteilung ist in etwa log-normal verteilt. Hinzu kommt noch ein sehr schmaler Peak im linken Flügel der „Gauss-Kurve“ (Modus: 26,415 (0,001), Median: 26,416 (26–26,52)).

Für die Position von Jupiter gibt es offenbar *eine* charakteristische Masse für die Gleichgewichtszustände. Dies ist einer der großen Unterschiede zu den Pegasi-Planeten.

Meist ist es sinnvoll, die Planeten aus Region III nicht mitzuzählen, da dort ja nur der log-gleichverteilte Kern gezählt würde. Den Einfluss des gewählten Bereichs in (M_c, P_c) erläutert Kapitel A.1.2.

4.2 Implizite Annahmen bei der Erzeugung der Massenspektren

Wenn man wie im letzten Abschnitt beschrieben alle Zustände einer Mannigfaltigkeit abzählt und dies als relative Häufigkeiten interpretiert, gehen eine Reihe von impliziten Annahmen ein, die ich hier kurz erläutern möchte.

Die vermutlich wichtigste Annahme steckt im logarithmischen (M_c, P_c) -Gitter der Mannigfaltigkeiten. Dadurch ist die Verteilung, z. B. der Kerne, nicht gleichverteilt, sondern log-gleichverteilt, d. h. in einem logarithmischen Histogramm, wie ich es verwende, ist die Kurve waagrecht. Diese Wahl des Gitters scheint zunächst willkürlich zu sein, und ich möchte nun die Wahl dieses Gitters kurz begründen:

Wollen wir keinen Nebeldruck und keine Kernmasse bevorzugen, müssen alle Skalen gleich häufig vertreten sein. Betrachten wir hierzu die Kernmasse M_c : Nehmen wir an, die Kernmassen seien gleichverteilt, also äquidistant verteilt auf einem linearen Gitter. Dann müssen wir uns, da wir nicht unendlich viele Testrechnungen durchführen können, für einen Bereich, in dem wir rechnen, entscheiden: Durch diese Auswahl eines Bereichs haben wir jedoch implizit eine Skala festgelegt. Wollen wir dagegen keine Größenordnung a priori auswählen, brauchen wir eine skalenfreie Verteilung. Durch die Vorgabe der Skalenfreiheit sind wir bereits sehr eingeschränkt: Unsere Verteilung muss einer Potenzfunktion genügen, um skalenfrei zu sein, denn die Potenzfunktion ist die einzige skaleninvariante Funktion. Wollen wir die Stichprobe gleichverteilt über die Potenz-Verteilung ziehen, entspricht dies gerade einer log-äquidistanten Verteilung der Kernmassen M_c . Somit ist die log-äquidistante Verteilung eine zwingende Konsequenz aus der Forderung der Skalenfreiheit.

Die selbe Überlegung gilt auch für die Kerndrücke P_c . Zusammengefasst heißt dies also: Will man sowohl bei den Kernmassen als auch bei den Kerndrücken keine Größenordnung von vornherein auszeichnen, dann folgt daraus zwingend ein logarithmisch äquidistantes Gitter in (M_c, P_c) .

Nichtsdestotrotz muss man sich darüber im klaren sein, dass auch die Annahme der Skalenfreiheit eine (nicht beweisbare) Annahme ist. Es ist zwar meiner Ansicht nach eine gute

Wahl, in unbekanntem Parameterräumen skalenfrei zu arbeiten, dennoch ist es denkbar, eine andere Wahl zu treffen. Man könnte sich z. B. bei der Wahl der Kernmassen auf einen engen Bereich um die kritische Masse beschränken. Idealerweise kommt das M_c -Spektrum aus der Planetesimaltheorie.³

Eine weitere wichtige Annahme ist die Gleichwahrscheinlichkeit aller Zustände. Diese Annahme ist natürlich strenggenommen nicht erfüllt. Man müsste, wie das auch in der Thermodynamik gemacht wird, ebenfalls untersuchen, ob die Gleichgewichte denn überhaupt stabil und kinetisch erreichbar sind und dann nur diese Zustände zählen. Dies ist im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht möglich. Daher nehme ich an, dass im Großen und Ganzen die Gleichgewichte gleichwahrscheinlich sind, also keine Gleichgewichte durch weitere Bedingungen verboten sind. Dies stellt sicherlich eine grobe Vereinfachung des Problems dar. Ob diese Vereinfachung erlaubt ist, wird sich erst durch den Vergleich mit beobachteten Planetenspektren herausstellen. Eine zukünftige Verbesserung der Massenspektren wird sich gerade mit Stabilitätsbetrachtungen befassen, um so möglicherweise bestimmte Gleichgewichte bei der Abzählung auszuschließen.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit spreche ich häufig schlicht vom Massenspektrum oder vom Histogramm der Planetenmassen. Hierbei ist stets die logarithmische Verteilungsfunktion, $F_{d \log M}$, gemeint. Zur Interpretation der Massenspektren verweise ich auf Kapitel A.1.1.

³Die Planetesimaltheorie ist gegenwärtig leider noch nicht in der Lage, verlässliche, quantitative Aussagen über die Verteilung der Planetesimalmassen zu machen.

Teil II

Ergebnisse

5 Vergleichsrechnungen

Bevor ich die eigentlichen Ergebnisse meiner Arbeit vorstellen werde, folgt nun ein weiterer Abschnitt, der im Wesentlichen dazu dient, das Lösungsverfahren zu überprüfen. Während in Abschnitt 2.7 lediglich ein interner Konsistenzcheck durchgeführt wurde, der vor allem das Integrationsverfahren und die interne Präzision getestet hat, sollen in diesem Kapitel Arbeiten anderer Autoren nachgerechnet werden. Dies ist meiner Ansicht nach ein wesentlicher Bestandteil wissenschaftlichen Arbeitens und wird leider viel zu wenig gemacht, da sich daraus in der Regel keine neuen wissenschaftlichen Erkenntnisse ergeben. Allerdings ist es die einzige Möglichkeit, numerische Berechnungen überhaupt zu überprüfen. Gerade bei expliziter numerischer Integration, die ja (fast) immer zu (irgend) einem Ergebnis führt, ist die Methode Bekanntes nachzurechnen unverzichtbar. Die Fehler im Artikel von Saumon u. a. (1995) (siehe Abschnitt 2.4.1) wurden ausschließlich aufgrund dieser Vergleichsrechnungen entdeckt.¹

Ich habe meinen Algorithmus mit zwei verschiedenen Arbeiten verglichen: Ein qualitativer Vergleich mit Mizuno (1980) sowie ein quantitativer Vergleich mit Ikoma u. a. (2001). Beide arbeiten mit festgehaltenem Außendruck P_x , es handelt sich also um den Satz von Randbedingungen \mathcal{V} (siehe Tabelle 2.2).

5.1 Vergleich mit Mizuno

Zunächst habe ich die Rechnungen von Mizuno (1980) nachgerechnet. In diesem Fall ist ein quantitativer Vergleich nicht möglich, da mir die von Mizuno verwendeten Opazitäten nicht genau bekannt sind. Exemplarisch zeige ich die Vergleichsrechnungen für die Jupiterposition. Nach Mizuno bedeutet dies: Große Halbachse $a = 5,2 \text{ AE}$, Nebeldichte $\rho_{\text{neb}} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^3$, Nebeltemperatur $T_x = 97 \text{ K}$ und Kernakkretionsrate $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$. Mizuno hat seine Rechnungen für verschiedene Staubhäufigkeiten durchgeführt und dies über den sog. „Staub Anreicherungsfaktor“ f parametrisiert. Ein Faktor von $f = 1$ entspricht der Staubdichte im interstellaren Medium und entspricht am ehesten den Annahmen wie sie auch in die Zusammenstellung der von mir verwendeten Opazitätstabellen eingegangen sind. Ich verwende die in Abschnitt 2.4.2 beschriebene Opazitätstabelle. Als Zustandsgleichung verwende ich wie Mizuno die Ideale Gasgleichung

$$P = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T, \quad (5.1)$$

¹Einige, aber nicht alle Fehler waren in der „Community“ bereits bekannt.

mit P : Druck, ρ : Dichte, $\mathcal{R} = 8.314510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$: allgemeine Gaskonstante und einer molaren Masse μ von $2.3 \cdot 10^{-3} \text{ kg/Mol}$.²

Abbildung 5.1 zeigt die Ergebnisse aus Mizuno (1980): Mizunos Interesse galt primär der Bestimmung der kritischen (Kern-)Masse, daher zeigt die Graphik die Kernmasse M_c als Funktion der Gesamtmasse M . Das jeweils erste Maximum der Kurve gibt die kritische Masse an. Die kritische Masse ist in diesem Fall so definiert, dass für massivere Kerne keine Gleichgewichte mehr existieren. Sie liegt in Mizunos Fall für $f = 1$ bei etwa $12 M_{\oplus}$.

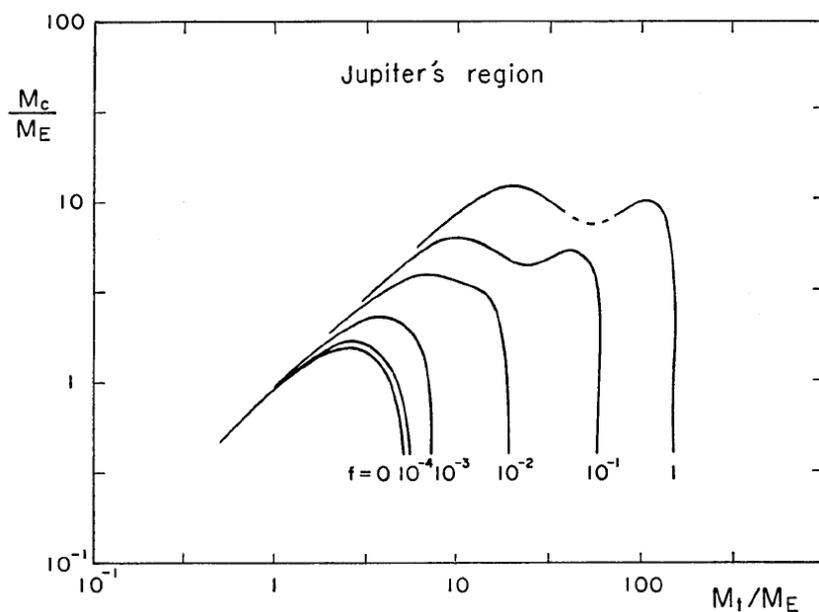


Abbildung 5.1: **Rechnungen aus Mizuno (1980)**. Kernmasse als Funktion der Gesamtmasse bei konstantem Nebeldruck.

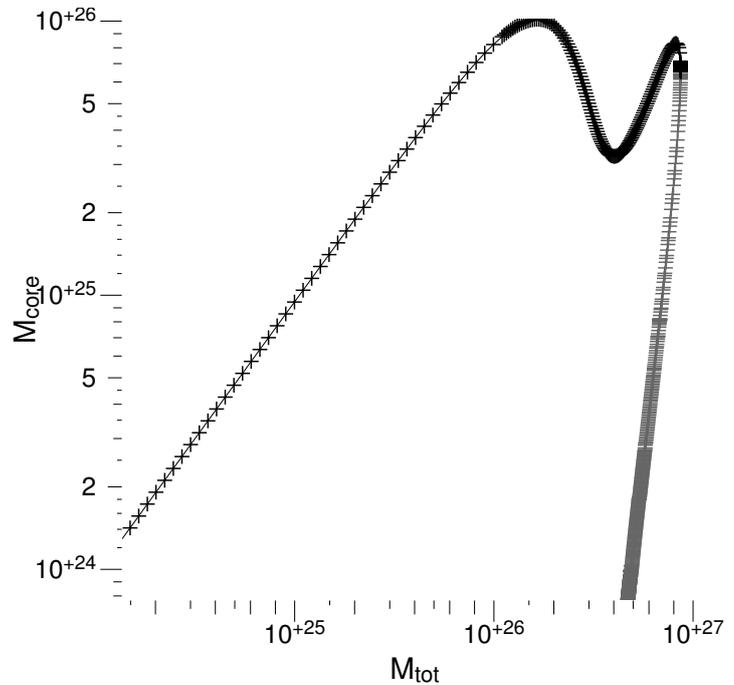
Das Ergebnis meiner Vergleichsrechnung – entsprechend $f = 1$ – zeigt Abbildung 5.2. Die Form der Kurve wird gut reproduziert, jedoch liegt die kritische Kernmasse meiner Rechnung bei etwa $17 M_{\oplus}$. Mizunos Wert liegt bei $12 M_{\oplus}$, es gibt also signifikante Abweichungen.³ Mir ist es bei dieser Rechnung aber auch nicht daran gelegen, quantitative Übereinstimmung zu erzielen, dazu wären intensivere Nachforschungen über Mizunos genaue Opazitäten und auch Zustandsgleichung nötig. Er hat z.B. die molare Masse μ als Funktion von Druck und Temperatur variiert, ich habe einen konstanten Wert verwendet. Somit werte ich diesen Test als Erfolg. Wuchterl (1991a) hat stärkere Anstrengungen unternommen, die exakten Werte von Mizuno zu verwenden und erhält einen Wert der kritischen Masse von $13,1 M_{\oplus}$.

Dennoch zeigt diese Vergleichsrechnung sogar Neues. Die genaue Betrachtung von Abbildung 5.1 lässt vermuten, dass die vertikalen Linien vom Autor händisch nach unten extrapoliert worden sind. Meine Rechnungen dagegen – man beachte hierzu speziell den grauen Teil der Kurve in Abbildung 5.2 – zeigen einen klaren Rückgang der Gesamtmasse mit zunehmender Kernmasse. Dieser Kurvenverlauf ist mit gewöhnlichen Schrittverfahren überhaupt nicht auffindbar. Vielmehr habe ich den „2. Lösungszweig“ nur durch Zufall entdeckt, weil,

²Mizuno hatte noch zusätzlich eine $\mu(\rho, T)$ -Abhängigkeit

³Hierbei spielt sicher auch die $\mu(\rho, T)$ -Abhängigkeit eine große Rolle

Abbildung 5.2: **Vergleichsrechnungen zu Mizuno (1980)**. Kernmasse als Funktion der Gesamtmasse bei konstantem Nebeldruck in einem Nebel minimaler rekonstituierender Masse für interstellare Staubdichten. Die kritische Masse liegt hier bei etwa $17 M_{\odot}$. Den grauen Teil der Kurve hat Mizuno nicht gefunden. $M_{\text{tot}}(M_c)$ ist dort nicht mehr eindeutig.



aufgrund schlechter Konvergenz des noch fehlerhaften Lösungsverfahrens, der Integrator auf den 2. Lösungsast gesprungen war.

Dieser erste Vergleich zeigt, dass das Lösungsverfahren qualitativ korrekte Lösungen liefert. Ich habe alle Rechnungen aus Mizuno (1980) nachgerechnet – Saturn, Uranus und Neptun sind hier nicht gezeigt, entsprechen aber auch qualitativ der Vorlage. Weiterhin wird schon jetzt ein Problem der M_c - M_{tot} -Darstellung (und Rechnung) klar: man findet unter Umständen nicht alle Lösungen.

5.2 Vergleich mit Ikoma

Im nächsten Schritt habe ich versucht, die ebenso gut bekannte Arbeit von Ikoma u. a. (2001) nachzurechnen. Sie ist nicht nur weit verbreitet, sondern vor allem so genau dokumentiert, dass eine exakte Reproduktion möglich schien. Außerdem verwenden die Autoren dieselbe Zustandsgleichung, wie auch ich sie verwende: Saumon u. a. (1995).

Die Abweichungen betragen, nach Beseitigung anfänglicher Schwierigkeiten,⁴ maximal ein Prozent. Man kann sich nun fragen, warum die Ergebnisse nicht exakt gleich sind. Dafür gibt es im Wesentlichen drei mögliche Gründe, alle betreffen die Materialgleichungen. Erstens verwende ich nicht exakt die selbe Opazitätentabelle wie Ikoma, da diese beim Autor nicht zu erhalten

⁴Wider Erwarten ließen sich die Rechnungen von Ikoma u. a. (2001) anfangs nicht exakt reproduzieren. Im M_c - M_{tot} -Diagramm ergaben sich Abweichungen von 30%. Also war es notwendig, mit dem Autor Masahiro Ikoma in Kontakt zu treten, um zu erfragen, ob noch weitere, im Artikel nicht genannte Effekte für die Berechnung berücksichtigt werden müssten. Dem war nicht so, der Artikel von Ikoma u. a. (2001) ist tatsächlich einer der wenigen, welcher ausführlich genug ist, um eine exakte Überprüfung zu ermöglichen. Was war nun der Grund für die unterschiedlichen Ergebnisse? Erst das persönliche Gespräch in Japan auf einem Workshop brachte die Lösung: die in Saumon u. a. (1995) angegebenen Formeln für die Berechnung der Mischentropie sind fehlerhaft. Nach der Korrektur der entsprechenden Gleichungen war es möglich, die Abweichung unter ein Prozent zu drücken.

war. Zweitens verwendeten Ikoma u. a. (2001) in der Mischentropie der Zustandsgleichung aufgrund numerischer Schwierigkeiten (die ebenso auf die fehlerhaften Formeln zurückzuführen waren) die Formel ohne die Terme für ionisiertes Helium. Ich dagegen verwende die komplette Gleichung (2.23). Drittens müssen die Materialtabellen interpoliert werden. Hier können durchaus große Abweichungen auftreten, je nachdem welche Methode angewendet wird. Dies trifft insbesondere auf die sehr dünn tabellierte Zustandsgleichung von Saumon u. a. (1995) zu. Es ist daher nicht zu erwarten, dass die Rechnungen bis auf das Niveau der Integrationsgenauigkeit übereinstimmen.

Bevor ich die Vergleichsrechnung zeige, möchte ich kurz den adiabatischen Temperaturgradienten ∇_s als Funktion der Temperatur zeigen. Schließlich war dies der kritische Punkt bei diesem Vergleich. Abbildung 5.3 zeigt $\nabla_s(P, T)$ bei festgehaltenem Druck, $\lg P/[\text{Pa}] = 7$. Gezeigt sind meine eigenen, über die Mischentropie berechneten Werte von ∇_s sowie die mir von Ikoma freundlicherweise zur Verfügung gestellten Werte derselben Größe. Die Kurven kommen zur Deckung, also ist die numerische Einbindung der Tabellen konsistent.

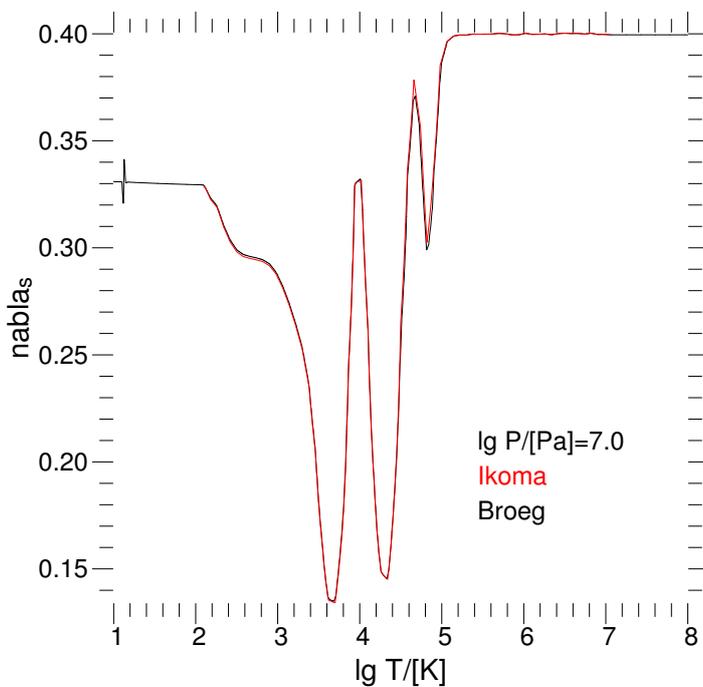


Abbildung 5.3: **Der adiabatische Temperaturgradient ∇_s bei konstantem Druck.** Die rote Kurve zeigt die von Ikoma verwendeten Tabellenwerte, die schwarze Kurve meine eigene Rechnung nach Korrektur der Gleichungen. Offenbar stimmen beide Kurven nun überein.

Nachdem nun sichergestellt ist, dass nicht nur die Gleichungen identisch sind (genaugenommen verwenden Ikoma u. a. (2001) eine geringfügig andere äußere Randbedingung – der Unterschied ist aber in erster Näherung vernachlässigbar), sondern auch die verwendeten Zustandsgleichungen identisch sind, können beide Rechnungen quantitativ verglichen werden. Es gelten wieder die Randbedingungen \mathcal{V} . Ich zeige den Vergleich für folgende Parameter aus Ikoma u. a. (2001):

- $a = 0,1 \text{ AE}$,
- $T = 885 \text{ K}$,
- $P = 100, 150, 200, 300 \times P_{\text{neb}}$ aus Gleichung (2.18) und SCVH

- $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$
- $X = 0,74; Y = 0,243; Z = 0,017$. Ich verwende: $X = 0,74; Y = 0,26$.

Das Resultat des Vergleichs zeigt Abbildung 5.4. Wie im letzten Abschnitt ist auch hier die Kernmasse M_c als Funktion der Gesamtmasse M_{tot} dargestellt. Die schwarzen Linien sind die Ergebnisse von Ikoma u. a. (2001). Die vertikale Linie zeigt den Wechsel der äußeren Randbedingungen an. Rechts davon sind sie mit den in dieser Arbeit verwendeten Randbedingungen identisch. Jede Linie entspricht einem bestimmten Nebeldruck. Meine Rechnungen für zwei

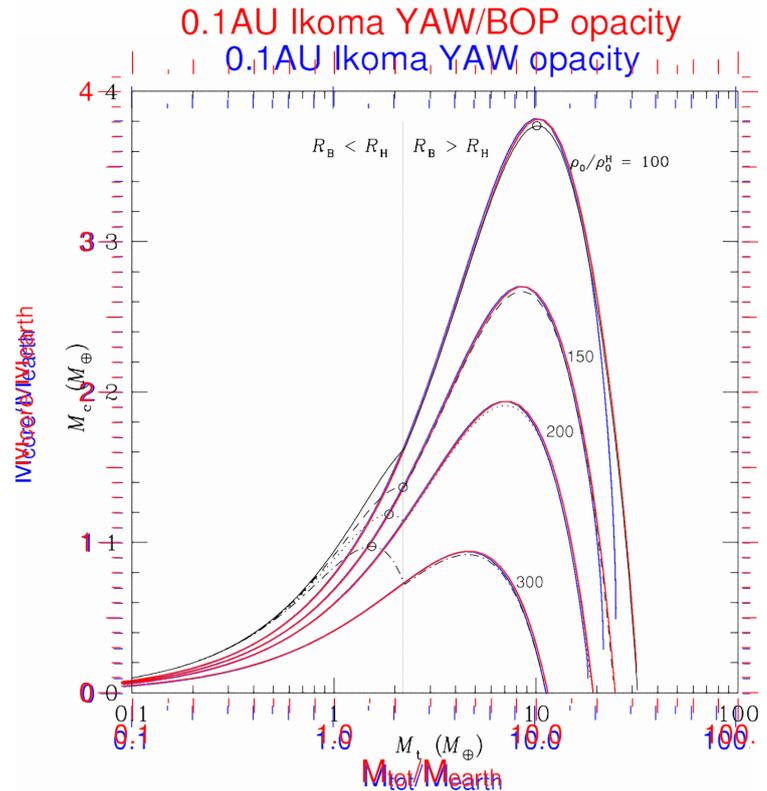


Abbildung 5.4: **Vergleichsrechnung mit Ikoma u. a. (2001)**. M_c - M_{tot} -Relation bei 0,1 AE für vier verschiedene Nebeldrücke: 100, 150, 200 und 300 mal dem Druck nach MMSN.

verschiedene Opazitätentabellen sind rot bzw. blau dargestellt. Die rote Kurve verwendet die Opazitäten, welche denen von Ikoma u. a. (2001) am ähnlichsten sind. Sie entspricht der Zusammenstellung in Kapitel 2.4.2 und wird in dieser Arbeit sonst ausschließlich verwendet. Für die blaue Kurve wurden in den Opazitätstabellen die Tieftemperatur-Opazitäten von Pollack u. a. (1985) durch die Tabellen von Yorke (1979, 1980) ersetzt, um den Einfluss der Opazitäten zu testen.

Für die rote Kurve beträgt die maximale Abweichung in etwa ein Prozent. Dies ist aufgrund zuvor genannter geringer Unterschiede in der Rechnung bei solch stark nicht-linearen Gleichungen zu erwarten und beweist so die korrekte Lösung der Gleichungen zumindest in diesem konkreten Fall.

Es hat sich gezeigt, dass eine solche Vergleichsrechnung bei theoretischen Modellen unumgänglich ist, da ohne sie die Fehler in der Zustandsgleichung vermutlich nie gefunden worden wären.

Damit sind die Testrechnungen abgeschlossen und das folgende Kapitel beschäftigt sich mit neuen Berechnungen.

6 Planetenrechnungen

6.1 Jupiter

Jupiter, als größter Gasplanet in unserem Sonnensystem, war stets ein natürliches Ziel für Theorien zur Gasplanetenentstehung. Daher wurden in der Vergangenheit schon viele Simulationen zur Gasplanetenentstehung gerade an dessen Position durchgeführt. Eine solche Rechnung eignet sich daher besonders gut für den Vergleich mit früheren Ergebnissen aus der Literatur (siehe Kapitel 5 und 7).

Die erste Mannigfaltigkeit, die ich mit den endgültig gewählten Randbedingungen (\mathcal{M}_C), also speziell mit fixierter Außentemperatur berechnet habe, ist daher natürlicherweise eine Mannigfaltigkeit für die Position von Jupiter. Mit dieser Rechnung sollen primär zwei Ziele verfolgt werden: Zum einen möchte ich die Unterschiede zu den Randbedingungen \mathcal{M}_A & \mathcal{M}_B aus Teil I sowie den Einfluss der Nichtisothermie untersuchen. Zum anderen möchte ich anhand der Jupiterposition den Zusammenhang zwischen der Mannigfaltigkeit und den klassischen Rechnungen mit festem Nebeldruck (Randbedingungen \mathcal{V}) herstellen.

Die „Jupiterposition“ definiere ich folgendermassen: Der Abstand vom Mutterstern ($M_* = M_\odot$) beträgt $a_J = 5,2 \text{ AE}$ und die Massenakkretionsrate \dot{M} beträgt $10^{-6} M_\oplus \text{ a}^{-1}$. Dies ist der „kanonische“ Wert für die Jupiterposition (siehe Abschnitt 1.1.2).

Die Berechnung dieser Mannigfaltigkeit stellte sich als sehr anspruchsvoll heraus.

6.1.1 Beschreibung der Gleichgewichte

Die Mannigfaltigkeit für die Jupiterposition wird in den Abbildungen 6.1 (Außendruck), 6.2 (Hüllenmasse) und 6.3 (Kerntemperatur) visualisiert. Alle drei Abbildungen haben die gleiche Orientierung in M_c und P_c . Zwei schwarze Höhenlinien¹ markieren stets typische Nebeldrücke: $P = 5,75 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$ (entspricht MMSN, Formel (2.18)), und $P = 7,94 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$ (P2, erhöhter Vergleichswert).

Diese Mannigfaltigkeit für Jupiter besteht aus ca. 400000 Planetenmodellen. Eine kleine Auswahl – 28 dieser Modelle – ist im Anhang in Form von radialen Profilen dargestellt (Abbildungen A.6-A.9). Es folgt nun eine knappe, phänomenologische Beschreibung der drei Darstellungen (P_x , M_{env} und T_c).

¹Da es sich in der Hüllenmassen- bzw. Zentraltemperaturdarstellung nicht um Höhenlinien handelt, sondern weiterhin um Linien konstanten Nebeldrucks (konstante Farbe), sind die Linien dort grau eingefärbt.

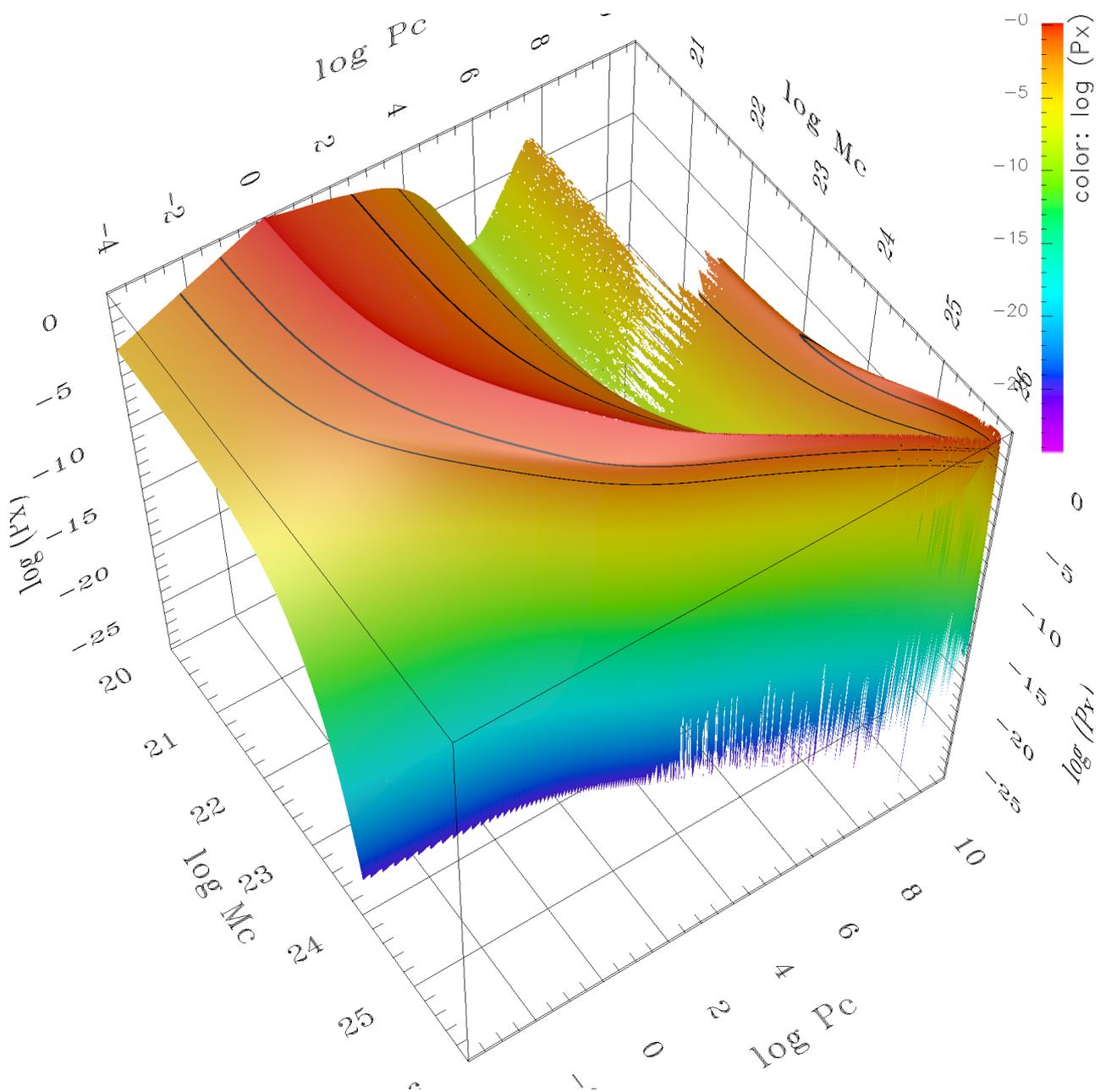


Abbildung 6.1: **Außendruckdarstellung für Jupiters Position mit fester Außentemperatur und konstanter Akkretionsrate.** Beim Außendruck zeigen sich deutliche Unterschiede zu Abbildung 3.1(d) durch die andere Wahl der Randbedingungen. Region IV weist eine tiefe „Mulde“ auf, in der der Außendruck um mehr als 8 Größenordnungen abfällt und wieder ansteigt. Hier befinden sich KOMPAKTE Objekte (Def. siehe Abschnitt 3.3).

Betrachten wir zunächst den Außendruck, Abbildung 6.1: Höhe und Farbe geben den Außendruck – wie immer als Funktion von Kernmasse und Innendruck – an. Bei kleinen Kerndrücken und -massen ist alles wie erwartet: $P_c = P_x$. Der Moment an dem die Eigengravitation einsetzt ($P_c \approx 0^\dagger$ bei kleinen M_c) hebt sich durch einen scharfen Knick hervor. Es folgt zu höheren Kerndrücken P_c ein starker Abfall im Außendruck. Doch plötzlich steigt der Außendruck wieder an, und es gibt ein zweites Maximum – dies ist ein völlig neues Phänomen. Geht man zu hohen Kernmassen M_c , endet die Mannigfaltigkeit mit einem sehr steilen Druckabfall über viele Größenordnungen.

Auch die Hüllenmassendarstellung (Abbildung 6.2) hat klare Merkmale: Die Hüllenmasse zeigt ein deutliches Plateau, der Region IV entsprechend. Es gibt also eine charakteristische Hüllenmasse. Weiterhin sieht man, dass die Spitze von Region IV nach oben, also zu großen Kerndrücken, verbogen ist. Der Grund dafür ist der starke Temperaturanstieg im Kern.

Diesen sieht man hervorragend in der Temperaturdarstellung (Abbildung 6.3). Bei niedrigen Kerndrücken ist $T_c = T_x$. Ab $P_c = -2$, spätestens mit dem Beginn von Region IV, steigt die Temperatur kontinuierlich an. Offenbar wird ein sehr großer Temperaturbereich abgedeckt. An der Spitze beträgt die Kerntemperatur $\sim 1,7 \cdot 10^4$ K! Weiterhin stechen zwei Phänomene ins Auge: Das Plateau fast konstanter Temperatur um $[24,5,4]^3$ sowie der Knick in der Fläche bei $P_c \approx 5,5$. Beide haben eine ähnliche Ursache – das Erreichen der Sublimationstemperatur der Kondensate bei etwa 1600 K. Im einen Fall – beim Plateau – passiert dies auf der Kernoberfläche und es bildet sich dort eine radiative Zone aus.⁴ Im anderen Fall – dem Knick – bildet sich die radiative Zone in einer mittleren Schicht aus (siehe Abschnitt A.4). In beiden Fällen führt dies zu einem verringerten Temperaturanstieg bei Erhöhung des Kerndrucks.

Alle drei Darstellungen zeigen ein „ausgefranztes“ Aussehen. Der Grund dafür sind numerische Probleme, die physikalische Ursachen haben. Diesem Thema widmet sich ein Exkurs im Anhang (Kapitel A.4).

Ganz besonders interessant ist die Druckabsenkung in der Mitte von Region IV. Es erfolgt hier eine Kompaktifizierung der Planeten – man hat fast den Eindruck, die Region IV sei schon zu Ende – mit anschließendem Druckanstieg. Diese seltsame Struktur ist gerade der Grund für die Form der M_c - M_{tot} -Kurve in Mizuno (1980) (Abbildung 5.1). Mit Hilfe dieser Mannigfaltigkeit kann ich den Druckabfall und -anstieg nun erklären:

Betrachten wir dazu erneut Abbildung 6.1, z. B. bei sehr kleinen Kernen ($\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 20$). Erhöht man den Innendruck P_c , beginnend in Region III, passiert folgendes: Zunächst ist $P_x = P_c$. Ab $P_c \approx 0$ setzt plötzlich die Eigengravitation ein, Region IV beginnt. Mit wachsendem P_c steigt nun die Kerntemperatur an und der Außendruck P_x fällt. Bis $P_c \approx 5$ sieht die Außendruckdarstellung noch fast genauso aus wie bei den Pegasi-Planeten (siehe Kapi-

[†]Kurzschreibweise für $\lg P_c \text{ Pa}^{-1} \approx 0$ – wenn keine physikalische Einheit angegeben ist, ist stets der dekadische Logarithmus in der entsprechenden SI-Einheit gemeint.

³ $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 24,5$ und $\lg P_c \text{ Pa}^{-1} = 4$

⁴siehe dazu Abbildung A.9(a)

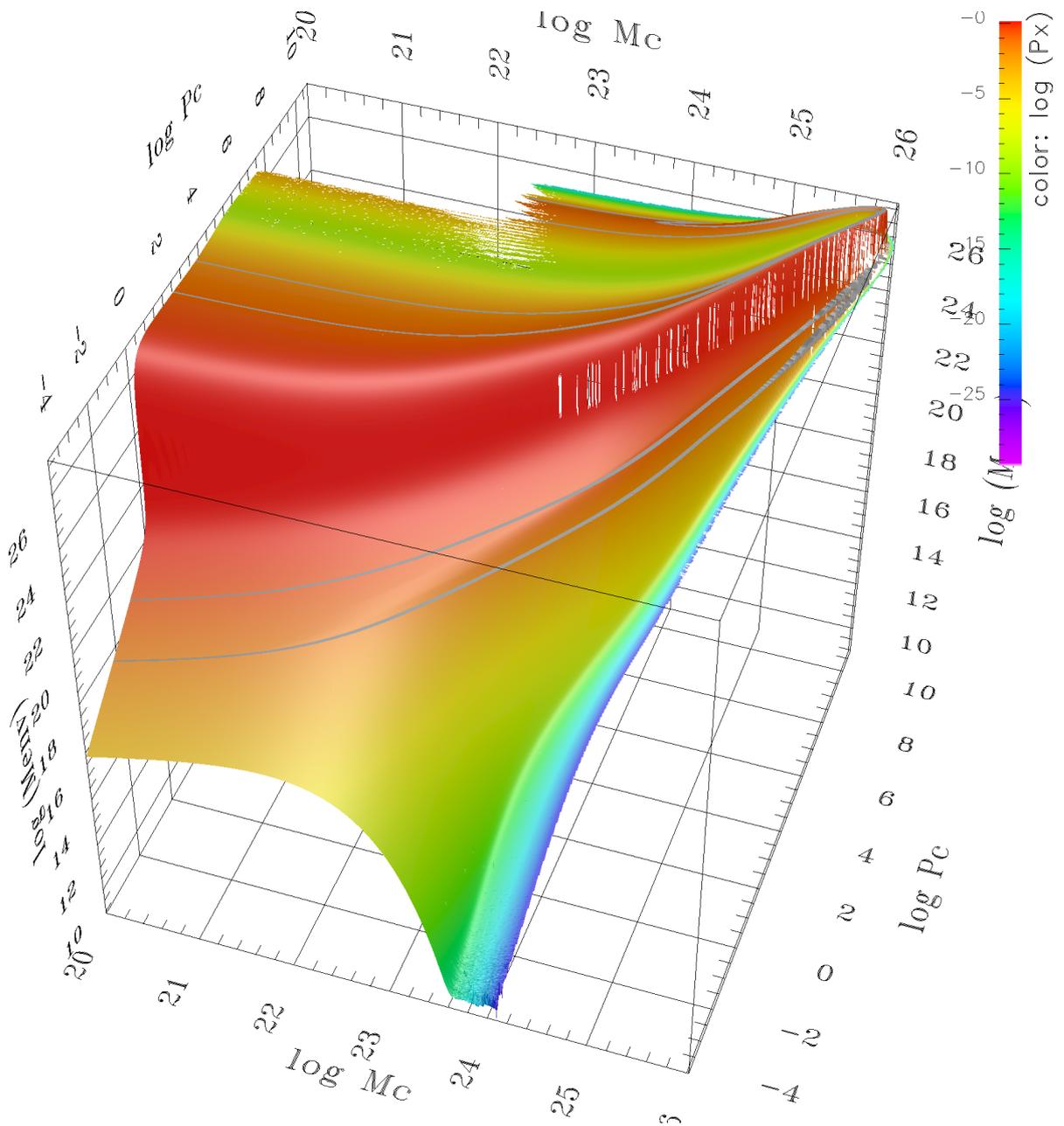


Abbildung 6.2: **Hüllenmassendarstellung für Jupiters Position mit fester Außentemperatur und konstanter Akkretionsrate.** Die Farbe gibt den Außendruck an. Auch für diese Wahl der Randbedingungen hebt sich die Region IV der Protoplaneten deutlich durch eine stark vergrößerte Hüllenmasse von den anderen Regionen ab.

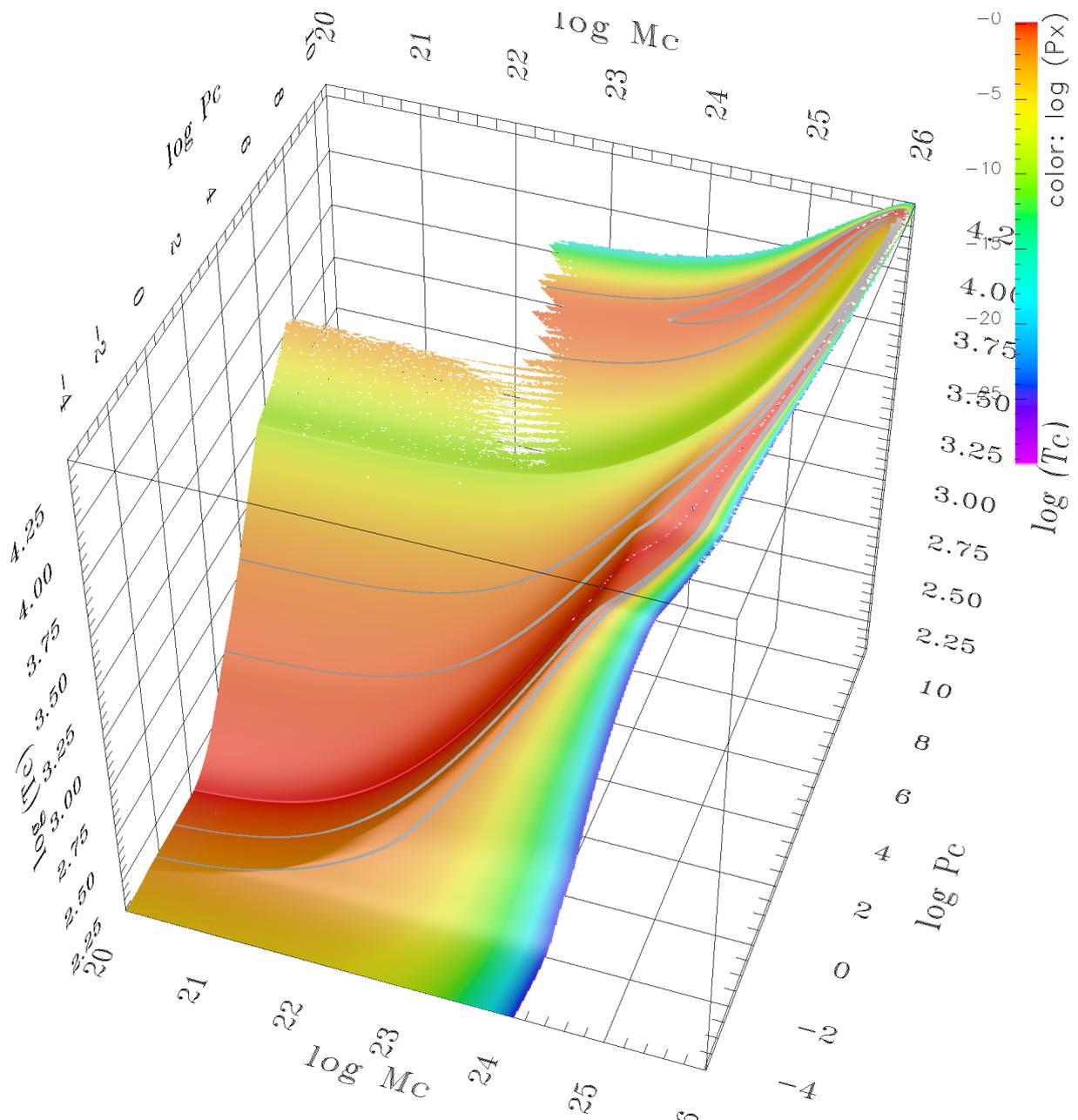


Abbildung 6.3: **Kerntemperaturdarstellung für Jupiters Position mit fester Außentemperatur und konstanter Akkretionsrate.** Die Farbe gibt erneut den Außendruck an. Der enorme Temperaturanstieg zu hohen Kernmassen und -drücken ist der Grund für die Verzerrung der Bereiche I..IV im Vergleich zu konstanter Innentemperatur (Abbildung 6.4). Das kleine „Plateau“ bei einer Temperatur von ca. 1600 K sowie der „Knick“ bei ca. 2000 K hängt zusammen mit der Entstehung einer radiativen Zone über dem Kern bzw. in der Hülle. Dort sind alle Kondensate verdampft und die Absorption durch Moleküle und Atome ist noch nicht stark genug (siehe Text).

tel 6.2). Region IV ist lediglich zu deutlich höheren Kerndrücken P_c verschoben. Doch nun passiert folgendes: Die Kerntemperatur wird so hoch, dass die Kondensate sublimieren und der Absorptionskoeffizient κ drastisch abnimmt – es entsteht eine radiative Zone im Inneren. Dies hat dramatische Konsequenzen. Bis hierher war die Zunahme der Schwerkraft durch den höheren Kerndruck überkompensiert durch die starke Temperaturzunahme – der Außendruck nahm ab. Durch die radiative Zone wird die Temperaturzunahme verringert, die Zunahme des Kerndrucks wird daher nicht mehr kompensiert – wir erhalten erneut ausgedehnte Protoplaneten, jedoch mit anderer innerer Struktur! Bei ganz hohen Kerndrücken P_c „gewinnt dann erneut die Schwerkraft“ und die Objekte werden wieder kompakt.

Wir haben es also mit zwei IVer-Regionen zu tun: Zuerst Region IV der voll konvektiven Planeten, die dann zu hohen Kerndrücken anschließt an eine weitere Region IV der Planeten mit radiativen Bereichen! Das zweite Maximum⁵ in Mizunos M_c - M_{tot} -Kurve besteht also aus voll konvektiven Protoplaneten, die Mulde dazwischen stellt gerade den Übergang dar. Für geringfügig andere Nebeldrücke (siehe zweite Isobare) sind die beiden nicht verbunden, sondern man erhält zwei getrennte M_c - M_{tot} -Kurven (siehe Abschnitt 7).

6.1.2 Vergleichende Betrachtung der Gleichgewichte

Vergleicht man die Mannigfaltigkeit mit fixierter Außentemperatur (RB \mathcal{M}_C) aus diesem Kapitel mit den Rechnungen bei konstanter Innentemperatur (RB \mathcal{M}_A : Abschnitt 3.2 und \mathcal{M}_B : Abschnitt 3.4.1, Abbildungen 3.2 bzw. 3.5) fallen deutliche Unterschiede auf. Abbildung 6.4 vergleicht die Bereiche für die Randbedingungen \mathcal{M}_A und \mathcal{M}_C . Die auffälligsten Unterschiede sind hier zusammengefasst:

- Man sieht sehr schön die Verzerrung der Bereichsgrenzen. Der Grund liegt in der stark ansteigenden Kernoberflächentemperatur zu hohen Kernmassen und -drücken.
- Weiterhin wird deutlich, dass die kompakten Regionen I und II kaum in einen Nebel eingebettete Lösungen zulassen, die bis r_{Hill} integriert werden können. Sie sind daher sehr schmal bis nicht vorhanden.
- Die neuen Rechnungen mit fixierter Außentemperatur sind offenbar deutlich schwieriger zu berechnen; Positionen, an denen die Lösung nicht konvergiert ist, sind durchsichtig (weiß). Dies ist besonders in der linken oberen Ecke von Region IV der Fall.
- Die „Spitze“ von Region IV (bei großen Kernmassen) ist viel stärker ausgeprägt, auch im direkten Vergleich mit Abbildung 3.5, die eine vergleichbare Leuchtkraft aufweist und somit einen besseren Vergleich darstellt als die Mannigfaltigkeit mit konstanter Leuchtkraft.

⁵Das hier erste Maximum im Druck P_x wird in der Projektion zum zweiten Maximum in M_{tot} – siehe Kapitel 7.

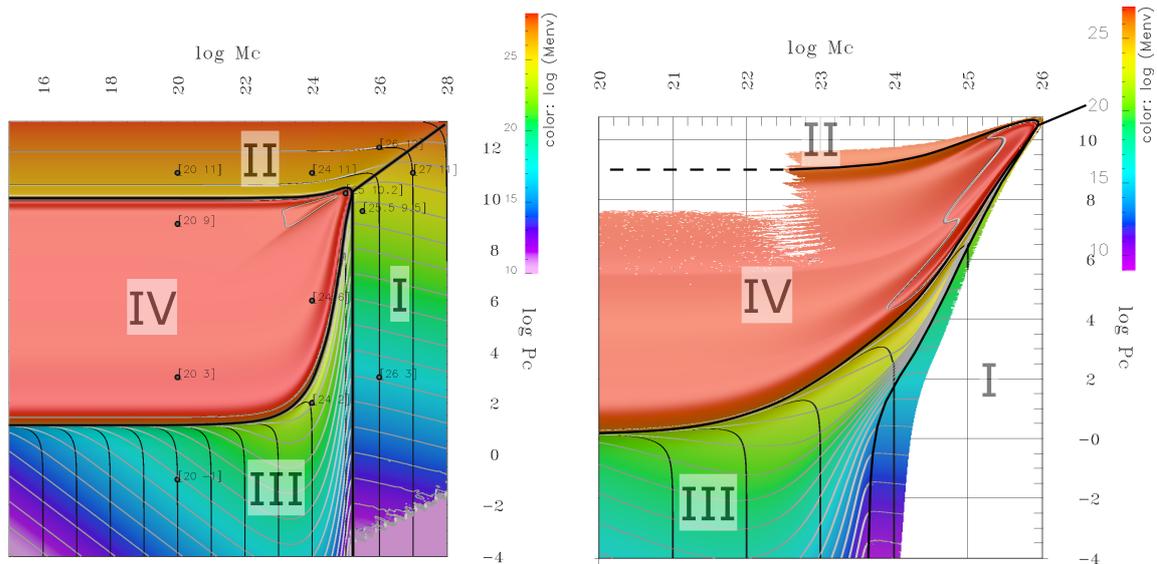
(a) \mathcal{M}_A : Leuchtkraft L und T_c fest(b) \mathcal{M}_C : \dot{M} und T_x fest

Abbildung 6.4: **Bereiche der Mannigfaltigkeit mit verschiedenen Randbedingungen im direkten Vergleich:** (a) wiederholt Abbildung 3.3. (b) zeigt die Bereiche wie sie sich für die Randbedingungen \mathcal{M}_C darstellen. Gezeigt ist jeweils die Massendarstellung: M_{tot} (Höhe, schwarze Konturen) zusammen mit M_{env} (Farbe, graue Konturen).

- Es gibt eine deutliche Druckabsenkung in der Mitte von Region IV (hier fast 9 Größenordnungen im Gegensatz zu Rechnungen mit fixierter Innentemperatur mit 0,5 Größenordnungen, siehe Abbildung 6.1). Dies bedeutet, dass es hier kompakte Lösungen innerhalb von Region IV gibt. Jedoch ist die Region IV weiterhin durch lauter ausge dehnte Protoplaneten von den anderen Bereichen abgegrenzt. Es gibt sozusagen zwei Regionen IV: einmal für voll konvektive Planeten, einmal mit innerer radiativer Zone.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die grundlegende Form der Mannigfaltigkeit durch das Fixieren der Außentemperatur erhalten bleibt, wenngleich die Bereiche verzerrt werden und Region IV quasi doppelt vorkommt. Die Berechnung der Mannigfaltigkeit wird dadurch extrem erschwert, und es kann nicht mehr so leicht für jeden Wert (M_c, P_c) eine numerische Lösung gefunden werden. Für eine ausführliche Diskussion der numerischen Schwierigkeiten, insbesondere in Zusammenhang mit der radiativen Zone im Inneren, verweise ich auf den Exkurs im Anhang, Kapitel A.4.

6.1.3 Schlussfolgerungen aus der Struktur des Massenspektrums von Jupiter

Betrachten wir nun nocheinmal das Massenspektrum von Jupiter aus Abbildung 4.1. Es ist ganz deutlich von einer einzigen, relativ scharfen Spitze dominiert. Die Form erinnert an eine log-Normalverteilung mit dem Maximum bei ca. $0,34 M_{\oplus}$. Lediglich eine weitere kleine Spitze

im linken Flügel des Hauptpeaks bricht die Symmetrie.

Dies ist ein erstaunliches Ergebnis. Schließlich haben wir – mit Ausnahme der Sonnenmasse, welche den Hill Radius beeinflusst – in unserer Rechnung keinerlei Massenskala verwendet. Sowohl bei den Kernmassen als auch bei den Kerndrücken wurde keine Größenordnung bevorzugt (siehe Kapitel 4.2). Dennoch haben selbstgravitierende Gaskugeln für die hier vorgegebenen Randbedingungen offenbar stets typische planetare Massen.

Was bedeutet dieses Ergebnis für die Entstehung von Jupiter? Nun, wir können sagen, dass das Massenspektrum aller möglichen Gaskugeln im hydrostatischen Gleichgewicht log-normalverteilt ist, und zwar um eine Masse von $0,34 M_{\oplus}$ bei einer Halbwertsbreite von 0,16 (in logarithmischer Skala). Dies bedeutet, dass wir die Rahmenbedingungen um mehrere Größenordnungen ändern können und stets in diesem schmalen Massenbereich landen. Im Umkehrschluss gilt folgendes: Sind die Nebelbedingungen bei anderen Sternen gleichmäßig über mehrere Größenordnungen verteilt, dann sind die Protoplaneten im Jupiterabstand log-normalverteilt.

Doch Jupiter liegt ganz am oberen Ende des Massenbereichs. In seinem Fall hängt die endgültige Massenverteilung davon ab, wie groß die Massenänderung beim hydrodynamischen Kollaps ausfällt.⁶ Ich vermute, dass die endgültige Masse zu großen Teilen durch die Größe der Fresszone, also durch die Menge des verfügbaren Materials im Moment des Kollapses, bestimmt wird. Jupiters Masse ist also zu wesentlichen Teilen dynamisch bestimmt. Saturn dagegen scheint eine typische Gleichgewichtsmasse zu haben.

6.2 51 Pegasi b

Nach der Betrachtung der möglichen Protoplaneten für die Bedingungen wie sie vermutlich an Jupiters Position in unserem Sonnensystem geherrscht haben, wende ich mich nun dem eigentlichen Ziel dieser Arbeit zu: den Pegasi-Planeten.

Ich werde 51 Peg b dazu verwenden, die grundlegenden Unterschiede zwischen den Pegasi-Planeten und jupiterähnlichen Planeten herauszustellen.

6.2.1 Alle möglichen Gleichgewichte bei 0,05 AE

Genau wie bei der Jupiterposition habe ich alle möglichen Gleichgewichte für 51 Peg b berechnet. Die verwendeten Parameter zu den Randbedingungen \mathcal{M}_c lauten:

- $a = 0,05 \text{ AE}$,
- $T_x = 1252 \text{ K}$,
- $\dot{M} = 10^{-4} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$,
- $M_{\star} = M_{\odot}$.

⁶Es ist aber ebenso möglich, dass die dynamische Phase jenseits der kritischen Masse zu einem Massenverlust führt. Bei Jupiter war dies offenkundig nicht so.

Die Außentemperatur ergibt sich aus Gleichung (2.17) für solare Leuchtkraft bei dem gegebenen Abstand. Die Akkretionsrate ist deutlich höher als bei Jupiter (siehe Abschnitt 1.1.2).

Das Ergebnis der Rechnung ergibt eine Mannigfaltigkeit aller möglichen Gleichgewichtszustände als Funktion von (M_c, P_c) . Betrachten wir zunächst nur den Außendruck. Dies zeigt Abbildung 6.5: Höhe und Farbe geben den Außendruck für den jeweiligen Punkt (M_c, P_c) wieder. Ein Vergleich mit der Außendruckdarstellung für die Jupiterposition, Abbildung 6.1, zeigt: Der zweite Anstieg im Außendruck in P_c -Richtung (in Abbildung 6.1 bei $P_c = 6^\dagger$) fehlt hier. Das erste Maximum im Außendruck (in P_c -Richtung, $P_c \approx 7$) mit anschließendem Abfall scheint eine ähnliche Form wie bei Jupiter zu haben, man vergleiche hierzu Abbildung 6.1 bei $P_c \approx 0$ (Die Abbildung ist um 90° gedreht, um den Abfall besser sehen zu können). Die absoluten Werte sind jedoch verschieden: Das Druckmaximum und damit der Beginn der Eigengravitation liegen hier bei $P_c \approx P_x = 7,2$; bei Jupiter waren es $P_c \approx P_x = 0,17$ (Beide Werte für eine Kernmasse $M_c = 20$).

Auch die Hüllenmassendarstellung, Abbildung 6.6, weist deutliche Unterschiede auf. Es existiert nach wie vor das Plateau, jedoch nimmt die Hüllenmasse über dieses in P_c -Richtung streng monoton zu. Die wellenförmige Struktur ist verschwunden. Weiterhin fällt auf, dass die sehr kompakten Objekte mit niedrigen Außendrücken massereicher sind als die auf dem Plateau.

Betrachtet man diese beiden Darstellungen der Mannigfaltigkeit genauer, muss man sich die Frage stellen, ob die Region IV überhaupt noch existiert. Sie war in Abschnitt 3.3 ja als Region ausgedehnter und selbstgravitierender Planeten eingeführt worden. Die (Hüllen-)Massen waren in erster Näherung unabhängig von Kernmasse M_c und Kerndruck P_c . Letzteres ist ganz offensichtlich nicht mehr der Fall. In Abschnitt 6.1 wurde die Region IV dann dadurch charakterisiert, dass sie von ausgedehnten Planeten eingefasst ist. In der Außendruckdarstellung scheint dies zunächst nicht der Fall zu sein. Vielmehr ist es so, dass der erste Grat in der Außendruckdarstellung des Jupiter-Falls (Abbildung 6.1) weiterhin vorhanden ist, der Druckanstieg zu höheren Kerndrücken P_c jedoch ausbleibt. Über den Grund kann ich zunächst nur spekulieren: Bei Jupiter war ja die Umstrukturierung der sehr ausgedehnten Hülle, vermutlich im Zusammenhang mit dem Auftreten einer radiativen Zone im Inneren, die Ursache für den erneuten Druckanstieg zu höheren Kerndrücken. Dies passiert hier nicht. Zum einen ist die Hülle hier aufgrund des kleineren Hill Radius deutlich weniger ausgedehnt, zum anderen ist die innere Struktur völlig verschieden: Die Planeten sind so nahe am Stern voll konvektiv.

Dennoch existiert die Region IV der ausgedehnten Planeten weiterhin: Anders als bei Jupiter, bei dem die Druckabnahme zu kompakten Objekten führt, sind die Planeten in diesem Fall auch auf der abfallenden Flanke im Druck über lange Strecken ausgedehnt. Dies liegt an den, absolut betrachtet, deutlich höheren Außendrücken verglichen mit Jupiter. Die völlig andere innere Struktur offenbart sich erst bei der Betrachtung einzelner Planeten. Diese zeigt Abbildung 6.7 in einer Sequenz von radialen Plots mit ansteigendem Kerndruck ($P_c = 7 \dots 10,5$)

[†]Dies ist erneut Kurzschreibweise für $\lg P_c \text{ Pa}^{-1} = 6$.

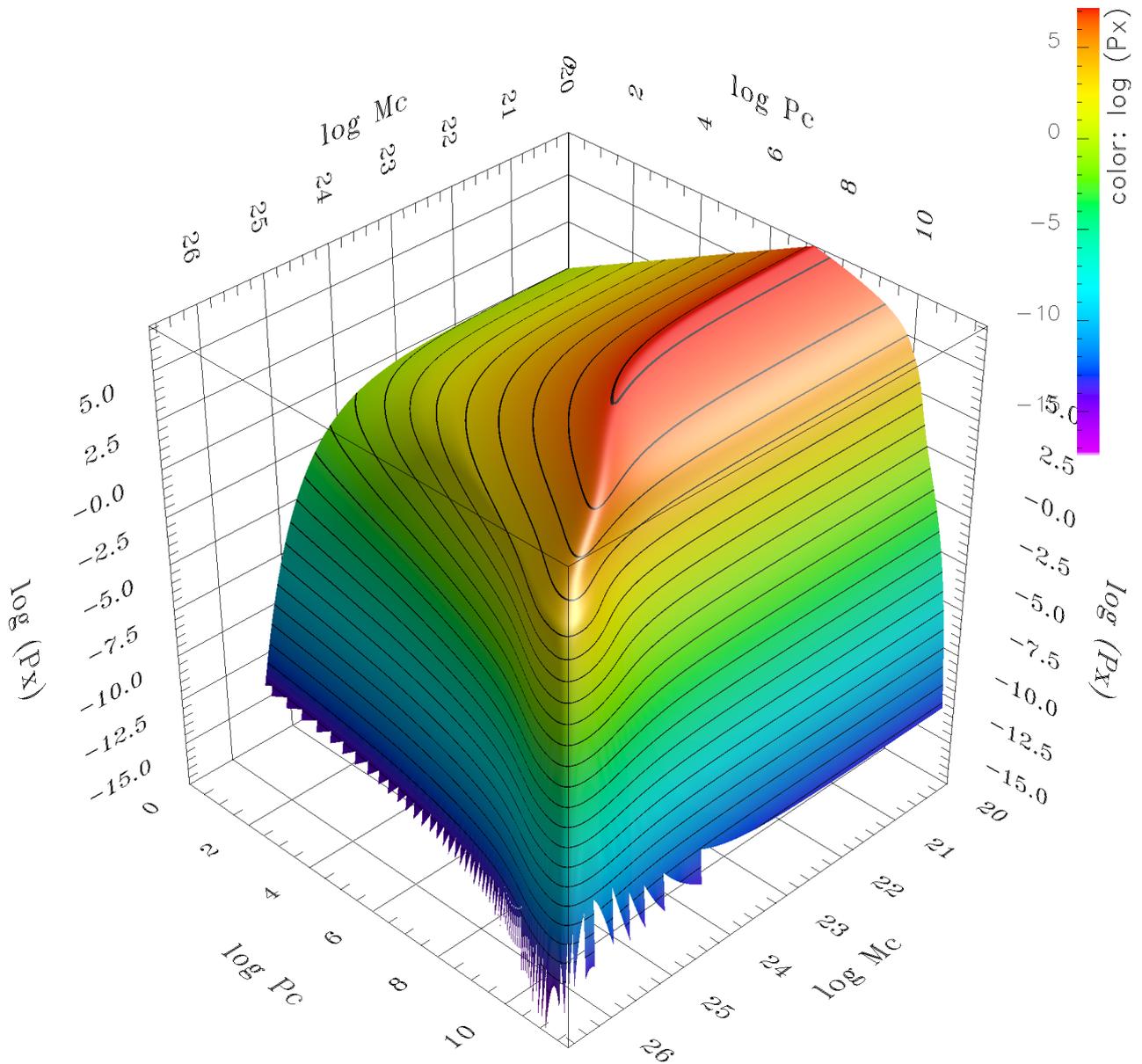


Abbildung 6.5: **Außendruckdarstellung für 51 Peg b-artige Planeten.** Für diese Bedingungen erhält man in der Außendruckdarstellung einen einzigen schmalen Grat. Im direkten Vergleich zu Jupiter, Abbildung 6.1, fällt auf, dass der zweite Grat zu hohen Kerndrücken P_c nicht mehr auftritt. Ebenso erhält man kein flaches Plateau wie im leuchtschwachen, fast isothermen Fall (vgl. Abbildung 3.1(d)).

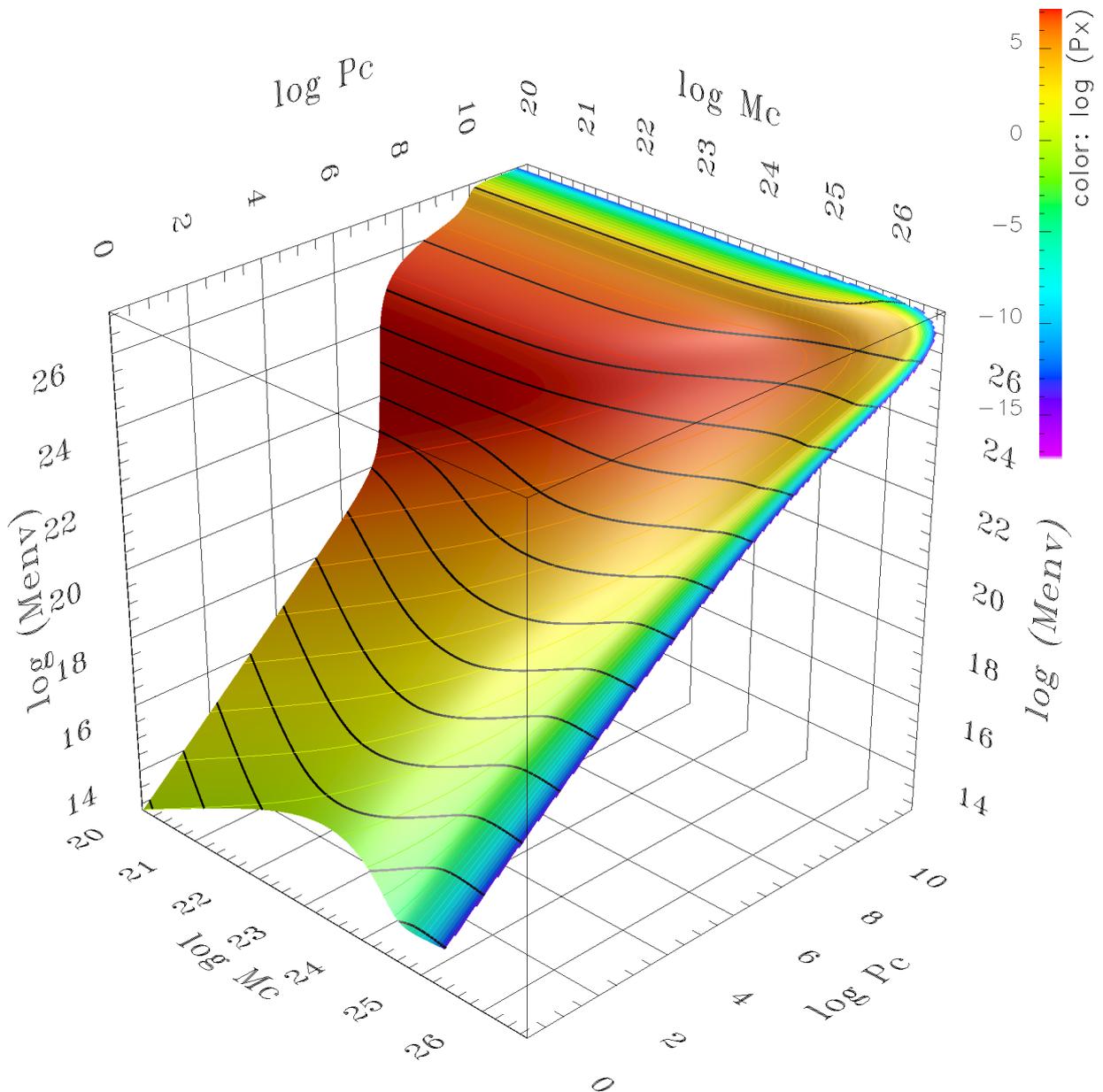


Abbildung 6.6: **Hüllenmassendarstellung für 51 Peg b-artige Planeten.** Die Struktur der Insel, entsprechend Region IV, tritt auch hier auf. Jedoch ist die Insel nun nicht mehr flach, sondern vielmehr ist der Verlauf in P_c -Richtung streng monoton steigend. Die „Spitze“ ist hier deutlich flacher (der Gradient ist kleiner) als für den Fall von Jupiter (vgl. Abbildung 6.2).

bei konstanter Kernmasse, $M_c = 23$. Offenbar sind hier alle Modelle voll konvektiv. Weiterhin sind die Modelle zunächst ausgedehnt, d. h. signifikante Massenzunahme erfolgt bis zum Hill Radius. Man sieht, dass erst das Modell für $P_c = 10$ keine relevanten Massenanteile im Außenbereich hat, also kompakt ist. Das Modell für $P_c = 10,5$ hat schließlich sogar eine äußere radiative „Atmosphäre“.

Insgesamt ist der Übergang von Region IV zu II in diesem Fall fließend und nicht so scharf wie im leuchtschwachen Fall (siehe Abschnitt 3.3).

6.2.2 Massenspektrum für 51 Peg b

Nach der Betrachtung aller Gleichgewichte werde ich nun das Massenspektrum für 51 Peg b betrachten. Bei der Abzählung beschränke ich mich auf den Bereich mit Kerndrücken $\lg P_c$ größer als 7 (siehe Abschnitt A.1.2 zur Bereichsauswahl). Das Ergebnis zeigt Abbildung 6.8: Die Verteilung der Gleichgewichtszustände auf verschiedene Massenbereiche. Das Massenspektrum wird durch einen scharfen Peak bei $0,64 M_{\oplus}$ dominiert (Modus: 27,085 (0,01), Median: 27,079 (26,8–28)).

Weiterhin gibt es einen zweiten, viel breiteren Peak bei etwa 26,15, also $23,8 M_{\oplus}$ (Modus: 26,15 (0,055), Median: 25,79 (24–26,8)). Damit liegt die minimale, aus Radialgeschwindigkeitsmessungen bestimmte Mindestmasse von 51 Peg b bei 73% des Hauptmaximums – ein durchaus wahrscheinlicher Wert für $\sin i$.

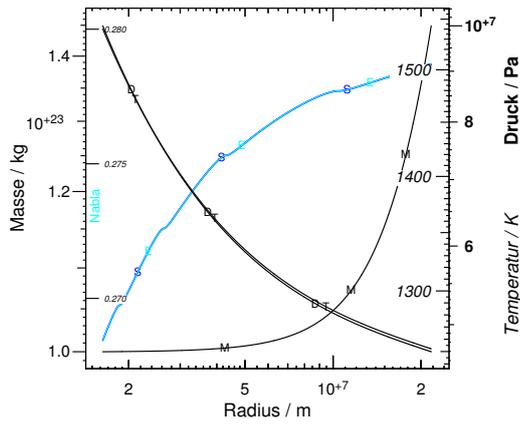
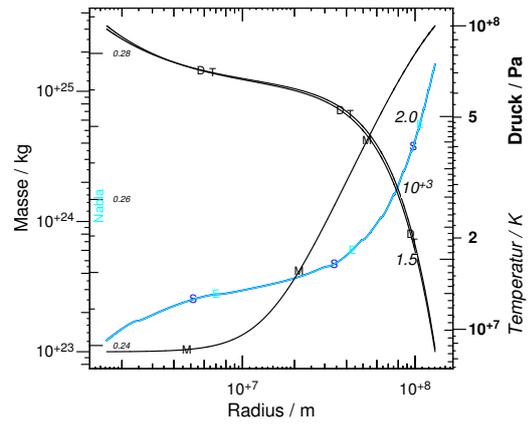
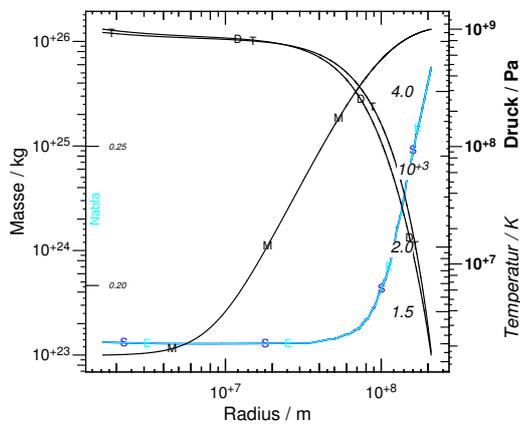
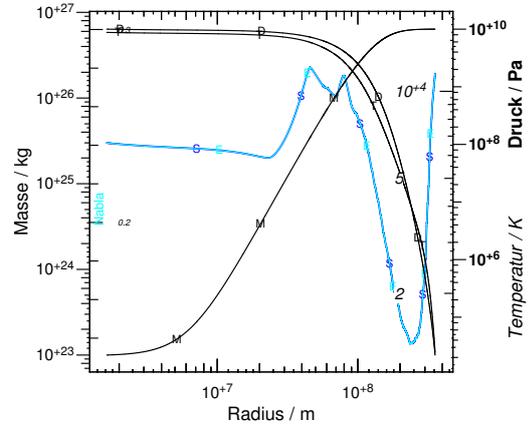
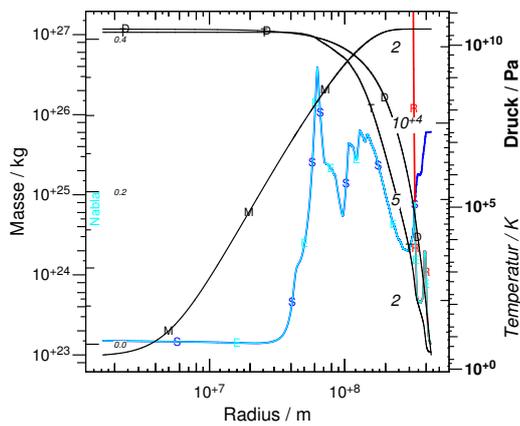
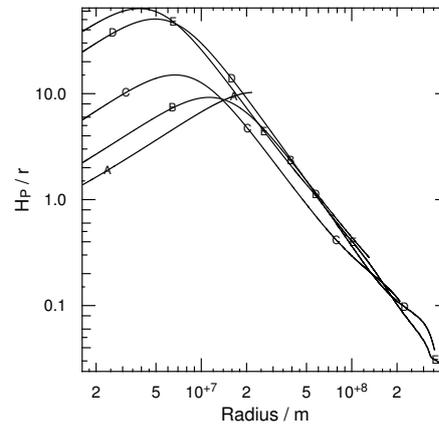
Was ist also an der Position von 51 Peg b zu erwarten? Falls die Gleichgewichte dominant sind, erwarte ich ganz klar zwei Populationen von Objekten: Eine enge Population um $0,64 M_{\oplus}$ sowie eine breiter gestreute Population bei $21 M_{\oplus}$. Durch Summation der einzelnen Massenbins kann man die relativen Anzahlen der beiden Populationen vergleichen. Zählt man alle Planeten zwischen 26,6 und 25 und zieht das Mittel des Bereichs 24–25 ab, erhält man eine Gesamtzahl von ca. 6200 Planeten. Die selbe Rechnung für den zweiten Peak zwischen 26,6 und 27,15 ergibt eine Gesamtzahl von 8200 Planeten. Das heißt, beide Populationen sind in etwa gleich groß.

Der Erwartungswert für diese Position ist also zwei Populationen: eine scharf begrenzte um $0,64 M_{\oplus}$ und eine sehr breite Verteilung um $21 M_{\oplus}$.

6.3 HD 149026 b

„For theorists, the discovery of a planet with such a large core is as important as the discovery of the first extrasolar planet around the star 51 Pegasi in 1995“
Shigeru Ida

Für ein Mitglied der Entdeckergruppe ist diese Einschätzung verständlich. Ob sie jedoch zutrifft, wird erst die Zukunft zeigen. In jedem Fall hat die Entdeckung von HD 149026 b die

(a) $\lg P_c/\text{Pa} = 7$ (b) $\lg P_c/\text{Pa} = 8$ (c) $\lg P_c/\text{Pa} = 9$ (d) $\lg P_c/\text{Pa} = 10$ (e) $\lg P_c/\text{Pa} = 10,5$ 

(f) Druckskalenhöhen

Abbildung 6.7: **Radiale Strukturen von Protoplanetenhüllen an der Position von 51 Peg b** für eine Kernmasse von $\lg M_c/\text{kg} = 23$. Ab (b) beginnt die Eigengravitation; ab (d) beginnen die Planeten kompakt (ohne relevante äußere Massenanteile, siehe Text) zu werden, erkennbar an der horizontalen Massenkurve (M) bei großen Radien. Abbildung (f) zeigt den Verlauf der Druckskalenhöhen von (a)-(e). In den Abbildungen (a) bis (d) liegt ∇_{rad} (rote Linie) außerhalb des dargestellten Bereichs, $\nabla_{\text{rad}} > \nabla_s$ gilt im gesamten Bereich, die Strukturen sind voll konvektiv. Struktur (e) ist an der Oberfläche radiativ.

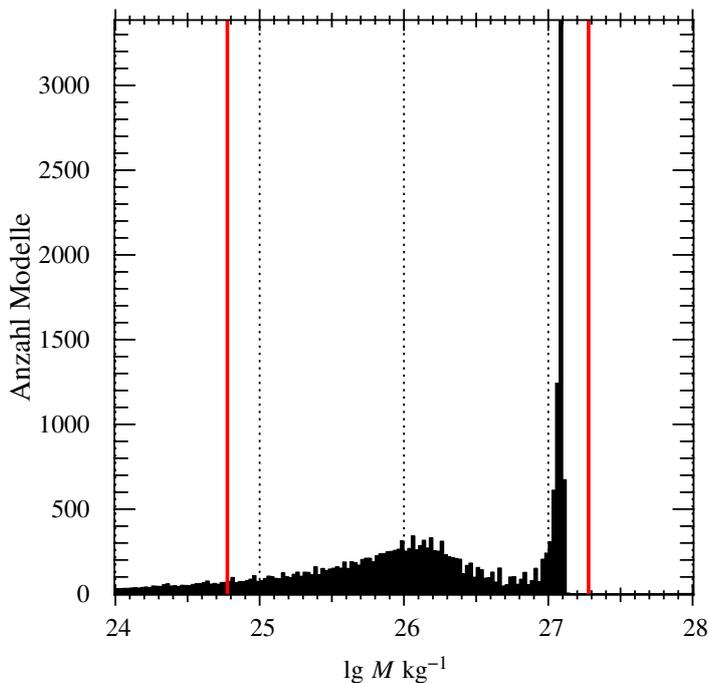


Abbildung 6.8: **Massenspektrum für 51 Peg b.** Das Spektrum besitzt ein klares Maximum bei $\lg M/\text{kg} = 27,087$ (Modus, 0,001). Dies entspricht $0,64 M_{\oplus}$. Die minimale Masse, $M \sin i$, von 51 Peg b liegt bei 26,95.

Theoretiker aufhorchen lassen, denn einen solchen Planeten hatte in der Tat niemand vorhergesagt.

Der Planet HD 149026 b wurde im Jahr 2005 vom N2K-Projekt gefunden (Sato u. a. 2005). Durch Radialgeschwindigkeitsmessungen entdeckt, zeigten photometrische Nachbeobachtungen einen Transit, d. h. der Planet wandert auf seinem Orbit gerade durch die Sichtlinie zum Stern und verdunkelt ihn. Dies ermöglicht nicht nur die Bestimmung der exakten Masse des Planeten (die Inklination ist damit ja bekannt), sondern erlaubt auch die Bestimmung der Dichte des Planeten. Im Fall von HD 149026 b war die Dichte unerwartet hoch: bei einer Masse von $0,36 M_{\oplus}$ hat er einen Radius von nur $0,725 R_{\oplus}$. Die Modellrechnungen lassen einen Kern aus schweren Elementen von $67 M_{\oplus}$ vermuten. Bei einer Gesamtmasse von gerade $114 M_{\oplus}$ ist dieser Kern außergewöhnlich groß. Abbildung 6.9 zeigt den Aufbau zweier möglicher Modelle von HD 149026 b und Jupiter im direkten Vergleich.

Wie kann so ein Planet entstehen? Seine Existenz wird allgemein als starkes Argument für die Kernakkretionshypothese und gegen die Hypothese von der Scheibeninstabilität gesehen. Dennoch war HD 149026 b auch für die Verfechter der ersteren Theorie eine große Überraschung – er passte nicht so recht ins Bild (siehe Abschnitt 1.1). Klassische Rechnungen ergeben für Pegasi-Planeten eine maximale *kritische Masse* von $21 M_{\oplus}$ und selbst bei voll-konvektiven Objekten waren maximal $50 M_{\oplus}$ denkbar (siehe z.B. Ikoma u. a. 2001).

6.3.1 Bestimmung der Rahmenbedingungen für eine vorgegebene kritische Masse

Neben der Bestimmung der Massenverteilung kann die Mannigfaltigkeit auch anderweitig verwendet werden. Durch die Verfügbarkeit *aller* möglichen Zustände erlaubt die Mannigfaltig-

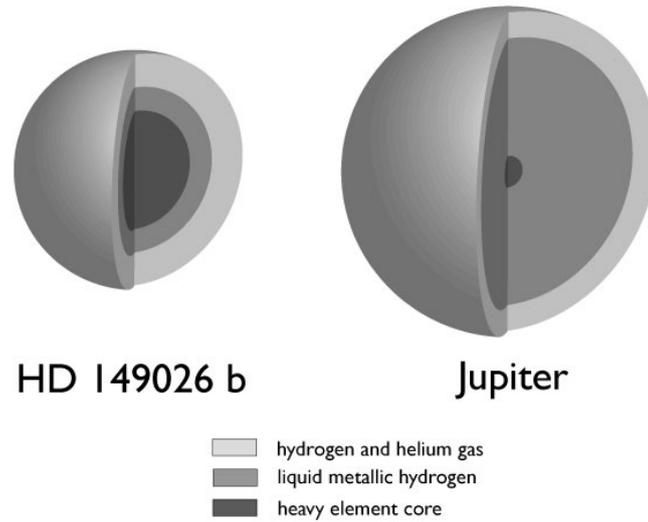


Abbildung 6.9: **Innere Struktur von HD 149026 b im Vergleich zum Inneren des Jupiter** (aus N2K Consortium 2005).

keit auch die Bestimmung der exakten Rahmenbedingungen für die Entstehung eines ganz bestimmten Planeten. Dies habe ich für den Planeten HD 149026 b ausgenützt. Damit sieht man quasi „auf einen Blick“, ob eine kritische Masse dieser Größe möglich ist. Für die Berechnung der Mannigfaltigkeit verwende ich folgende Werte:

- $a = 0,042 \text{ AE}$,
- $\dot{M} = 10^{-2} M_{\oplus} a^{-1}$,
- $M_{\star} = 1,3 M_{\odot}$,
- $L_{\star} = 2,72 L_{\odot}$, und damit
- $T_x = 1754 \text{ K}$.

Die große Halbachse a , die Masse des Sterns M_{\star} sowie seine Leuchtkraft L_{\star} stammen aus Sato u. a. (2005). Die Außentemperatur T_x ergibt sich aus Gleichung (2.17) für die angenommene Leuchtkraft und Abstand. Der recht hohe Wert von \dot{M} lässt sich so nahe am Mutterstern, bei Annahmen über die Nebeldichten wie sie für die MMSN gelten, gut erreichen (siehe Abschnitt 1.1.2).

Das Ergebnis zeigt Abbildung 6.10: Die Hüllenmassendarstellung für HD 149026 b bei einer Akkretionsrate \dot{M} von $10^{-2} M_{\oplus} a^{-1}$. Die Rechnung zeigt, dass so hohe Werte für M_{crit} möglich sind. Wir können auch sofort ablesen unter welchen Bedingungen dies passiert: bei einem Nebeldruck von $P = 10^{3,6} \text{ Pa} = 3980 \text{ Pa}$ ist die kritische Masse gerade $\sim 70 M_{\oplus}$. Auch kann man direkt die Hüllenmasse des kritischen Modells angeben: Sie beträgt $M_{\text{env}} = 10^{26,45} \text{ kg}$ – also $47 M_{\oplus}$. Zusammen mit dem Kern von $70 M_{\oplus}$ ergibt sich damit eine Gesamtmasse von $117 M_{\oplus}$ – dies ist sehr nahe an der beobachteten Masse von $114 M_{\oplus}$ (Rechnet man mit dem exakten Wert von $M_c = 67 M_{\oplus}$, was mir in Anbetracht der Modellgenauigkeit übertrieben erscheint, erhält man sogar den exakten Wert von $114 M_{\oplus}$).

Nun stellt sich die Frage, warum dies nicht schon andere Autoren festgestellt haben. Der Grund ist folgender: Rechnet man nicht alle Gleichgewichte aus, sondern nur die Gleichgewichte für bestimmte Nebelbedingungen, dann muss man mit dem richtigen Wert für den Nebeldruck

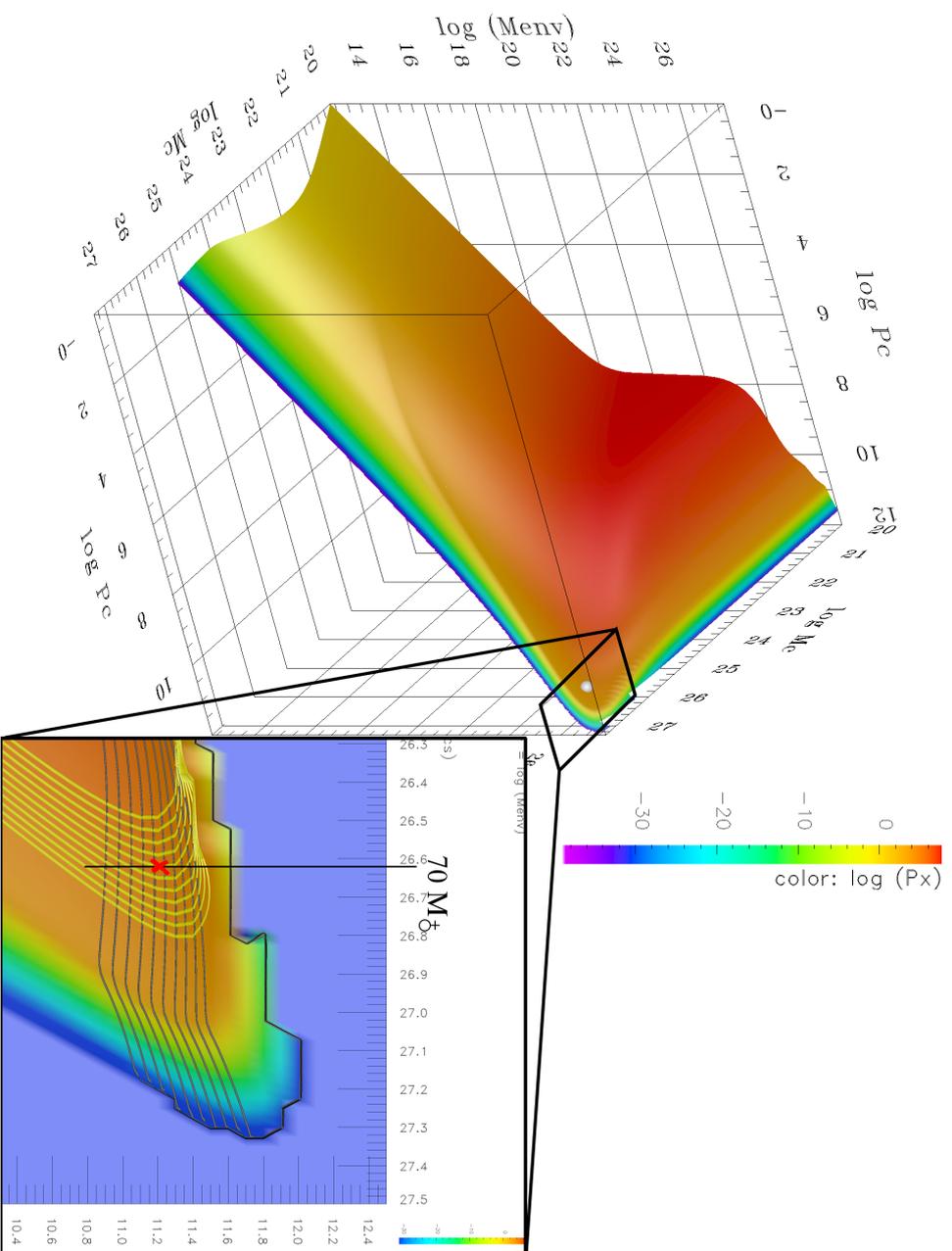


Abbildung 6.10: **Hüllenmassendarstellung für HD 149026 b;** Die Farbe gibt den Außendruck wieder. Diese Gleichgewichte ergeben sich bei einer Planetesimal-Akkreretionsrate von $10^{-2} M_{\odot} a^{-1}$.

Die Mannigfaltigkeit aller möglichen Gleichgewichte erlaubt die sofortige Bestimmung der notwendigen Rahmenbedingungen für solch eine große kritische Kernmasse. Dies zeigt der herausgezogene Bereich: Die senkrechte Linie markiert die Position der Kerne mit einer Masse von $70 M_{\oplus}$. Dort, wo diese Linie tangential die Isobaren (Linien konstanter Außendruck); in der Graphik gelb, 11 Linien von $\lg P \text{ Pa}^{-1} = 3.4$) berührt, beträgt die kritische Masse gerade $70 M_{\oplus}$. Dies passiert hier bei einem Außendruck von $\lg P \text{ Pa}^{-1} = 3.6$. Die ebenfalls eingezeichneten Linien konstanter Hüllenmasse (grau, 11 Linien von $\lg M_{env} \text{ kg}^{-1} = 26..27$) erlauben dann sofort die Bestimmung der zugehörigen Hüllenmasse: sie beträgt $47 M_{\oplus}$. Zusammen mit der Kernmasse von ca. 70 ergibt sich eine Gesamtmasse des Planeten von $117 M_{\oplus}$. Dies ist fast genau die Masse von HD 149026 b.

arbeiten. Da das Problem der zu kleinen Fresszone für die Pegasi-Planeten immer im Vordergrund stand, war niemand auf die Idee gekommen, niedrigere Nebeldrücke als MMSN zu verwenden. Ikoma u. a. (2001) haben dies zwar versucht, aber nur für eine – für diese Abstände sehr kleine – Massenakkretionsrate. Ich dagegen konnte, da ich mit einer Mannigfaltigkeit aller Gleichgewichte für eine Akkretionsrate bestimme, verschiedene Akkretionsraten verwenden und somit die richtige Kombination von Randbedingungen relativ einfach bestimmen.

6.3.2 Fluid-dynamische Rechnungen

Nun, da die exakten Bedingungen für eine solch große kritische Masse bestimmt worden sind, stellt sich die Frage, ob eine komplett hydrostatische Entstehung realistisch ist. Da die genauen Randbedingungen nun bekannt sind, habe ich zusammen mit Günther Wuchterl strahlungs-Fluid-dynamische Rechnungen durchgeführt, um die Entstehung von HD 149026 b zu überprüfen. Die statischen Modelle sagen bis zur vollen Masse des Planeten eine quasi-statische Entwicklung voraus. Dabei lassen sie natürlich völlig außer acht, dass Instabilitäten auftreten können, die, obwohl formal ein Kräftegleichgewicht herrscht, die Entwicklung verhindern können. Selbst eine lineare Stabilitätsanalyse, wie sie im isothermen Fall für ideales Gas gemacht wurde (siehe Schönke, J. 2005), kann keine „harte“ Stabilität garantieren, da nicht-lineare Instabilitäten auftreten können.

Der für die Fluid-dynamischen Rechnungen verwendete Algorithmus sowie die implementierten Formeln sind die selben wie in Wuchterl (1990, 1991a,b) bzw. Wuchterl (1989) mit der Konvektionstheorie aus Wuchterl u. Tscharnuter (2003). Diese Rechnungen verwenden eine andere Zustandsgleichung (vgl. Wuchterl 1989) als SCVH und sie verwenden im Vergleich zu dieser Arbeit leicht modifizierte Opazitäten-Tabellen. Dennoch war es möglich, die Entstehung von HD 149026 b mit den von mir berechneten Randbedingungen zu bestätigen. Die genauen Zahlenwerte für die Randbedingungen sind die selben wie in Abschnitt 6.3.1, bis auf:

- einen festen Außendruck $P_x = 3980$ Pa, und
- eine Safronov Zahl θ von 10.

Die Randbedingungen gleichen im Wesentlichen meinen Rechnungen mit ein paar Unterschieden. Da es sich um eine konkrete Rechnung handelt, muss natürlich der Außendruck vorgegeben werden. Es handelt sich um den im letzten Abschnitt berechneten Wert. Weiterhin verwendet die Fluid-dynamische Rechnung die realistischere Particle-in-a-box Näherung (siehe Abschnitt 1.1.2) anstatt eine konstante Planetesimalakkretionsrate anzunehmen. Die Safronov-Zahl wurde auf 10 gesetzt, so dass im Maximum für die gewählten Dichten gerade die gewünschte Rate von $\dot{M} = 10^{-2} M_{\oplus} a^{-1}$ herauskommt.

Das Ergebnis der Rechnung zeigt Abbildung 6.11. Sie zeigt den zeitlichen Verlauf von Kernmasse, Gesamtmasse und Leuchtkraft des Planeten. Das Erreichen der korrekten Endmasse des Kerns von $67 M_{\oplus}$ ist durch die Größe des Massenreservoirs der Planetesimale vorgegeben,

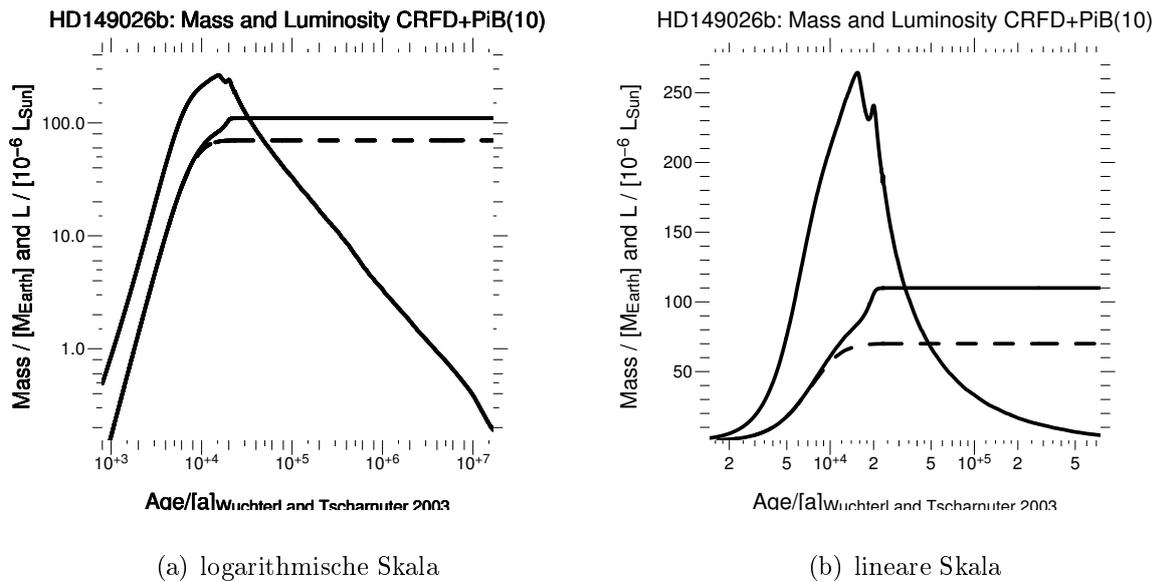


Abbildung 6.11: **Mögliche zeitliche Entwicklung von HD 149026 b.** Gezeigt ist der zeitliche Verlauf dreier Größen: Der Kernmasse (gestrichelt), der Gesamtmasse, sowie der Leuchtkraft (beide durchgezogen). Der glatte Verlauf aller Kurven deutet bereits darauf hin, dass die Entwicklung quasistatisch abläuft. Es treten keine Instabilitäten auf.

also kein eigentliches Ergebnis dieser Rechnung. Entscheidend ist hier, dass die Entwicklung quasi-statisch abläuft und keine dynamische Phase einsetzt, wie dies etwa bei Jupiter der Fall ist. Ebenso treten keine Instabilitäten auf. Dies lassen bereits die Graphen erahnen, denn die Kurven sind alle sehr glatt, es gibt offenbar nur eine dominante Zeitskala. Bei genauerer Betrachtung der Rechnungsergebnisse zeigt sich, dass die dynamischen Terme tatsächlich keine Rolle spielen, die Entwicklung also komplett statisch abläuft. Im Umkehrschluss ist demnach eine quasistatische Rechnung völlig ausreichend, um diesen Planeten zu beschreiben.

Dies ist erneut ein sehr starker Hinweis dafür, dass sich die Entwicklung der Pegasi-Planeten grundlegend von den Jupiter-Planeten unterscheidet. Offenbar spielen die Gleichgewichte hier eine entscheidende Rolle.

6.3.3 Das Massenspektrum für HD 149026 b

Nun werde ich das Massenspektrum für HD 149026 b besprechen. Es war zwar nicht das primäre Ziel bei der Untersuchung dieses Planeten, dennoch ist es interessant, ob es starke Änderungen im Vergleich zu 51 Peg b gibt. Beide Planeten sind ja auf den ersten Blick in einer ähnlichen Position. Für das Abzählen der Massen verwende ich dieselbe Mannigfaltigkeit wie für Abbildung 6.10, jedoch werden die Gesamtmassen gezählt. Außerdem beschränke ich die Kerndrücke P_c auf einen Bereich $\lg P_c/P_a > 7$, um unnötigen Hintergrund durch Region III zu vermeiden. Das Resultat zeigt Abbildung 6.12: Die Massenverteilung enthält zwei sehr deutliche und ein schwaches Maximum. Die drei Maxima liegen bei etwa 26,13, 27,05 und 27,55

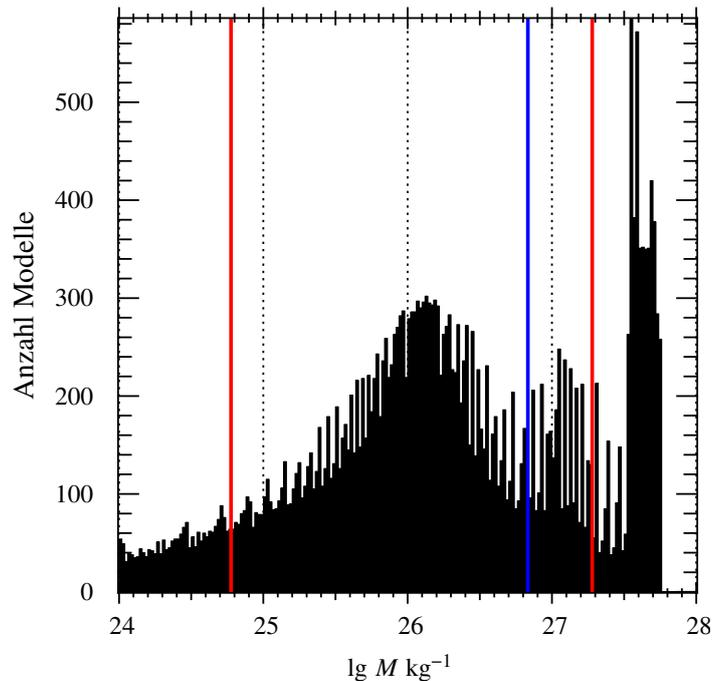


Abbildung 6.12: **Massenspektrum für HD 149026 b.** Die beiden roten Linien zeigen wie immer die Position von M_{\oplus} bzw. M_{\oplus} . Die blaue Linie steht bei $114 M_{\oplus}$ für die gemessene Masse von HD 149026 b.

(Modus, 0,02) bzw. 26,06, 27,06 und 27,62 (Median) in $\lg M$. Die drei Maxima enthalten jeweils ca. 15000 (25,25–26,75), 4400 (26,75–27,42) bzw. 4900 (27,42–28) Planetenmodelle. Das sehr breite Maximum um 26,13 entsprechend $22,6 M_{\oplus}$ enthält also die meisten Modelle.

Neben den roten Linien für $1 M_{\oplus}$ bzw. $1 M_{\oplus}$ zeigt die Abbildung auch eine blaue Linie entsprechend der Masse von HD 149026 b. Man sieht, dass diese Linie mit keinem Maximum übereinstimmt. Allerdings gehen das erste und zweite Maximum fließend ineinander über und selbst im Zwischenminimum liegen in einem Intervall noch 100 Modelle. Somit befindet sich der Planet HD 149026 b zwar in einem weniger wahrscheinlichen, aber dennoch erlaubten, Zustand.⁷ Dies zeigt, dass man die Massenspektren statistisch verstehen muss: sie geben lediglich die relativen Häufigkeiten der Planeten für eine bestimmte Position an. Hinzukommt, dass die aktuellen Planetenverteilungen stark durch die Entdeckungsmöglichkeit eingeschränkt und damit verfälscht sind. Die heutigen Instrumente dringen gerade erst in Genauigkeitsbereiche vor, die es erlauben, Planeten von $21 M_{\oplus}$ zu entdecken (siehe z.B. Santos u. a. 2004, für die Entdeckung eines $14 M_{\oplus}$ Planeten). Somit ist der Bereich des ersten Maximums im Massenspektrum noch völlig unentdeckt, falls er existiert. Ich erwarte jedoch eine Vielzahl von Planeten in diesem Massenbereich bei $\lg M_c \text{ kg}^{-1} \approx 26$.

6.3.4 Offene Probleme

Durch die Fluid-dynamische Rechnung in Abschnitt 6.3.2 existiert erstmals ein plausibles Entstehungsmodell für HD 149026 b. Dennoch sind damit natürlich nicht alle Probleme gelöst. Insbesondere das verfügbare Material bereitet der in-situ Entstehung Probleme (siehe Abschnitt 6.4). Ich möchte an dieser Stelle auch darauf hinweisen, dass die Migration der Kerne

⁷Laut dem Massenspektrum sind nur wenige HD 149026 b-artige Planeten – ca. 1/10 der beobachteten Pegasi-Planeten – zu erwarten.

von außerhalb der Eis-linie im Fall von HD 149026 b keine mögliche Lösung darstellt: Bei großen Halbachsen beträgt die kritische Masse weniger als $20 M_{\oplus}$. Der Kern muss aber unterkritisch migriert sein. Die weiteren $40 M_{\oplus}$ müssen also bei kleinen Abständen a akkretiert worden sein. Dies schließt eine Migration nach der Kernbildung aus.

Speziell für HD 149026 b ist denkbar, dass der Nebeldruck erst im Laufe der Entstehung durch das Versiegen der Fresszone stark abnimmt. Anfangs kann also durchaus ein höherer Druck geherrscht haben. Das Abschwächen der Kernakkretion durch die Verringerung der Planetesimaldichte führt dann automatisch zu einem überkritischen Kern, denn die kritische Kernmasse ist stark leuchtkraftabhängig. Der nach dem Nachlassen der Leuchtkraft schließlich überkritische Kern kann dann seine Hülle auch im Vakuum behalten.

6.4 Das Massenproblem bei den Pegasi-Planeten

In Abschnitt 1.1.2 habe ich gezeigt, dass die Zeitskalen für die Entstehung der Kerne kein Problem darstellen. Es muss jedoch auch ausreichend Material zur Verfügung stehen. In der klassischen Vorstellung geht man davon aus, dass der Protoplanet lediglich einen schmalen Streifen zu beiden Seiten seines Orbits akkretieren kann. Die Reichweite des Planeten wird dabei üblicherweise mit vier Hill Radien angegeben (siehe z. B. Lissauer 1993). Tut man dies für Pegasi-Planeten, ist viel zu wenig Material – sowohl Gas als auch Staub – vorhanden, um den Planeten zu formen. Daher ist bei dem Versuch, Pegasi-Planeten in-situ entstehen zu lassen, stets davon ausgegangen worden, dass viel höhere Dichten als MMSN nötig seien. Für extreme Planeten wie HD 149026 b jedoch reichen selbst Nebeldichten die gerade noch gravitationsstabil sind nicht aus, um den Kern zu bilden.

Ich glaube aber trotzdem, dass Pegasi-Planeten in-situ entstehen können. Man muss sich lediglich vom statischen Bild der Scheibe verabschieden. Für passive Scheiben nimmt man an, dass nur sehr wenig Material in Richtung Stern transportiert wird. Sehr wenig bedeutet hier $10^{-8\pm 1} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$ (siehe Abschnitt 1.1.1). Betrachten wir nun einen Kern nahe am Stern, z. B. bei $a = 0,05 \text{ AU}$. Nehmen wir an, der Kern wächst sehr schnell in 10^5 a . Dann passiert in dieser Zeit Materie der Masse $M = 10^5 \times 10^{-8} M_{\odot} = 333 M_{\oplus}$ seinen Orbit. Für die Hülle ist dies bereits mehr als ausreichend. Unter Annahme solarer Häufigkeiten erhält man außerhalb der Eis-Linie einen Massenanteil kondensierter Materie von $\approx 1/56$ und innerhalb der Eis-Linie $\approx 1/240$ (Hayashi u. a. 1985). Rechnet man nun mit einer Scheibenlebensdauer von 1 Ma , erhält man für die verfügbare Masse kondensierter Materie:

$$M_{\text{staub}} = 10^6 \times 10^{-8} M_{\odot} / 240 \approx 14 M_{\oplus}. \quad (6.1)$$

Für „normale“ Planeten ist dies ausreichend. Man kennt heute aber auch extremere Fälle. Bleiben wir beim Beispiel HD 149026 b: Hierfür werden $\mathcal{O}(70) M_{\oplus}$ Staub benötigt. Für solch extreme Beispiele ist es meiner Ansicht durchaus angebracht, die Extremwerte der Nebel zu

verwenden. Laut Hartmann (siehe Zitat am Ende von Abschnitt 1.1.1) kann man den Wert aus Gleichung (6.1) ohne weiteres um den Faktor 10 erhöhen. Damit erhält man bereits $140 M_{\oplus}$ -ausreichend für alle momentan denkbaren Pegasi-Planeten. Eine erhöhte Metallizität kann die verfügbare Masse sogar noch weiter erhöhen.⁸

Bei den sehr engen Pegasi-Planeten bereitet die sehr hohe Nebeltemperatur weitere Probleme. Bei Temperaturen über 1000 K nimmt der Massenanteil der Kondensate ab. Im Fall von HD 149026 b z. B. betragen die Massenanteile der Hochtemperatursilikate nur noch 27%, die des Eisen 8% (siehe Pollack u. a. 1985). Diese Rechnungen gehen dabei jedoch von geringen Umgebungsdrücken aus wie sie im Nebel herrschen und nicht von Drücken wie sie im Inneren von Protoplaneten auftreten. Die Sublimationstemperaturen sind aber stark druckabhängig. Wenn der Kern also bereits existiert, führt die hohe Temperatur nicht zur Sublimation. Es bleibt allerdings ungeklärt, ob und wie Kerne in einer so heißen Umgebung gebildet werden können.

Weiterhin möchte ich noch anmerken, dass meine Arbeit eine Migration nicht prinzipiell ausschließt. Vielmehr muss der Planet im Gleichgewicht mit dem Nebel sein. Ob der Planetenkern komplett in-situ entstanden ist oder an die jeweilige Position migriert ist, ist dabei irrelevant. Es ist nur wichtig, dass überall Kerne vorhanden sind.

Zusammengefasst glaube ich nicht, dass das Reservoir an Material ernstzunehmende Probleme für die in-situ Entstehung der Pegasi-Planeten verursacht. Lediglich für extrem metallarme Sterne mit z. B. einem $[\text{Fe}/\text{H}] = -2$ ist dann unter Umständen nicht mehr ausreichend kondensierbare Materie vorhanden, um die Kerne zu formen. Ich vermute daher, dass es einen Schwellwert in der Metallizität gibt, unterhalb dessen überhaupt keine Pegasi-Planeten existieren.

⁸Beispiel: HD 149026 hat eine Metallizität von $[\text{Fe}/\text{H}] = 0,36$ (aus Sato u. a. 2005). Nimmt man an, dass die anderen schweren Elemente gleich überhäufig sind wie Eisen, ergibt sich ein erhöhter Gehalt an schweren Elementen von $10^{0,36} = 2,3$. Man kann den berechneten Wert also noch mit dem Faktor 2,3 multiplizieren.

7 Klassischer Zugang als Projektion einer Mannigfaltigkeit

Nachdem sich die letzten Kapitel ausschließlich mit der Mannigfaltigkeits-Sicht der Planeten beschäftigt haben, möchte ich in diesem Kapitel nochmals den Zusammenhang mit der klassischen Rechnung diskutieren. Klassisch bedeutet in diesem Zusammenhang die Rechnung mit festgehaltenem Nebeldruck P_x , also mit den Randbedingungen \mathcal{V} .

Da eine Mannigfaltigkeit ja alle Lösungen enthält, müssen selbstverständlich in einer Mannigfaltigkeit auch automatisch alle möglichen Rechnungen für einen bestimmten Nebeldruck P_x enthalten sein. Wie erhält man nun aus einer berechneten Mannigfaltigkeit eine gewünschte M_c - M_{tot} -Relation? Dies zeige ich im folgenden für die Position von Jupiter.

Für eine klassische Rechnung muß man zunächst den gewünschten Nebeldruck auswählen. Ich wähle exemplarisch den Wert des MMSN, $P = 5,75 \times 10^{-3}$ Pa, sowie einen geringfügig höheren Wert von $P = 7,94 \times 10^{-2}$ Pa. Diese beiden Werte wurden auch schon im Kapitel 6.1 ausgewählt und in die Jupiter-Mannigfaltigkeiten eingezeichnet. Will man wie Mizuno (1980) eine M_c - M_{tot} -Relation bestimmen, sind die Isobaren mit diesen beiden Werten in der Gesamtmassendarstellung einzuzeichnen. Hat man dies getan, fehlt nur noch die Projektion der Isobaren auf die gewünschte Ebene, in diesem Fall die M_c - M_{tot} -Ebene. Diesen Übergang zeigen die Abbildungen 7.1 und 7.2: Abbildung 7.1 links oben zeigt einen Blick auf die Spitze in der Gesamtmassendarstellung der Mannigfaltigkeit für Jupiter. Beide Isobaren sind eingetragen. Die Fläche wird dann rotiert und die Oberfläche zunehmend durchsichtiger gemacht bis schließlich die Projektion auf die M_c - M_{tot} -Ebene sichtbar wird.

In Abbildung 7.2 wird dies dann gespiegelt um die gleiche Ausrichtung wie in den Rechnungen von Mizuno zu erhalten. Die Rechnungen für die beiden gewählten Nebeldrücke sind dem gegenübergestellt.

Offenbar erhält man auf diese Weise die gleichen Ergebnisse, auch wenn die neuen Rechnungen viel schwieriger sind. Dies sieht man am ausgefransten Bereich in Abbildung 7.2(a) nach dem ersten Maximum. Allerdings findet man über die Mannigfaltigkeit alle Lösungen, auch die, die bei der direkten Berechnung der M_c - M_{tot} -Relation nicht berechnet werden können, weil es eben keine Funktion, sondern eine Relation ist. Im Fall des MMSN gibt es für die von mir gewählten Staub-Opazitäten keinen erneuten Anstieg. Dennoch existieren weitere Lösungen bei höheren Gesamtmassen, die keine direkte Verbindung zu den Lösungen bei den kleineren Massen haben (d.h. es gibt keine quasistatischen Übergänge zu ihnen). Auch im zweiten Fall,

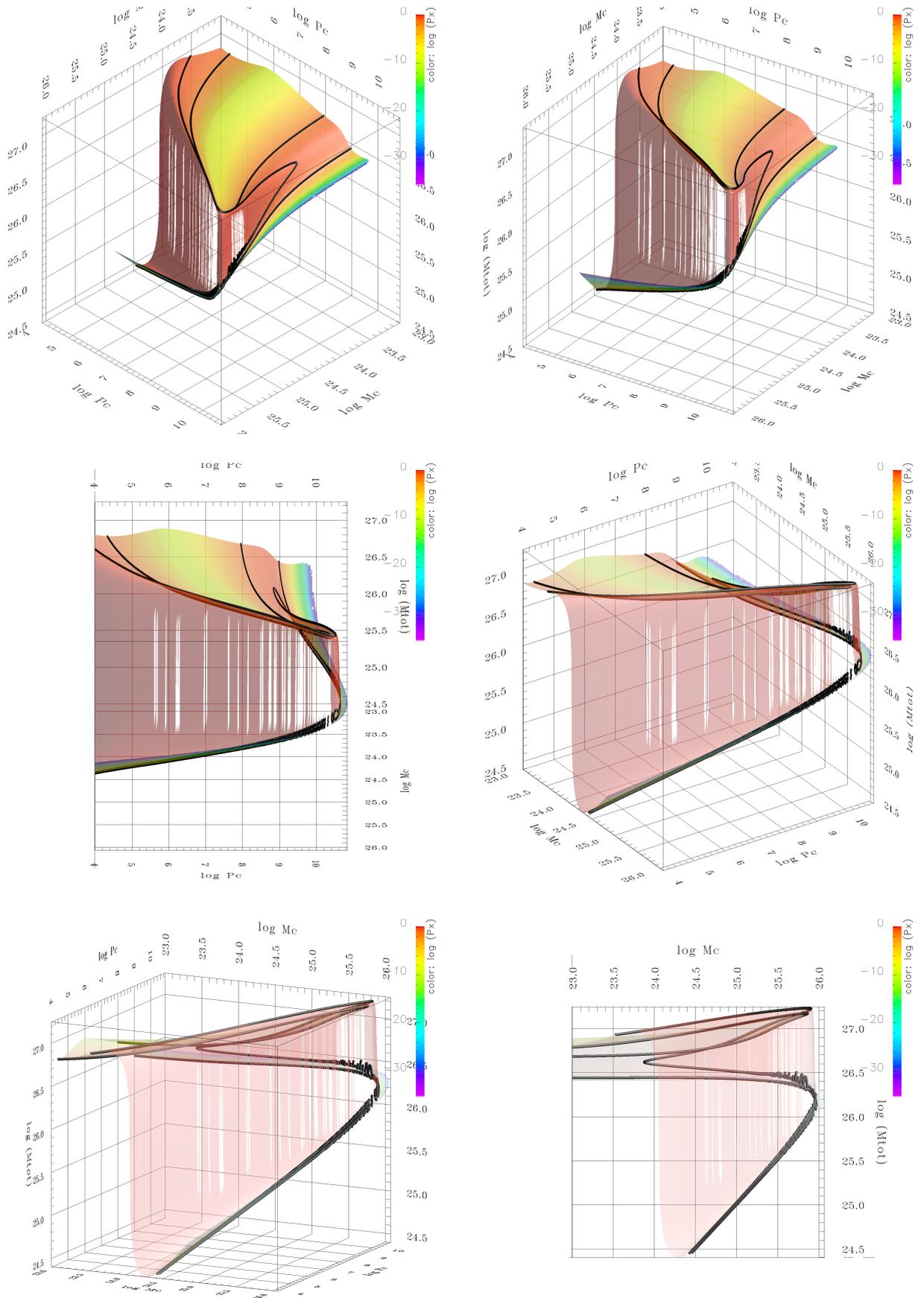


Abbildung 7.1: **Rotationssequenz der Gesamtmassendarstellung für Jupiters Position.** Die zwei schwarzen Linien sind dieselben Isobaren wie auch schon in den Abbildungen 6.1-6.3. Die Sequenz verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Mannigfaltigkeit und klassischer Rechnung: Die klassische Rechnung ist die Projektion einer Isobare auf die M_c - M_{tot} -Ebene.

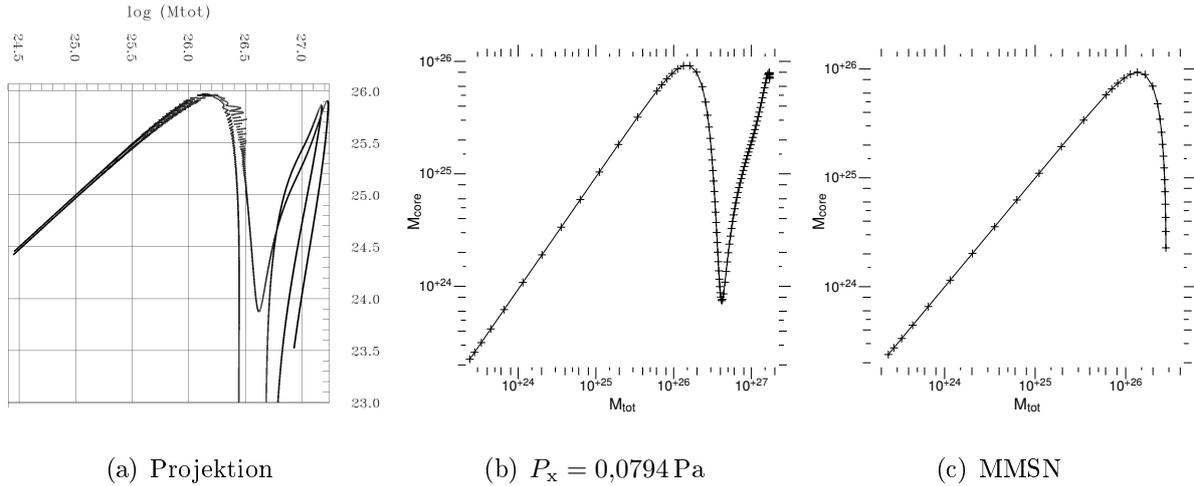


Abbildung 7.2: **Vergleich der Projektion aus der Mannigfaltigkeit (a) mit der direkten Rechnung mit den Randbedingungen \mathcal{V} (b,c)** (siehe Text). Man beachte das Ende des Astes bei Abb. (c), das beim Minimum von Abb. (b) $M_{\text{tot}} \approx 4 \cdot 10^{26}$ kg liegt. Der Ast jenseits von $5 \cdot 10^{26}$ kg fehlt in Abb. (c), die mit Schrittverfahren berechnet wurde, findet sich aber in der Abb. (a), die sich als Projektion der Mannigfaltigkeit ergibt. Ebenso fehlt in Abb. (b) der rückläufige Ast nach dem zweiten Maximum.

bei höherem Nebeldruck, wo alle Lösungen verbunden sind, kann der letzte rückläufige Ast mit gewöhnlichen Schrittverfahren nicht berechnet werden. Man kann diesen Ast jedoch z.B. durch Zufall entdecken (siehe Kapitel 5.1).

Somit hilft die neue Berechnungsmethode, alle Gleichgewichte zu finden – eine Aufgabe, die mit der klassischen Methode unmöglich wäre. Ein vielleicht noch bedeutenderer Vorteil der neuen Methode liegt im physikalischen Verständnis. Mizuno wusste bei seiner Rechnung nicht, warum die M_c - M_{tot} -Kurve ein Minimum aufweist und dann wieder ansteigt. Außerdem hat er die Kurve im Minimum gestrichelt eingezeichnet (siehe Abbildung 5.1) – entweder konvergierten seine Rechnungen dort nicht oder er vermutete eine Instabilität. Ich kann jetzt die Position dieser Kurve in der Mannigfaltigkeit bestimmen und damit einen direkten Zusammenhang zur inneren Struktur des Planeten herstellen. Man sieht dies sehr gut anhand von Abbildung 6.1 auf Seite 48, der Außendruckdarstellung für Jupiter: Der Grund für die „Schleife“ ist der Außendruckabfall in der Mitte von Region IV in Kombination mit einem Druckanstieg in Richtung Spitze. Der Grund für die spezielle Struktur von Region IV bei Jupiter wurde bereits in Abschnitt 6.1.1 diskutiert. Der Temperaturanstieg führt zu einer Umstrukturierung der Hülle, wodurch der Außendruck nochmals ansteigt. Diese besondere Struktur von Region IV führt dann in bestimmten Fällen zu der beobachteten Schleife in der Mannigfaltigkeit und in der Projektion zu dem beobachteten Minimum und somit dem Doppelmaximum in der M_c - M_{tot} -Kurve. Physikalisch liegt diesem die radiative Zone zwischen dem Eis- und dem Si-Feature in den κ zugrunde, die den Kerntemperaturanstieg mit ansteigendem Kerndruck bremst (siehe Abschnitt 6.1.1).

Die Bereiche bei minimalem M_c waren tatsächlich numerisch sehr instabil, was auch eine

wirkliche dynamische Instabilität vermuten lässt. Für den isothermen Fall hat dies bereits Pečnik, B. (2005) gezeigt. Auch der stabilisierende Effekt des Kerns wurde bereits bei den isothermen Rechnungen vermutet. Obwohl der Beweis noch aussteht, dass die rechnerisch instabilen Bereiche auch tatsächlich dynamisch instabil sind, behaupte ich, dass die Bereiche um das Minimum in der M_c - M_{tot} -Kurve dynamisch instabil sind.

Durch diese Projektion ist schließlich die Verbindung zu den klassischen Rechnungen hergestellt. Alle Rechnungen mit fixiertem Nebeldruck sind automatisch in einer einzigen Mannigfaltigkeit enthalten. Weiterhin zeigt der direkte Vergleich, dass es die Randbedingungen \mathcal{M}_c erlauben, alle Lösungen zu finden, was mit der herkömmlichen Rechnung nicht möglich ist.

8 Corot-Durchmusterung

8.1 Überlegungen zu Beginn

Ziel meiner Arbeit ist es ja, eine Vorhersage über die Häufigkeiten von Gasplaneten im Orbit um andere Sterne zu machen. Dazu habe ich Massenspektren für eine Reihe von Parametern berechnet. Ein einzelnes Massenspektrum liefert Informationen über die relativen Häufigkeiten von Planeten verschiedener Masse an ein und derselben Position. Das Survey soll nun die favorisierten Planeten(-massen) als Funktion ihrer großen Halbachse, der Masse des Muttersterns sowie in Abhängigkeit von der gewählten planetesimalen Akkretionsrate bestimmen.

8.1.1 Parameterbereich

Ein wichtiger Schritt hierfür war zunächst die Auswahl der zu variierenden Parameter sowie die Bestimmung des Intervalls, in dem sie jeweils variiert werden. Weiterhin stellte sich die Frage der zu wählenden Schrittweite für die Abtastung des Parameterraums. Betrachten wir als erstes die freien Parameter der Rechnung. Wählt man die Randbedingungen \mathcal{M}_C , so wie ich sie verwende, ergeben sich die folgenden drei freien Parameter:

- T_{orb} – Die Umlaufzeit bzw. die große Halbachse a des Planeten. Ich verwende die Umlaufzeit, weil sie die direkt gemessene Größe sein wird.
- M_\star, L_\star – Die Masse und damit verbunden die Leuchtkraft des Zentralgestirns.
- \dot{M} – Die Akkretionsrate, mit der Planetesimale akkretiert werden; sie ist verantwortlich für die Leuchtkraft des Planeten.

Welche Bereiche man in diesem Parameterraum abdeckt, hängt von den Absichten ab. Meine Arbeit als Teil der Vorbereitungen für den Start des Satelliten COROT soll Vorhersagen für solche Planeten machen, die potenziell durch COROT entdeckt werden können. Dadurch ergibt sich eine automatische Einschränkung für den Parameterbereich von T_{orb} und M_\star .

8.1.2 Parameterbereich von Corot

COROT wird Planeten bis zu einer maximalen Umlaufzeit von 50 Tagen entdecken können.¹ Als Untergrenze wähle ich relativ willkürlich 1 Tag. Man könnte auch die Roche-Grenze verwenden, diese ist aber von der Masse des Sterns in anderer Weise abhängig als die Umlaufzeit. Außerdem hängt sie von Annahmen über die Innere Struktur der Planeten ab. Ich möchte aber für alle Muttersterne die gleichen Werte verwenden, um den Entdeckungsraum von COROT gleichmäßig zu überdecken. Bei einem Tag Umlaufzeit werden für massereiche Sterne schon recht große Außentemperaturen erreicht. Ein noch kleinerer Abstand erschien daher nicht sinnvoll.

Weiterhin wird COROT nur bei Spektraltypen A bis K empfindlich genug sein bzw. genügend geeignete Kandidatensterne vermessen können (Bordé u. a. 2003). Also beschränke ich mich in dieser Arbeit ebenfalls auf die Spektraltypen A-K. Die Massen reichen von $2 M_{\odot}$ bis $0,4 M_{\odot}$. Dies entspricht etwa Spektraltyp A2 bis M2.

8.1.3 Bestimmung sinnvoller Akkretionsraten

Lediglich der letzte Parameter, \dot{M} , kann nicht durch den COROT Parameterbereich eingeschränkt werden. Im Rahmen dieser Durchmusterung habe ich mich dafür entschieden, eine Reihe von plausiblen Akkretionsraten zu verwenden und ihren Einfluss auf die Planetenentstehung zu untersuchen.

Für die Jupiterposition ergibt sich bei Annahme eines MMSN eine Akkretionsrate von $10^{-6} M_{\oplus} a^{-1}$. Da die Akkretionsraten zu kleineren Abständen stark zunehmen, ist dies meine Untergrenze. Als Obergrenze verwende ich den Wert von $10^{-2} M_{\oplus} a^{-1}$, wie er sehr nahe am Stern sinnvoll ist (zur Bestimmung der Akkretionsraten siehe Abschnitt 1.1.2).

8.2 Corot Mass Spectra Mark 1 (v1.1)

Nachdem nun die grundsätzlichen Entscheidungen für die Parameter geklärt sind, stelle ich in diesem Abschnitt das konkret berechnete Survey, die COROT *mass spectra Mark 1*, vor. Version 1.0 war die allererste Variante, bei der sich jedoch noch kleine Fehler eingeschlichen hatten.² Ich betrachte in dieser Arbeit nur Version 1.1.

¹Das ergibt sich aus dem Limit für kontinuierliche Beobachtungen von 150 Tagen und der Forderung von drei Transits zum Nachweis von Planeten.

²Bei einigen wenigen Berechnungen war für die Bestimmung der großen Halbachse a aus der Umlaufzeit T_{orb} für die Sternmasse irrtümlich eine Sonnenmasse anstelle des korrekten Wertes (0,4, 0,8, oder $2,0 M_{\odot}$) eingesetzt worden.

8.2.1 Parameter für Corot-Survey Mark 1

Die Wahl der Parameterbereiche aus Abschnitt 8.1 muss jetzt konkretisiert werden. Neben den Intervallen, in denen die Parameter variiert werden, muss man auch eine Entscheidung über die Abtastung des Intervalls treffen. Während die Anzahl der Punkte pro Intervall im Wesentlichen durch die Rechenkapazität bestimmt werden, bleibt noch die Entscheidung über die Art der Verteilung der „Stichproben“. Da es noch keine Vorarbeiten zu diesem Thema gibt, ist es kaum möglich, die Rechenzeit durch geschickte Wahl der Parameter zu verkürzen. Um möglichst wenig Annahmen über den Einfluss der drei Parameter machen zu müssen, habe ich mich auch hier, ähnlich wie bei der Wahl des Gitters für eine einzelne Mannigfaltigkeit (siehe Abschnitt 4.2), für eine log-äquidistante Abtastung von T_{orb} und \dot{M} entschieden. Bei Sternmasse und Leuchtkraft ist dies nicht möglich, da die beiden ja gekoppelt sind.³ Ich verwende Masse und Leuchtkraft zum Spektraltyp nach Gray (1992), Appendix B und zur Identifizierung die Masse anstelle des Spektraltyps.

Da die Berechnung einer Mannigfaltigkeit und damit auch die Berechnung eines Massenspektrums je nach Komplexität bis zu drei Tage in Anspruch nimmt (~ 2 GHz Prozessor), habe ich mich bei dieser ersten Durchmusterung – „COROT Mass Spectra Mark 1“ – für ein $4 \times 4 \times 3$ -Gitter, also 48 Mannigfaltigkeiten, entschieden. Dies entspricht in etwa 144 Tagen reiner Rechenzeit und erschien mit mehreren Computern bei Parallelisierung machbar.

Die genaue Wahl der Parameter für die „COROT Mass Spectra Mark 1“ lautet:

(4) T_{orb} : 1, 4, 16, 64 Tage

(4) M_{\star} : 2, 1, 0,8, 0,4 M_{\odot} ; L_{\star} = 16, 1, 0,42, 0,04 L_{\odot} .

Dies entspricht in etwa den Spektraltypen A2, G2, K1, bzw. M2.

(3) \dot{M} : 10^{-2} , 10^{-4} , $10^{-6} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$.

Auf diese Weise erhält man ein dreidimensionales Gitter ($4 \times 4 \times 3$) von Berechnungen. Jede dieser Rechnungen liefert für eine gegebene Kombination von T_{orb} , M_{\star} und \dot{M} alle Hüllengleichgewichte und damit eine Massenverteilung für diese Position. In Summe habe ich also Mannigfaltigkeiten für 48 Positionen berechnet – 12 für jede Wahl von \dot{M} . Eine Übersicht, gültig für alle \dot{M} , zeigt Tabelle 8.1. Sie listet die jeweiligen Außentemperaturen sowie großen Halbachsen für jede Mannigfaltigkeit des Surveys auf.

Um die Referenzierung der einzelnen Positionen des Surveys zu erleichtern, werde ich sie im-

³Weiterhin war es schwierig, Masse und Leuchtkraft zu einem vorgegebenen Spektraltyp anzugeben ohne theoretische Modelle zu verwenden. Ich wollte einen beobachteten Wert bestimmen. Dies stellte sich jedoch als schwierig heraus, da der Spektraltyp eine fast schon phänomenologische Einteilung darstellt. Da die Linienstärken nicht nur von der Temperatur, sondern auch von der Häufigkeit des jeweiligen Elements abhängen, streut etwa die Masse eines bestimmten Spektraltyps sehr stark. Dies findet auch Gray: „There is real cosmic dispersion around these means [Massen und Leuchtkräfte], and if precise values are needed, stars should be treated as individuals.“

Tabelle 8.1: **Übersicht über die Parameter der Durchmusterung** – Sternmasse M_\star und Umlaufzeit T_{orb} mit der jeweils zugehörigen Nebeltemperatur T_x und der großen Halbachse a .

$M_\star/[M_\odot]$	$T_{\text{orb}}/[\text{d}]$	$T_x/[\text{K}]$	$a/[\text{AE}]$	$M_\star/[M_\odot]$	$T_{\text{orb}}/[\text{d}]$	$T_x/[\text{K}]$	$a/[\text{AE}]$
0,4	1	895,1	0,014	1	1	2001,5	0,020
0,4	4	656,9	0,036	1	4	1260,9	0,049
0,4	16	355,2	0,092	1	16	794,3	0,124
0,4	64	260,7	0,231	1	64	500,4	0,313
0,8	1	1672,3	0,018	2	1	3566,3	0,025
0,8	4	1053,5	0,046	2	4	2246,6	0,062
0,8	16	639,4	0,115	2	16	1415,3	0,157
0,8	64	402,8	0,291	2	64	891,6	0,395

mer mit einem Symbol benennen.⁴ Zum Beispiel lautet die Bezeichnung für 16 Tage Umlaufzeit, einer Sternmasse von $M_\star = 1 M_\odot$ und einer Akkretionsrate von $\dot{M} = 10^{-4} M_\oplus \text{a}^{-1}$: $^{-4}[1,0]^{16}$. Diese Bezeichnung werde ich für alle Rechnungen des Surveys verwenden.

8.2.2 Ergebnisse der Durchmusterung – Beispiel: $^{-4}[1,0]^{1-64}$

Betrachten wir nun vier verschiedene Umlaufzeiten bei sonst konstanten Parametern: $M_\star = 1 M_\odot$, $\dot{M} = 10^{-4} M_\oplus \text{a}^{-1}$. Die jeweils gewählten Ausschnitte aus den Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung zusammen mit den daraus resultierenden Massenspektren zeigen die Abbildungen 8.1 und 8.2.

Erste Beobachtungen – Gesamtmassendarstellungen

Betrachten wir zunächst die Darstellungen der Mannigfaltigkeiten, die Gesamtmassendarstellungen in den Abbildungen 8.1 und 8.2 rechts. Was fällt auf?

Zunächst einmal ist das Plateau (Region IV) bei 64 Tagen noch recht stark ausgeprägt – es gibt einen flachen Bereich, in dem die Gesamtmasse mit zunehmendem Innendruck P_c wieder abnimmt und schließlich wieder zunimmt. Mit abnehmendem Abstand zum Stern verschwindet das Plateau mehr und mehr. Schon bei 16 Tagen ist die Gesamtmasse streng monoton steigend in P_c -Richtung. Bei einem Tag Umlaufzeit erhält man schließlich einen fast gleichmäßigen Anstieg der Gesamtmasse über Region IV. Ähnliches gilt für die vordere Flanke zwischen Region IV und I – der schmale Region-III-Ausläufer hat bei 64 Tagen noch einen extrem starken Massenanstieg, dieser Gradient wird immer kleiner bis schließlich bei einem Tag ein sehr flacher Übergang zu Region IV auftritt. Dies hat zur Folge, dass die äußeren Mannigfaltigkeiten viel schwerer zu rechnen sind. Daher sind in Abbildung 8.2(b) große Lücken in der steilen Flanke.⁵

⁴Die Sternmasse in Sonnenmassen steht in eckigen Klammern. Rechts oben steht die Umlaufzeit in Tagen, links oben der Exponent der Akkretionsrate in Erdmassen pro Jahr: $\lg \dot{M}/(M_\oplus \text{a}^{-1}) [M_\star/M_\odot]^{T_{\text{orb}}/\text{d}}$

⁵Tatsächlich fehlt in der Flanke jeweils nur ein einziger Punkt. Dadurch fehlen jedoch zwei benachbarte Flächenelemente und wegen des großen Gradienten sehen die Lücken dann sehr groß aus.

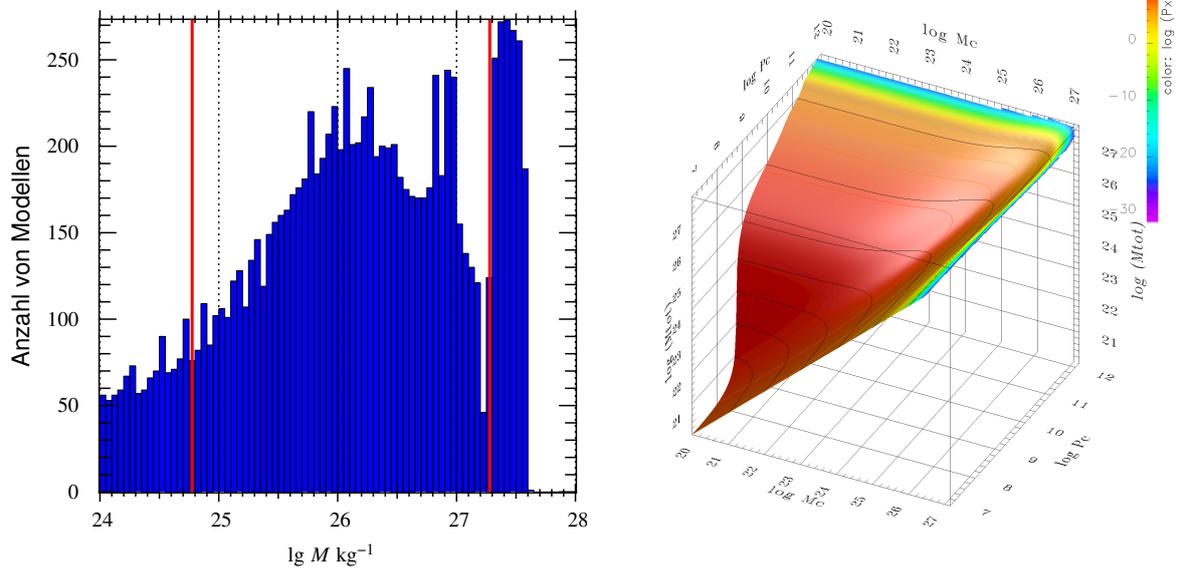
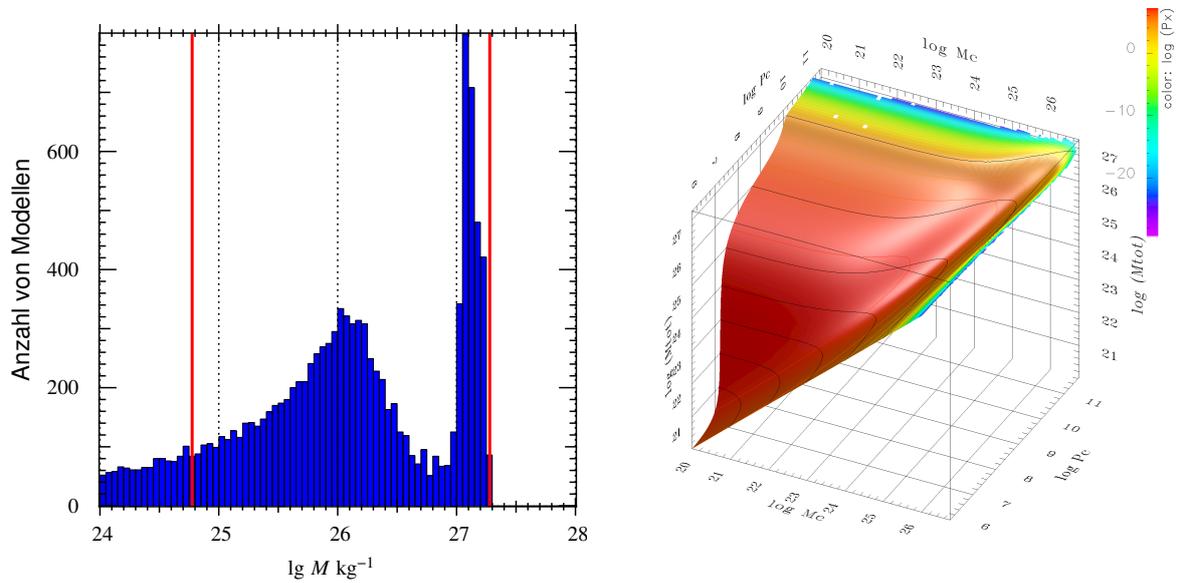
(a) $^{-4}[1,0]^1$ (b) $^{-4}[1,0]^4$

Abbildung 8.1: Planetares Massenspektrum und zugehörige Gesamtmassendarstellung für 1 und 4 Tage Umlaufzeit.

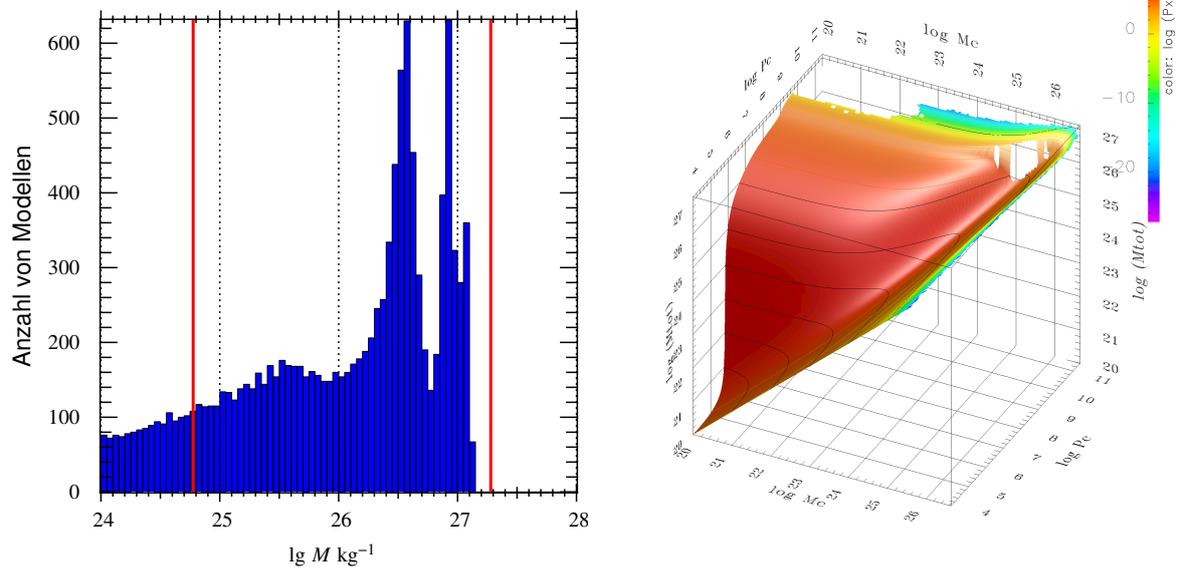
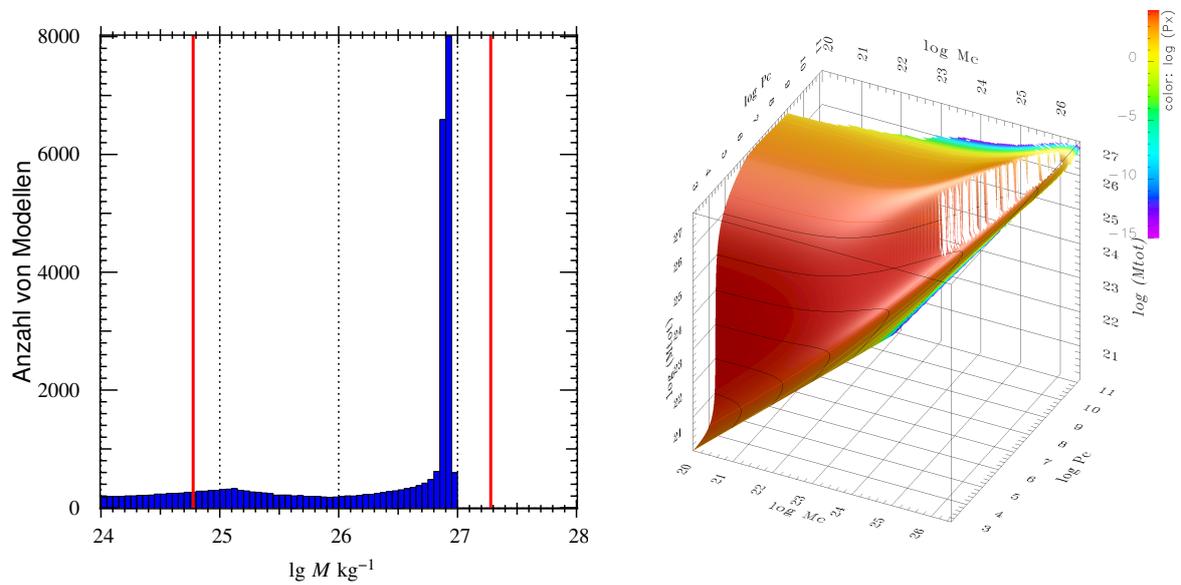
(a) $-4[1,0]^{16}$ (b) $-4[1,0]^{64}$

Abbildung 8.2: Planetares Massenspektrum und zugehörige Gesamtmassendarstellung für 16 und 64 Tage Umlaufzeit.

Im Vergleich zur Jupiterregion (Abbildung 6.4) ist die 64 Tage Position noch recht ähnlich, auch wenn alle Übergänge etwas runder ausfallen – die Grenzen sind hier nicht so scharf wie bei Jupiter. Die Mannigfaltigkeit für die vier Tage Position wiederum ist fast identisch mit jener von 51 Peg b (Abschnitt 6.2).

Erste Beobachtungen – Massenspektren

Die Beobachtungen der Gesamtmassendarstellungen übertragen sich natürlich auch auf die Massenspektren. So verursacht die flache Region IV ($\text{grad } M_{\text{tot}}(M_c, P_c)$ ist klein) bei 64 Tagen einen sehr scharfen Peak im Massenspektrum. Das Gegenteil ist bei einem Tag der Fall: Der recht konstante Anstieg verursacht ein sehr breites Massenspektrum. Vier und 16 Tage liegen irgendwo dazwischen.

Die 64 Tage Mannigfaltigkeit (Abbildung 8.2(b)) ähnelt nicht nur optisch, sondern auch im Massenspektrum der Mannigfaltigkeit von Jupiter. Es gibt einen sehr scharfen Peak. Zusätzlich kann man einen sehr flachen Peak bei kleinen Massen erahnen. Bei 16 Tagen, Abbildung 8.2(a), sieht das Massenspektrum schon völlig anders aus: Es hat zwei gleich starke Maxima und eine sehr breite Verteilung bei niedrigen Massen. Der höchste Peak ist ziemlich genau an der Position des einzelnen Peaks bei 64 Tagen. Der zweite Peak liegt eine knappe Größenordnung darunter. Wie der Übergang von statten geht, also ob es sich bei 64 Tagen um zwei verschmolzene Peaks handelt, oder ob der Peak Nummer 2 (siehe Tabelle 8.2) mit zunehmender Umlaufzeit stetig größer wird, lässt sich nicht auf einen Blick feststellen. Gleiches gilt für Peak Nummer 1 beider Positionen: es könnte sein, dass der sehr flache Peak bei 64 Tagen langsam größer wird und sich leicht zu größeren Massen verschiebt. Gerade beim Übergang von 64 zu 16 Tagen zeigt sich schon hier ganz deutlich, dass der Survey ‚undersampled‘ ist: Es sind eine genauere Analyse sowie eventuell auch mehr Rechnungen notwendig, um diese Abhängigkeiten mit Sicherheit zu ergründen. Ich verweise an dieser Stelle auf Kapitel 8.3.

Tabelle 8.2: **Übersicht über die Peak-Positionen bei $-4[1,0]^{1-64}$**

Position	#	Bereich	Modus	Median	Anzahl	P
(1 d)	1	24,00-26,70	26,075 (0,05)	25,76	7413	0,68
	2	26,70-27,20	26,925 (0,05)	26,93	1798	0,17
	3	27,20-28,00	27,425 (0,05)	27,43	1682	0,15
(4 d)	1	26,80-28,00	27,075 (0,05)	27,10	3180	0,28
	2	24,00-26,80	26,025 (0,05)	25,80	8356	0,72
(16 d)	1	24,00-25,90	25,525 (0,05)	25,15	4606	0,39
	2	25,90-26,80	26,575 (0,05)	26,48	4903	0,42
	3	26,80-28,00	26,925 (0,05)	26,94	2242	0,19
(64 d)	1	24,00-26,00	25,125 (0,05)	25,00	9442	0,32
	2	26,00-28,00	26,925 (0,05)	26,89	20394	0,68
	3	26,80-27,10	26,8705 (0,001)	26,90	15818	0,53

8.2.3 Ergebnisse der Durchmusterung für $\dot{M} = 10^{-4} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$

Nun ist es an der Zeit alle Resultate für die mittlere Akkretionsrate, $\dot{M} = 10^{-4} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$, anzugeben. Die Abbildungen 8.3 bis 8.6 geben die berechneten normierten Massenspektren für alle vier Spektraltypen, also die Zentralgestirnmassen 0,4, 0,8, 1 und $2 M_{\odot}$, an. Zusätzlich liefert Tabelle B.2 die Zahlenwerte der Lage aller Maxima. Es wird jeweils sowohl der Modus als auch der Median angegeben. Die Maxima sind willkürlich durchnummeriert. Meistens wurde bei der Berechnung des Modus die Binbreite unverändert bei 0,05 in $d \log M$ gelassen. Bei einigen besonders schmalen Peaks jedoch gibt es unter Umständen mehrere Einträge in der Tabelle für verschiedenes Binning und evtl. auch für unterschiedlich gewählte Bereichsgrenzen. Durch geänderte Grenzen kann sich ja der Median ändern, verschiedene Werte für die Binbreite beeinflussen den Modus.

So ist z.B. in Abbildung 8.3(d) nur ein sehr schmaler Peak zu sehen. Dieser ist dann in Tabelle B.2 gleich dreimal aufgeführt: einmal mit $\Delta \log M = 0,05$ und weil extrem viele Modelle auf diesen Bereich fallen nochmal mit einer Binbreite von 0,005 bzw. 0,01. Der Median ist davon natürlich unbeeinflusst, da der Bereich (Spalte 3) in diesem Fall gleich gewählt ist.

Die zu jedem Massenspektrum zugehörigen Darstellungen der Mannigfaltigkeiten sind im Anhang, Abbildungen B.1 bis B.4, aufgeführt.

8.2.4 Ergebnisse für die anderen beiden Werte von \dot{M}

Für die anderen beiden Werte der Akkretionsrate \dot{M} muss ich aus Platzgründen auf den Anhang verweisen. Dort kann man den COROT-Survey komplett einsehen: Alle Massenspektren mit den üblichen Darstellungen der zugehörigen Mannigfaltigkeiten (Kapitel B.2 und B.3). Die Positionen der Maxima sind in den Tabellen B.1 ($\dot{M} = 10^{-6} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$) sowie B.3 ($\dot{M} = 10^{-2} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$) aufgelistet.

8.3 Interpretation der Ergebnisse der Corot-Durchmusterung

Nachdem nun alle Ergebnisse aufgelistet sind, werde ich in diesem Abschnitt versuchen, die Resultate zu interpretieren. Da ich es mit einer riesigen Datenmenge zu tun habe, versuche ich gar nicht erst, alle Abhängigkeiten zu finden. Vielmehr werde ich ein paar auffällige Abhängigkeiten benennen und diskutieren.

8.3.1 Allgemeines

Betrachtet man die Ergebnisse – z.B. in Form der Massenspektren: Abbildungen 8.3-8.6, B.5-B.8, und B.13-B.16 – stellt sich die Frage nach möglichen Zusammenhängen: Wie hängen die

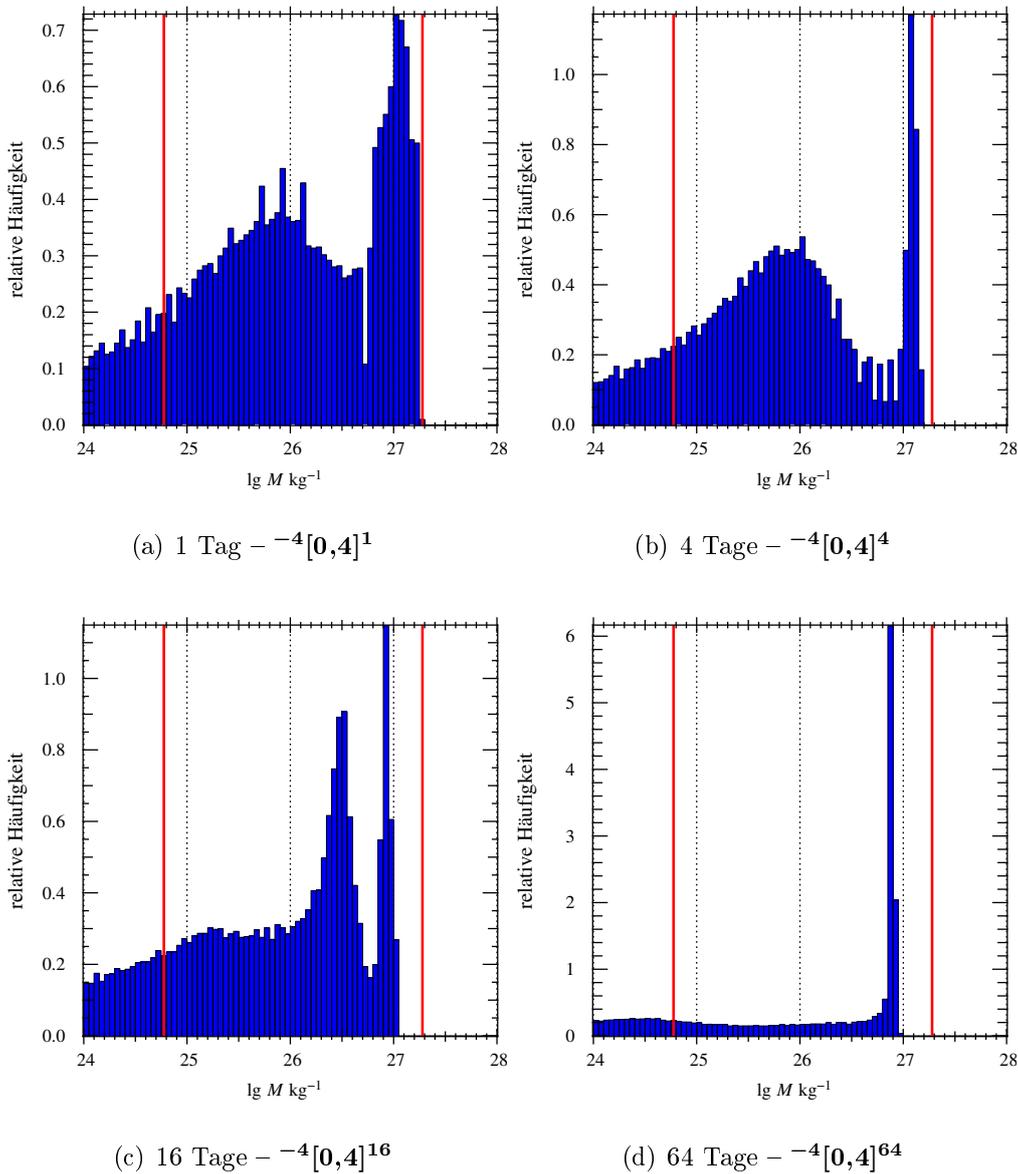


Abbildung 8.3: Massenspektren für einen $0,4 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

Massenspektren ab von

- den Umlaufzeiten?
- der Sternmasse?
- der Akkretionsrate?

Es ist auf den ersten Blick nicht ersichtlich, ob und für welche dieser Fragen einfache Antworten existieren. Ein paar Dinge bemerkt man dennoch recht schnell. Zunächst einmal ist klar, dass der Survey zumindest in der Umlaufzeit nicht dicht genug gerechnet ist. Die Übergänge von einem Abstand zum nächsten lassen kaum Schlüsse über die dazwischenliegenden Massenspektren zu.

Im Gegensatz dazu sind die Übergänge zwischen verschiedenen Sternmassen gut dargestellt. Die Grundstruktur der Massenspektren ändert sich von einer Sternmasse zur nächsten kaum. Manchmal bleiben sogar die Peak Positionen konstant.

Die Änderung der Akkretionsrate, also im Wesentlichen der Leuchtkraft ($L \propto \frac{GM_c}{R_c} \dot{M}$), liegt

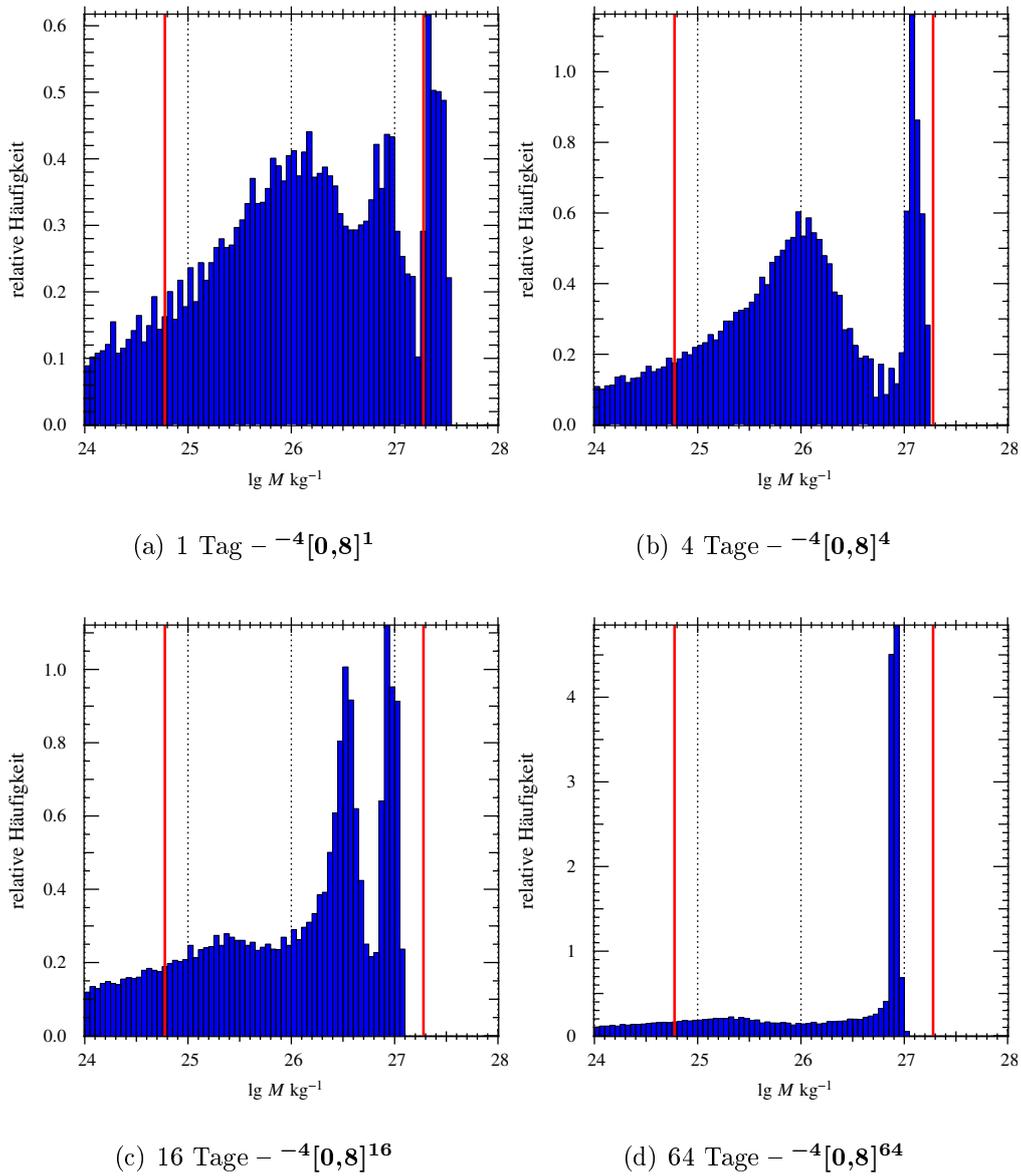


Abbildung 8.4: Massenspektren für einen $0,8 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

zwischen den beiden Extremen. Einerseits ist der Unterschied in den Massenspektren nicht so groß wie bei der Änderung der Umlaufzeit, andererseits haben wir es mit einer sehr starken Änderung der Peakpositionen zu tun. In manchen Fällen verändern sich die Massenspektren sogar qualitativ. So kommt etwa bei der höchsten Akkretionsrate ($\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$) ein weiterer massereicher Peak hinzu, der bei den anderen Akkretionsraten nicht auftritt. Wie sich herausstellen wird ist dies jedoch kein „neuer Peak“, sondern zeigt lediglich, dass für die hohe Akkretionsrate die beiden Peaks auch bei dieser Umlaufzeit noch nicht verschmolzen sind.

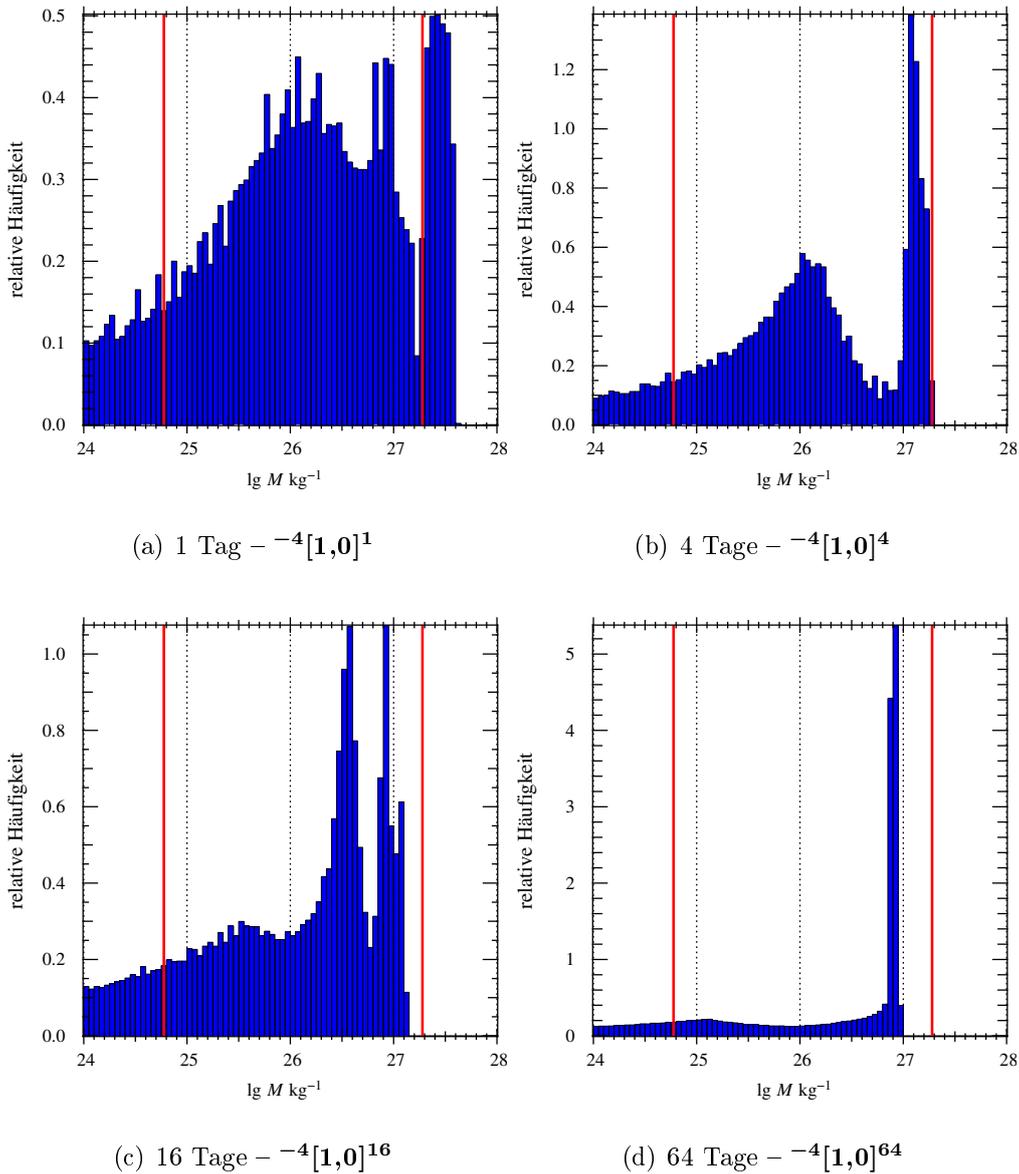


Abbildung 8.5: Massenspektren für einen $1 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

8.3.2 Globale Eigenschaften

Einige Eigenschaften der Massenspektren, und damit der Planeten, treten überall auf. Man kann sie für alle Sternmassen, alle Akkretionsraten oder alle Umlaufzeiten feststellen. Ich möchte diese Eigenschaften unter „globale Eigenschaften“ subsummieren.

Zwei Peaks

Die rein phänomenologische Betrachtung aller Massenspektren zeigt, dass jedes Massenspektrum im Wesentlichen von zwei Peaks bestimmt ist. Es erweckt sogar den Anschein, dass der einzelne Peak bei 64 Tagen in Wirklichkeit die Verschmelzung der beiden Peaks (die bei kleineren T_{orb} existieren) darstellt.

Lediglich bei sehr hohen Akkretionsraten, Abbildungen B.13-B.16, erscheinen die beiden

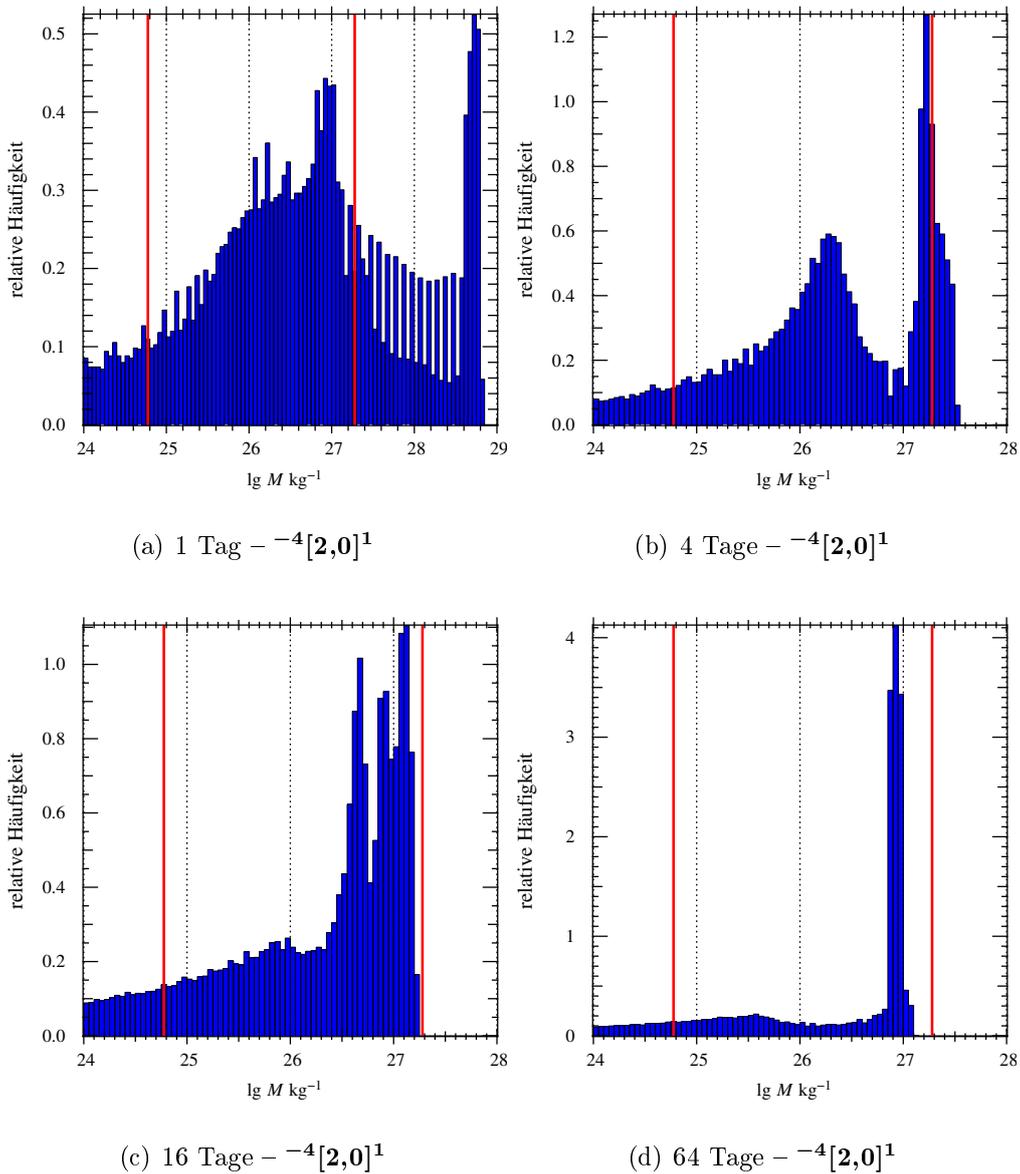


Abbildung 8.6: Massenspektren für einen $2 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

Peaks zunächst noch nicht verschmolzen. Es ist aber auch möglich, dass bei so hohen Leuchtkräften ein völlig neuer Peak hinzugekommen ist. Aufgrund der Eigenschaft des (rechten) H-Peaks, bei großen Umlaufzeiten unter Änderung der Sternmasse M_{\star} konstant zu bleiben (siehe 8.3.4), glaube ich, dass ersteres der Fall ist: beide Peaks sind in diesem Fall getrennt. (Dass auch der „neue Peak“ bei hohen Umlaufzeiten konstant bleibt, nährt die Vermutung, dass es sich hierbei um nichts anderes als den (rechten) H-Peak handelt, welcher in diesem Fall nicht mit dem (linken) L-Peak verschmolzen ist).

Diese Annahme wird auch gestützt von einer in der Umlaufzeit feiner abgestuften Rechnung für $\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$ und $M_{\star} = 1 M_{\odot}$ (siehe Abbildung B.21). Man erkennt deutlich die Verschiebung beider Peaks. Der dritte Peak bei kleinen Massen kommt neu hinzu.

Offenbar gibt es im Wesentlichen wirklich nur 2 verschiedene Peaks, die sich unterschiedlich verhalten. Deshalb werde ich sie im Folgenden getrennt betrachten und mit

L-Peak (links, niedrigere Massen, low-mass), bzw.

H-Peak (hohe Massen, high-mass)

bezeichnen.

Offenbar skaliert der Abstand des L- und H-Peaks mit der Akkretionsrate \dot{M} bzw. mit der Leuchtkraft. Bei einer Akkretionsrate von $\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$ sind L- und H-Peak auch bei 64 Tagen noch nicht verschmolzen. Bei $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$ hingegen verschmelzen die beiden schon zwischen 4 und 16 Tagen Umlaufzeit.

Der Übergang von Pegasi- zu Jupiterplanet(?)

Die sicherlich „globalste“ Eigenschaft betrifft die Änderung für verschiedene Umlaufzeiten: Ganz offenbar sind die Peaks bei 64 Tagen sehr schmal und werden zu kürzeren Umlaufzeiten viel breiter. Diese Aussage stimmt für alle Akkretionsraten und für alle Spektraltypen des Zentralgestirns. Vergleicht man das Massenspektrum für Jupiter (Abbildung 4.1) mit einem typischen 64 Tage Massenspektrum, fällt die enorme Ähnlichkeit auf. Wählt man dieselbe Akkretionsrate, $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$, dann ist sogar die Position des schmalen Peaks ähnlich. Bei Jupiter: $\lg M/\text{kg} = 26,87$ (Modus, 0,001) und bei $^{-6}[\mathbf{1},\mathbf{0}]^{64}$: $\lg M/\text{kg} = 26,42$ (Modus, 0,05). Durchaus eine Erwähnung wert ist ferner die Tatsache, dass der schmale Peak in der Flanke des Jupiterspektrums fast exakt an derselben Position sitzt wie der 64 Tage Peak: $\lg M/\text{kg} = 26,415$ (Modus, 0,001). Es wäre also interessant, den Übergang von 64 Tagen auf Jupiterentfernung zu untersuchen.

Offenbar gibt es eine grundsätzliche Änderung in der Struktur der Planeten bei einer Umlaufzeit zwischen 16 und 64 Tagen (bei $\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$ etwas später). Ab 64 Tagen ist die Verteilung der Gleichgewichte schon sehr ähnlich wie die bei Jupiter mit 4332,7 Tagen Umlaufzeit. Dies ist sehr erstaunlich, lässt aber hoffen, dass sich auch die dynamischen Eigenschaften ähnlich verhalten.

Mit zunehmender Nähe zum Stern ändern sich die Gleichgewichtszustände dramatisch. Zwei Dinge können hierfür verantwortlich sein: Zum einen die Zunahme der Nebeltemperatur, zum anderen die Verringerung des zum Planeten gehörigen Volumens. Sicherlich tragen beide diese Dinge zum Verhalten bei. Dennoch denke ich, da die Spektren bei verschiedenen Spektraltypen ähnlich aussehen, dass der Volumeneffekt und nicht die Temperatur hierbei dominant ist. Dadurch wird die Menge der selbstgravitierenden Gaskugeln mit moderaten Innendrücken abgeschnitten, weil im beschränkten Volumen keine Eigengravitation auftritt. Das Plateau der Mannigfaltigkeit kann sich bei den Pegasi-Planeten nur noch beschränkt ausbilden. Bei ganz engen Planeten schließlich gibt es das Plateau praktisch nicht mehr.⁶

Dies findet auch eine Analogie im dynamischen Verhalten der Planeten. Während sternferne Planeten (z.B. Jupiter) eine sog. kritische Masse aufweisen jenseits derer dynamische Prozesse

⁶Schließlich definiert sich das Plateau gerade über die Eigengravitation (siehe Abschnitt 3.3). Diese verschwindet unterhalb der Rochedichte, welche mit abnehmendem a stetig zunimmt.

aufzutreten, läuft die komplette Entstehung von HD 149026 b über Gleichgewichtszustände ab (siehe Kapitel 6.3.2). Die ähnliche Form der Mannigfaltigkeiten sowie der Massenspektren lässt vermuten, dass sich mit den Massenspektren auch das dynamische Verhalten von 16 auf 64 Tage stark ändert. Ob es sich wirklich um eine wechselseitige Abhängigkeit handelt und ob der Übergang zu anderem Entstehungsverhalten bei den gleichen Umlaufzeiten stattfindet wie die Verschmelzung beider Peaks im Massenspektrum, muss noch überprüft werden (siehe Kapitel 12). Die Vermutung ist allerdings dadurch begründet, dass ein flaches Plateau (in Masse) ja bedeutet, dass verschiedene gleichmassive Zustände existieren. Dies erleichtert dynamische Übergänge, da kein Massenaustausch mit dem Nebel nötig ist. Gerade in diesem Fall (siehe dazu Pečnik, B. 2005) zeigen sich im isothermen Fall tatsächlich dynamische Übergänge. Für die Pegasi-Planeten existiert das Plateau nicht mehr und jeder dynamische Prozess muss, um wieder in einem Gleichgewichtszustand zu enden, eine Massenänderung zur Folge haben, was die Dynamik sicherlich einschränkt.⁷

Das Plateau bei Jupiter oder auch bei 64 Tagen Umlaufzeit scheint eine Eigenschaft selbstgravitierender Leuchtkugeln im Orbit um eine große Primärmasse zu sein. Es ist nicht nur eine Obergrenze für Stabilität, vielmehr scheint es im Wesentlichen nur eine typische Gleichgewichtsmasse zu geben, der H-Peak ist ab einem gewissen Abstand, wenn ausreichend Volumen zur Verfügung steht, unabhängig von der Umlaufzeit! Diese charakteristische Masse ist weiterhin offenbar weitgehend unabhängig von der Nebeltemperatur (denn der Peak ist recht schmal). Wenn man den Sprung zu Jupiter wagt, scheint sie auch, sobald sie existiert, nur sehr gering abhängig vom Abstand zum Stern zu sein! Dass es sich hierbei um eine intrinsische Eigenschaft des Materials oder der Planetenstruktur handelt, wird dadurch bestärkt, dass es eine starke Abhängigkeit von der Leuchtkraft gibt. Position des H-Peaks bei $T_{\text{orb}} = 64$:

- $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$: $M_{\text{peak}}^{\text{H}}(-6[\mathbf{1}, \mathbf{0}]^{64}) \approx 26,4$
- $\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$: $M_{\text{peak}}^{\text{H}}(-4[\mathbf{1}, \mathbf{0}]^{64}) \approx 26,9$
- $\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$: $M_{\text{peak}}^{\text{H}}(-2[\mathbf{1}, \mathbf{0}]^{64}) \approx 27,3$

Die Abhängigkeit von der Leuchtkraft spricht erneut dafür, dass es eine maximale Masse gravitierender Gaskugeln mit Kern (im Orbit um eine Primärmasse) gibt, die nur von den Materialeigenschaften abhängt. Dies ist insofern überraschend, da man vermuten würde, dass eine starke Abhängigkeit von den Randbedingungen besteht. Außerhalb von 16 Tagen scheint dies nicht mehr so zu sein, die „radiative zero solution“ kommt hier offenbar erneut voll zum Tragen: die innere Struktur der Planeten ist weitgehend unabhängig von den äußeren Randbedingungen.

⁷Neben dem „Volumeneffekt“, welcher meiner Ansicht nach maßgeblich für die Deformation der Mannigfaltigkeit verantwortlich ist, spielt für die dynamischen Eigenschaften des Systems zusätzlich auch der Übergang zu voll konvektiven Gaskugeln eine Rolle. Die Änderung der Eigenschaften bei Übergang radiativ \rightarrow konvektiv haben schon Wuchterl (1993); Wuchterl u. a. (2000) festgestellt. Die geänderte Dynamik des Systems wird in Wuchterl (1995) ausführlich beschrieben.

8.3.3 Der L-Peak

Wie bereits erwähnt lassen sich die Massenspektren am besten durch die Angabe von Position und relativer Größe zweier Peaks beschreiben, dem masseärmeren L-Peak sowie dem massereichen H-Peak. Die Massenspektren sind fast ausschließlich von diesen beiden Peaks dominiert, und diese Peaks scheinen sich bei Variation der Parameter unterschiedlich zu verhalten. Ich werde nun zunächst die Parameterabhängigkeit des L-Peaks erläutern.

M_{\star} Abhängigkeit

Wie verhält sich die Masse des L-Peaks bei konstanter Umlaufzeit, wenn die Sternmasse M_{\star} geändert wird?

Die Peakmasse $M_{\text{peak}}^{\text{L}}$ ist mit wachsendem M_{\star} :

- steigend für alle \dot{M} .
- Der Anstieg ist stärker bei kleinen Umlaufzeiten.
- Wenn der L- den H-Peak trifft, geht der Anstieg gegen Null.
- Bei $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$ oder sehr großen Abständen verdoppelt sich der L-Peak (siehe Abschnitt 8.3.5).

T_{orb} Abhängigkeit

Wie verhält sich die Masse des L-Peaks bei konstanter Sternmasse, wenn die Umlaufzeit geändert wird?

Die Peakmasse $M_{\text{peak}}^{\text{L}}$ ist mit wachsendem T_{orb} :

- stark mit T_{orb} ansteigend. Zumindest ab $T_{\text{orb}} = 4 \text{ d}$ bis zur Verschmelzung von L- und H-Peak.
- bei $T_{\text{orb}} = 1$ und 4 Tagen etwa konstant.
- nach Verschmelzung beider Peaks konstant.

8.3.4 Der H-Peak

Analog zum letzten Abschnitt soll nun der H-Peak betrachtet werden. In diesem Fall ist die M_{\star} Abhängigkeit deutlich komplizierter und es muss nach der Umlaufzeit T_{orb} differenziert werden.

M_\star Abhängigkeit

Wie verhält sich die Masse des H-Peaks bei konstanter Umlaufzeit, wenn die Sternmasse M_\star geändert wird?

Die Peakmasse $M_{\text{peak}}^{\text{H}}$ ist mit wachsendem M_\star :

- $T_{\text{orb}} = 64$ d
 - konstant für alle \dot{M} .
- $T_{\text{orb}} = 16$ d
 - $\dot{M} = 10^{-6} M_\odot \text{ a}^{-1}$: stark ansteigend (Peak jedoch kaum vorhanden).
 - $\dot{M} = 10^{-4} M_\odot \text{ a}^{-1}, \dot{M} = 10^{-2} M_\odot \text{ a}^{-1}$: schwach ansteigend.
- $T_{\text{orb}} = 4$ d
 - $\dot{M} = 10^{-6} M_\odot \text{ a}^{-1}, \dot{M} = 10^{-4} M_\odot \text{ a}^{-1}$: erst konstant, springt dann stark nach oben von 1 auf $2 M_\odot$.
 - $\dot{M} = 10^{-2} M_\odot \text{ a}^{-1}$: stark ansteigend, steigt dann sprunghaft, sehr stark von 1 auf $2 M_\odot$.
- $T_{\text{orb}} = 1$ d
 - $\dot{M} = 10^{-6} M_\odot \text{ a}^{-1}$: erst konstant, dann Sprung nach oben von 1 auf $2 M_\odot$.
 - $\dot{M} = 10^{-4} M_\odot \text{ a}^{-1}, \dot{M} = 10^{-2} M_\odot \text{ a}^{-1}$: sehr stark ansteigend.

T_{orb} Abhängigkeit

Wie verhält sich die Masse des H-Peaks bei konstanter Sternmasse, wenn die Umlaufzeit geändert wird?

Die Peakmasse $M_{\text{peak}}^{\text{H}}$ ist mit wachsendem T_{orb} :

- abnehmend bis zur Verschmelzung von L- und H-Peak. Dies gilt für alle \dot{M} . Jedoch ist die Stärke dieser Abnahme stark von \dot{M} abhängig: Hohes \dot{M} bedeutet auch eine starke Abnahme und umgekehrt.
- konstant nach Verschmelzung beider Peaks.⁸

⁸Es ist momentan noch ungeklärt, ob dies eine Koinzidenz darstellt oder ob es einen physikalischen Grund dafür gibt, dass das Verschmelzen der beiden Peaks gerade an der minimalen Masse des H-Peaks stattfindet.

8.3.5 L- und H-Peak

Betrachtet man beide Peaks gemeinsam, fällt vor allem eine sehr starke \dot{M} Abhängigkeit auf: Die T_{orb} -Abhängigkeit beider Peakpositionen ist gerade so, dass sich die beiden Peaks mit wachsendem T_{orb} aufeinander zu bewegen. Sie müssen sich zwangsläufig treffen. Weiterhin gilt: je stärker die Leuchtkraft (größer \dot{M}), desto größer ist der Abstand beider Peaks. Dieser Unterschied ist bei kleinen Abständen besonders stark ausgeprägt. Denn wenn große Teile der Hülle konvektiv sind, und das ist nahe am Stern der Fall, verändert die Leuchtkraft sehr stark die innere Struktur.

Sehr interessant ist ferner die Herkunft der beiden Peaks im Massenspektrum: Betrachtet man die Massendarstellungen der Mannigfaltigkeiten (z.B. Abbildungen B.9-B.12), sieht man, dass der L-Peak vom Plateau in Region IV verursacht wird, wohingegen der H-Peak in der Regel durch sehr kompakte Objekte mit niedrigen Außendrücken bei hohen Kerndrücken P_c verursacht wird. Bei $\dot{M} = 10^{-6} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$ ist sogar der L-Peak der massivste Peak! Weiterhin sieht man im Fall von Jupiter, Abbildung 4.1, dass der Hauptpeak tatsächlich der L-Peak ist und der H-Peak sich im kleinen Nebenpeak in der Flanke wiederfindet! Die „verrauschte“ Spitze des L-Peaks kommt höchstwahrscheinlich von der „Delle“ in Region IV. Diese Delle existiert im COROT-Survey nur bei 64 Tagen und niedriger Akkretionsrate und ist dort für die Verdopplung des verschmolzenen LH-Peaks verantwortlich. Die Masse der kompakten Objekte liegt in diesem Fall innerhalb des durch die „Delle“ verbreiterten L-Peaks und ist daher nicht als getrennter Peak zu sehen.

Dies erklärt im nachhinein, warum der Nebenpeak bei Jupiter exakt an derselben Stelle zu finden ist wie der 64 Tage H-Peak bei gleicher Akkretionsrate $\dot{M} = 10^{-6} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$! Offenbar ist wie vermutet der H-Peak tatsächlich ab einem gewissen Abstand konstant und nur noch von der Leuchtkraft abhängig. Diese Konstanz gilt sogar bis hinaus zur Position von Jupiter! Allerdings spielt der H-Peak dort nur noch eine untergeordnete Rolle.

8.3.6 Drei Klassen von Gasplaneten

Betrachtet man den COROT Survey in seiner Gesamtheit, ist es naheliegend, die Gasplaneten in drei Klassen einzuteilen:

Klasse G Diese *ganz heißen Gasplaneten* befinden sich sehr nahe am Stern. Sie zeichnen sich durch besonders hohe Massen (des H-Peaks) aus. Der Grund hierfür ist ihre hohe Oberflächentemperatur jenseits der Sublimationstemperatur der Hochtemperaturkondensate im Vakuum ($T_x \gtrsim 1650 \text{ K}$). In diesem Regime gibt es zusätzlich überproportional viele heiße Neptune ($\lg M \approx 26$).

Klasse H Die *heißen Gasplaneten* dieser Klasse zeichnen sich durch noch nicht verschmolzenen L- und H-Peak aus. Dadurch ist ihre Entstehung (wie auch Klasse G) durch Gleichgewichtszustände geprägt. Sie haben noch „Staub“ in der oberen Atmosphäre.

Klasse J Diese Klasse der *jupiterähnlichen Gasplaneten* zeichnet sich durch verschmolzenen L- und H-Peak aus. Die Eigengravitation der Hülle dominiert bereits das dynamische Verhalten. Es gibt eine kritische Masse und es treten Instabilitäten auf. Die Massenverteilung dieser Klasse ist nicht nur durch die Gleichgewichte, sondern durch die Größe der Fresszone bestimmt. Sie können daher wesentlich massiver sein als die Klassen G und H.

Die Grenze zwischen Klasse G und H ist stark vom Spektraltyp abhängig. Für die Sonne liegt sie bei etwa $T_{\text{orb}} \approx 2$ Tage – ist je nach Spektraltyp jedoch stark unterschiedlich. Da ich das Verschwinden der Staubschicht als Ursache für die ansteigenden Massen vermute, ist ein fließender Übergang zwischen Gruppe G und H zu erwarten.

Die Grenze zwischen Klasse H und J wiederum ist besonders stark von der Akkretionsrate abhängig. Für $^{-4}[1,0]^*$ liegt sie zwischen 23 und 32 Tagen (siehe Abbildung B.21).

Teil III

Diskussion

9 Kritische Zusammenfassung

Ich habe im Rahmen dieser Arbeit versucht, Planetenpopulationen um verschiedene Sterne vorherzusagen. Besonderes Augenmerk gilt dabei den nahen, den Pegasi-Planeten. Instrument der Wahl ist die statistische Analyse aller möglichen Gleichgewichtszustände im Rahmen der kerninduzierten Gasinstabilitätshypothese. Wie sich im Lauf dieser Arbeit herausgestellt hat, ist dieser Begriff bereits schlecht gewählt, da bei den Pegasi-Planeten mitunter gar keine Instabilität auftreten muss (siehe Abschnitt 6.3.2).

Der Anspruch, alle möglichen Gleichgewichte zu berechnen, führt zur „Mannigfaltigkeit“ aller Planetengleichgewichte: Die Lösung der Strukturgleichungen für beliebige Kombinationen von Kernmasse M_c und Kernoberflächendruck P_c . Ist die Mannigfaltigkeit für eine Position (große Halbachse a und Sternparameter M_\star & L_\star) erst einmal bestimmt, sind darin alle Gleichgewichte enthalten und natürlich auch alle M_c - M_{tot} -Relationen für beliebigen Nebeldruck. Weiterhin lässt sich die Mannigfaltigkeit dazu verwenden, durch Abzählen aller Gleichgewichte die relative Häufigkeit verschieden massiver Planeten zu bestimmen: dies bezeichne ich als Massenspektrum. Es ist das primäre Instrument beim COROT-Survey.

In einem ersten Schritt wurde die Rechenmethodik überprüft, zum einen auf interne Konsistenz und zum anderen durch die Reproduktion von publizierten Rechnungen anderer Autoren in der klassischen M_c - M_{tot} -Darstellung. Der Vergleichstest war erfolgreich, aber erst nachdem Fehler in der verwendeten Zustandsgleichung korrigiert wurden (Kapitel 2.4.1 bzw. 5).

Dann habe ich anhand der Jupiterposition den Unterschied zu isothermen Modellen betrachtet. Dabei stellte sich heraus, dass die grundsätzliche Struktur der Mannigfaltigkeit – insbesondere die Einteilung in vier Bereiche (siehe Kapitel 3.3) – aus dem isothermen Fall zwar erhalten bleibt, sich jedoch starke Verzerrungen der Bereichsgrenzen ergeben. Insbesondere führt die starke Nicht-Isothermie zu einer Verschiebung der Spitze von Region IV hin zu höheren Kerndrücken sowie zu einer extremen Verkleinerung der berechenbaren Bereiche von Region I und II. Außerdem tritt die Region IV quasi zweimal auf, einmal für voll konvektive Protoplaneten und einmal für Protoplaneten mit radiativer Zone.

Der Übergang von der Mannigfaltigkeit zur klassischen M_c - M_{tot} -Relation durch die Projektion einer Lösungsfamilie mit konstantem Nebeldruck auf die M_c - M_{tot} -Ebene (Kapitel 7) demonstriert den Vorteil der neuen Methode: Es werden nicht nur mehr Lösungen gefunden, sondern auch das physikalische Verständnis profitiert von der neuen Darstellung. So war es möglich, das Minimum in Mizunos M_c - M_{tot} -Relation auf eine Änderung des Energietransports von Strahlung auf Konvektion zurückzuführen. Weiterhin gibt es starke Anzeichen dafür, dass

die Modelle in diesem Minimum instabil sind. Der Grund dafür ist vermutlich die radiative Zone, die tief in der Gashölle entsteht, und zwar gerade dort, wo die Eigengravitation einsetzt.

Die neue Methode wurde sodann auf zwei bekannte extrasolare Planeten angewendet: 51 Peg b und HD 149026 b.

51 Peg b

51 Peg b wurde verwendet, um exemplarisch zu demonstrieren, dass Pegasi-Planeten und jupiterähnliche Planeten grundsätzlich verschieden sind. Dies zeigt sich sofort bei Betrachtung einer Mannigfaltigkeitsdarstellung oder des jeweiligen Massenspektrums: Während bei Jupiter nur eine dominante Masse im Spektrum auftritt, werden die Pegasi-Planeten durch zwei Peaks im Spektrum charakterisiert. Radiale Profile zeigen weiterhin, dass die Pegasi-Planeten größtenteils voll konvektiv sind. Dies und das stark verkleinerte Hill-Volumen sind die Gründe für das unterschiedliche Verhalten. Das Massenspektrum für 51 Peg b ergibt eine wahrscheinlichste Masse für die Position von 51 Peg b von $1,4 M_{51\text{Peg b}}^{\text{min}}$. Dies entspricht einem $\sin i$ -Wert von 0.73 – ein durchaus plausibler Wert.

HD 149026 b

Bei HD 149026 b standen nicht die allgemeine Analyse und der Vergleich mit Jupiter im Vordergrund, sondern es ging um die Lösung eines ganz konkreten Problems: HD 149026 b wurde durch eine Kombination von Radialgeschwindigkeits- und Transitbeobachtungen entdeckt, wodurch seine Dichte bekannt ist. Strukturrechnungen haben ferner ergeben, dass dieser Planet einen extrem großen Kern haben muss. Klassisch, im Hinblick auf die kritische Masse bei sternfernen Planeten, war dies nicht möglich. Schließlich sollte jenseits der kritischen Masse keine weitere Planetesimalakkretion auf den Kern möglich sein. Wie konnte daher HD 149026 b entstehen?

Durch die Berechnung der entsprechenden Mannigfaltigkeit für die Position von HD 149026 b war es mir möglich, die genauen Nebelbedingungen anzugeben, die nötig sind, um den Planeten in-situ entstehen zu lassen. Ferner legte die Betrachtung dieser Mannigfaltigkeit in Zusammenhang mit isothermen Stabilitätsanalysen die Vermutung nahe, dass die komplette Entwicklung in diesem Fall quasi statisch ablaufen könnte. Der logische nächste Schritt war die Überprüfung der Entstehung von HD 149026 b unter den berechneten Bedingungen mit Fluid-dynamischen Rechnungen. Tatsächlich konnte gezeigt werden, dass unter diesen Bedingungen HD 149026 b in-situ und zwar ohne jegliche wirklich dynamische Phase entstehen kann: Der Protoplanet entwickelt sich entlang einer Sequenz von Gleichgewichtszuständen.

Dennoch sind für diese Rechnungen Abweichungen vom klassischen Planetenentstehungsprozess notwendig. Um die Entstehung dieses Planeten auf diese Weise zu erklären, muss man eine stetig aufgefüllte Fresszone annehmen – etwa durch eine schwach akkretierende Scheibe. Sonst fehlt es an dem notwendigen Material. Ist man zu diesem Schritt bereit, ist die Entstehung hiermit erklärt. Der auf diesem Weg entstehende Planet hat gerade eine Gesamtmasse von $117 M_{\oplus}$ – der beobachtete Wert für HD 149026 b liegt bei $114 M_{\oplus}$.

Weiterhin offenbart sich bei den Pegasi-Planeten ein ganz grundlegender Unterschied zur Entstehung von Jupiter: Die gesamte Entstehung läuft quasistatisch ab und der Begriff der kritischen Masse wird belanglos, da keine dynamische Instabilität auftritt. Schon Wuchterl (1993) hatte eine neue Klasse von voll konvektiven Planeten postuliert und gezeigt, dass diese ganz andere Eigenschaften haben würden (Wuchterl 1995). Dies ist nun offensichtlich gerade der Fall bei den Pegasi-Planeten. Hinzu kommt noch, dass im Fall der Pegasi-Planeten die Eigengravitation durch das Abschneiden der Hill Sphäre nicht so dominant ist.

Corot-Survey Mark 1

Das eigentliche Kernstück dieser Arbeit ist der COROT-Survey, in seiner jetzigen Form v1.1. Er ist das Mittel, um das gesteckte Ziel – die Vorhersage der Planetenverteilungen bei verschiedenen Sternen – zu erreichen.

Dazu habe ich für eine ganze Reihe von Kombinationen der drei freien Parameter, T_{orb} , M_{\star} und \dot{M} eine Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Massenspektrum berechnet. Jede solche Mannigfaltigkeit enthält etwa 12000 Planetenmodelle. Insgesamt besteht der Survey aus 48 solcher Mannigfaltigkeiten. Die Umlaufzeiten T_{orb} reichen von einem bis 64 Tage, die Sternmassen von $0,4$ bis $2 M_{\odot}$ und die Akkretionsrate wurde von $\dot{M} = 10^{-2} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$ bis $\dot{M} = 10^{-6} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$ variiert.

Das Ergebnis ist ein sehr vielseitiges Spektrum von Planetenpopulationen. Allen Massenspektren gemeinsam ist das Auftreten zweier Peaks im Massenspektrum. Dies ist gleichbedeutend mit zwei charakteristischen Massen an gegebener Position. Die Position dieser charakteristischen Massen stellte sich als stark abhängig von der Umlaufzeit sowie schwächer abhängig von Sternmasse und Akkretionsrate heraus. Bei zunehmendem Abstand vom Zentralgestirn verschmelzen diese beiden Peaks schließlich und Massenspektrum wie Mannigfaltigkeit haben große Ähnlichkeit mit denen an Jupiters Position. Ich vermute, dass dieses Verschmelzen der beiden charakteristischen Massen mit einer grundlegenden Änderung der dynamischen Entwicklung einhergeht: Jupiters Entwicklung wird jenseits der kritischen Masse dynamisch, es gibt keine Gleichgewichtszustände mehr. Dies ist bei den Pegasi-Planeten nicht der Fall. Im Rahmen dieser Arbeit wurde gezeigt, dass bei den Pegasi-Planeten keine dynamische Instabilität auftreten muss.

Die Ergebnisse des Surveys führen schließlich auf eine Reihe von überprüfbaren Aussagen, die hoffentlich alle mithilfe der Resultate von COROT verifiziert oder falsifiziert werden können. Diesen Kernaussagen meiner Arbeit, den *Thesen*, ist ein extra Kapitel (11) gewidmet. Die meiner Ansicht nach wichtigste Aussage ist These 1: Es gibt eine klare Massenobergrenze von $2,5 M_{\oplus}$ für enge Planeten ($T_{\text{orb}} \leq 16$ Tage) bei sonnenähnlichen (und masseärmeren) Sternen. Die exakte obere Grenze für die Umlaufzeit entspricht dem Verschmelzen beider Peaks und ist insbesondere abhängig von der Akkretionsrate (\sim Leuchtkraft). Weiterhin erwarte ich (These 2), dass sehr enge Planeten (~ 1 Tag Umlaufzeit) im Mittel massiver sind als Planeten mit vergleichsweise größeren Umlaufzeiten. Dies bedeutet, dass die Massen der extrem engen

Planeten gehäuft nahe am erwarteten Maximum (aus These 1) auftreten. Weite Planeten ($T_{\text{orb}} \gtrsim 16.64$ Tage) verhalten sich wie Jupiter und können dynamisch instabil werden. Ihre endgültige Masse wird daher nicht nur durch die Gleichgewichte, sondern auch durch die Größe der Fresszone bestimmt (These 3).

Die Verallgemeinerung dieser Aussagen führt auf die Einteilung der Gasplaneten in drei Klassen: G, H und J. Das Verschmelzen von L- und H-Peak kennzeichnet die Trennung zwischen Klasse H und J, wohingegen die Klasse G durch das Verschwinden des Staubs in der Atmosphäre definiert ist.

Weiterhin wird klar, dass die Massen von Gasplaneten eine natürliche Eigenschaft von Gasplaneten mit Kern im Sternorbit sind (These 4). Proto-Saturn kann in diesem Sinne als Objekt im Gleichgewicht mit dem Nebel verstanden werden, Proto-Jupiter hingegen ist durch Akkretionsprozesse charakterisiert.

Bewertung

Die Vielfalt der auftretenden Massenspektren lässt eine starke Vorhersagekraft der Theorie vermuten. Insbesondere wird es möglich sein, die Theorie anhand von Transitbeobachtungen zu überprüfen (\rightarrow *Thesen*). Eine erfolgreiche Vorhersage der sternnahen Planetenpopulationen wäre in meinen Augen gleichbedeutend mit dem Ende der Migrationstheorien. Denn genau wie HD 149026 b sind diese Verteilungen unter Migrationsaspekten nicht zu erklären.

Einen allerersten vorsichtigen Test der Ergebnisse erlauben bereits die statistischen Eigenschaften der schon jetzt entdeckten Planeten, die in der Endphase dieser Arbeit bekannt geworden sind. So finden Santos u. a. (2005) eine Unterhäufigkeit sehr massiver Planeten mit Umlaufzeiten von weniger als 40 Tagen – dies ist in sehr gutem Einklang mit meinen Ergebnissen (\rightarrow *These 3*). Weiterhin gibt es schwache Hinweise auf eine Überhäufigkeit der Planeten mit ~ 3 Tagen Umlaufzeit. Dies wird mitunter als Indiz für einen Stoppmechanismus der Migration gesehen. Betrachtet man jedoch Tabelle 8.1 erkennt man, dass bei drei Tagen Umlaufzeit auch in etwa die Sublimationstemperatur eines Großteils der Kondensate erreicht wird (~ 1600 K). Somit würde ich dort auch im Rahmen der in-situ Entstehung eine Überhäufigkeit der Planeten vermuten. Gaudi u. a. (2005) gehen sogar noch einen Schritt weiter und trennen zwischen very hot (VHJ) und hot jupiters (HJ). Sie legen die Grenze auf drei Tage Umlaufzeit. Sie stellen fest, dass die VHJ deutlich höhere Massen haben, insbesondere $M > M_{\text{J}}$. Dies ist in perfektem Einklang mit *These 2* und der Klasseneinteilung.

10 Grenzen und Kritik

Ziel dieser Arbeit war die Vertiefung des Verständnisses der Planetenentstehung und idealerweise dann schließlich eine Vorhersage von Gasplanetenmassen. Dies sollte durch möglichst realistische Berechnung aller existierenden Gleichgewichte erreicht werden. Naturgemäß muss man jedoch eine Vielzahl von vereinfachenden Annahmen treffen, um das Problem handhabbar zu machen. Aber nicht nur die zur Verfügung stehende Rechenzeit, sondern auch das Verständnis des Themas stellen zu Beginn starke Einschränkungen dar. Zu Beginn sowie im Laufe der Arbeit müssen dann eine Reihe von Entscheidungen getroffen werden, die das Resultat beeinflussen könnten. In diesem Abschnitt möchte ich mögliche Kritikpunkte und Grenzen dieser Theorie auflisten.

Grenzen

- Die verwendete Null-Entropie-Konvektion stellt die Konvektion nur grob vereinfacht dar. In der Praxis stellt sich oftmals eine schwache Überadiabatie ein, die notwendig ist, um die Konvektion anzutreiben. Ich schätze den Einfluss auf die Zahlenwerte jedoch gering ein (siehe Wuchterl 1995, für Jupiter).
- Der Strahlungstransport wird in Diffusionsnäherung gerechnet, ist also nur im optisch dicken Medium korrekt. Wenngleich die Großzahl der Protoplaneten auf sehr kurzen Skalen optisch dick wird, ist nicht auszuschließen, dass gerade in den kompakten Regionen I und II ein besserer Strahlungstransport nötig ist, um das System überall auf der Mannigfaltigkeit physikalisch korrekt zu beschreiben. Jedoch sind die Planetenhüllen in den für die Massenspektren relevanten Bereichen alle optisch dick, so dass Diffusion korrekt sein sollte (vgl. Mihalas u. Weibel-Mihalas 1999). In der dynamischen Rechnung (siehe Kapitel 6.3.2) zeigten sich zudem keine relevanten Abweichungen durch einen besseren Strahlungstransport.
- Bei der Abzählung der Gleichgewichte wird stillschweigend ihre Gleichhäufigkeit in $\lg M_c$ und $\lg P_c$ vorausgesetzt. Diese Annahme ist sicher nicht streng gültig und muss axiomatisch postuliert werden.
- Es wurde für die Gleichgewichtszustände keine Stabilitätsanalyse durchgeführt und alle Gleichgewichte wurden gezählt. Dabei ist bekannt, dass einige der Gleichgewichte, zumindest im isothermen Fall, dynamisch instabil sind. Entweder linear (siehe Schönke,

J. 2005) oder nicht-linear (siehe z.B. Pečnik, B. 2005). Dynamische Rechnungen für einige Positionen zeigen eine Reihe von Instabilitäten (siehe Wuchterl 1990, 1995). Wie mit instabilen Gleichgewichten zu verfahren ist und ob sie nicht doch mitgezählt werden sollten, z.B. wenn sich im dynamischen Verlauf die Massen gar nicht ändern, ist eine offene Frage.

- Bei den sehr engen Planeten (1 Tag), besonders um massive Sterne, sind die Außentemperaturen mitunter sehr hoch. Höher als die Sublimationstemperaturen der meisten oder gar aller Kondensate. Wie die In-situ Entstehung dort von statten gehen soll, ist daher ungeklärt. Jedoch kann man einwenden, dass bei höherem Druck, wie er im Inneren der Protoplaneten herrscht, die Sublimationstemperaturen stark ansteigen und Kondensate wieder existieren können. Dies klärt aber nicht die Frage, wie diese Protoplaneten überhaupt entstehen können.
- Eine wichtige Annahme bei der Berechnung der Massenspektren ist die Skalenfreiheit der Planetenembryonen. Die Richtigkeit dieser Annahme ist keineswegs geklärt. Vielmehr könnte man argumentieren, dass es sehr wohl eine typische Skala für Planetesimale gibt. Eine solche Annahme würde die Massenspektren verändern.
- Es hat sich gezeigt, dass die Planetenentstehung ab einer gewissen Umlaufzeit dynamisch abläuft, und die Planetenmassen dann vermutlich nicht mehr primär durch die Gleichgewichtsmassen geprägt sind. Die Vorhersagekraft dieser Theorie für Planeten mit Umlaufzeiten über einer gewissen Schwelle muss daher angezweifelt werden. Diese Schwelle liegt vermutlich in der Gegend der Verschmelzung von L- und H-Peak in der Größenordnung von 64 Tagen und ist stark von der Leuchtkraft des Planeten abhängig (siehe Kapitel 8.3). Für Planeten mit Umlaufzeiten jenseits dieser Grenze ist lediglich zu vermuten, dass in diesem dynamischen Regime die Gleichgewichtsmassen überhäufig auftreten – eingebettet in eine zufällige Verteilung von Planeten, die nur durch die zur Verfügung stehende Fresszone eingeschränkt sind. Jedoch sind alle Endzustände natürlich auch Gleichgewichte.

11 Thesen

Obgleich die Ergebnisse dieser Arbeit sehr vielfältig sind und es noch lange Zeit dauern wird, bis alle Implikationen verstanden sein werden, gibt es doch schon jetzt eine Reihe von ableitbaren Eigenschaften der Planeten. Da eine Theorie nur dann sinnvoll ist, wenn sie auch überprüfbar ist, gebe ich im Folgenden eine Reihe von Eigenschaften, die *Thesen*, an, anhand derer die Richtigkeit der Theorie in Zukunft gemessen werden kann.

Thesen

1. *Enge Planeten, mit Umlaufzeiten kleiner als 16 Tage haben Massen von weniger als $\lg M \text{ kg}^{-1} = 27,6$, also von weniger als $2,5 M_{\text{J}}$. Dies gilt für sonnenähnliche sowie masseärmere Sterne.*

Für schwerere Sterne von $2 M_{\odot}$ gilt eine Massengrenze von $\lg M \text{ kg}^{-1} = 28$ ($6 M_{\text{J}}$). Außerdem findet bei massiveren Sternen zwischen vier und einem Tag Umlaufzeit allmählich der Übergang in den Doppelsternbereich statt, und es können sehr eng am Stern viel massivere Begleiter auftreten.

2. *Planeten mit 1 Tag Umlaufzeit haben deutlich höhere Massengrenzen als solche mit 4 Tagen Umlaufzeit.*

Sie reichen an die unter 1. genannte Obergrenze heran, während Planeten mit 4 Tagen Umlaufzeit mehrheitlich weniger als $1 M_{\text{J}}$ aufweisen sollten (für den Fall $M \leq 1 M_{\odot}$).

3. *Für weite Planeten, mit Umlaufzeiten zwischen 16 und 64 Tagen, evtl. schon bei etwas weniger als 16 Tagen, steigen die maximalen Planetenmassen stark an. Die Entstehung von Jupiter-Planeten und Pegasi-Planeten unterscheidet sich grundlegend.*

Der Planetenentstehungsprozess läuft für Jupiter-Planeten nicht mehr komplett quasistatisch ab. Daher können die Planetenmassen mit zunehmendem Abstand stark anwachsen – die Gleichgewichtsmassen sind nicht mehr ausschlaggebend. Dennoch erwarte ich eine erhöhte Population von Objekten mit entsprechenden Gleichgewichten, also bei $0,5 M_{\text{J}}$. Für leuchtstarke Planeten, also bei dynamischer Akkretion besonders bei großen Umlaufzeiten, ist noch eine weitere typische Masse von $1-2 M_{\text{J}}$ zu erwarten. Der exakte Abstand, ab dem sich die Entstehung grundlegend ändert, ist noch zu bestimmen – er liegt vermutlich genau dort, wo L- und H-Peak verschmelzen.

4. *Die Massen der Gasplaneten sind eine natürliche Eigenschaft von Gaskugeln mit Kern im Sternorbit.*

5. *Thesen 1–3 lassen sich verallgemeinern: Die Gasplaneten treten in drei Klassen auf – Klassen G, H und J (vgl. Abschnitt 8.3.6):*

Klasse G *Ganz heiße Gasplaneten* befinden sich sehr nahe am Stern. Sie zeichnen sich durch besonders hohe Massen (des H-Peaks) aus. Der Grund hierfur ist ihre hohe Oberflächentemperatur jenseits der Sublimationstemperatur der Kondensate im Vakuum ($T_x \gtrsim 1650 \text{ K}$).

Klasse H Die *heißen Gasplaneten* dieser Klasse zeichnen sich durch noch nicht verschmolzenen L- und H-Peak aus. Dadurch ist ihre Entstehung (wie auch Klasse G) durch Gleichgewichtszustände geprägt. Sie haben noch „Staub“ in der oberen Atmosphäre.

Klasse J Diese Klasse der *jupiterähnlichen Gasplaneten* zeichnet sich durch verschmolzenen L- und H-Peak aus. Die Eigengravitation der Hülle dominiert bereits das dynamische Verhalten. Es gibt eine kritische Masse und es treten Instabilitäten auf. Die Massenverteilung dieser Klasse ist damit nicht nur durch die Gleichgewichte, sondern durch die Größe der Fresszone bestimmt. Sie können daher wesentlich massiver sein als die Klassen G und H.

6. *Für Planeten der Klassen G & H können die Kernmassen beliebig variieren.*

Klasse J Planeten dagegen haben beim selben Mutterstern in etwa gleiche Kernmassen unabhängig vom Abstand. Der Grund hierfur ist, dass bei engen Planeten das Konzept der kritischen Masse nicht mehr greift, da Gleichgewichte im Nebel auch bei hohen Kernmassen weiterhin existieren. Es gibt keine fast nebeldruckunabhngige Obergrenze fur die Kernmasse wie bei den Klasse J Planeten.

7. *Für Klasse G Planeten gibt es eine große Population „heißer“ Neptune, d.h. mit Massen in der Größenordnung von $\lg M \text{ kg}^{-1} = 26$ ($\approx 16 M_{\oplus}$)*

12 Ausblick

Bei der Diskussion der unglaublichen Fülle von Informationen, die allein in allen Massenspektren des COROT-Survey Mark 1 enthalten sind, ergeben sich automatisch eine ganze Reihe von interessanten Aspekten, die eine genauere Untersuchung wert sind. Ebenso erkennt man viele Verbesserungsmöglichkeiten, auf die ich hier in knapper Form eingehen möchte.

- Ganz offensichtlich ist es sinnvoll, das Survey mit einer engeren Abstufung, insbesondere in der Umlaufzeit T_{orb} , zu verfeinern. Für eine Wahl der Parameter habe ich das bereits getan, um die Zugehörigkeit von L- und H-Peak zu klären. Sicherlich wäre dies jedoch auch für andere Akkretionsraten und Sterne sehr wichtig.
- Weiterhin ist bei der Abtastung der Sternmassen der Spektraltyp F nicht berücksichtigt worden. Da COROT auch eine signifikante Anzahl an F-Sternen beobachten wird, sollte diese Lücke geschlossen werden und Sternmassen zwischen 1 und $2 M_{\odot}$ untersucht werden.
- Um konkrete Vorhersagen für COROT abzugeben, ist es außerdem möglich, Massenspektren verschiedener Zentralsterne so zu mitteln, dass sie der Sternverteilung in den jeweiligen COROT-Feldern entsprechen. Dadurch würden die gemessenen Planetenverteilungen direkt mit den Vorhersagen vergleichbar.
- Bei der Analyse der Massenspektren habe ich die starke Vermutung geäußert, dass die Verschmelzung von L- und H-Peak den Übergang in ein anderes dynamisches Regime darstellt. Diese bis dato noch unbewiesene Annahme ist auch maßgeblich an der Formulierung der Thesen drei und sechs beteiligt. Obwohl vieles dafür spricht, dass diese Verschmelzung tatsächlich einen grundlegend anderen Entstehungsweg ermöglicht, muss dies mit Hilfe von Fluid-dynamischen Rechnungen erst noch bewiesen werden. Momentan wurde dies nur für den konkreten Fall von HD 149026 b gezeigt. Es sind jedoch systematisch eine ganze Reihe solcher Rechnungen durchzuführen oder analytische Gründe zu suchen. Im Rahmen dieser Rechnungen könnte auch geklärt werden, ob die Verschmelzung von L- und H-Peak tatsächlich die Ursache für das unterschiedliche Stabilitätsverhalten ist, oder ob es sich nur um eine Koinzidenz handelt. Vermutlich hängt es jedoch mit der Eindeutigkeit voll-konvektiver Modelle zusammen, welche Stabilität gewährleistet.

- Es ist für genauere Vorhersagen notwendig, die exakte Umlaufzeit, bei der L- und H-Peak überlappen, zu bestimmen. Da diese stark von der Akkretionsrate abhängt, sollte ferner die Abhängigkeit von der Akkretionsrate bestimmt werden.
- Weiterhin fehlen im Augenblick lineare und andere Stabilitätsanalysen für nicht-isotherme Rechnungen mit realistischen Zustandsgleichungen und Staubopazitäten. Solche Stabilitätsanalysen sind sicher ein wichtiger nächster Schritt. In diesem Zusammenhang ist dann auch zu klären, wie mit instabilen Gleichgewichten bei der Berechnung der Massenspektren zu verfahren ist.
- Neben Verbesserungen im Pegasi-Planeten-Bereich möchte ich auch die Lücke zwischen 64 Tagen Umlaufzeit und Jupiter schließen. Damit könnte man untersuchen, ob es sich beim Massenspektrum von Jupiter tatsächlich um L- und H-Peak handelt wie vermutet. Natürlich sollte man dann auch die verbleibenden Gas- und Eisplaneten unseres Sonnensystems untersuchen.
- Die hier vorliegende Arbeit wurde fast komplett mit einer einzigen Tabelle für den Absorptionskoeffizienten der Staub- und Gashülle berechnet. Es ist aber klar, dass die Wahl der Staubzusammensetzung und damit die Werte der Opazität einen starken Einfluss auf die Hüllenstrukturen haben. Daher ist es empfehlenswert, eine Untersuchung über den Einfluss der gewählten Opazitätstabelle durchzuführen.
- In der gesamten vorliegenden Arbeit wird mit einer konstanten Planetesimalakkretionsrate \dot{M} gearbeitet. Schon in Kapitel 3.4.1 wurde darauf hingewiesen, dass es mitunter sinnvoll wäre, im Sinne einer Particle-in-a-box Näherung, auch einen erhöhten Wirkungsquerschnitt (Stichwort: gravitational focussing) einzubeziehen. Dies ist ein weiterer möglicher Schritt, um die Massenspektren zu verbessern.

Obwohl ich hier bereits eine ganze Reihe möglicher zukünftiger Arbeiten aufgezählt habe, denke ich, dass die Gleichgewichte recht stabil sind. Konkret vermute ich, dass die grundlegenden Ergebnisse dieser Arbeit Bestand haben werden. Wenn schon bald eine ausreichende Zahl von Planeten gefunden sein wird – insbesondere auch mit Transitmessungen – was eine erste Überprüfung meiner Theorie ermöglicht, wird sich zeigen, ob die in-situ Entstehung der typische Prozess für Pegasi-Planeten ist.

Literaturverzeichnis

Alexander u. Ferguson 1994

ALEXANDER, D. R. ; FERGUSON, J. W.: Low-temperature Rosseland opacities. In: *ApJ* 437 (1994), Dezember, S. 879–891

Alibert u. a. 2005a

ALIBERT, Y. ; MORDASINI, C. ; BENZ, W. ; WINISDOERFFER, C.: Models of giant planet formation with migration and disc evolution. In: *A&A* 434 (2005), April, S. 343–353. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20042032>. – DOI 10.1051/0004-6361:20042032

Alibert u. a. 2005b

ALIBERT, Y. ; MOUSIS, O. ; BENZ, W.: On the Volatile Enrichments and Composition of Jupiter. In: *ApJ* 622 (2005), April, S. L145–L148. <http://dx.doi.org/10.1086/429662>. – DOI 10.1086/429662

Alibert u. a. 2005c

ALIBERT, Y. ; MOUSIS, O. ; MORDASINI, C. ; BENZ, W.: New Jupiter and Saturn Formation Models Meet Observations. In: *ApJ* 626 (2005), Juni, S. L57–L60. <http://dx.doi.org/10.1086/431325>. – DOI 10.1086/431325

Baglin u. The COROT Team 1998

BAGLIN, A. ; THE COROT TEAM: Asteroseismology from space - The COROT experiment. In: DEUBNER, F.-L. (Hrsg.) ; CHRISTENSEN-DALSGAARD, J. (Hrsg.) ; KURTZ, D. (Hrsg.): *IAU Symp. 185: New Eyes to See Inside the Sun and Stars*, 1998, S. 301–+

Benz u. a. 2006

BENZ, W. ; MORDASINI, C. ; ALIBERT, Y. ; NAEF, D.: Extrasolar giant planet formation: Monte Carlo simulations. In: ARNOLD, L. (Hrsg.) ; BOUCHY, F. (Hrsg.) ; MOUTOU, C. (Hrsg.): *Tenth Anniversary of 51 Peg-b: Status of and prospects for hot Jupiter studies*, 2006, S. 24–34

Bordé u. a. 2003

BORDÉ, P. ; ROUAN, D. ; LÉGER, A.: Exoplanet detection capability of the COROT space mission. In: *A&A* 405 (2003), Juli, S. 1137–1144. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20030675>. – DOI 10.1051/0004-6361:20030675

Borucki u. Summers 1984

BORUCKI, W. J. ; SUMMERS, A. L.: The photometric method of detecting other planetary systems. In: *Icarus* 58 (1984), April, S. 121–134. [http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035\(84\)90102-7](http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035(84)90102-7). – DOI 10.1016/0019-1035(84)90102-7

Boss 1995

BOSS, A. P.: Proximity of Jupiter-Like Planets to Low-Mass Stars. In: *Science* 267 (1995), Januar, S. 360–362

Boss 2002

BOSS, A. P.: Evolution of the Solar Nebula. V. Disk Instabilities with Varied Thermodynamics. In: *ApJ* 576 (2002), September, S. 462–472. <http://dx.doi.org/10.1086/341736>. – DOI 10.1086/341736

Cash u. Karp 1990

CASH, J. R. ; KARP, Alan H.: A Variable Order Runge-Kutta Method for Initial Value Problems with Rapidly Varying Right-Hand Sides. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 16 (1990), September, Nr. 3, 201–222. <http://doi.acm.org/10.1145/79505.79507>. – ISSN 0098–3500

Cassen u. a. 1985

CASSEN, P. ; SHU, F. H. ; TEREBEY, S.: Protostellar disks and star formation. In: *Protostars and Planets II*, 1985, S. 448–483

Charbonneau u. a. 2000

CHARBONNEAU, D. ; BROWN, T. M. ; LATHAM, D. W. ; MAYOR, M.: Detection of Planetary Transits Across a Sun-like Star. In: *ApJ* 529 (2000), Januar, S. L45–L48. <http://dx.doi.org/10.1086/312457>. – DOI 10.1086/312457

CNES COROT 2006

COROT. Version: 2006. <http://smsc.cnes.fr/COROT/>, Abruf: 17. Juli 2006

Engeln-Müllges u. Reutter 1990

ENGELN-MÜLLGES, G. ; REUTTER, F.: *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit C-Programmen*. 2. Mannheim : BI-Wiss.-Verl., 1990

Ferguson u. a. 2005

FERGUSON, J. W. ; ALEXANDER, D. R. ; ALLARD, F. ; BARMAN, T. ; BODNARIK, J. G. ; HAUSCHILDT, P. H. ; HEFFNER-WONG, A. ; TAMANAI, A.: Low-Temperature Opacities. In: *ApJ* 623 (2005), April, S. 585–596. <http://dx.doi.org/10.1086/428642>. – DOI 10.1086/428642

Gaudi u. a. 2005

GAUDI, B. S. ; SEAGER, S. ; MALLEN-ORNELAS, G.: On the Period Distribution of Close-in Extrasolar Giant Planets. In: *ApJ* 623 (2005), April, S. 472–481. <http://dx.doi.org/10.1086/428478>. – DOI 10.1086/428478

Goldreich u. a. 2004

GOLDREICH, P. ; LITHWICK, Y. ; SARI, R.: Planet Formation by Coagulation: A Focus on Uranus and Neptune. In: *ARA&A* 42 (2004), September, S. 549–601

Götz 1989

GÖTZ, M.: *Die Entwicklung von Proto-Gasplaneten mit Drehimpuls — Strahlungshydrodynamische Rechnungen.*, Univ. Heidelberg, Diss., 1989

Gray 1992

GRAY, D.F.: *The observation and analysis of stellar atmospheres*. 2. Cambridge : Cambridge University Press, 1992

Greenzweig u. Lissauer 1990

GREENZWEIG, Y. ; LISSAUER, J. J.: Accretion rates of protoplanets. In: *Icarus* 87 (1990), September, S. 40–77. [http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035\(90\)90021-Z](http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035(90)90021-Z). – DOI 10.1016/0019-1035(90)90021-Z

Guillot 1999

GUILLOT, T.: A comparison of the interiors of Jupiter and Saturn. In: *Planet. Space Sci.* 47 (1999), Oktober, S. 1183–1200

Guillot 2005

GUILLOT, T.: THE INTERIORS OF GIANT PLANETS: Models and Outstanding Questions. In: *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 33 (2005), Januar, S. 493–530

Hartmann u. a. 1998

HARTMANN, L. ; CALVET, N. ; GULLBRING, E. ; D’ALESSIO, P.: Accretion and the Evolution of T Tauri Disks. In: *ApJ* 495 (1998), März, S. 385–+

Hayashi 1980

HAYASHI, C.: Structure of the solar nebula, growth and decay of magnetic fields and effects of turbulent and magnetic viscosity on the nebula. In: *Progress of Theoretical Physics* 70 (1980), S. 35–53

Hayashi 1981

HAYASHI, C.: Structure of the solar nebula, growth and decay of magnetic fields and effects of magnetic and turbulent viscosities on the nebula. In: *Progress of Theoretical Physics Supplement* 70 (1981), S. 35–53

Hayashi u. a. 1977

HAYASHI, C. ; NAKAZAWA, K. ; ADACHI, I.: Long-Term Behavior of Planetesimals and the Formation of the Planets. In: *PASJ* 29 (1977), S. 163–196

Hayashi u. a. 1979

HAYASHI, C. ; NAKAZAWA, K. ; MIZUNO, H.: Earth’s melting due to the blanketing effect of the primordial dense atmosphere. In: *Earth and Planetary Science Letters* 43 (1979), April, S. 22–28. [http://dx.doi.org/10.1016/0012-821X\(79\)90152-3](http://dx.doi.org/10.1016/0012-821X(79)90152-3). – DOI 10.1016/0012-821X(79)90152-3

Hayashi u. a. 1985

HAYASHI, C. ; NAKAZAWA, K. ; NAKAGAWA, Y.: Formation of the solar system. In: *Protostars and Planets II*, 1985, S. 1100–1153

Hillenbrand

HILLENBRAND, L. D.

Hueso u. Guillot 2003

HUESO, R. ; GUILLOT, T.: Evolution of the Protosolar Nebula and Formation of the Giant Planets. In: *Space Science Reviews* 106 (2003), S. 105–120

Ikoma u. a. 2001

IKOMA, M. ; EMORI, H. ; NAKAZAWA, K.: Formation of Giant Planets in Dense Nebulae: Critical Core Mass Revisited. In: *ApJ* 553 (2001), Juni, S. 999–1005

Kippenhahn u. Weigert 1990

KIPPENHAHN, R. ; WEIGERT, A. ; HARWIT, M. (Hrsg.) ; KIPPENHAHN, R. (Hrsg.) ; TRIMBLE, V. (Hrsg.) ; ZAHN, J.-P. (Hrsg.): *Stellar Structure and Evolution*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1990 (Astronomy and Astrophysics Library)

Kippenhahn u. Weigert 1990

KIPPENHAHN, R. ; WEIGERT, A.: *Stellar Structure and Evolution*. Stellar Structure and Evolution, XVI, 468 pp. 192 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library, 1990

Kusaka u. a. 1970

KUSAKA, T. ; NAKANO, T. ; HAYASHI, C.: Growth of Solid Particles in the Primordial Solar Nebula. In: *Progress of Theoretical Physics* 44 (1970), Dezember, S. 1580–1595

Lin u. a. 1996

LIN, D. N. C. ; BODENHEIMER, P. ; RICHARDSON, D. C.: Orbital migration of the planetary companion of 51 Pegasi to its present location. In: *Nature* 380 (1996), S. 606–607. <http://dx.doi.org/10.1038/380606a0>. – DOI 10.1038/380606a0

Lissauer 1993

LISSAUER, J. J.: Planet formation. In: *ARA&A* 31 (1993), S. 129–174

Lissauer 2005

LISSAUER, J. J.: Formation of the Outer Planets. In: *Space Science Reviews* 116 (2005), Januar, S. 11–24. <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-005-1945-3>. – DOI 10.1007/s11214-005-1945-3

Mayor u. Queloz 1995

MAYOR, M. ; QUELOZ, D.: A Jupiter-Mass Companion to a Solar-Type Star. In: *Nature* 378 (1995), November, S. 355–+

Mihalas u. Weibel-Mihalas 1999

MIHALAS, D. ; WEIBEL-MIHALAS, B.: *Foundation of Radiation Hydrodynamics*. Dover Books, 1999

Mizuno 1980

MIZUNO, H.: Formation of the Giant Planets. In: *Progress of Theoretical Physics* 64 (1980), August, S. 544–557

Mordasini u. a. 2006

MORDASINI, C. ; ALIBERT, Y. ; BENZ, W.: Destruction of planetesimals in protoplanetary atmospheres. In: ARNOLD, L. (Hrsg.) ; BOUCHY, F. (Hrsg.) ; MOUTOU, C. (Hrsg.): *Tenth Anniversary of 51 Peg-b: Status of and prospects for hot Jupiter studies*, 2006, S. 84–86

Morfill u. a. 1985

MORFILL, G. E. ; TSCHARNUTER, W. ; VOELK, H. J.: Dynamical and chemical evolution of the protoplanetary nebula. In: *Protostars and Planets II*, 1985, S. 493–533

N2K Consortium 2005

N2K CONSORTIUM: *N2K star information for HD149026 – San Francisco State University*. Version: 2005. <http://tauceti.sfsu.edu/n2k/hd149026/>, Abruf: 13. Feb. 2006

Pečnik u. Wuchterl 2005

PEČNIK, B. ; WUCHTERL, G.: Giant planet formation. A first classification of isothermal protoplanetary equilibria. In: *A&A* 440 (2005), September, S. 1183–1194. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:200500005>. – DOI 10.1051/0004-6361:200500005

Pečnik, B. 2005

PEČNIK, B.: *On the planethood of Titan. Classification, Non-Linear Stability and Fluid-Dynamics of Isothermal Protoplanets*. München, Germany, Ludwig-Maximilians-Universität München, Ph.D.Thesis, July 2005

Pollack u. a. 1996

POLLACK, J. B. ; HUBICKYJ, O. ; BODENHEIMER, P. ; LISSAUER, J. J. ; PODOLAK, M. ; GREENZWEIG, Y.: Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gas. In: *Icarus* 124 (1996), November, S. 62–85. <http://dx.doi.org/10.1006/icar.1996.0190>. – DOI 10.1006/icar.1996.0190

Pollack u. a. 1985

POLLACK, J. B. ; MCKAY, C. P. ; CHRISTOFFERSON, B. M.: A calculation of the Rosseland mean opacity of dust grains in primordial solar system nebulae. In: *Icarus* 64 (1985), Dezember, S. 471–492

Press u. a. 1992

PRESS, H. ; FLANNERY, B. P. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T.: *Numerical Recipes in Pascal*. Cambridge University Press, 1992

Press u. a. 2003

PRESS, H. ; FLANNERY, B. P. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T.: *Numerical Recipes in Fortran 77. 2*. Cambridge University Press, 2003

Press u. a. 1996

PRESS, H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes in Fortran 77. 2*. Cambridge University Press, 1996

Rouan u. a. 2000

ROUAN, D. ; BAGLIN, A. ; BARGE, P. ; BORDÉ, P. ; DELEUIL, M. ; LÉGER, A. ; SCHNEIDER, J. ; VUILLEMIN, A.: Detecting Earth-Uranus Class Planets with the Space Mission COROT. In: SCHÜRMAN, B. (Hrsg.): *ESA SP-451: Darwin and Astronomy : the Infrared Space Interferometer*, 2000, S. 221–+

Safronov 1969

SAFRONOV, V. S.: *Evolution of the Protoplanetary Cloud and Formation of the Earth and Planets*. Moscow : Nauka Press, 1969. – (also NASA-TT-F-677, 1972)

Santos u. a. 2005

SANTOS, N. C. ; BENZ, W. ; MAYOR, M.: Extrasolar Planets: Constraints for Planet Formation Models. In: *Science* 310 (2005), Oktober, S. 251–255. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1100210>. – DOI 10.1126/science.1100210

Santos u. a. 2004

SANTOS, N. C. ; BOUCHY, F. ; MAYOR, M. ; PEPE, F. ; QUELOZ, D. ; UDRY, S. ; LOVIS, C. ; BAZOT, M. ; BENZ, W. ; BERTAUX, J.-L. ; LO CURTO, G. ; DELFOSSE, X. ; MORDASINI, C. ; NAEF, D. ; SIVAN, J.-P. ; VAUCLAIR, S.: The HARPS survey for southern extra-solar planets. II. A 14 Earth-masses exoplanet around μ Arae. In: *A&A* 426 (2004), Oktober, S. L19–L23. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:200400076>. – DOI 10.1051/0004-6361:200400076

Sasselov u. Lecar 2000

SASSELOV, D. D. ; LECAR, M.: On the Snow Line in Dusty Protoplanetary Disks. In: *ApJ* 528 (2000), Januar, S. 995–998

Sato u. a. 2005

SATO, B. ; FISCHER, D. A. ; HENRY, G. W. ; LAUGHLIN, G. ; BUTLER, R. P. ; MARCY, G. W. ; VOGT, S. S. ; BODENHEIMER, P. ; IDA, S. ; TOYOTA, E. ; WOLF, A. ; VALENTI, J. A. ; BOYD, L. J. ; JOHNSON, J. A. ; WRIGHT, J. T. ; AMMONS, M. ; ROBINSON, S. ; STRADER, J. ; MCCARTHY, C. ; TAH, K. L. ; MINNITI, D.: The N2K Consortium. II. A Transiting Hot Saturn around HD 149026 with a Large Dense Core. In: *ApJ* 633 (2005), November, S. 465–473. <http://dx.doi.org/10.1086/449306>. – DOI 10.1086/449306

Saumon u. a. 1995

SAUMON, D. ; CHABRIER, G. ; VAN HORN, H. M.: An Equation of State for Low-Mass Stars and Giant Planets. In: *ApJS* 99 (1995), August, S. 713–+

Schönke, J. 2005

SCHÖNKE, J.: *Lineare Stabilitätsanalyse von Protoplaneten*, Friedrich Schiller Universität Jena, Diplomarbeit, 2005

Spät 1986

SPÄT, H.: *Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen*. 4. München : Oldenbourg-Verlag, 1986

Stevenson 1982

STEVENSON, D. J.: Formation of the giant planets. In: *Planet. Space Sci.* 30 (1982), August, S. 755–764

Stoer u. Bulirsch 1978

STOER, Josef ; BULIRSCH, Roland: *Einführung in die numerische Mathematik/2*. 2. Berlin : Springer, 1978 (Heidelberger Taschenbücher)

Stoer u. Bulirsch 1983

STOER, Josef ; BULIRSCH, Roland: *Einführung in die numerische Mathematik/1*. 4. Berlin : Springer, 1983 (Heidelberger Taschenbücher)

Tscharnuter 1987

TSCHARNUTER, W. M.: A collapse model of the turbulent presolar nebula. In: *A&A* 188 (1987), Dezember, S. 55–73

Tscharnuter u. Boss 1993

TSCHARNUTER, W. M. ; BOSS, A. P.: Formation of the protosolar nebula. In: *Protostars and Planets III*, 1993, S. 921–938

Weidenschilling 1977

WEIDENSCHILLING, S. J.: The distribution of mass in the planetary system and solar nebula. In: *Ap&SS* 51 (1977), September, S. 153–158

Weidenschilling u. Marzari 1996

WEIDENSCHILLING, S. J. ; MARZARI, F.: Gravitational scattering as a possible origin for giant planets at small stellar distances. In: *Nature* 384 (1996), S. 619–621

Weiss u. a. 1990

WEISS, A. ; KEADY, J. J. ; MAGEE, N. H.: A Collections of Los Alamos Opacity Tables for All Temperatures. In: *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 45 (1990), S. 209–+

Wuchterl 1989

WUCHTERL, G.: *Zur Entstehung der Gasplaneten. Kugelsymmetrische Gasströmungen auf Protoplaneten*, Univ. Wien, Diss., 1989

Wuchterl 1990

WUCHTERL, G.: Hydrodynamics of giant planet formation. I - Overviewing the kappa-mechanism. In: *A&A* 238 (1990), November, S. 83–94

Wuchterl 1991a

WUCHTERL, G.: Hydrodynamics of giant planet formation. II - Model equations and critical mass. III - Jupiter's nucleated instability. In: *Icarus* 91 (1991), Mai, S. 39–64. [http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035\(91\)90124-C](http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035(91)90124-C). – DOI 10.1016/0019-1035(91)90124-C

Wuchterl 1991b

WUCHTERL, G.: Hydrodynamics of giant planet formation III: Jupiter's nucleated instability. In: *Icarus* 91 (1991), Mai, S. 53–64. [http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035\(91\)90125-D](http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035(91)90125-D). – DOI 10.1016/0019-1035(91)90125-D

Wuchterl 1993

WUCHTERL, G.: The critical mass for protoplanets revisited - Massive envelopes through convection. In: *Icarus* 106 (1993), November, S. 323–+. <http://dx.doi.org/10.1006/icar.1993.1174>. – DOI 10.1006/icar.1993.1174

Wuchterl 1995

WUCHTERL, G.: Giant Planet Formation: A Comparative View of Gas-Accretion. In: *Earth Moon and Planets* 67 (1995), S. 51–65

Wuchterl 1996

WUCHTERL, G.: Formation of Giant Planets Close to Stars. In: *Bulletin of the American Astronomical Society* 28 (1996), September, S. 1108–+

Wuchterl 1997

WUCHTERL, G.: Giant Planet Formation and the Masses of Extrasolar Planets. In: *Science with the VLT Interferometer*, 1997, S. 64–+

Wuchterl u. a. 2000

WUCHTERL, G. ; GUILLOT, T. ; LISSAUER, J. J.: Giant Planet Formation. In: *Protostars and Planets IV* (2000), Mai, S. 1081–+

Wuchterl u. Tscharnuter 2003

WUCHTERL, G. ; TSCHARNUTER, W. M.: From clouds to stars. Protostellar collapse and the evolution to the pre-main sequence I. Equations and evolution in the Hertzsprung-Russell diagram. In: *A&A* 398 (2003), Februar, S. 1081–1090. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20021707>. – DOI 10.1051/0004-6361:20021707

Yorke 1979

YORKE, H. W.: The evolution of protostellar envelopes of masses 3 and 10 solar masses. I - Structure and hydrodynamic evolution. In: *A&A* 80 (1979), Dezember, S. 308–316

Yorke 1980

YORKE, H. W.: The evolution of protostellar envelopes of masses 3 solar masses and 10 solar masses. II - Radiation transfer and spectral appearance. In: *A&A* 85 (1980), Mai, S. 215–220

Lebenslauf

Persönliche Daten

Christopher Hans Broeg
Camburger Str. 2
07743 Jena

Geb. am 16.02. 1977 in Dachau
Ledig, österreichischer Staatsbürger

Schulbildung

1983–1986	Grundschule in Karlsfeld
1986–1987	Grundschule in Reisenburg b. Günzburg
1987–1993	Dossenberger Gymnasium Günzburg, math.-naturwissenschaftlicher Zweig
1993–1994	Schulbesuch in Oregon, USA mit Arthur-Walter Stipendium
1994–1996	Kollegstufe am Dossenberger Gymnasium Günzburg (LK Mathematik u. Chemie)
Juni 1996	Allgemeine Hochschulreife

Studium

1996–2002	Physikstudium an der Technischen Universität München (TUM)
Nov. 1998	Vordiplom
Jan. 2002	Hauptdiplom
2/02–12/02	Diplomarbeit „Rotationsperioden von röntgenselektierten T-Tauri Sternen im Sternentstehungsgebiet Taurus-Auriga“ am Max-Planck-Institut für Extraterrestrische Physik
11. Dez. 2002	Physik Diplom
Februar 2002	Beginn der vorliegenden Dissertation am Astrophysikalischen Institut und Universitäts-Sternwarte der FSU Jena

Praktika und berufliche Tätigkeiten

9/97–10/97	Werkstudent am Physikdepartment der TUM
5/98–7/98	Hilfskraft am Mathematikdepartment der TUM
9/99–10/99, 6/00–7/00, 9/00–11/00, 3/01–5/01	Studentische Hilfskraft am Lehrstuhl E12, TUM
8/01–12/01	Werkstudent am MPI für Extraterrestrische Physik
Sept. 2003	Teilnahme an der Third Helmholtz Summer School „Chaos and stability in planetary systems“ in Potsdam

-
- WS 03/04, SS 04 Betreuung des Physikalischen Grundpraktikums für Nebenfächler
- SS 04, WS 04/05 Mitbetreuung des Numerikums und Teilnahme an der GNAT Academic Initiative (GAP)
- WS 04/05 Betreuung der Übung zur Vorlesung „Sonnensystem“
- Jul. 2005 Teilnahme an der „Kobe international School of planetary sciences“ in Hyogo und am „Post school workshop“ in Kobe, Japan

Projekte als freier Mitarbeiter

- 1997–1998 Mitarbeit am Projekt CARDIS. Völlige Neuprogrammierung des Verkaufsprogramms.
- 1998 Entwicklung einer internetgestützten Datenbank für die Verwaltung von Probanden am Beschleuniger-Laboratorium der Münchner Universitäten
- Nov. 1998 Konstruktion und Bearbeitung eines mechanischen Modells zur starken Fokussierung
- Sept. 1999 Simulation und Bau eines Holzmodells für starke Fokussierung für die Wissenschaft, Kunst und Technik Ausstellung in Garching b. München

Sonstiges

- Fasching 1999 & 2000 Organisation des Biedersteiner Atrium Faschings

Jena,

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbst angefertigt habe und alle von mir verwendeten Hilfsmittel, persönlichen Mitteilungen und Quellen angegeben habe.

Diese Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer Prüfungsbehörde vorgelegt.

Jena,

Teil IV
Anhang

Anhang A

Ergänzungen zum Text

A.1 Massenspektren

A.1.1 Interpretation der Massenspektren

Bei der Einführung des Massenspektrums in Kapitel 4 war schlicht die Rede von logarithmischer Verteilungsfunktion. In diesem Abschnitt möchte ich kurz auf die Interpretation der Massenspektren eingehen und erläutern, was das in unserer „linearen“ Welt, also für die relative Häufigkeit als Funktion der Masse, bedeutet. Um den Zusammenhang zwischen dem logarithmischen und linearen Histogramm herzustellen, führe ich zunächst einige Symbole ein. Seien F_{dM} bzw. $F_{d\log M}$ die lineare bzw. logarithmische Verteilungsfunktion der Masse M , so dass gilt:

$$dN(M) = F_{dM}(M) dM, \quad \text{bzw.} \quad (\text{A.1})$$

$$dN(\log M) = F_{d\log M}(\log M) d\log M. \quad (\text{A.2})$$

dN ist die in einem Massenintervall dM vorkommende Anzahl von Objekten. Anders ausgedrückt ergibt sich die Anzahl mit Masse m kleiner als M zu:

$$N(m < M) = \int_0^M F_{dM}(M') dM', \quad (\text{A.3})$$

$$N(m < M) = \int_{-\infty}^{\log M} F_{d\log M}(\log M') d\log M'. \quad (\text{A.4})$$

Da beide Größen gleich sein müssen, erhält man daraus die Beziehung zwischen F_{dM} und $F_{d\log M}$. Dazu substituiert man in Gleichung (A.3) $M = 10^\xi = \varphi(\xi)$ und transformiert die Integralgrenzen entsprechend mit der Umkehrfunktion $\varphi^{-1}(M) = \log M$ und erhält:

$$\begin{aligned} N(m < M) &= \int_{\varphi^{-1}(0)}^{\varphi^{-1}(M)} F_{dM}(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\log M} \underbrace{F_{dM}(10^\xi) \ln(10) 10^\xi}_{F_{d\log M}(\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Also muss gelten:

$$F_{d\log M}(\xi) = F_{dM}(10^\xi) \ln(10) 10^\xi, \quad (\text{A.6})$$

oder nach Rücktransformation:

$$F_{d\log M}(\log M) = \ln(10) M F_{dM}(M). \quad (\text{A.7})$$

Mit dieser Beziehung können wir nun sagen, wie z.B. ein flaches Massenspektrum (also in unserem Fall das log-Histogramm der Kernmassen) als lineare Verteilung aussieht: Die log-Verteilung ist flach, also gilt:

$$F_{d\log M}(M) = C.$$

C ist eine Konstante. Für die Verteilungsfunktion F_{dM} ergibt sich dann aus Gleichung (A.7):

$$F_{dM}(M) = F_{d\log M}(\log M) \frac{1}{\ln(10)M} = \frac{C^*}{M}.$$

Eine log-Gleichverteilung entspricht also einer $1/M$ -Verteilung in linearer Betrachtung. Dennoch ist es sinnvoll, direkt mit den log-Verteilungen zu arbeiten, denn die Massenspektren der Planeten decken mehrere Größenordnungen ab und sind in linearer Betrachtungsweise kaum handhabbar. Die gleiche Situation ergibt sich auch bei der Betrachtung der ursprünglichen Massenfunktion der Sterne und der Galaxien (engl. „initial mass function“, IMF) in der Kosmologie. Auch hier müssen die Verteilungen logarithmisch aufgetragen werden und es ist wichtig, zwischen F_{dM} und $F_{d\log M}$ zu unterscheiden.

A.1.2 Gleichförmige Darstellung und Beschränkung des (M_c, P_c) -Bereichs für die Erstellung der Massenspektren

Um die Vergleichbarkeit der Massenspektren zu wahren, präsentiere ich alle Massenspektren im Rahmen der COROT-Durchmusterung in derselben Form, d.h. sie werden alle über den gleichen Massenbereich mit gleichem binning dargestellt: Der Bereich $\lg M_{\text{tot}} \text{ kg}^{-1} = 24..28$ wird in 80 Bins zerlegt, dies entspricht einer Binbreite von 0,05 in der verwendeten Skala. Lediglich bei ein paar der sehr sternnahen Planetenpositionen muss der Bereich auf 24..29 ausgedehnt werden. Er wird dann in 100 Bins aufgeteilt, um die gleiche Binbreite von 0,05 zu wahren.

Weiterhin wird der (M_c, P_c) -Bereich, über den die Modelle abgezählt werden, für alle Positionen in der gleichen Art und Weise bestimmt: Die untere Massengrenze für die Kernmassen M_c ist für alle $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 20$. Die Untergrenze in P_c wird stets so gewählt, dass die Region IV gerade noch komplett enthalten ist. Wählt man einen kleineren Innendruck P_c als Untergrenze, dann erhält man einen erhöhten Untergrund durch die konstante Kernverteilung aus Region III. In dieser Region ist ja die Gesamtmasse gerade gleich der Kernmasse, somit erhält man im Histogramm eine konstante Linie, die dann den anderen Bereichen überlagert ist. Deshalb wird Region III bei der Berechnung des Massenspektrums nicht mitgezählt.

Die Obergrenzen von M_c und P_c werden durch die jeweilige Rechnung bestimmt: Es werden alle gefundenen Lösungen oberhalb der Untergrenzen eingeschlossen.

Dass diese Wahl sehr große Auswirkungen auf das Ergebnis hat, zeigen die Abbildungen A.1-A.3 anhand des Beispiels $^{-4}[\mathbf{1}]^1$ aus dem COROT-Survey. Abbildung A.1 zeigt die Gesamt-massendarstellung und das daraus berechnete Massenspektrum. Offenbar wird der mittlere Peak um $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 26$ durch Anteile bei sehr kleinen Kernmassen verstärkt. Denn in Abbildung A.2, bei der nur Kerne größer als $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 20$ mitgezählt werden, ist der Peak deutlich schwächer. Jedoch ist in beiden Fällen Region III, in der praktisch nur die Kernmassen relevant sind, dominant. Diese Region liefert aber keine Information, da sie lediglich die (vorgegebene) Kernverteilung widerspiegelt. Also entferne ich sie für die Berechnung der Massenspektren. Das Endergebnis zeigt dann Abbildung A.3.

Diese Form der Darstellung wird auch für alle anderen Massenspektren in dieser Arbeit verwendet.

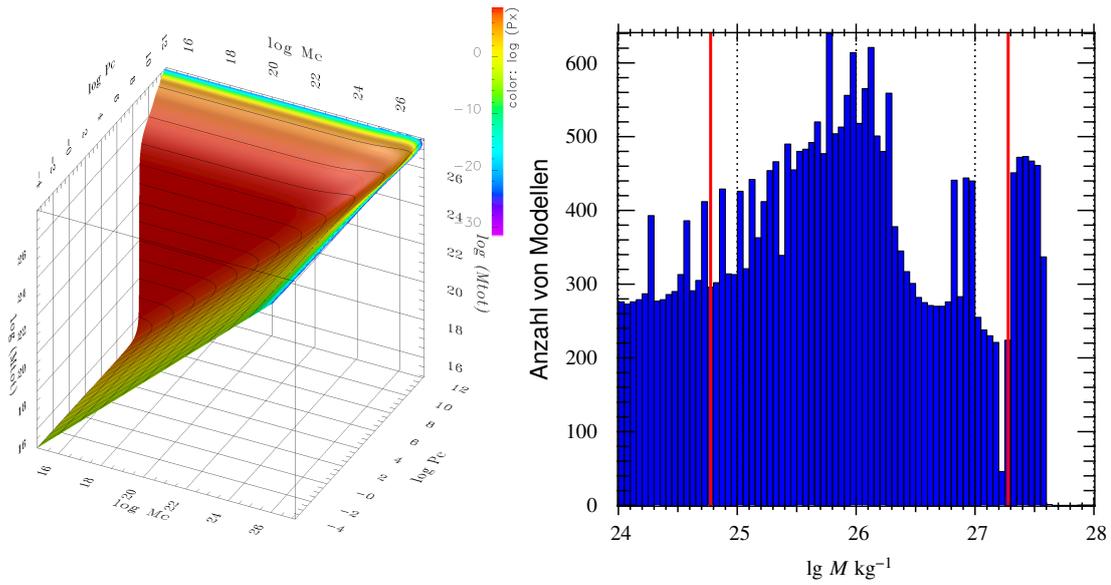


Abbildung A.1: **Gesamtmassendarstellung** $^{-4}[1,0]^1$ und zugehöriges **Massenspektrum** – **gesamter Bereich**. Der konstante Bereich bei sehr kleinen Kernen dominiert den mittleren Bereich des Massenspektrums.

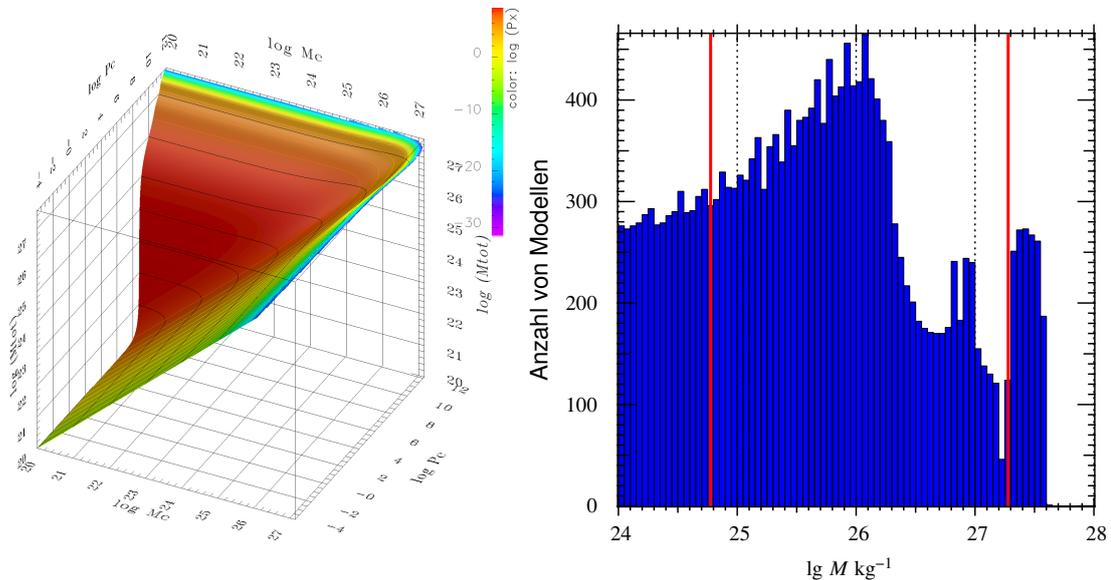


Abbildung A.2: **Gesamtmassendarstellung** $^{-4}[1,0]^1$ und zugehöriges **Massenspektrum** – **Bereich: $\lg M_c \geq 20$** . Der aus Region III stammende konstante Untergrund bis $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 26,4$ (obere M_c -Grenze der Rechnungen in Region III) dominiert die Verteilung.

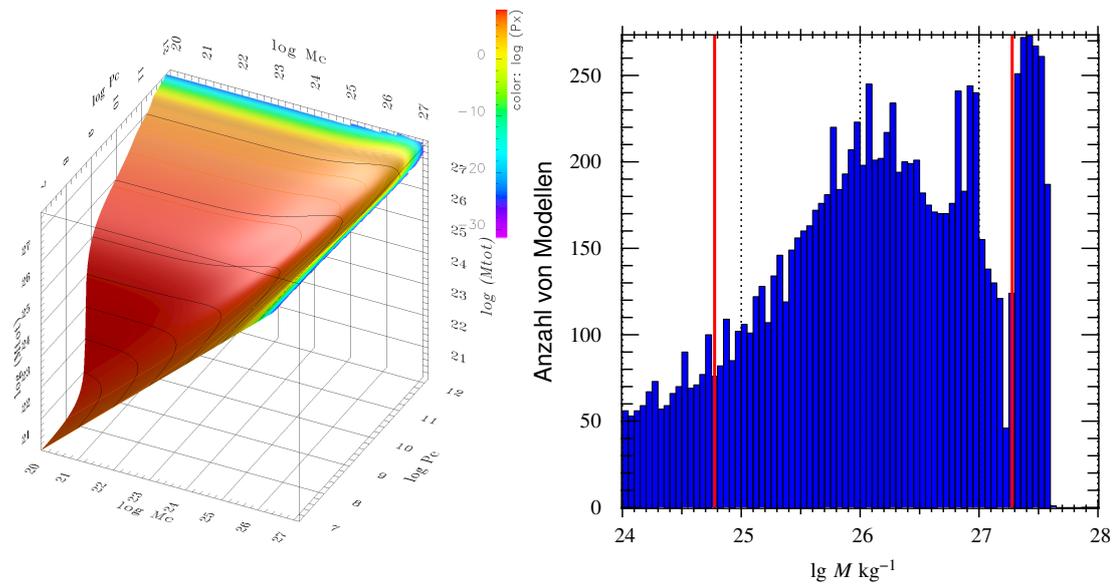


Abbildung A.3: Gesamtmassendarstellung $^{-4}[1,0]^1$ und zugehöriges Massenspektrum – $\lg M_c \geq 20$, $\lg P_c \geq 7,0$. Der durch Region III verursachte Untergrund ist auf ein Minimum reduziert. Auf diese Weise wird die durch die Verteilung der Hüllen gegebene Struktur sichtbar.

A.2 Abbildungen zu den Testrechnungen

A.3 Radiale Strukturen aus der Jupiter Mannigfaltigkeit

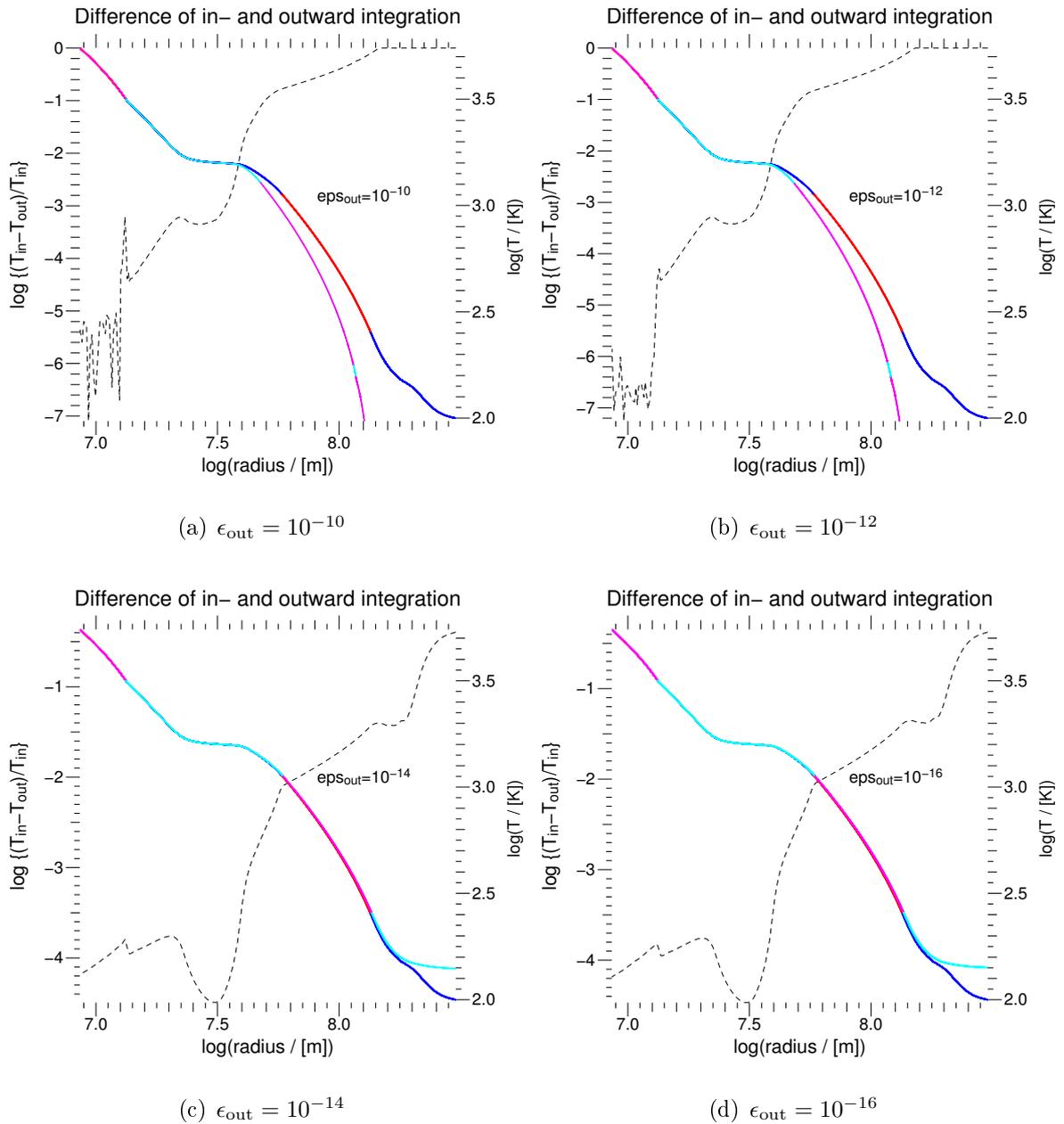
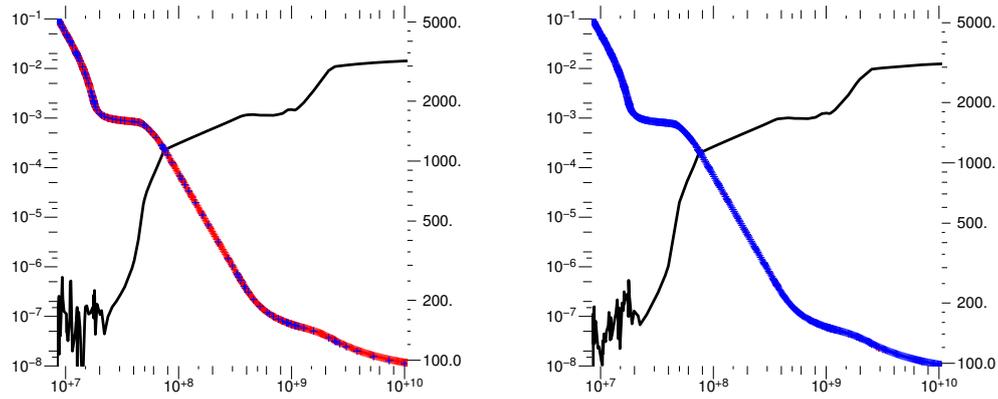
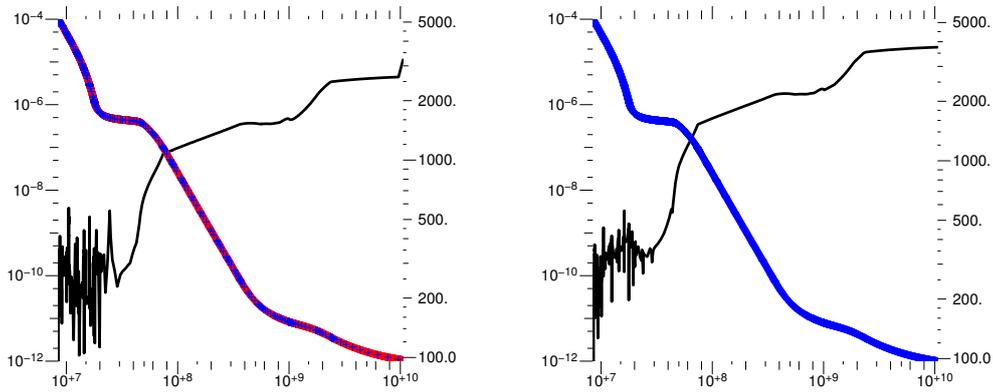


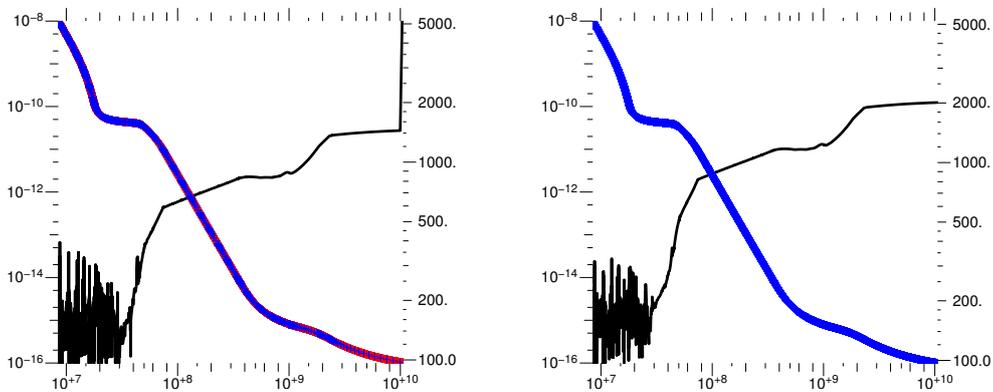
Abbildung A.4: **Testintegration für Protoplaneten nahe der kritischen Masse mit klassischem Schwarzschild-Kriterium.** Vergleich von vier verschiedenen Auswärtsintegrationen mit einer Einwärtsintegration höchster Genauigkeit ($\epsilon = 10^{-18}$) als Referenz. Es wurde das Runge-Kutta-Verfahren verwendet. Die Gleichungen verwenden das klassische ∇ . Aufgetragen ist die Temperatur, $\log T$, (rechte Achse) sowie der Logarithmus des relativen Fehlers (linke Achse) als Funktion von $\log r$. Blau/zyan sind radiative Bereiche, rot/magentarot sind konvektive Bereiche. Selbst bei maximaler Genauigkeit wird die Einwärtsintegration nicht exakt reproduziert. Dies liegt am abrupten Wechsel der Gleichung für den Temperaturgradienten. Besonders bei den kleineren Genauigkeiten sieht man den plötzlichen Anstieg des relativen Fehlers um mehrere Größenordnungen beim Wechsel konvektiv/radiativ.



(a) $\epsilon = 10^{-9}$



(b) $\epsilon = 10^{-12}$



(c) $\epsilon = 10^{-18}$

Abbildung A.5: **Testintegration für Protoplaneten nahe der kritischen Masse mit modifiziertem ∇ .** Fehlervergleich für ein Temperaturprofil mit verschiedenen Genauigkeitswerten. Einwärts-(rot, $\epsilon = 10^{-18}$) und Auswärtsintegration (blau). Die rechte Achse gibt den Temperaturwert an, die linke Achse wie in Abb.A.4 den relativen Fehler. Linke Seite: Einwärtsint. mit RK, Auswärtsint. mit BS; Rechte Seite: Einwärtsint. mit BS, Auswärtsint. mit RK. Um die hohe Interpolationsgenauigkeit zu bekommen, wird stets die RK-Integration interpoliert, weil dort viel mehr Datenpunkte vorliegen. Bei dem „Zacken“ am Außenrand in Abb.(b&c,links) handelt es sich um ein Artefakt der Extrapolation. Offenbar lässt sich diese Form des Schwarzschild-Kriteriums viel leichter integrieren als ein klassischer Schalter (vergleiche Abb.A.4).

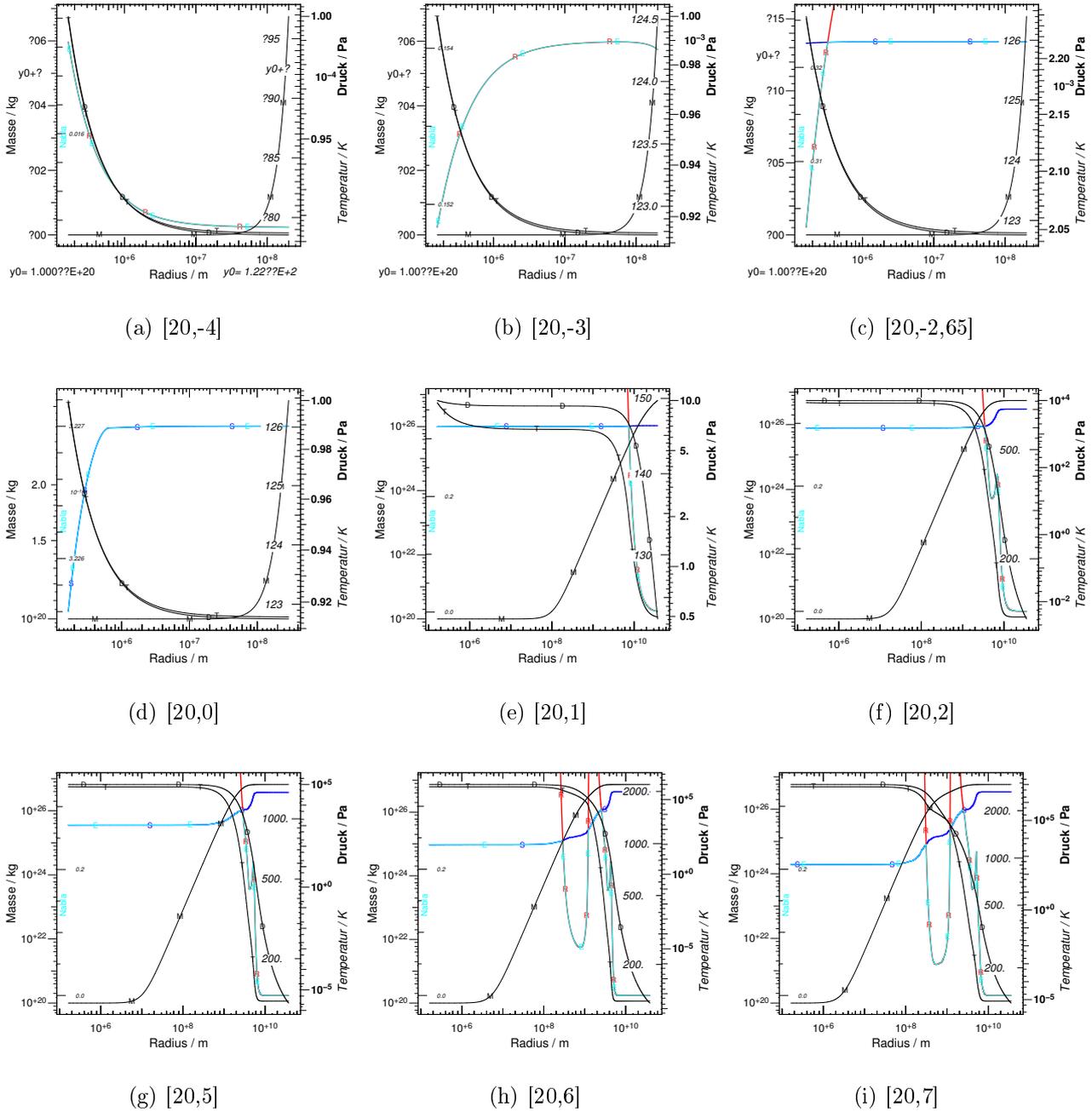
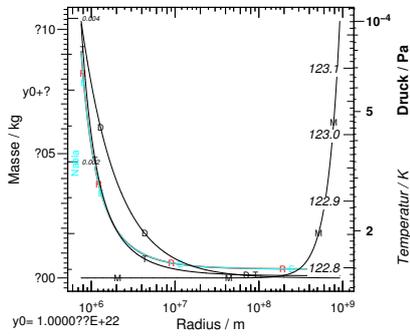
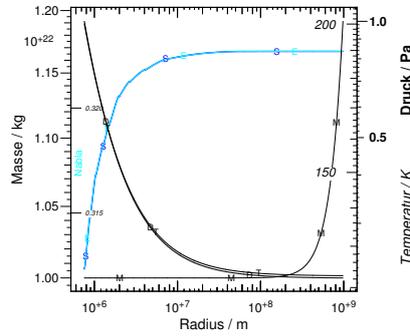


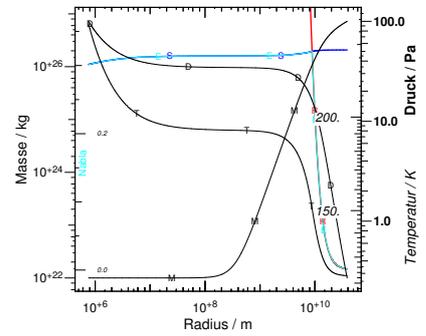
Abbildung A.6: **Radiale Strukturen an Jupiters Position für verschiedene Werte von P_c bei $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 20$.** Die Bildunterschriften geben wie schon bei Abbildung 3.4 jeweils den dekadischen Logarithmus von M_c und P_c an. Es handelt sich um eine Sequenz mit ansteigendem Kerndruck P_c . Zunächst radiativ (a,b) wird die Gaskugel bei (c) konvektiv. Ab (e) entsteht eine äußere radiative Zone. Bei (h) bildet sich eine innere radiative Zone aus. Die Formatierung der Graphiken orientiert sich an Abbildung A.10.



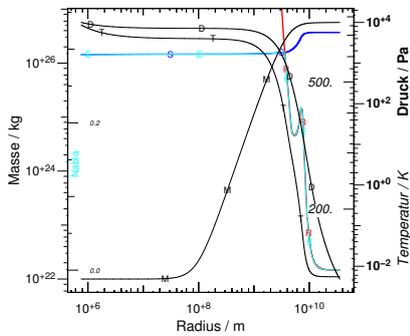
(a) [22,-4]



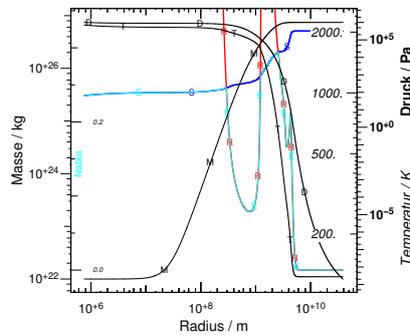
(b) [22,0]



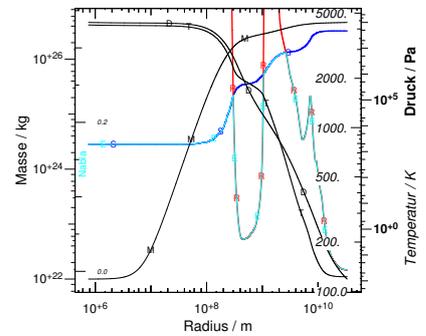
(c) [22,2]



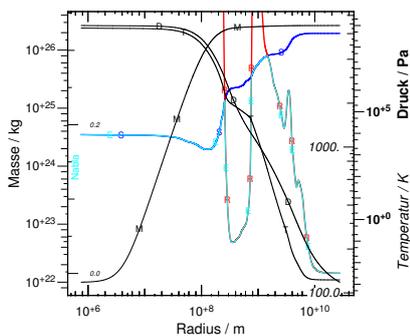
(d) [22,4]



(e) [22,6]

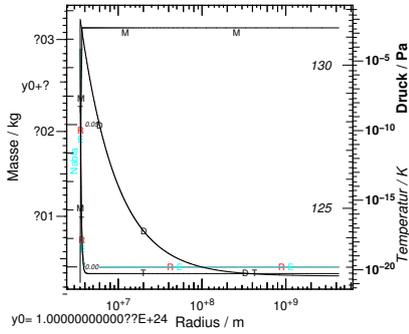


(f) [22,8]

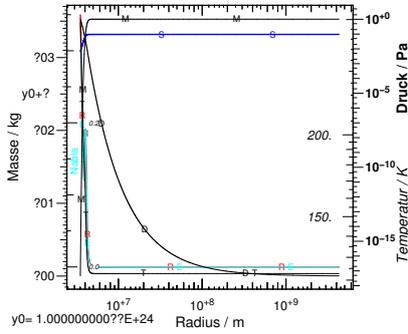


(g) [22,9]

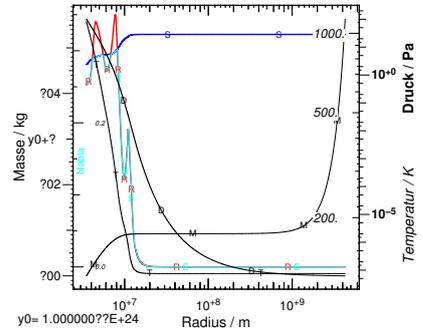
Abbildung A.7: Radiale Strukturen an Jupiters Position für verschiedene Werte von P_c bei $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 22$. Es handelt sich um eine Sequenz ansteigenden Kerndrucks P_c analog zu Abbildung A.6 jedoch mit größerem Kern.



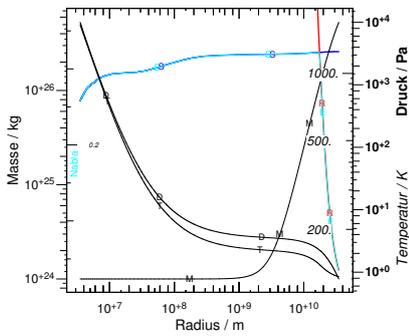
(a) [24,-2]



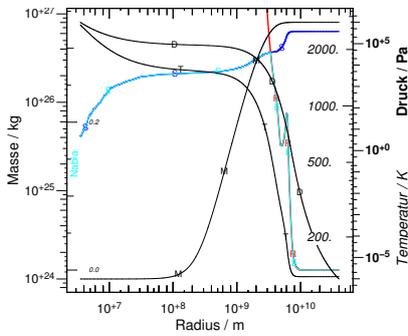
(b) [24,0]



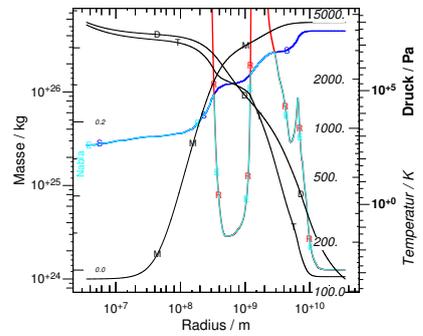
(c) [24,2]



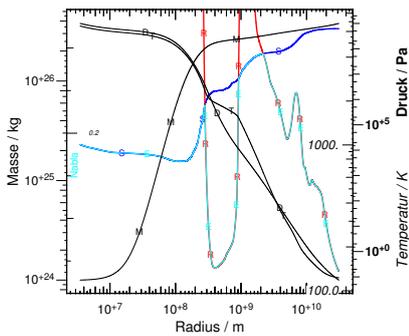
(d) [24,4]



(e) [24,6]

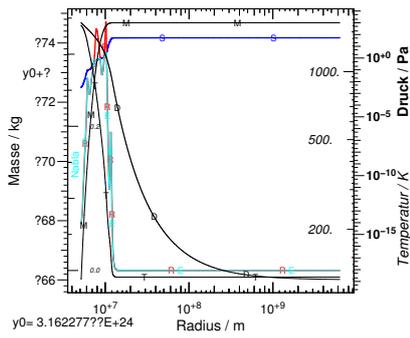


(f) [24,8]

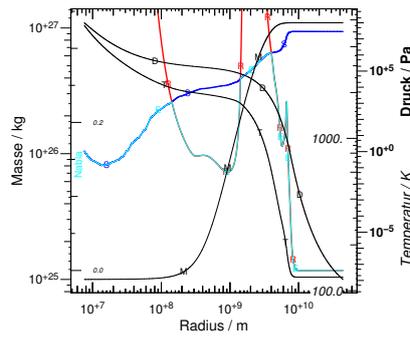


(g) [24,9]

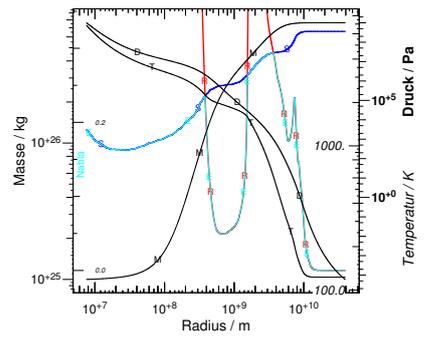
Abbildung A.8: Radiale Strukturen an Jupiters Position bei $\lg M_c \text{ kg}^{-1} = 24$. Es handelt sich um eine weitere Sequenz ansteigenden Kerndrucks P_c analog zu Abbildung A.6.



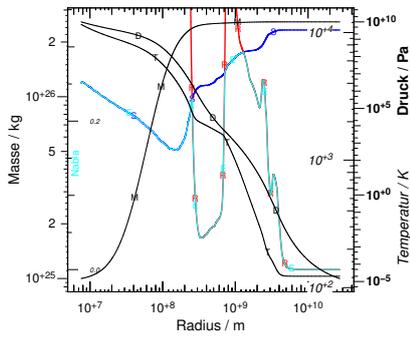
(a) [24,5,4]



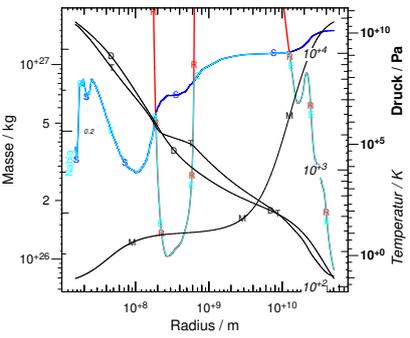
(b) [25,8]



(c) [25,9]



(d) [25,10]



(e) [25,9,10,5]

Abbildung A.9: Radiale Strukturen an Jupiters Position bei $\lg M_c \text{ kg}^{-1} \sim 25$. Es handelt sich um weitere Sequenzen ansteigenden Kerndrucks P_c analog zu Abbildung A.6.

A.4 Exkurs – Numerische Probleme und Stabilität

Sicherlich einer der augenfälligsten Unterschiede zwischen Abbildungen 6.4 (a) und (b) ist das „ausgefranste“ Aussehen von (b). Dies ist schlicht Ausdruck der Tatsache, dass in diesem Fall nicht für jede (M_c, P_c) -Kombination eine numerische Lösung ermittelt werden konnte. In diesem Fall ist in der Darstellung ein Loch zu sehen.¹ Grundsätzlich stellt sich die Frage, ob es dort keine Lösung gibt oder ob es nur zu schwierig ist, sie zu ermitteln. Es gibt drei numerisch problematische Bereiche:

1. Auf dem Grat, welcher Region IV einrahmt.² Hier liegt der Grund vermutlich an dem urplötzlich rapide anwachsenden Hill-Radius, welcher ohne das Einsetzen der Eigengravitation der Hülle unendlich groß würde.³ Prinzipiell haben die Gleichungen hier jedoch eine wohldefinierte Lösung.
2. Am Rand der Mannigfaltigkeit in den Regionen I und II. Dort, wo der Außendruck sehr klein wird. Bei sehr kleinen Außendrücken gibt es ebenfalls numerische Konvergenzprobleme, es gibt jedoch keinen Grund zu der Annahme, dass die Lösungen nicht existieren.
3. Im Grenzbereich von Region IV und II bei kleinen Kernmassen. Hier kann es sein, dass die Lösungen selbst im (M_c, P_c) -Raum nicht mehr eindeutig bestimmt sind. Auffällig ist weiterhin, dass links des ausgefransten Streifens (zu kleinen M_c) in Region IV die Auswärtsintegration erfolgreich ist, während rechts davon die Einwärtsintegration funktioniert.⁴ Offenbar sind in diesem Bereich der Temperaturgradient und die Leuchtkraft bereits groß genug, dass der Effekt der Konvergenz aller Lösungen als Funktion von P_x , zur „radiative zero solution“ (vgl. Kippenhahn u. Weigert 1990; Stevenson 1982) auftritt: Der Zustand im Inneren des Planeten ist quasi unabhängig von der äußeren Randbedingung; alle Lösungen konvergieren zur selben radialen Struktur. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass Auswärtsintegrationen extrem schwierig oder schlicht unmöglich sind.

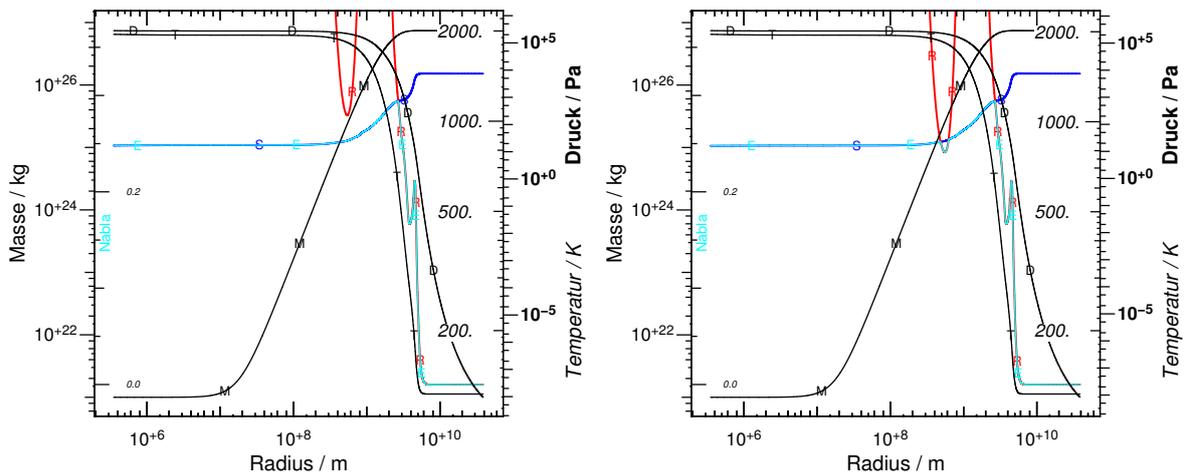
Interessant ist Bereich 3): Hier muss man sich fragen ob überhaupt Lösungen existieren und warum die Rechnungen so schwierig sind. Dabei hilft uns die Diskussion der kompakten Planeten in Region IV aus Abschnitt 6.1.1. In Abbildung 6.3 sehen wir, dass die numerischen Schwierigkeiten ziemlich genau am Knick beginnen. Als Ursache für den Knick hatten wir ja das Auftauchen einer radiativen Zone identifiziert. Dies illustriert Abbildung A.10. Sie zeigt zwei radiale Strukturen bei $\lg M_c/\text{kg} = 21$, die einen Gitterpunkt in $\lg P_c$ auseinander liegen und gerade den Beginn der inneren radiativen Zone markieren. Bei Abbildung A.10(b) wird der Wert von ∇_{rad} im Inneren erneut kleiner als der von ∇_s , es entsteht also eine weitere radiative Zone. Dadurch wird der von Stevenson als relevant erkannte Effekt, die sog. „radiative zero solution“, offenbar auch hier bedeutend. Eigentlich für nicht gravitierende, voll radiative Gaskugeln analytisch bewiesen, tritt dieser Effekt auch bei Objekten mit einer Kombination aus radiativen und konvektiven Zonen auf und besagt folgendes: Für solche Objekte ist die innere Struktur unabhängig von den äußeren Randbedingungen, insbesondere der Außentemperatur. Vergleicht man verschiedene Lösungen für verschiedene Außentemperaturen, konvergieren die radialen Strukturen im Inneren auf denselben Wert. Dieser eigentlich im T - P -Diagramm (statt hier T - r) studierte Effekt besagt im Umkehrschluss, dass sehr kleine Änderungen im Inneren

¹Hierbei ist anzumerken, dass das Fehlen eines Punktes im Gitter dazu führt, dass alle vier benachbarten Flächenelemente nicht existieren. Das Loch, welches durch eine fehlende Lösung erzeugt wird, ist also verhältnismäßig groß.

²(nur gut sichtbar in Abbildung 6.2: Löcher in der Flanke.)

³Die exakten Bedingungen für das Einsetzen der Eigengravitation hängen äußerst nicht-linear von den inneren Randbedingungen (v.a. vom Wert von P_c) ab und sind daher sehr schwer zu finden.

⁴Dies ist aus den Abbildungen nicht ersichtlich.



(a) Vollkonvektiver Kern, radiativer Außenbereich

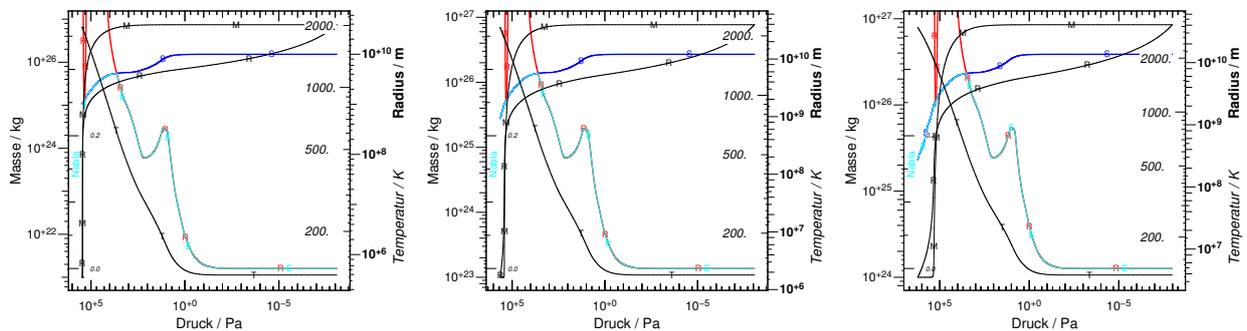
(b) Ausbildung einer zweiten radiativen Zone

Abbildung A.10: **Radiale Strukturen in Region IV beim Übergang zu einer inneren radiativen Zone.** Beide gezeigten radialen Strukturen haben eine Kernmasse von $\lg M_c/\text{kg} = 21$. Sie unterscheiden sich durch eine geringfügige Änderung im Kerndruck: $\lg P_c/\text{Pa} = 5,45$ (a) bzw. 5,46 (b). Man sieht hier sehr schön wie bei (b) eine radiative Zone ($\nabla_{\text{rad}}(\text{rot}) < \nabla_s(\text{blau})$) bei $r \approx 5 \cdot 10^8$ m) im Inneren entsteht und zwar an einer Stelle, die bei (a) noch konvektiv ist. **Erklärung der Graphik:** Jeder Plot enthält vier verschiedene Größen, die alle als Funktion vom Radius, r , dargestellt sind. Die drei schwarzen Linien zeigen die Gesamtmasse (Skala links außen, Symbol M), den Druck (Skala rechts außen, Symbol D) sowie die Temperatur (Skala rechts innen, Symbol T). Zusätzlich ist ∇ geplottet (Skala links innen). Um radiative und konvektive Bereiche unterscheiden zu können, sind sowohl ∇_s (blaue Kurve, Symbol S) als auch ∇_{rad} (rote Kurve, Symbol R) geplottet. Die zyan farbene Kurve (Symbol E) gibt den tatsächlichen Gradienten ∇_{eff} an und ist im Wesentlichen das Minimum der beiden anderen. Ist die rote Kurve unterhalb der blauen, so erfolgt der Energietransport durch Strahlung, andernfalls herrscht Konvektion.

zu extremen Änderungen der Außentemperatur führen. Ein Schießverfahren von innen ist daher sehr schwierig oder, wenn die numerische Genauigkeit nicht mehr ausreicht, unmöglich. Warum das sog. Einwärtsschießen ebenfalls versagt, ist nicht so leicht zu beantworten. Zunächst einmal wird bei der Einwärtsintegration ja neben L nach M_c und P_c geschossen im Gegensatz zu T_x bei der Auswärtsintegration. Die radialen Strukturen (Abbildung A.10) zeigen, dass sowohl Druck also auch die Masse über dem Kern konstant sind. Man muss also auch hier, ähnlich wie für die Temperatur bei der Auswärtsintegration, den Abknickpunkt aus dem steilen Druckgradienten sehr genau treffen, um korrekt in den Bereich konstanten Drucks (bzw. Masse) einzuschwenken. Dieser Abknickpunkt liegt auch noch genau in der entstehenden radiativen Zone. Es liegt vermutlich also eine ähnliche Konstellation vor wie sie bei der Einwärtsintegration zur „radiative zero solution“ führt.

Somit ist geklärt, warum die Rechnung plötzlich, am Knick in der Kerntemperatur, sehr schwierig wird. Mit zunehmendem Kerndruck wird auch die radiative Zone immer größer und die Rechnung konvergiert schließlich gar nicht mehr.

Es bleibt nun noch zu klären, warum die Rechnungen ab einer Kernmasse von $\approx \lg M_c/\text{kg} = 23$ wieder leichter werden und zumindest die Einwärtsintegration wieder funktioniert. Dafür betrachten wir drei weitere radiale Strukturen, die gerade noch eine innere radiative Zone haben, und zwar bei drei verschiedenen Kernmassen: $\lg M_c/\text{kg} = 21, 23, 24$. Zusätzlich betrachten wir die Zustandsgrößen hierzu nicht in Radius-Abhängigkeit, sondern als Funktion des Druckes. Das Ergebnis zeigt Abbildung A.11. Die genaue Betrachtung offenbart den entscheidenden Unterschied: zu größeren Kernmassen wandert die (störende) radiative Zone weiter nach außen. Je weiter innen diese Zone sitzt, desto schwieriger wird offenbar die Integration. Entscheidende Variable für die „Position“ ist hierbei der Druck. Im Radius sitzen die radiativen Zonen etwa an der selben Stelle.


(a) $\lg M_c = 21; \lg P_c = 5,46$

(b) $\lg M_c = 23; \lg P_c = 5,65$

(c) $\lg M_c = 24; \lg P_c = 6,23$

Abbildung A.11: Radiale Strukturen als Funktion des Druckes in Region IV beim Übergang zu einer inneren radiativen Zone für verschiedene Kernmassen. Die Darstellung ist genauso wie in Abbildung A.10, die Größen sind nun jedoch als Funktion des Druckes gezeigt. In dieser Darstellung sieht man sehr schön den Buckel in ∇_{rad} , er wird maßgeblich durch einen Buckel in den Opazitäten verursacht. An dieser Stelle sublimieren gerade die Eismäntel der Staubteilchen und es bleiben nur noch die Silikate übrig; die Opazität nimmt ab.

Anhang B

Der vollständige Corot-Survey – Corot Mass Spectra Mark 1 (v1.1) mit zugehörigen Mannigfaltigkeiten

B.1 Akkretionsrate $\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{a}^{-1}$

B.1.1 Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für
 $\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{a}^{-1}$

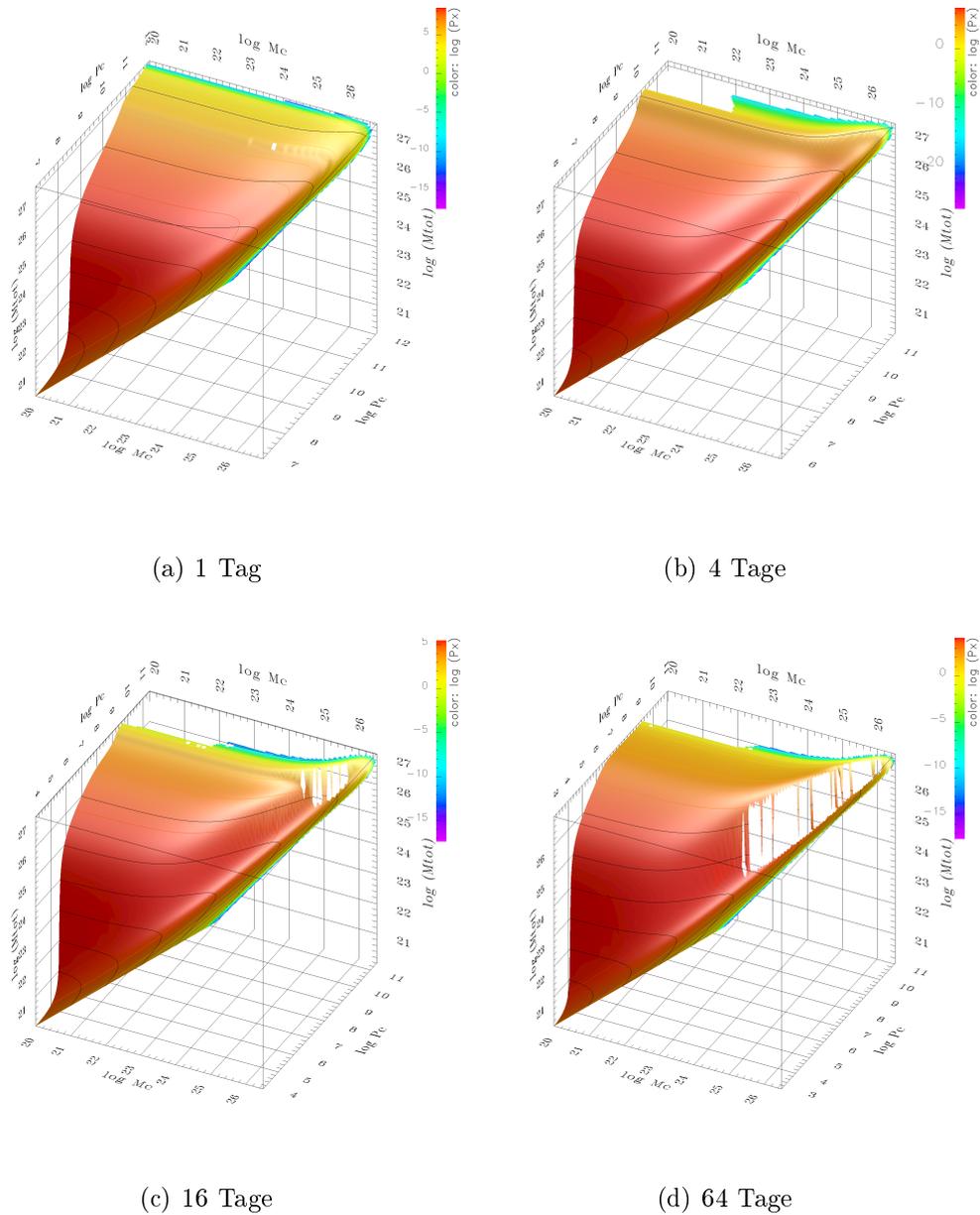
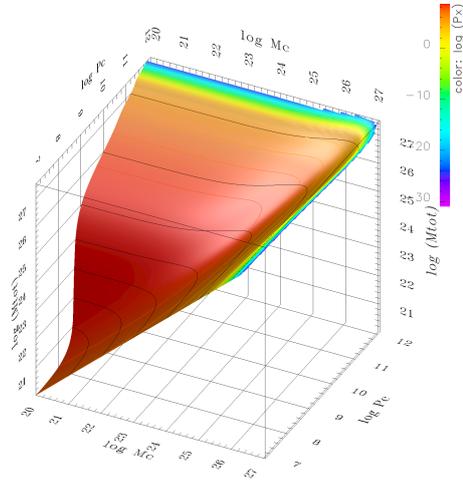
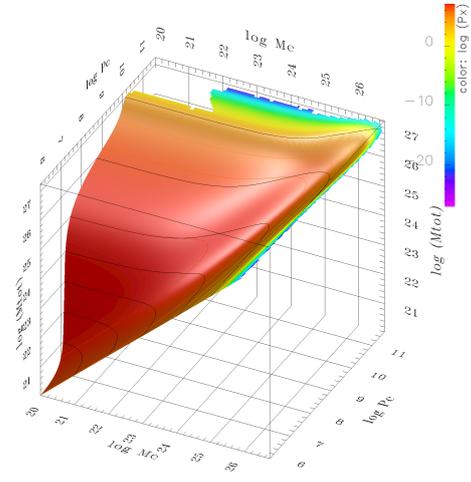


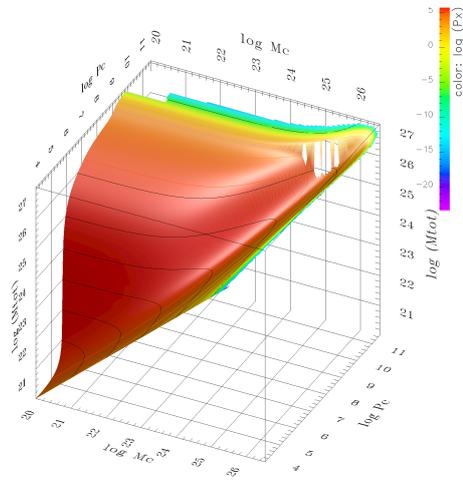
Abbildung B.1: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $0,4 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).



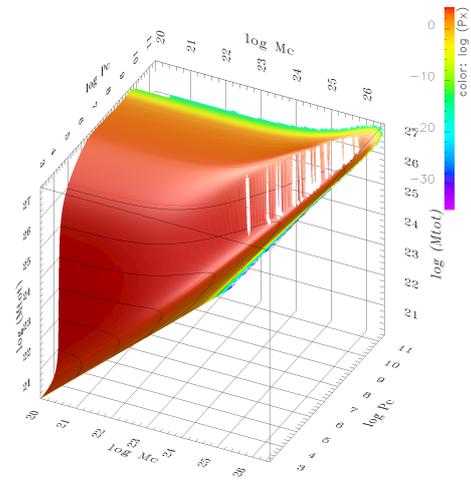
(a) 1 Tag



(b) 4 Tage



(c) 16 Tage



(d) 64 Tage

Abbildung B.2: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $0,8 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

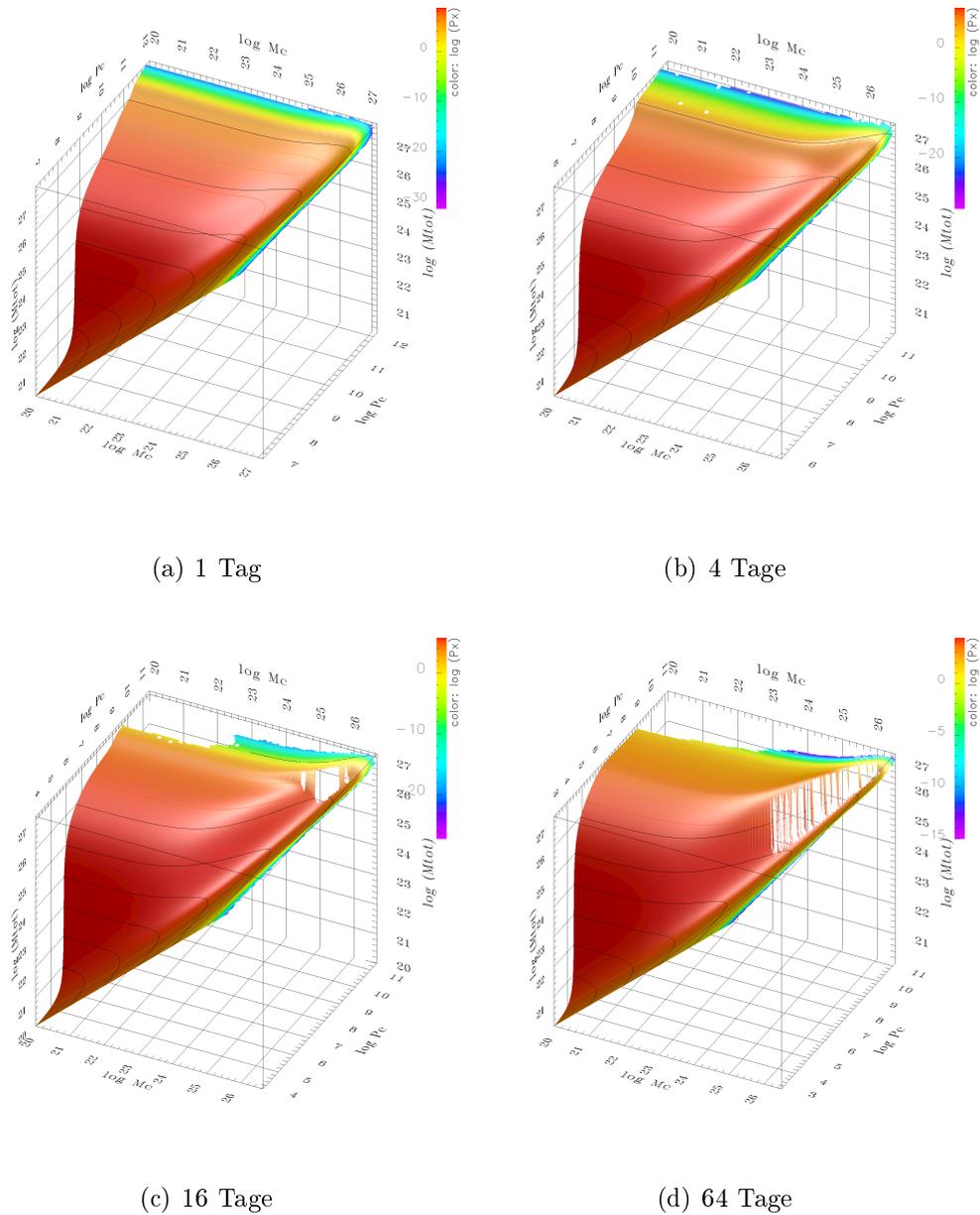
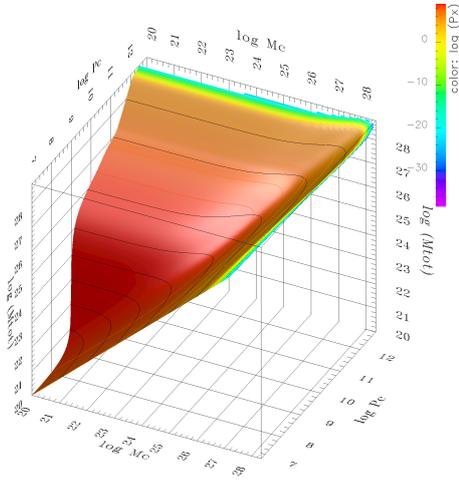
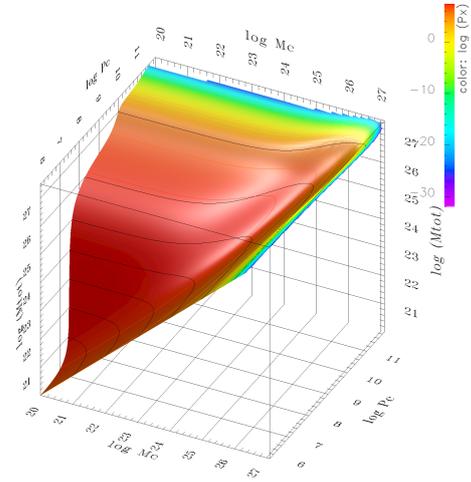


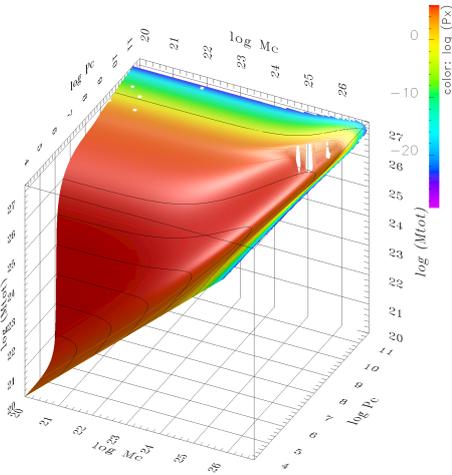
Abbildung B.3: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $1 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).



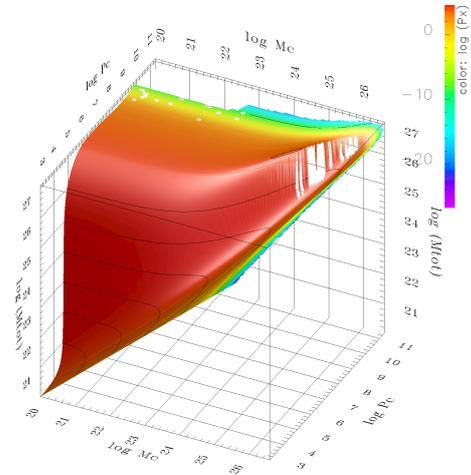
(a) 1 Tag



(b) 4 Tage



(c) 16 Tage



(d) 64 Tage

Abbildung B.4: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $2 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

B.2 Akkretionsrate $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$

B.2.1 Massenspektren für $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$

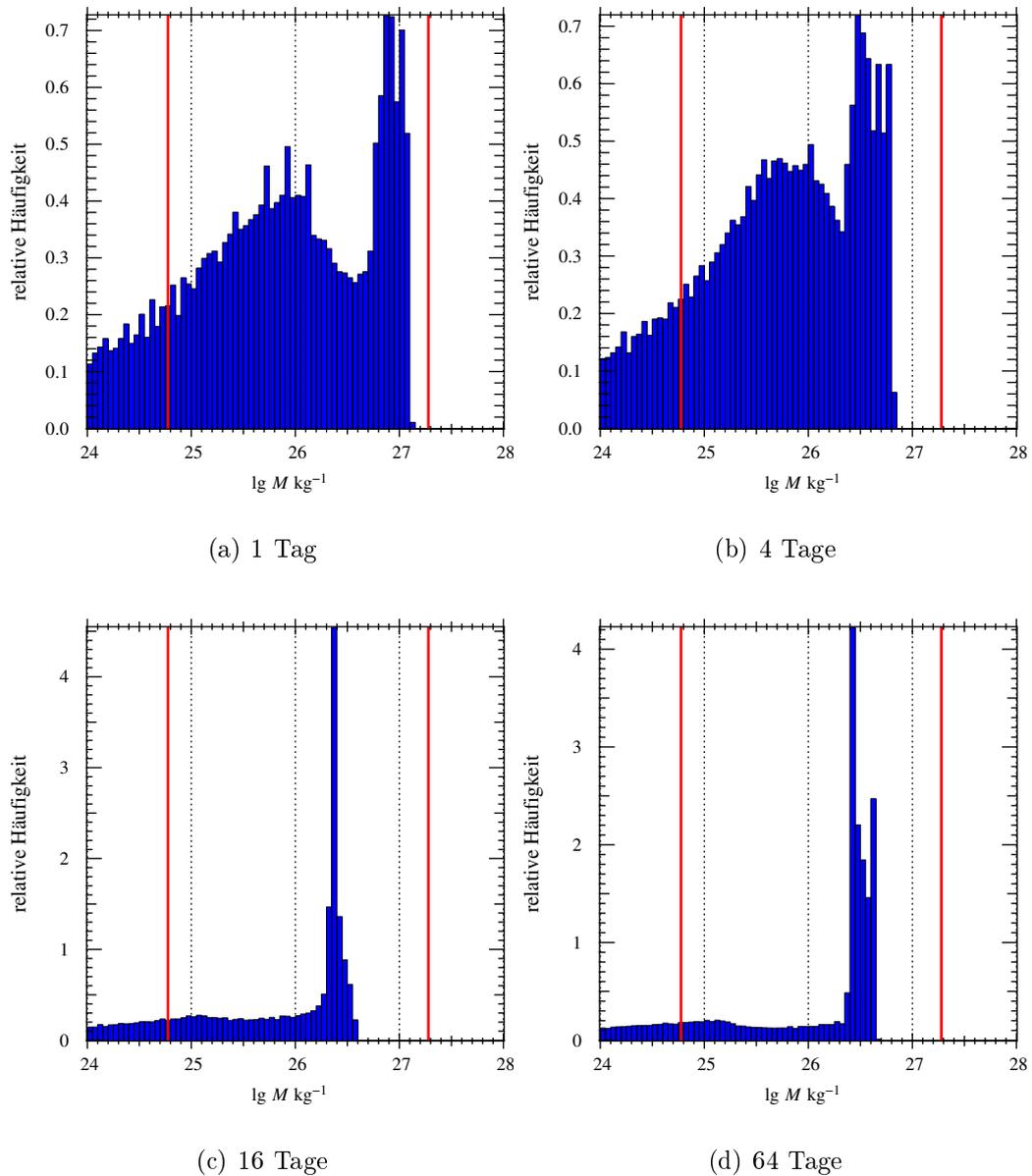


Abbildung B.5: Massenspektren für einen $0,4 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

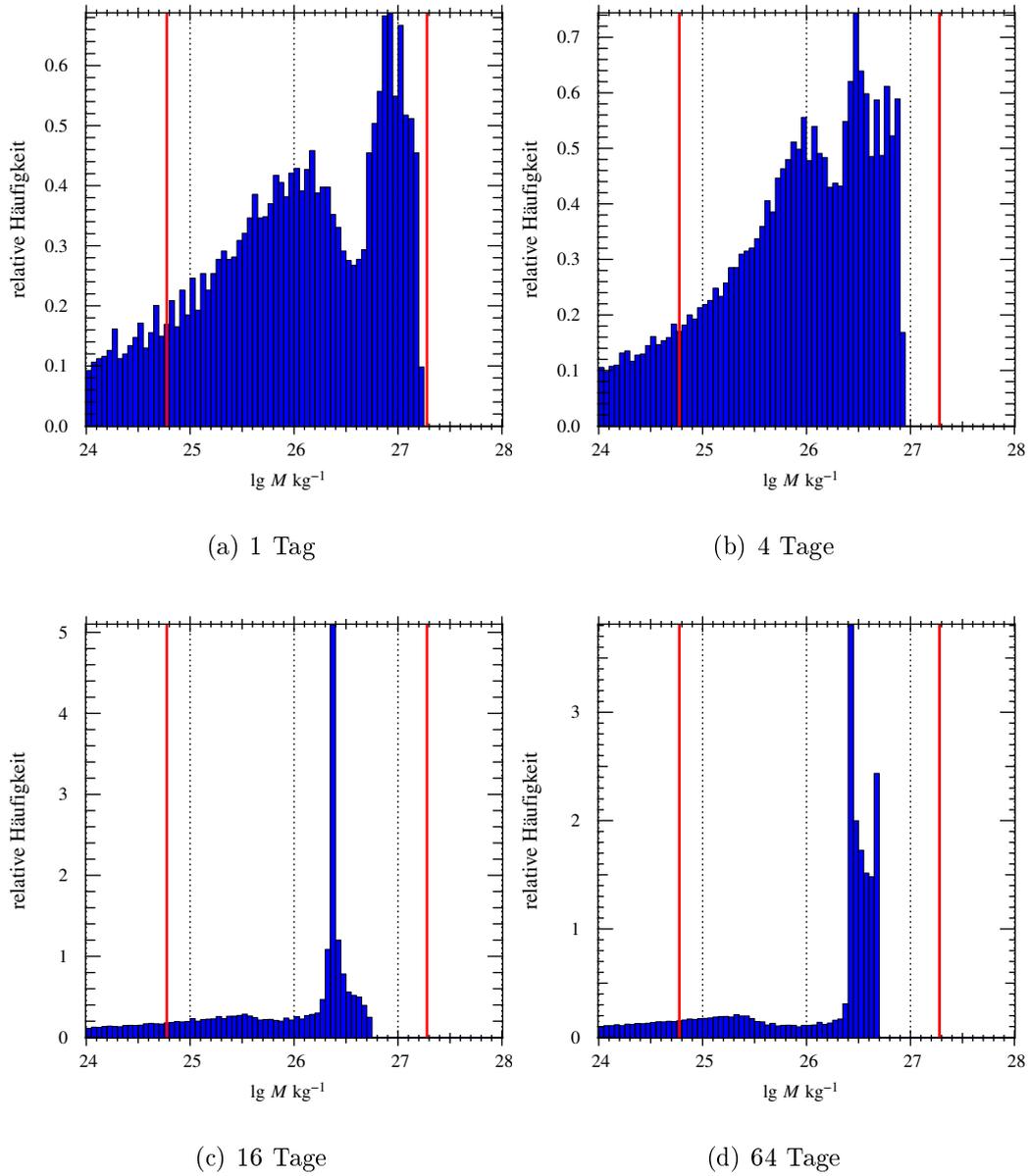


Abbildung B.6: Massenspektren für einen $0,8 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$).

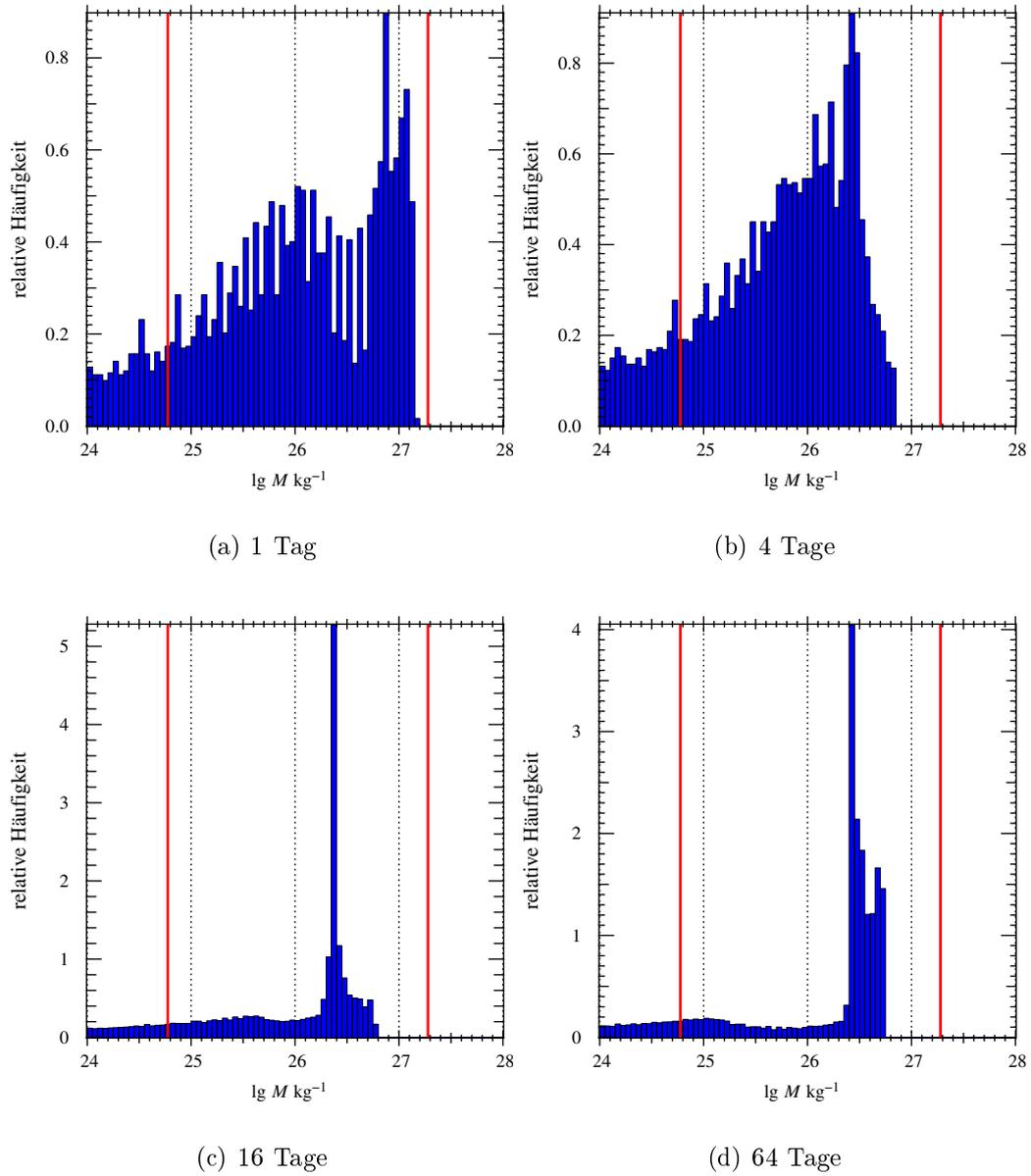


Abbildung B.7: Massenspektren für einen $1 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

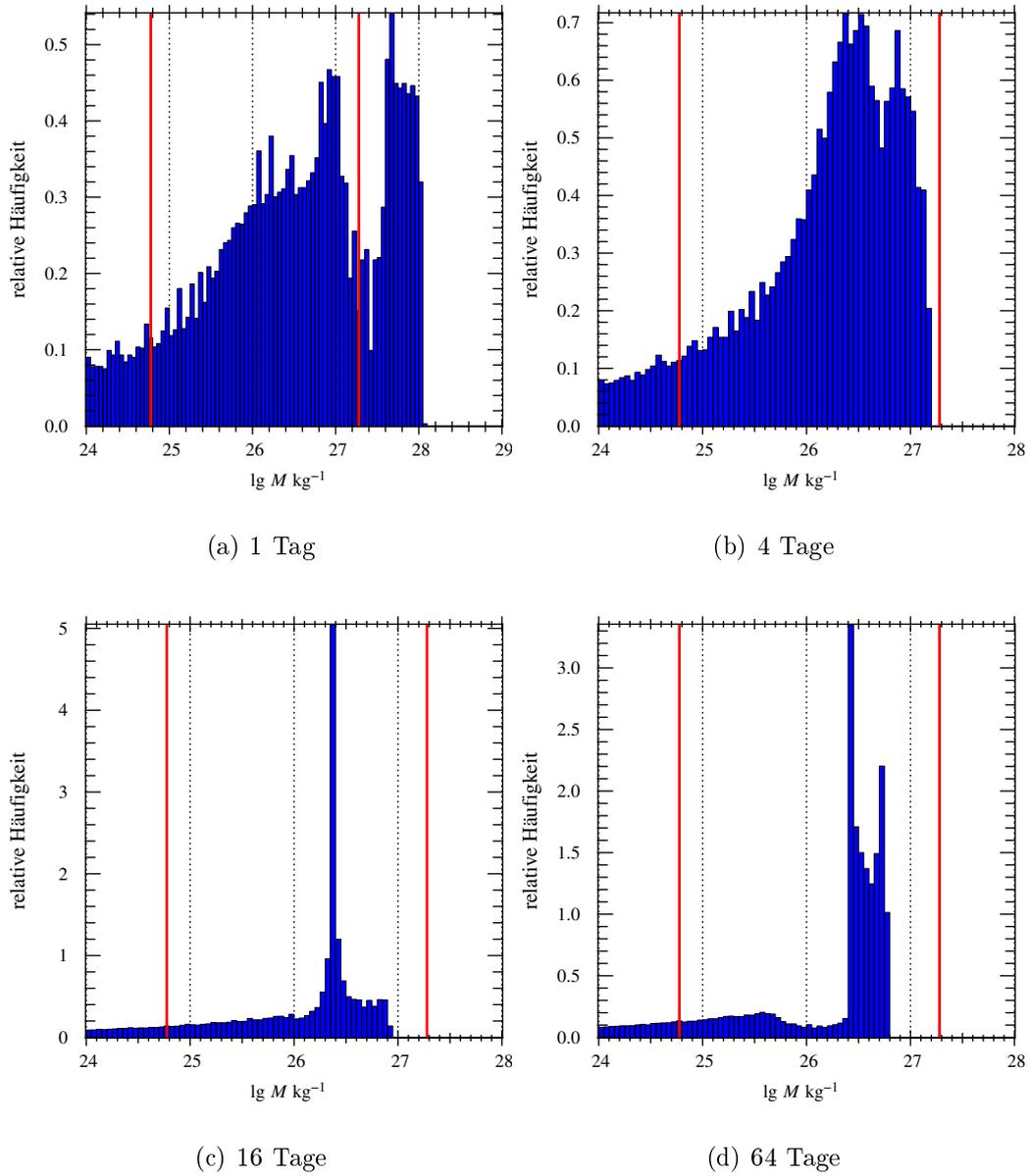
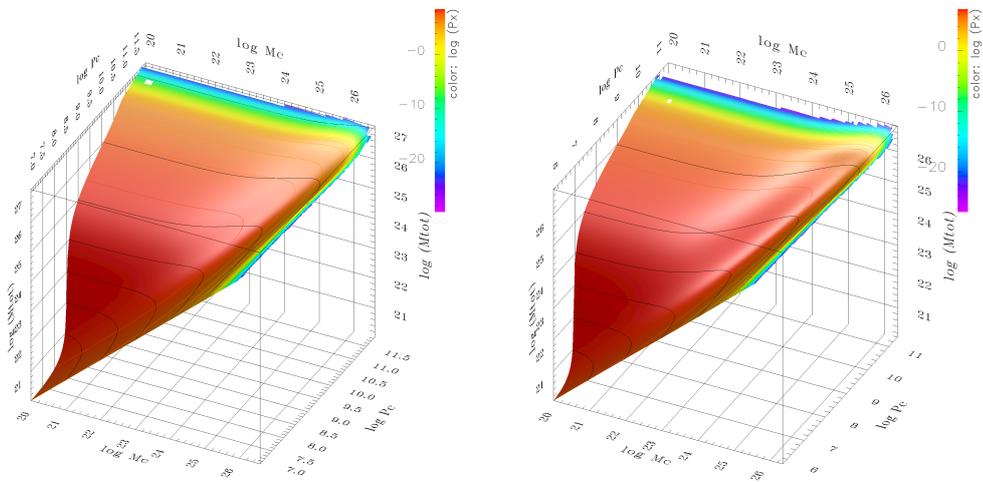


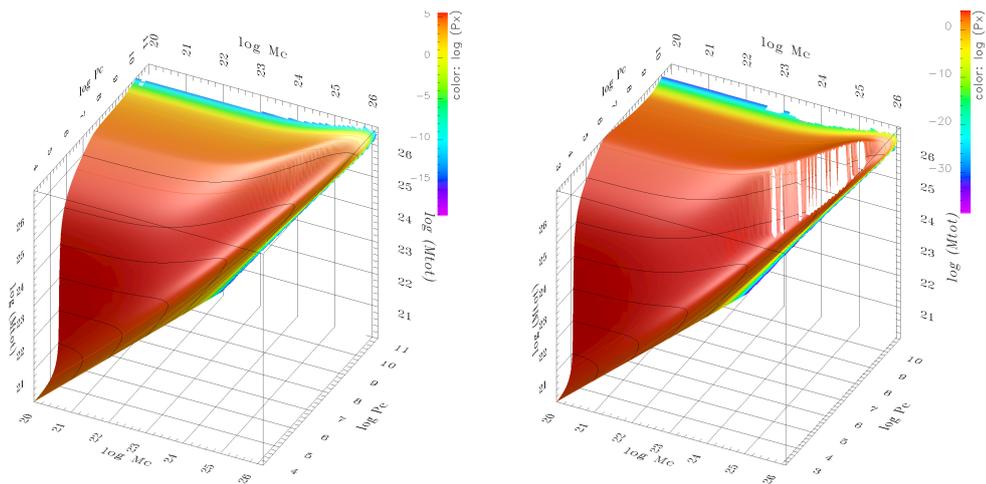
Abbildung B.8: Massenspektren für einen $2 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$).

B.2.2 Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$



(a) 1 Tag

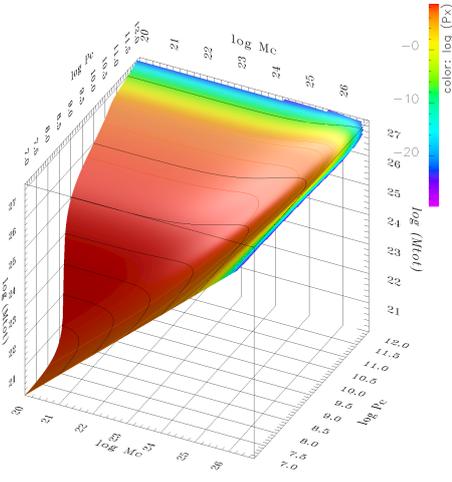
(b) 4 Tage



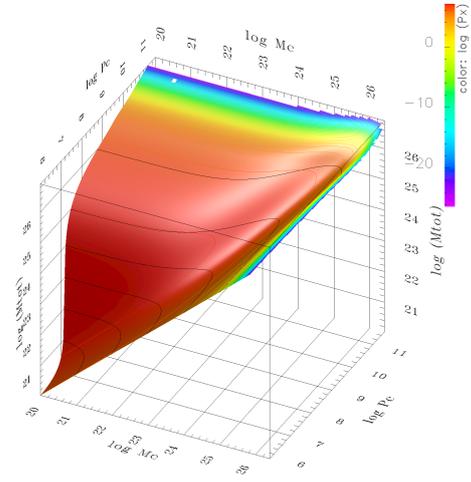
(c) 16 Tage

(d) 64 Tage

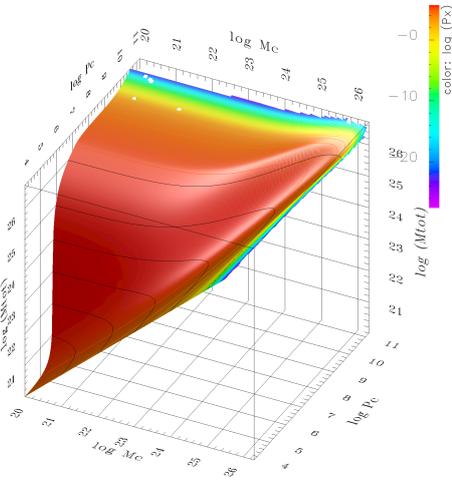
Abbildung B.9: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $0,4 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).



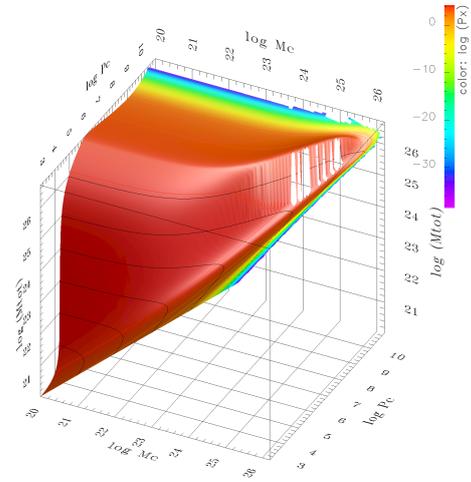
(a) 1 Tag



(b) 4 Tage



(c) 16 Tage



(d) 64 Tage

Abbildung B.10: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $0,8 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

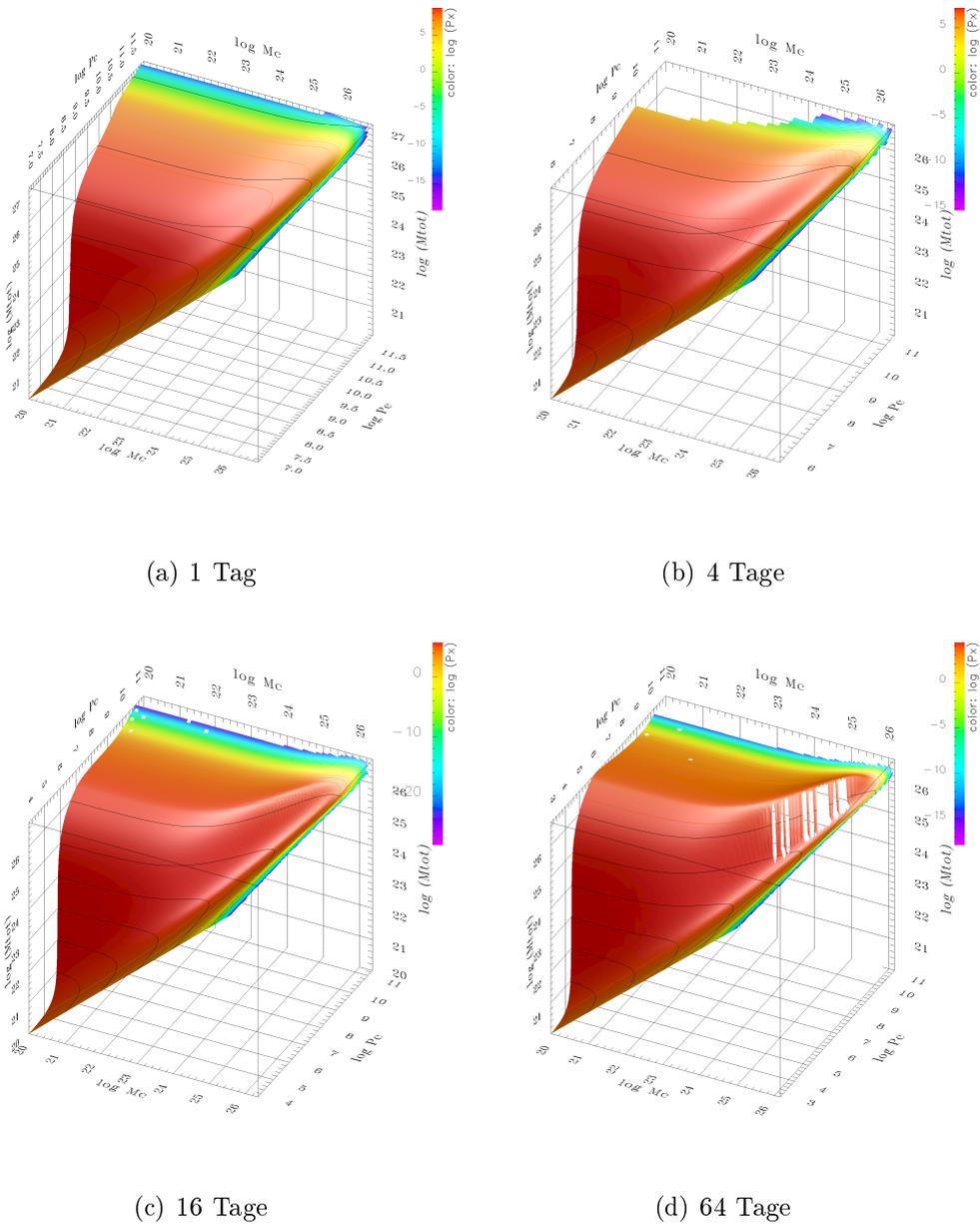
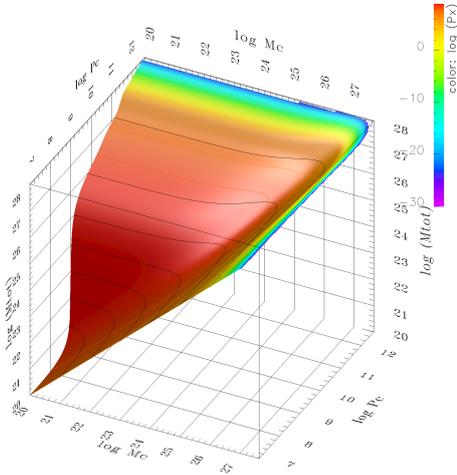
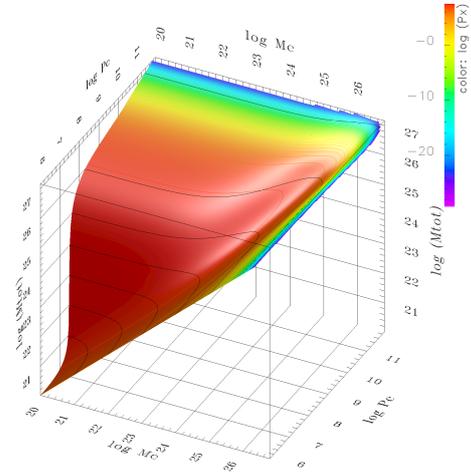


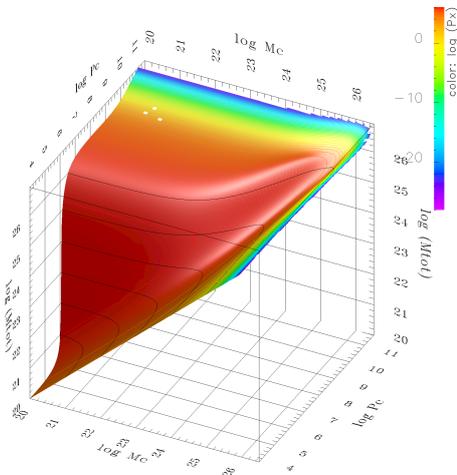
Abbildung B.11: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $1 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).



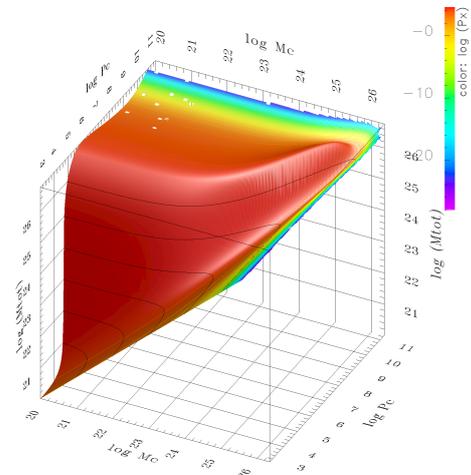
(a) 1 Tag



(b) 4 Tage



(c) 16 Tage



(d) 64 Tage

Abbildung B.12: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $2 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

B.3 Akkretionsrate $\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$

B.3.1 Massenspektren für $\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$

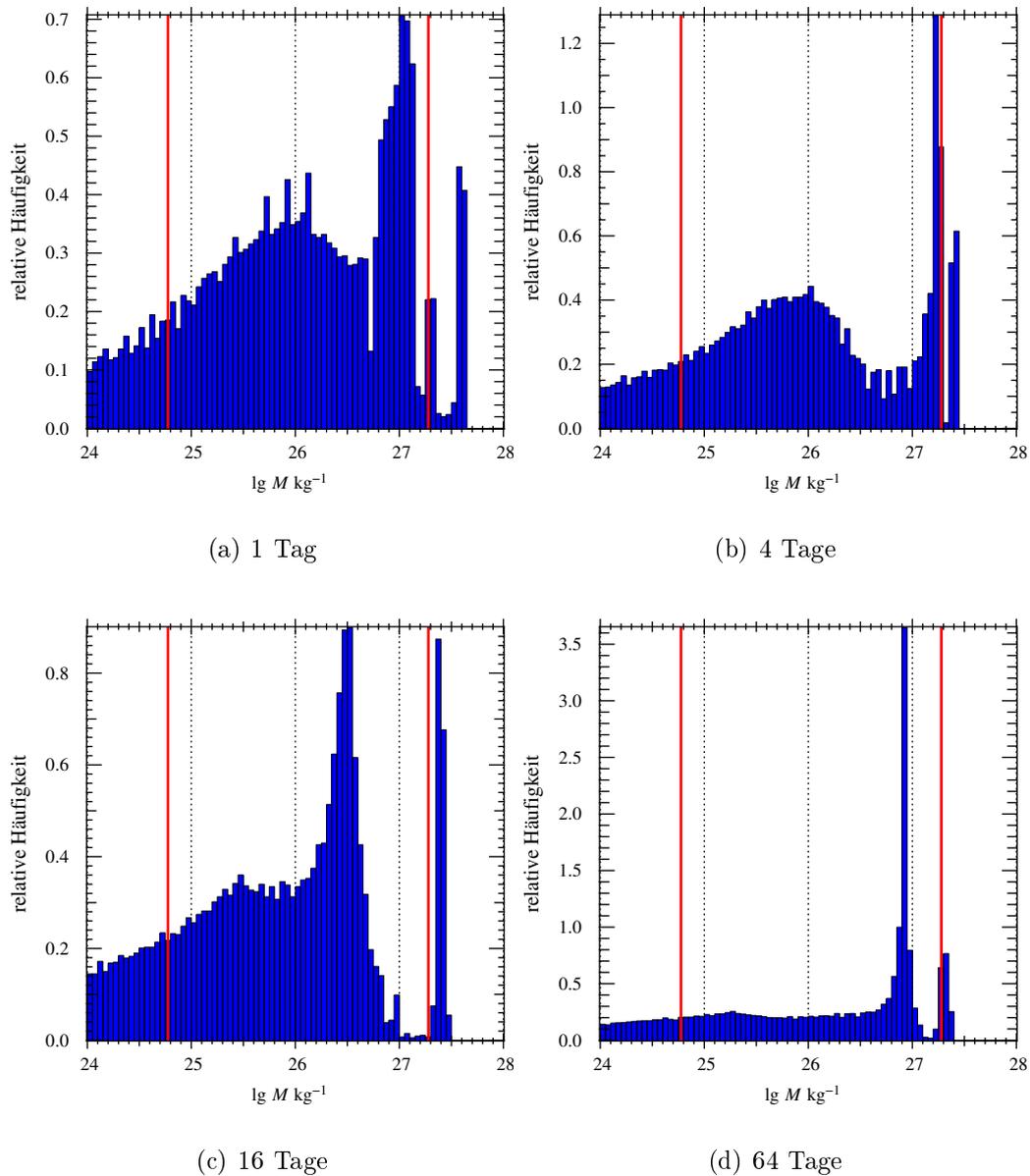


Abbildung B.13: Massenspektren für einen $0,4 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

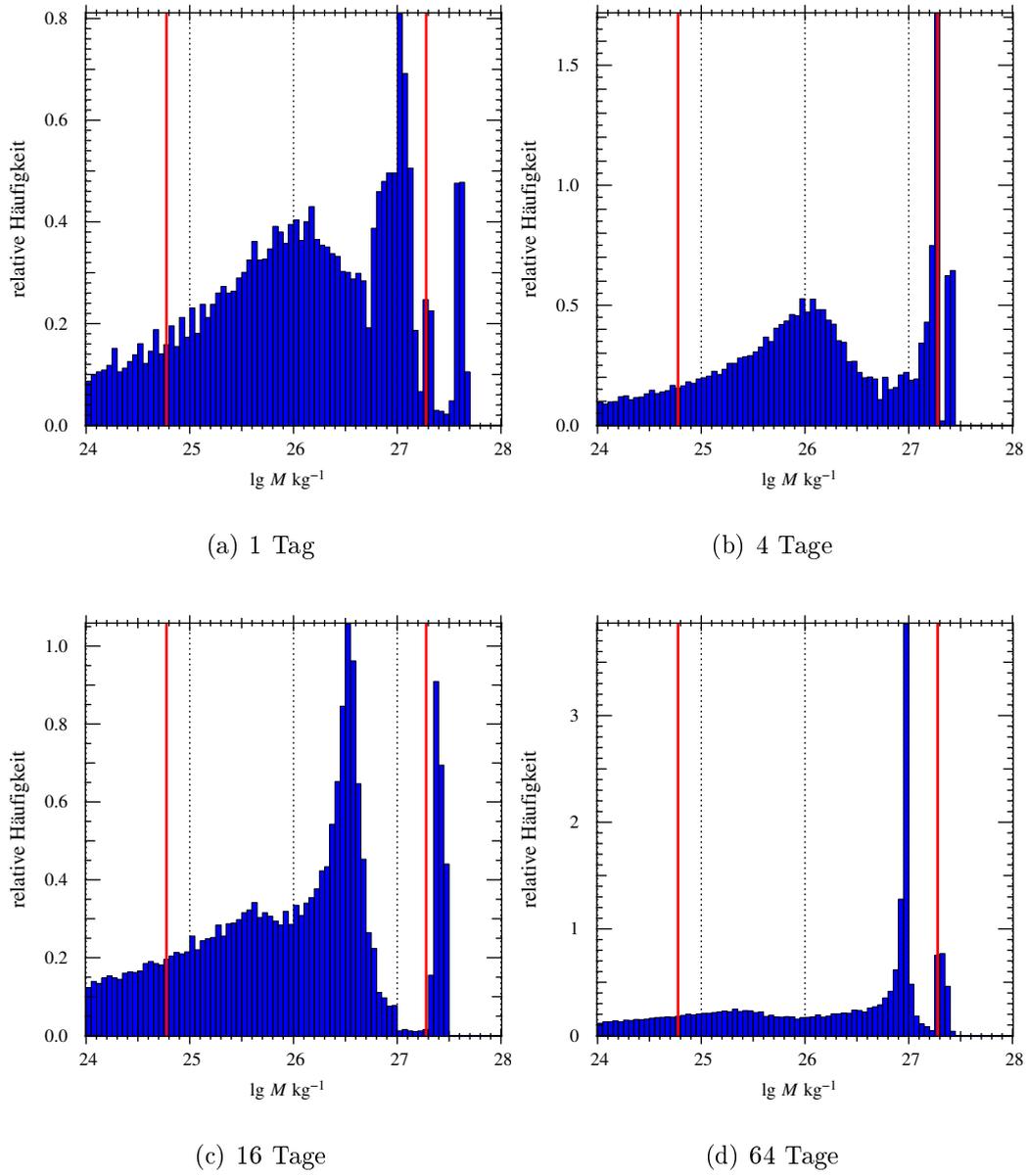


Abbildung B.14: Massenspektren für einen $0,8 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{a}^{-1}$).

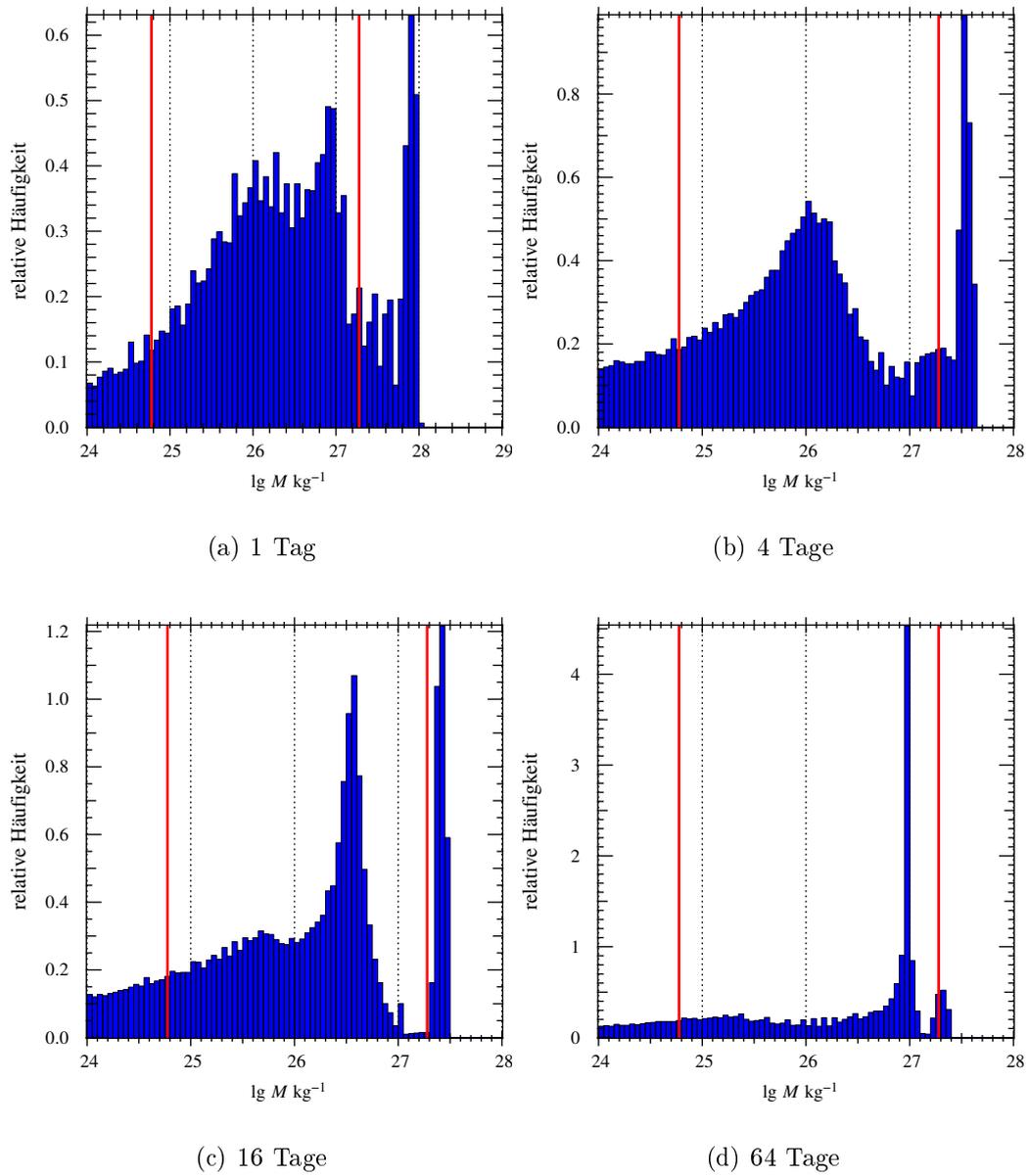


Abbildung B.15: Massenspektren für einen $1 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_{\oplus} \text{ a}^{-1}$).

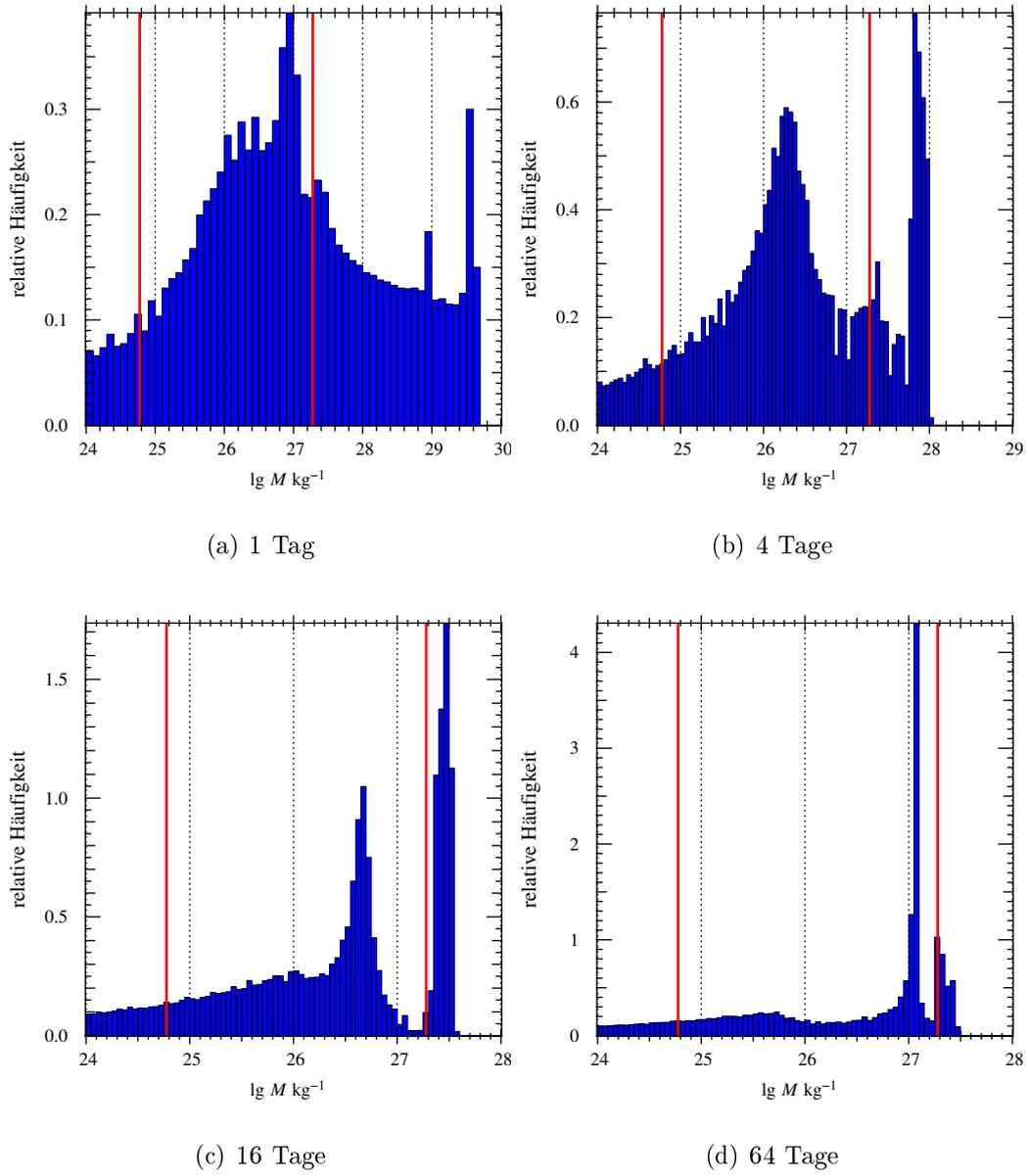


Abbildung B.16: Massenspektren für einen $2 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

B.3.2 Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für $\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{a}^{-1}$

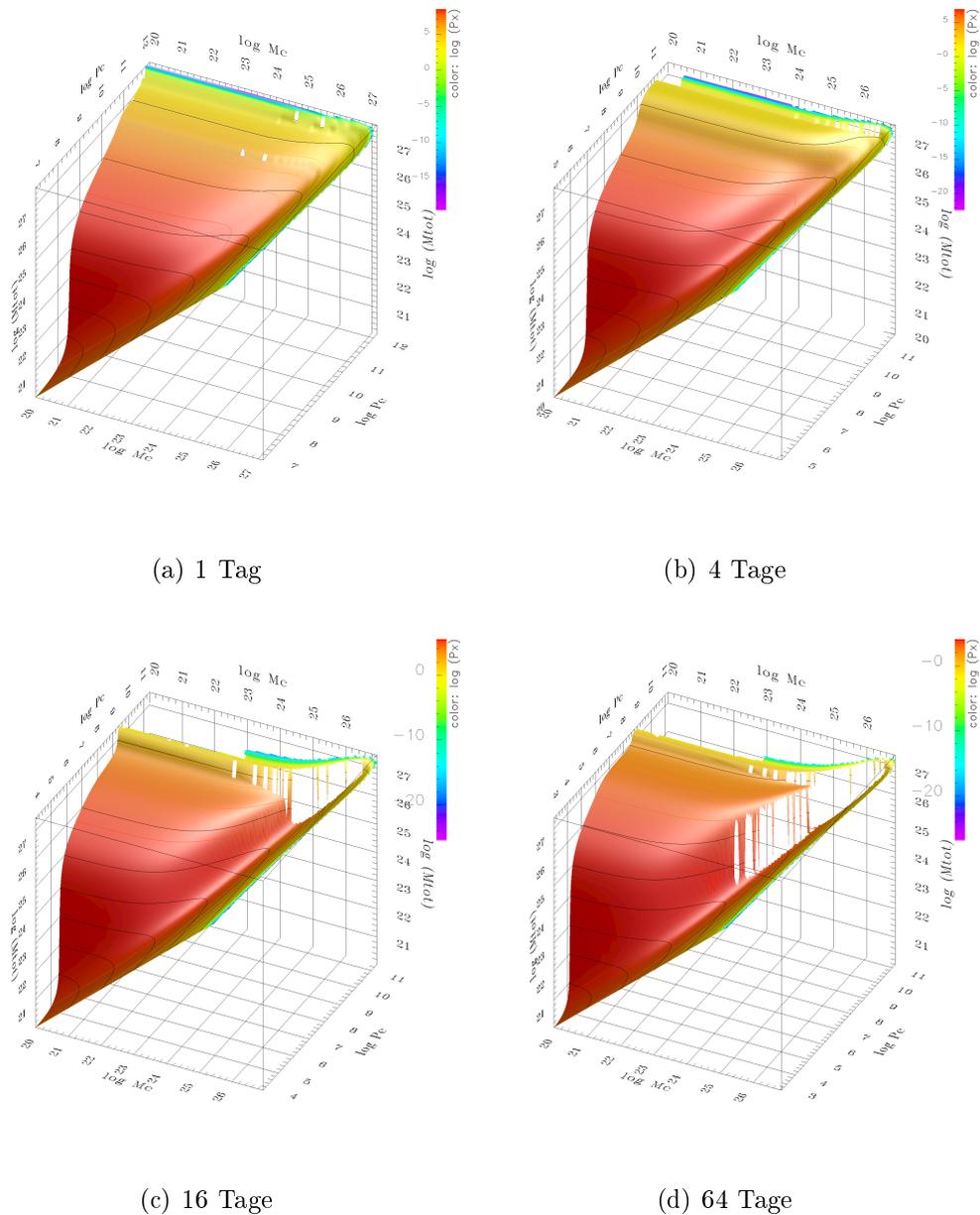
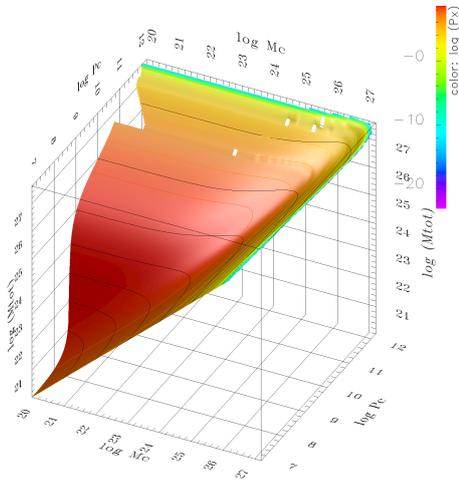
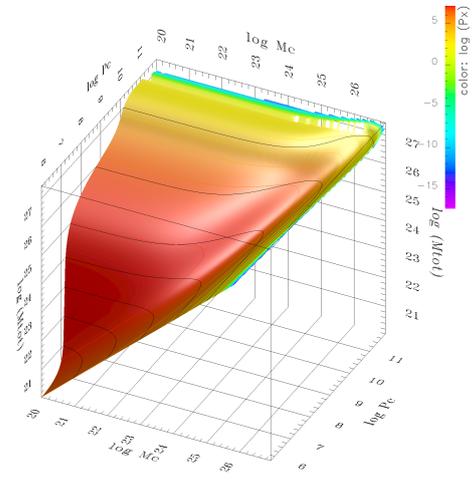


Abbildung B.17: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $0,4 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{a}^{-1}$).

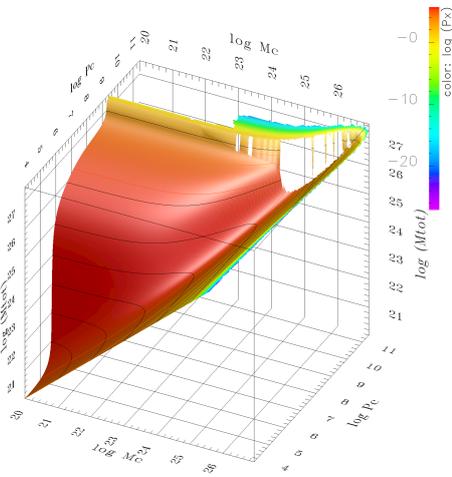
B.4 Peak-Positionen tabellarisch



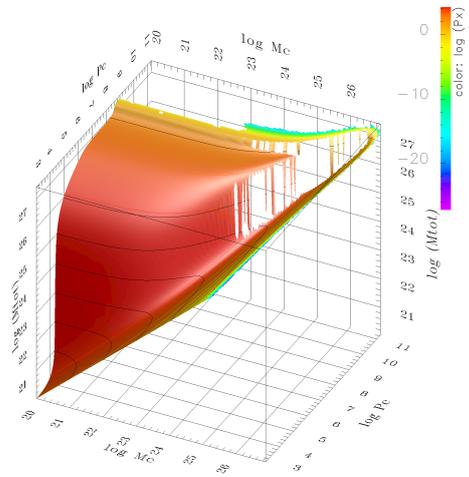
(a) 1 Tag



(b) 4 Tage



(c) 16 Tage



(d) 64 Tage

Abbildung B.18: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $0,8 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

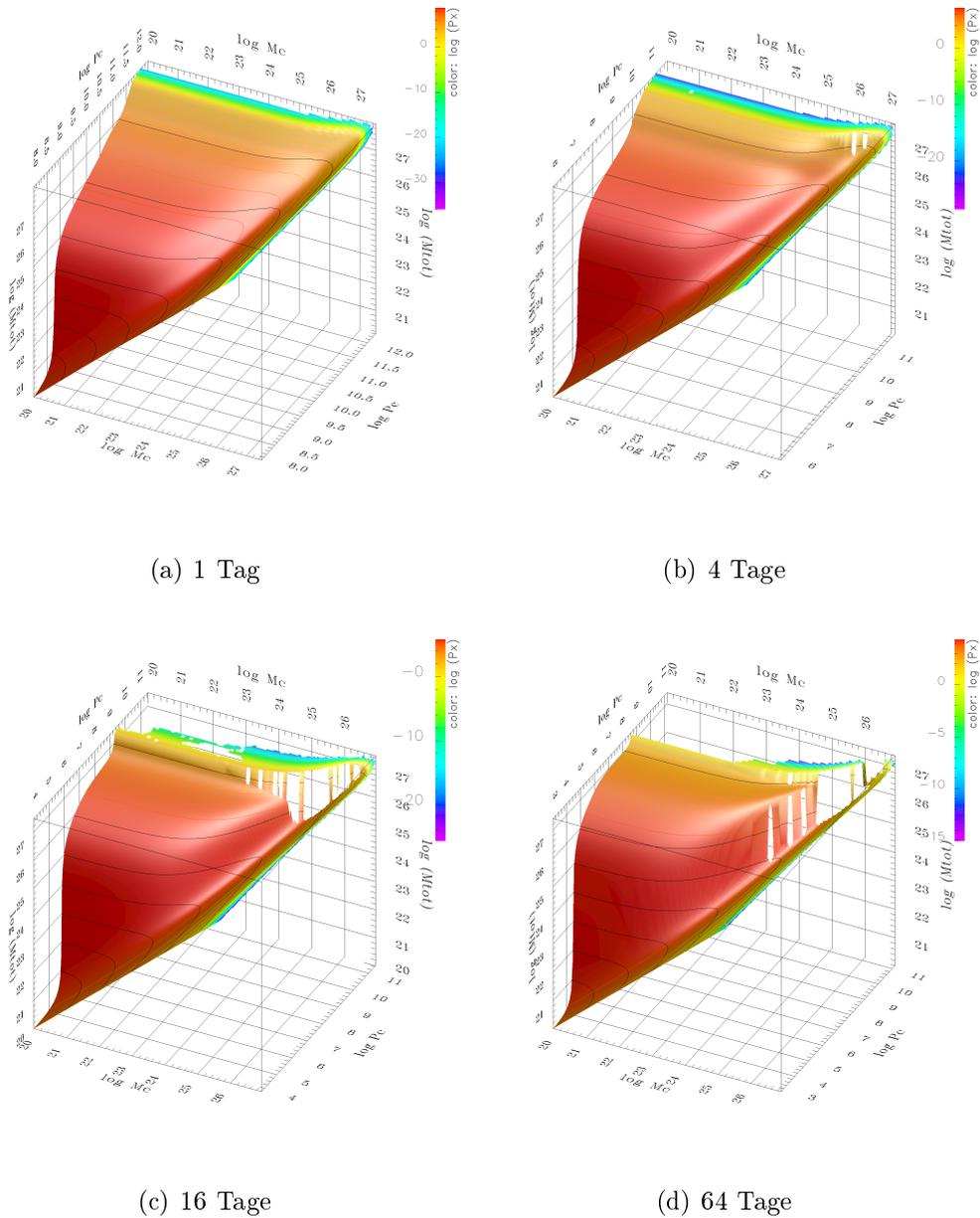
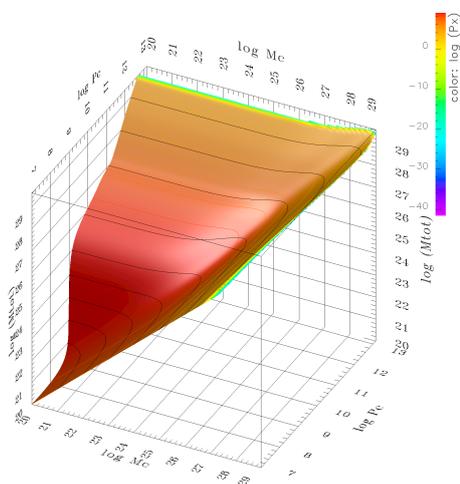
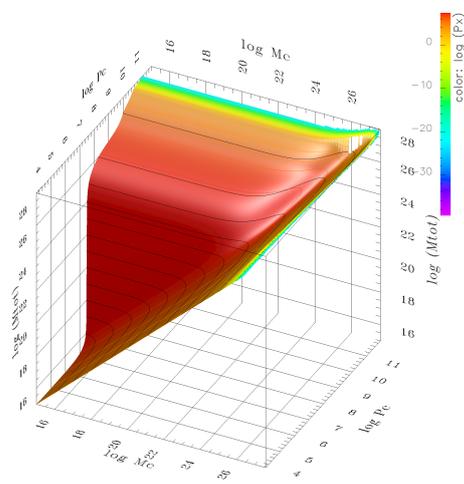


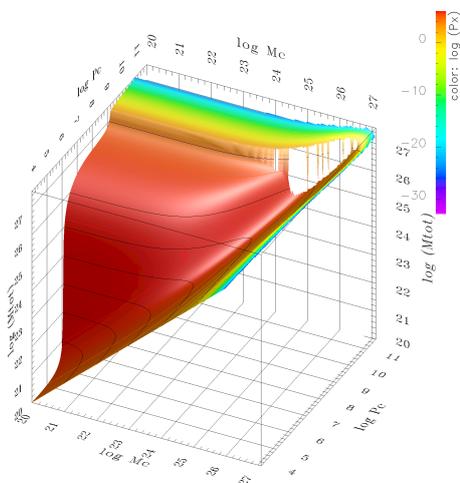
Abbildung B.19: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $1 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).



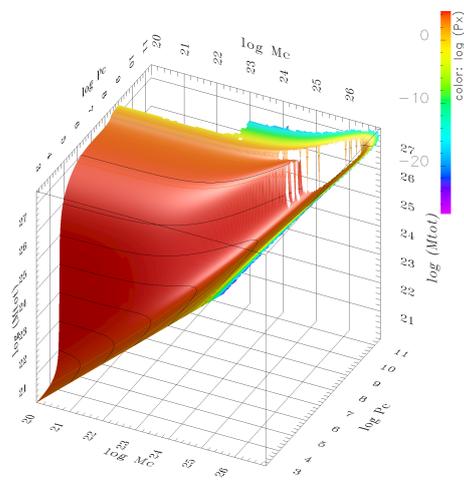
(a) 1 Tag



(b) 4 Tage



(c) 16 Tage



(d) 64 Tage

Abbildung B.20: Mannigfaltigkeiten in Gesamtmassendarstellung für einen $2 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$).

Tabelle B.1: Übersicht über die Peak-Positionen bei $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$.

Position	#	Bereich	Modus	Median	Anzahl	P
$-6[0,4]^1$	1	24,00-26,60	25,925 (0,05)	25,58	6927	0,74
	2	26,60-28,00	26,875 (0,05)	26,89	2435	0,26
$-6[0,4]^4$	1	24,00-26,30	26,025 (0,05)	25,49	7026	0,71
	2	26,30-28,00	26,475 (0,05)	26,56	2854	0,29
$-6[0,4]^{16}$	1	24,00-26,00	25,075 (0,05)	25,07	4810	0,44
	2	26,00-28,00	26,375 (0,05)	26,37	6077	0,56
	3	26,00-28,00	26,375 (0,01)	26,37	6077	0,56
$-6[0,4]^{64}$	1	24,00-25,60	25,125 (0,05)	24,82	3404	0,26
	2	25,60-28,00	26,425 (0,05)	26,46	9852	0,74
	3	26,30-26,70	26,405 (0,01)	26,48	8528	0,64
$-6[0,8]^1$	1	24,00-26,60	26,175 (0,05)	25,68	6986	0,69
	2	26,60-28,00	26,925 (0,05)	26,93	3178	0,31
$-6[0,8]^4$	1	24,00-26,30	25,975 (0,05)	25,60	7000	0,65
	2	26,30-28,00	26,475 (0,05)	26,60	3796	0,35
$-6[0,8]^{16}$	1	24,00-25,90	25,525 (0,05)	25,11	4600	0,37
	2	25,90-28,00	26,375 (0,05)	26,38	7895	0,63
	3	25,90-26,80	26,375 (0,01)	26,38	7895	0,63
$-6[0,8]^{64}$	1	24,00-25,90	25,325 (0,05)	25,00	4009	0,28
	2	25,90-28,00	26,425 (0,05)	26,50	10377	0,72
	3	25,90-28,00	26,405 (0,01)	26,50	10377	0,72
$-6[1,0]^1$	1	24,00-26,60	26,025 (0,05)	25,69	3369	0,70
	2	26,60-28,00	26,875 (0,05)	26,90	1472	0,30
$-6[1,0]^4$	1	24,00-26,25	26,225 (0,05)	25,57	3216	0,73
	2	26,25-28,00	26,425 (0,05)	26,44	1181	0,27
$-6[1,0]^{16}$	1	24,00-25,90	25,625 (0,05)	25,15	4553	0,35
	2	25,90-27,00	26,375 (0,05)	26,38	8373	0,65
	3	25,90-27,00	26,375 (0,01)	26,38	8373	0,65
$-6[1,0]^{64}$	1	24,00-25,80	25,025 (0,05)	24,85	3225	0,24
	2	25,80-28,00	26,425 (0,05)	26,49	10020	0,76
	3	25,80-28,00	26,405 (0,01)	26,49	10020	0,76
$-6[2,0]^1$	1	24,00-27,40	26,925 (0,05)	26,23	10098	0,76
	2	27,40-29,00	27,675 (0,05)	27,77	3212	0,24
$-6[2,0]^4$	1	24,00-26,70	26,375 (0,05)	26,10	9606	0,75
	2	26,70-28,00	26,875 (0,05)	26,92	3244	0,25
	3	24,00-28,00	26,375 (0,05)	26,32	12850	1,00
$-6[2,0]^{16}$	1	24,00-28,00	26,375 (0,05)	26,37	14461	1,00
	2	24,00-28,00	26,375 (0,01)	26,37	14461	1,00
$-6[2,0]^{64}$	1	24,00-26,10	25,575 (0,05)	25,15	4250	0,27
	2	26,10-28,00	26,425 (0,05)	26,55	11273	0,73
	3	26,10-28,00	26,4025 (0,005)	26,55	11273	0,73

Tabelle B.2: Übersicht über die Peak-Positionen bei $\dot{M} = 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$.

Position	#	Bereich	Modus	Median	Anzahl	P
$-4[0,4]^1$	1	24,00-26,70	25,925 (0,05)	25,62	7282	0,71
	2	26,70-28,00	27,025 (0,05)	27,02	2919	0,29
$-4[0,4]^4$	1	24,00-26,75	26,025 (0,05)	25,62	8236	0,83
	2	26,75-28,00	27,075 (0,05)	27,07	1675	0,17
$-4[0,4]^{16}$	1	24,00-25,90	25,875 (0,05)	25,10	4919	0,46
	2	25,90-26,80	26,525 (0,05)	26,42	4332	0,40
	3	26,80-28,00	26,925 (0,05)	26,93	1486	0,14
$-4[0,4]^{64}$	1	26,60-28,00	26,875 (0,05)	26,88	6243	0,49
	2	26,60-28,00	26,9025 (0,005)	26,88	6243	0,49
	3	26,60-28,00	26,875 (0,01)	26,88	6243	0,49
$-4[0,8]^1$	1	24,00-26,60	26,175 (0,05)	25,69	7084	0,67
	2	26,60-27,20	26,925 (0,05)	26,89	2052	0,19
	3	27,20-28,00	27,325 (0,05)	27,39	1440	0,14
$-4[0,8]^4$	1	24,00-26,80	25,975 (0,05)	25,75	8338	0,80
	2	26,80-28,00	27,075 (0,05)	27,08	2135	0,20
$-4[0,8]^{16}$	1	24,00-25,70	25,375 (0,05)	25,00	3999	0,34
	2	25,70-26,80	26,525 (0,05)	26,43	5340	0,45
	3	26,80-28,00	26,925 (0,05)	26,95	2400	0,20
$-4[0,8]^{64}$	1	24,00-26,00	25,325 (0,05)	25,08	4375	0,32
	2	26,00-28,00	26,925 (0,05)	26,89	9142	0,68
	3	26,00-28,00	26,9245 (0,001)	26,89	9142	0,68
	4	26,00-28,00	26,9225 (0,005)	26,89	9142	0,68
$-4[1,0]^1$	1	24,00-26,70	26,075 (0,05)	25,76	7413	0,68
	2	26,70-27,20	26,925 (0,05)	26,93	1798	0,17
	3	27,20-28,00	27,425 (0,05)	27,43	1682	0,15
$-4[1,0]^4$	1	26,80-28,00	27,075 (0,05)	27,10	3180	0,28
	2	24,00-26,80	26,025 (0,05)	25,80	8356	0,72
$-4[1,0]^{16}$	1	24,00-25,90	25,525 (0,05)	25,15	4606	0,39
	2	25,90-26,80	26,575 (0,05)	26,48	4903	0,42
	3	26,80-28,00	26,925 (0,05)	26,94	2242	0,19
$-4[1,0]^{64}$	1	24,00-26,00	25,125 (0,05)	25,00	9442	0,32
	2	26,00-28,00	26,925 (0,05)	26,89	20394	0,68
	3	26,80-27,10	26,8705 (0,001)	26,90	15818	0,53
$-4[2,0]^1$	1	24,00-28,40	26,925 (0,05)	26,50	12309	0,88
	2	28,00-29,00	28,725 (0,05)	28,64	2446	0,17
	3	28,50-29,00	28,725 (0,01)	28,70	1553	0,11
$-4[2,0]^4$	1	24,00-26,90	26,275 (0,05)	26,00	8596	0,67
	2	26,90-28,00	27,225 (0,05)	27,24	4172	0,33
$-4[2,0]^{16}$	1	24,00-26,15	25,975 (0,05)	25,35	5150	0,35
	2	26,15-26,75	26,675 (0,05)	26,59	4086	0,28
	3	26,75-28,00	27,125 (0,05)	27,01	5437	0,37
$-4[2,0]^{64}$	1	24,00-26,10	25,575 (0,05)	25,19	4311	0,30
	2	26,10-28,00	26,925 (0,05)	26,92	9990	0,70
	3	26,70-27,20	26,875 (0,01)	26,93	8919	0,62
	4	26,70-27,20	26,9605 (0,001)	26,93	8919	0,62

Tabelle B.3: Übersicht über die Peak-Positionen bei $\dot{M} = 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$.

Position	#	Bereich	Modus	Median	Anzahl	P
$-2[0,4]^1$	1	24,00-26,70	26,125 (0,05)	25,66	7528	0,69
	2	26,70-27,20	27,025 (0,05)	26,97	2571	0,24
	3	27,20-27,40	27,325 (0,05)	27,29	286	0,03
	4	27,40-28,00	27,575 (0,05)	27,59	514	0,05
$-2[0,4]^4$	1	24,00-26,70	26,025 (0,05)	25,59	9162	0,73
	2	26,70-27,30	27,225 (0,05)	27,21	2675	0,21
	3	27,30-28,00	27,425 (0,05)	27,40	721	0,06
	4	26,70-28,00	27,255 (0,01)	27,24	3396	0,27
$-2[0,4]^{16}$	1	24,00-25,90	25,475 (0,05)	25,15	5261	0,48
	2	25,90-27,20	26,525 (0,05)	26,42	4749	0,43
	3	27,20-28,00	27,375 (0,05)	27,39	929	0,08
$-2[0,4]^{64}$	1	26,50-27,20	26,925 (0,05)	26,92	4799	0,41
	2	27,20-28,00	27,325 (0,05)	27,31	1034	0,09
$-2[0,8]^1$	1	24,00-26,70	26,175 (0,05)	25,73	7355	0,68
	2	26,70-27,20	27,025 (0,05)	26,98	2550	0,24
	3	27,20-27,40	27,275 (0,05)	27,28	308	0,03
	4	27,40-28,00	27,625 (0,05)	27,60	627	0,06
$-2[0,8]^4$	1	24,00-26,70	25,975 (0,05)	25,76	8370	0,70
	2	26,70-27,30	27,275 (0,05)	27,22	2777	0,23
	3	27,30-28,00	27,425 (0,05)	27,40	766	0,06
$-2[0,8]^{16}$	1	24,00-25,90	25,625 (0,05)	25,15	4845	0,43
	2	25,90-27,20	26,525 (0,05)	26,46	5241	0,46
	3	27,20-28,00	27,375 (0,05)	27,40	1264	0,11
$-2[0,8]^{64}$	1	26,50-27,25	26,975 (0,05)	26,96	5275	0,44
	2	26,50-27,25	26,965 (0,01)	26,96	5275	0,44
	3	27,25-28,00	27,325 (0,05)	27,31	1228	0,10
	4	27,25-28,00	27,295 (0,01)	27,31	1228	0,10
$-2[1,0]^1$	1	24,00-27,50	26,925 (0,05)	26,16	8934	0,86
	2	24,00-27,50	26,95 (0,1)	26,16	8934	0,86
	3	27,50-28,20	27,975 (0,05)	27,87	1499	0,14
$-2[1,0]^4$	1	24,00-26,80	26,025 (0,05)	25,71	10256	0,77
	2	26,80-28,00	27,525 (0,05)	27,49	3013	0,23
$-2[1,0]^{16}$	1	24,00-25,90	25,675 (0,05)	25,17	4721	0,40
	2	25,90-27,20	26,575 (0,05)	26,49	5413	0,45
	3	27,20-28,00	27,425 (0,05)	27,42	1815	0,15
$-2[1,0]^{64}$	1	26,50-27,15	26,975 (0,05)	26,98	2674	0,46
	2	26,50-27,15	26,985 (0,01)	26,98	2674	0,46
	3	27,15-28,00	27,325 (0,05)	27,30	449	0,08
$-2[2,0]^1$	1	24,00-29,20	26,925 (0,05)	26,74	14462	0,92
	2	29,20-30,00	29,575 (0,05)	29,50	1266	0,08
$-2[2,0]^4$	1	24,00-27,00	26,275 (0,05)	26,05	9134	0,71
	2	27,00-27,50	27,375 (0,05)	27,27	1351	0,11
	3	27,50-28,20	27,825 (0,05)	27,85	2308	0,18
$-2[2,0]^{16}$	1	26,00-27,20	26,675 (0,05)	26,60	5676	0,39
	2	27,20-28,00	27,475 (0,05)	27,45	4070	0,28
	3	27,20-28,00	27,485 (0,01)	27,45	4070	0,28
$-2[2,0]^{64}$	1	26,40-27,20	27,075 (0,05)	27,05	5942	0,45
	2	26,40-27,20	27,065 (0,01)	27,05	5942	0,45
	3	27,20-28,00	27,275 (0,05)	27,32	2099	0,16

B.5 Massenspektren für einen $1 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\oplus} a^{-1}$) – feinere T_{orb} -Abstufung

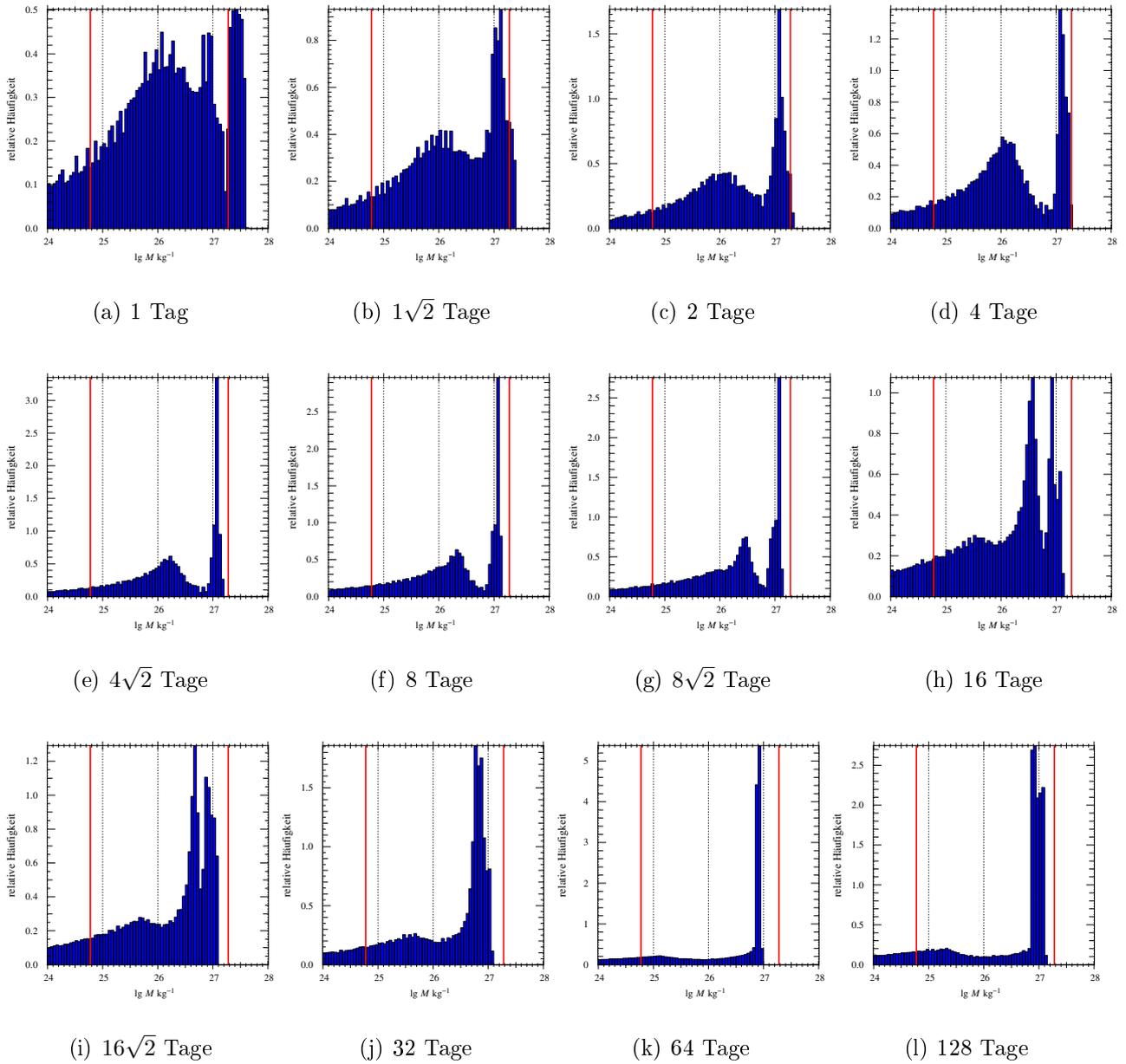


Abbildung B.21: Massenspektren für einen $1 M_{\odot}$ -Stern ($\dot{M} = 10^{-4} M_{\oplus} a^{-1}$) mit feinerer T_{orb} Abstufung.