

Technische Universität Ilmenau  
Fakultät für Mathematik  
und Naturwissenschaften  
Institut für Mathematik

Postfach 327  
98684 Ilmenau  
Germany  
Tel.: 03677/69-1220  
Fax : 03677/69-1241  
Telex: 33 84 23 tuil d.  
e-mail: Regina.Hildenbrandt@mathematik.tu-ilmenau.de

Preprint No. M 14/94

**Eine Verbandsstruktur  
für  
Partitionen ganzer Zahlen**

Regina Hildenbrandt

September 1994

In [3] wird die Menge

$$ZU = \{z \in \mathbb{Z}_+^n \mid 0 \leq z_i \leq k_o \text{ für } i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n z_i = su\}$$

für gegebene  $k_o \in \mathbb{N}, su \in \mathbb{N}$  mit  $su \leq n \cdot k_o$  als Zustandsraum eines Markovschen Entscheidungsprozesses genutzt.

Das Bestreben diese Menge "zu ordnen" (nach einer Halbordnung), so daß

- der Unterschied benachbarter Vektoren "möglichst gering ist",
- die Summen der Quadrate der Komponenten kleiner werden,
- Permutationen keine Rolle spielen sollen

führt auf eine Verbandsstruktur von Partitionen ganzer Zahlen, was wir unten ausführlich darstellen.

Die zugehörige Halbordnung der Partitionen kann dabei als "Verfeinerung" der Dominanzordnung für Zahlenpartitionen angesehen werden.

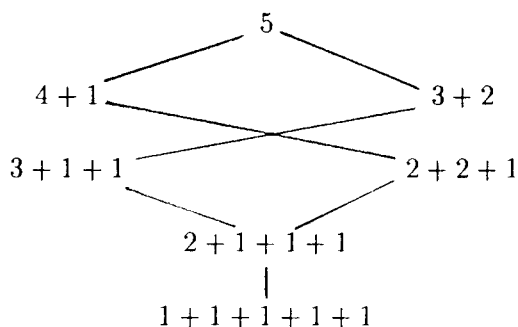
Vgl. dazu z.B. AIGNER[1]:

Im Sinne der Dominanzordnung ist eine Partition  $z^1$  der Zahl  $su$  unmittelbarer Vorgänger einer Partition  $z^2$  von  $su$ , falls ihre Summanden bis auf ein Paar  $z_{i_o}^1, z_{i_1}^1$  mit denen von  $z^2$  bis auf ein  $z_{j_o}^2$  übereinstimmen und gilt  $z_{i_o}^1 + z_{i_1}^1 = z_{j_o}^2 (+0)$ . Sind die Summanden der Größe nach geordnet (beginnend mit dem größten) so gilt, falls eine Partition  $z_1$  von  $su$  Vorgänger einer Partition

$$z^2 = (z_1^2, \dots, z_n^2) \text{ ist}$$

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} z_i^1 \leq \sum_{i=1}^{\bar{n}} z_i^2 \quad \forall \bar{n} = 1, \dots, n.$$

Folgendes Schema veranschaulicht beispielsweise die Dominanzordnung für die Partitionen von 5:



(Offenbar liegt hier kein Verband vor, da das Infimum zu  $\{4 + 1, 3 + 2\}$  nicht existiert.)

Die Dominanzordnung beinhaltet auch, daß die Partitionen bzgl. der Quadratsummen ihrer Komponenten monoton geordnet sind.

Den Gedanken, daß

- der Unterschied benachbarter Partitionen "möglichst gering" sein soll (ohne Beachtung des Verhaltens der Quadratsummen),

beinhaltet die "Gray code" Ordnung. Sie geht für Partitionen ganzer Zahlen auf ein Problem von H. WILF zurück und wurde von C.D. SAVAGE herausgearbeitet (vgl.[5]). Wir gehen später darauf ein.

Für die folgenden Darstellungen benutzen wir das Symbol

$$v[i_o|j_o] = \begin{cases} v_i & \text{für } i \neq i_o, i \neq j_o \\ v_{i_o} + 1 \\ v_{j_o} - 1 \end{cases} \quad \text{für } v \in Z^n.$$

**Definition 1** Sei  $z \in ZU$ .  $\{z\}$  bezeichnet die Menge von Vektoren, die durch Permutationen in  $z$  überführt werden können.  $\{z\}$  wird als Permutationsmenge zu  $z$  bezeichnet.

**Definition 2** Zwei verschiedene Permutationsmengen  $\{z^1\}, \{z^2\}$  heißen benachbart, falls es

$z^f \in \{z^1\}$  und  $z^l \in \{z^2\}$  gibt mit  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |z_i^f - z_i^l| = 1$ . Gilt  $\sum_i (z_i^1)^2 > \sum_i (z_i^2)^2$ , heißt  $\{z^2\}$  unmittelbarer Nachfolger von  $\{z^1\}$  (bzw.  $\{z^1\}$  unmittelbarer Vorgänger von  $\{z^2\}$ ) und man benutzt das Symbol  $\{z^1\} \xrightarrow{\bullet} \{z^2\}$ .

**Lemma 1** Seien  $z^1, z^2$  aus  $ZU$  mit  $z_1^l \geq z_2^l \geq \dots \geq z_n^l$  für  $l = 1, 2$  gegeben.  $\{z^1\}$  ist genau dann unmittelbarer Vorgänger von  $\{z^2\}$ , falls gilt

$$\exists i_o, j_o : z_{i_o}^2 \geq z_{j_o}^2 \wedge z^2 = z^1[j_o|i_o].$$

**Beweis:** Ist die Bedingung aus Lemma 1 erfüllt, folgt sofort die Eigenschaft aus Definition 2.

Im umgekehrten Fall, denke man sich (o.B.d.A.)  $z^f = z^1$ .  $z^l$  weicht wegen  $\frac{1}{2} \sum_i |z_i^1 - z_i^l| = 1$  nur in zwei Koordinaten von  $z^1$  ab:

$$z^l = z^1[j_o|i_o] \text{ mit } i_o > j_o \text{ und } z_{i_o}^1 > z_{j_o}^1 + 1.$$

Ist  $z_{i_o}^1 = z_{i_o+1}^1 = \dots = z_{i_o+\alpha}^1 > z_{i_o+\alpha+1}^1$ , so vertausche man  $z_{i_o}^l = z_{i_o}^1 - 1$  mit  $z_{i_o+\alpha}^l (= z_{i_o+\alpha}^1)$ .

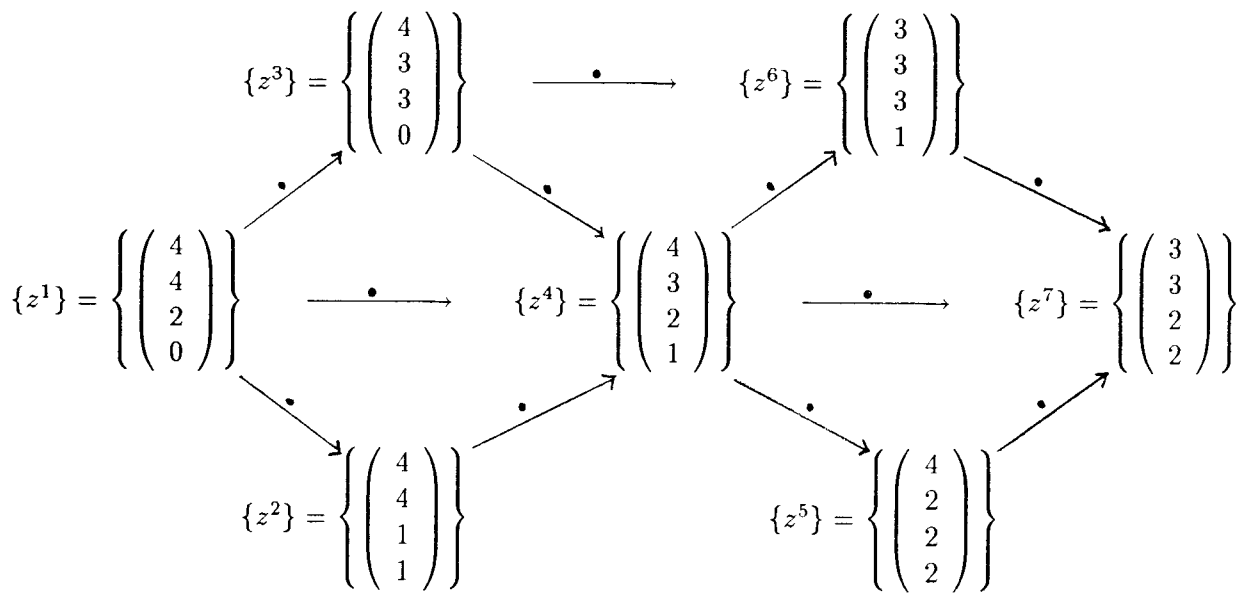
Ist  $z_{j_o}^1 = z_{j_o-1}^1 = \dots = z_{j_o-\beta}^1 < z_{j_o-\beta-1}^1$ , so vertausche man  $z_{j_o}^l = z_{j_o}^1 + 1$  mit  $z_{j_o-\beta}^l (= z_{j_o-\beta}^1)$ .

Die Koordinaten sind dann der Größe nach geordnet; die Eigenschaft aus Lemma 1 gilt.  $\square$

**Beispiel 1** Sei  $ZU$  mit  $k_o = 4$  und  $su = 10$  gegeben, d.h.,

$$ZU = \left\{ \begin{array}{l} \{z^1\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right) \right\}, \{z^2\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \right\}, \{z^3\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) \right\}, \{z^4\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right) \right\}, \\ \{z^5\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right) \right\}, \{z^6\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right) \right\}, \{z^7\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right) \right\} \end{array} \right\}$$

Die unmittelbaren Vorgänger/Nachfolgerbeziehungen können aus folgendem Schema entnommen werden.



**Definition 3** Eine Folge von Permutationsmengen  $\{z^{i_1}, \{z^{i_2}, \dots, \{z^{i_r}\}$  heißt Kette <sup>1</sup>, falls für beliebiges  $q \in \{1, \dots, r-1\}$  die Permutationsmenge  $\{z^{i_q}\}$  unmittelbarer Vorgänger von  $\{z^{i_{q+1}}\}$  ist.  $\{z^{i_1}\}$  nennen wir Anfangsglied,  $\{z^{i_r}\}$  Endglied der Kette.

**Definition 4**  $\{z^q\}$  heißt Vorgänger von  $\{z^w\}$  bzw.  $\{z^w\}$  Nachfolger von  $\{z^q\}$ , falls es eine Kette mit dem Anfangsglied  $\{z^q\}$  und dem Endglied  $\{z^w\}$  gibt. Man benutzt das Symbol  $\{z^q\} \longrightarrow \{z^w\}$  (vgl. auch Lemma 4).

**Definition 5** Bezüglich einer Menge  $ZT = \{\{z^{i_1}, \{z^{i_2}, \dots, \{z^{i_r}\}\} \subseteq ZU$  heißt  $\{z^{i_1}\}$  kleinstes Element, falls  $\{z^{i_1}\} \longrightarrow \{z^{i_q}\}$  für  $q = 2, \dots, r$  gilt.  $\{z^{i_r}\}$  heißt bzgl.  $ZT$  größtes Element, falls  $\{z^{i_q}\} \longrightarrow \{z^{i_r}\}$  für  $q = 1, \dots, r-1$  Gültigkeit besitzt.

**Lemma 2**  $ZU$  besitzt ein kleinstes (o.B.d.A.  $\{z^1\}$ ) und ein größtes (o.B.d.A.  $\{z^7\}$ ) Element. Damit gibt es zu jeder beliebigen Permutationsmenge  $\{z^q\} \subseteq ZU$  eine Kette mit dem Anfangsglied  $\{z^1\}$  und dem Endglied  $\{z^7\}$ .

<sup>1</sup>sonst meist als maximale Kette bezeichnet, vgl. etwa [2] oder [6]

Zum Beweis vgl. [3] Lemma 4.6.

Bei Beispiel 1 ist  $\{z^1\}$  kleinstes und  $\{z^7\}$  größtes Element.

**Definition 6** Eine Kette mit dem Anfangsglied  $\{z^1\}$  und dem Endglied  $\{z^r\}$  heißt *Minimalkette*, wenn sie höchstens genau so viel Permutationsmengen umfaßt, wie irgendeine Kette mit demselben Anfangs- und Endglied.

**Definition 7** Eine Kette  $\{z^{i_1}\}, \{z^{i_2}\}, \dots, \{z^{i_r}\}$  mit der Eigenschaft  $z^{i_q} = z^{i_{q-1}}[j_o | i_o]$  für ein  $i_o$  mit  $z_{i_o}^{i_{q-1}} = \max\{z_i^{i_{q-1}} \mid z_i^{i_{q-1}} > z_{i_r}^{i_r}\}$  und ein  $j_o$  mit  $z_{j_o}^{i_{q-1}} = \min\{z_i^{i_{q-1}} \mid z_i^{i_{q-1}} < z_{i_r}^{i_r}\}$  ( $q = 2, \dots, r$ ) heißt *Hauptminimalkette*.

Bei Beispiel 1 sind für das Anfangsglied  $\{z^3\}$  und das Endglied  $\{z^7\}$  die Ketten  $\{z^3\}, \{z^6\}, \{z^7\}$  sowie  $\{z^3\}, \{z^4\}, \{z^7\}$  Minimalketten. Die letztere ist auch Hauptminimalkette.

### Lemma 3

a) Die Hauptminimalkette ist Minimalkette.

b) Eine Minimalkette mit dem Anfangsglied  $\{z^{i_1}\}$  und dem Endglied  $\{z^{i_r}\}$  besteht aus

$\frac{1}{2} \sum_j |z_j^{i_1} - z_j^{i_r}| + 1$  Permutationsmengen, wobei  $z_1^l \geq z_2^l \geq \dots \geq z_n^l$  für  $l = i_1, i_r$  gelte.

$\{z^{i_q}\}$  gehört genau dann zu irgendeiner Minimalkette mit obigem Anfangs- und Endglied, wenn für eine Permutation  $z^{i_q}$  aus  $\{z^{i_q}\}$  gilt

$$z_j^{i_1} \leq z_j^{i_q} \leq z_j^{i_r}, \quad \text{falls } z_j^{i_1} \leq z_j^{i_r} \quad \text{ist}$$

$$\text{bzw. } z_j^{i_1} \geq z_j^{i_q} \geq z_j^{i_r}, \quad \text{falls } z_j^{i_1} \geq z_j^{i_r} \quad \text{ist.}$$

**Beweis:** Durch Bildung eines unmittelbaren Nachfolgers  $\{z^{i_2}\}$  von  $\{z^{i_1}\}$  verkleinert sich die Zahl  $\frac{1}{2} \sum_j |z_j^{i_1} - z_j^{i_r}| + 1$  offenbar für  $l = 2$  höchstens um 1 gegenüber  $l = 1$ . Ähnlich wie im Lemma 1 kann man o.B.d.A. davon ausgehen, daß die Komponenten von  $z^{i_2}$  der Größe nach angeordnet sind, und das Verfahren läßt sich fortgesetzt denken.

Damit enthält eine Kette mit Anfangsglied  $\{z^{i_1}\}$  und Endglied  $\{z^{i_r}\}$  mindestens  $\frac{1}{2} \sum_j |z_j^{i_1} - z_j^{i_r}| + 1$  Permutationsmengen. Offenbar umfaßt die Hauptminimalkette  $\frac{1}{2} \sum_j |z_j^{i_1} - z_j^{i_r}| + 1$  Permutationsmengen. Sie ist damit Minimalkette, und a) und der erste Teil von b) sind bewiesen.

Besitze nun  $\{z^{i_q}\}$  die Eigenschaft aus Lemma 3b) und sei o.B.d.A.  $z_1^{i_q} \geq z_2^{i_q} \geq \dots \geq z_n^{i_q}$ . Durch Zusammenfügen einer Minimalkette mit dem Anfangsglied  $\{z^{i_1}\}$  und dem Endglied  $\{z^{i_q}\}$  sowie einer Minimalkette mit dem Anfangsglied  $\{z^{i_q}\}$  und dem Endglied  $\{z^{i_r}\}$  erhält man eine Kette mit

$$\frac{1}{2} \sum_j |z_j^{i_1} - z_j^{i_q}| + 1 + \frac{1}{2} \sum_j |z_j^{i_q} - z_j^{i_r}| = \frac{1}{2} \sum_j |z_j^{i_1} - z_j^{i_r}| + 1 \quad (*)$$

Permutationsmengen, also eine Minimalkette mit dem Anfangsglied  $\{z^{i_1}\}$  und dem Endglied  $\{z^{i_r}\}$ .

Gilt die Eigenschaft aus Lemma 3b) für ein  $\{z^{i_q}\}$  nicht, steht anstelle der Gleichung (\*), eine entsprechende Ungleichung mit den Relationszeichen  $>$ , wie einfache Rechnungen mit Beträgen zeigen. Es läßt sich eine Kette mit nur  $\frac{1}{2} \sum_j |z^{i_1} - z^{i_r}| + 1$  Permutationsmengen finden.  $\square$

Ob eine Permutationsmenge Vorgänger oder Nachfolger einer anderen ist, kann man anstelle über Definition 5 auch nach dem folgenden Lemma überprüfen.

**Lemma 4** (Muirhead 1903, Vgl. in [4] Abschnitt 5.D.) Seien  $\{z^{i_1}\}, \{z^{i_r}\}$  verschiedene Permutationsmengen mit  $z_1^l \geq z_2^l \geq \dots \geq z_n^l$  für  $l = i_1, i_r$ .

Es gilt  $\{z^{i_1}\} \longrightarrow \{z^{i_r}\}$  genau dann, wenn

$$\sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{i_1} \geq \sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{i_r} \quad \text{für } \bar{n} = 1, \dots, n \text{ (äquivalent damit)}$$

$$\sum_{j=1}^{\bar{n}} (z_j^{i_1} - z_j^{i_r}) \geq 0 \quad \text{für } \bar{n} = 1, \dots, n \text{ gilt.}$$

Wie wir eingangs feststellten, sind für die Dominanzordnung, vgl. [1], solche Ungleichungen nur notwendig (hier auch hinreichend).

Bei vielen anderen mathematischen Fragestellungen spielen solche Ungleichungen ebenfalls eine wichtige Rolle, vgl. dazu z.B. [4]. Vgl. auch [2].

**Beweis:** Sind  $\{z^{i_q}\}, \{z^{i_{q+1}}\}$  mit  $1 \leq q < r$  und o.B.d.A.  $z_1^l \geq z_2^l \geq \dots \geq z_n^l$  für  $l = i_q, i_{q+1}$  zwei aufeinanderfolgende Permutationsmengen einer Kette mit dem Anfangsglied  $\{z^{i_1}\}$  und dem Endglied  $\{z^{i_r}\}$ , so gilt offenbar

$$\sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{i_q} \geq \sum_{j=1}^n z_j^{i_{q+1}} \quad \text{für } \bar{n} = 1, \dots, n.$$

Die Ungleichung läßt sich dann fortsetzen, so daß  $\sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{i_1} \geq \sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{i_r}$  für  $\bar{n} = 1, \dots, n$  gilt.

Gilt umgekehrt die Ungleichung aus Lemma 4, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, daß

$$z_j^{i_1} = z_j^{i_r} \quad \text{für } j = 0, \dots, \alpha, \quad \alpha \geq 0^2,$$

$$\left. \begin{array}{l} z_{\alpha+1}^{i_1} = \dots = z_{\alpha+\beta}^{i_1} \\ \text{und } z_{\alpha+j}^{i_1} > z_{\alpha+j}^{i_r} \quad \text{für } j = 1, \dots, \beta \end{array} \right\} \quad \text{für } \beta \geq 1,$$

$$z_{\alpha+\beta+j}^{i_1} \geq z_{\alpha+\beta+j}^{i_r} \quad \text{für } j = 0, \dots, \gamma, \quad \gamma \geq 0^3$$

$$z_{\alpha+\beta+\gamma+1}^{i_1} < z_{\alpha+\beta+\gamma+1}^{i_r} \quad \dots \text{ist.}$$

<sup>2</sup> $\alpha = 0$  bzw.  $\gamma = 0$  bedeutet, daß solche Gleichungen nicht auftreten brauchen.

<sup>3</sup> - dito -

Wir setzen

$$z^{i2} = z^{i1}[\alpha + \beta + \gamma + 1 \mid \alpha + \beta].$$

Die Komponenten von  $z^{i2}$  sind dann auch der Größe nach geordnet, und bzgl.  $z^{i2}$  und  $z^{ir}$  gilt auch

$\sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{i2} \geq \sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{ir}$  für  $\bar{n} = 1, \dots, n$ . Wir können fortsetzen und erhalten schließlich eine Kette mit dem Anfangsglied  $\{z^{i1}\}$  und dem Endglied  $\{z^{ir}\}$ , d.h.,  $\{z^{ir}\}$  ist Nachfolger von  $\{z^{i1}\}$ .  $\square$

**Lemma 5** ([4], Abschnitt 1.B.) *Ergänzt man Def. 4 (und Def. 3<sup>A</sup>), so daß jede Permutationsmenge mit sich selbst in Relation  $\longrightarrow$  steht. Dann ist Relation  $\longrightarrow$  angewendet auf die Permutationsmengen eine Halbordnung (was durch  $(\{ZU\}, \longrightarrow)$  symbolisiert werden soll).*

**Beweis:**

Die Transitivität folgt einfach über Definition 4 (oder Lemma 4).

Aus Lemma 4a ergibt sich für Permutationsmengen  $\{z^{i1}\}, \{z^{i2}\}$ , für die gleichzeitig

$\sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{i1} \geq \sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{i2}$  für  $\bar{n} = 1, \dots, n$  bzw.  $\sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{i2} \geq \sum_{j=1}^{\bar{n}} z_j^{i1}$  für  $\bar{n} = 1, \dots, n$  gilt, daß sie nicht verschieden sein können, sondern übereinstimmen (Antisymmetrie). Man beginne dazu bei  $\bar{n} = 1$ , woraus  $z_1^{i1} = z_1^{i2}$  folgt und setze mit  $\bar{n} = 2, 3, \dots, n$  in analoger Weise fort.

**Satz 6:**  $(\{ZU\}, \longrightarrow)$  ist ein Verband.

**Beweis:**

Seien  $\{z^{i1}\}, \dots, \{z^{ir}\}$  gegeben, wobei  $z_1^{i1} \geq z_2^{i1} \geq \dots \geq z_n^{i1}$  für  $n = 1, \dots, r$  gelten möge.

Nach der Vorschrift

$$\underline{z}_1 := \max\{z_1^{il} \mid l = 1, \dots, r\},$$

$$\underline{z}_j := \max\left\{\sum_{k=1}^j z_k^{il} \mid l = 1, \dots, r\right\} - \sum_{k=1}^{j-1} \underline{z}_k \quad \text{für } j = 2, \dots, n$$

wird offenbar ein Vorgänger bzgl. eines jeden  $z^{il}$  gebildet (vgl. Lemma 4).

Da irgendein Vorgänger  $\{z\}$  mit  $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n$  von allen Permutationsmengen

$$\{z^{il}\}, l = 1, \dots, r \text{ der Bedingung } \sum_{k=1}^j z_k \leq \max\left\{\sum_{k=1}^j z_k^{il} \mid l = 1, \dots, r\right\} = \sum_{k=1}^j \underline{z}_k \quad \text{für}$$

$j = 1, \dots, n$  genügen muß, ist  $\{z\}$  das Infimum zu  $\{z^{i1}\}, \dots, \{z^{ir}\}$ . (Vgl. zu den Begriffen Verband, Infimum bzw. Supremum für Elemente eines Verbandes z.B. [6].)

Das Supremum  $\{\bar{z}\}$  erhält man nach der Vorschrift

$$\bar{z}_1 := \min\{z_1^{il} \mid l = 1, \dots, r\},$$

$$\bar{z}_j := \min\left\{\sum_{k=1}^j z_k^{il} \mid l = 1, \dots, r\right\} - \sum_{k=1}^{j-1} \bar{z}_k \quad \text{für } j = 2, \dots, n. \quad \square$$

<sup>4</sup>Eine einzelne Permutationsmenge ist auch eine Kette

$$\bar{z}_j := \min \left\{ \sum_{k=1}^j z_k^i \mid i = 1, \dots, r \right\} - \sum_{k=1}^{j-1} \bar{z}_k \quad \text{für } j = 2, \dots, n. \quad \square$$

Eigenschaften des Verbandes  $(\{ZU\}, \longrightarrow)$ :

- a) Die Jordan-Dedekind-Bedingungen (vgl. z.B. [6]) gilt i.a. nicht (vgl. Beispiel 1).
- b) Lemma 3 trägt mit zur Charakterisierung des Verbandes bei.
- c) Ist das Infimum  $\{\underline{z}\}$  zweier Permutationsmengen  $\{z^1\}$  und  $\{z^2\}$  unmittelbarer Vorgänger von  $\{z^1\}$  und  $\{z^2\}$ , so ist das Supremum von  $\{z^1\}$  und  $\{z^2\}$  unmittelbarer Nachfolger von  $\{z^1\}$  und  $\{z^2\}$  und umgekehrt. (Der Beweis erfolgt unten)

- d) Bildet man in folgender Weise einen ungerichteten Graphen:

Jeder Permutationsmenge aus  $\{ZU\}$  wird ein Knotenpunkt zugeordnet, zwei Knotenpunkte werden durch eine Kante verbunden, falls die entsprechenden Permutationsmengen benachbart sind,

so gibt es für die Spezialfälle  $n = su$  (außer  $n = 6$  und  $k_o = 4$ ) bzw.  $k_o = su$  eine Hamiltonsche Linie zwischen kleinsten und größten Element. Vgl. dazu die Arbeit "Gray Code Sequences of Partions" von C.D. Savage, [5].

Im Beispiel 1 gilt weder  $su = n$  noch  $k_o = su$ . Hier gibt es im zugehörigen ungerichteten Graphen keine Hamiltonsche Linie zwischen  $\{z^1\}$  und  $\{z^7\}$ . Allerdings findet man andere Hamiltonsche Linien, da  $\{z^1\} - \{z^3\} - \{z^6\} - \{z^7\} - \{z^5\} - \{z^4\} - \{z^2\} - \{z^1\}$  ein Hamiltonkreis ist.

(Beweis der Eigenschaft c):

Seien die Komponenten von  $\underline{z}, z^1, z^2$  o.B.d.A. der Größe nach geordnet, vgl. auch Lemma 1.

Da  $\{\underline{z}\}$  unmittelbarer Vorgänger von  $\{z^1\}$  und  $\{z^2\}$  ist, gibt es  $z_\alpha > z_\beta + 1$  sowie  $z_\gamma > z_\delta + 1$  und  $z^1 = \underline{z}[\beta \mid \alpha]$  bzw.  $z^2 = \underline{z}[\delta \mid \gamma]$ .

Im Fall, daß die Indizees  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  paarweise verschieden sind, ist offenbar  $\{\bar{z}\}$  mit  $\bar{z} = z^1[\delta \mid \gamma] = z^2[\beta \mid \alpha]$  das Supremum von  $\{z^1\}, \{z^2\}$ , das auch Eigenschaft c) erfüllt.

Die Fälle  $\alpha = \gamma (\beta \neq \delta)$  sowie  $\beta = \delta (\alpha \neq \gamma)$  entfallen, da hier  $\{\underline{z}\}$  nicht das Infimum von  $\{z^1\}, \{z^2\}$  ist, sondern  $\{z^1\}$  oder  $\{z^2\}$  selbst.

Im Falle  $\beta = \gamma$  (analog  $\delta = \alpha$ ) ist  $\{\bar{z}\}$  mit  $\bar{z} = \underline{z}[\delta \mid \alpha] = z^1[\delta \mid \beta] = z^2[\beta \mid \alpha]$  Supremum von  $\{z^1\}, \{z^2\}$  (vgl. z.B. die Vorschrift im Beweis zu Satz 6), das der Eigenschaft c) genügt.

Der Schluß vom Supremum als unmittelbaren Nachfolger von  $\{z^1\}, \{z^2\}$  auf das Infimum als unmittelbaren Vorgänger erfolgt analog.  $\square$ )



## References

- [1] Aigner, M. (1975). *Kombinatorik, 1. Grundlagen und Zähltheorie*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- [2] Girlich, E. und Kowaljev, M.M. (1981). *Nichtlineare diskrete Optimierung*. Akademie-Verlag, Berlin
- [3] Hildenbrandt, R. (1993). A specialstochastic decision problem. *Optimization*, Vol. **28**, pp. 95-110.
- [4] Marshall, A.W. und Olkin, I. (1979). *Inequalities: Theory of majorization and its applications*. Academic Press, New York.
- [5] Savage, Carla D. (1989). Gray code sequences of partitions. *Journal of Algorithms* **10**, pp. 577-595.
- [6] Welsh D.J.A. (1976). *Matroid theory*. Academic Press, New York.
- [7] Wille, R. (1976). Aspects of finite Lattices. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Berlin (West Germany), (edited by AIGNER, M.(1976). *Higher Combinatorics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland.)