Technische Universität Ilmenau
Fakultät für Mathematik
und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
http://www.tu-ilmenau.de/math

Postfach 10 05 65
D - 98684 Ilmenau
Germany
Tel.: 03677/69 3267
Fax: 03677/69 3272
Telex: 33 84 23 tuil d.
email: werner.neundorf@tu-ilmenau.de

Preprint No. M 08/05

Zu Orthogonalsystemen von Polynomen und ihrer Rekursion

Werner Neundorf

Mai 2005

‡MSC (2000): 33-01, 42C05, 26C05, 05E35

Zusammenfassung

Anwendungsgebiete orthogonaler Funktionen und speziell orthogonaler Polynome sind unter anderem

- Interpolation $\Rightarrow$ Stützstellenwahl $\Rightarrow$ Minimax-Eigenschaft,
- Approximation $\Rightarrow$ Fourier-Reihen,
- numerische Integration $\Rightarrow$ Tschebyscheff-, Gauß-Formeln sowie
- rekursive Berechnungen.

Des Weiteren werden Abstiegsverfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen als polynomiale Iterationsverfahren betrachtet und dabei treten spezielle Polynome auf. Bei Abstiegsverfahren mit einer Minimierung des Residuums treten orthogonale Polynome auf im Zusammenhang mit sogenannten Kernpolynomen sowie mit speziellen oder modifizierten Skalarprodukten und reproduzierenden Eigenschaften.

In vielen Fällen erweisen sich Systeme von orthogonalen Polynomen als sehr hilfreich.

In dieser Arbeit fassen wir wichtige Informationen zur Drei-Term-Rekursion bei orthogonalen Polynomen sowie viele Eigenschaften speziell der Legendre- und Tschebyscheff-Polynome zusammen.

Zahlreiche Hinweise zu orthogonalen Polynomen findet man in [1] - [3].

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Rekursive Berechnung von orthogonalen Polynomen

Wir bemerken zunächst, dass allgemein orthogonale Funktionensysteme (OGS) und insbesondere, wie in dieser Abeit, Orthogonalsysteme von Polynomen rekursiven Beziehungen der Gestalt

$$\begin{aligned} p_{k+1}(x) &= (\alpha_k x + \beta_k) p_k(x) + \beta_{k-1} p_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, ..., \\ & \quad p_0(x),\ p_1(x) \text{ gegeben,} \end{aligned} \tag{1.1}$$

genügen. Diese können sowohl zur Bestimmung der algebraischen Darstellung der Polynome als auch zur rekursiven Polynomwertberechnung verwendet werden.

1.1 Theoretische Grundlagen

Betrachten wir das Intervall $[a, b],\ a < b$, das Skalarprodukt mit dem Gewicht $\omega(x) > 0$

$$(f, g) \ = \ \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\, dx, \tag{1.2}$$

den linearen Raum $\mathcal{P}_k(x)$ aller Polynome $p_k(x)$ vom Grad $\leq k$ mit endlicher Norm $\|p_k\|_{2,\omega} < \infty$ sowie die Folge von Polynomen $\{p_k(x)\}$ mit wachsendem Grad, also $p_k \in \mathcal{P}_k(x) \backslash \mathcal{P}_{k-1}(x)$, und den zugehörigen Orthogonalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} (p_k, p_l) &= \gamma_k \delta_{kl}, \quad \delta_{kl} \text{ Kronecker-Symbol,} \\ \|p_k\|_{2,\omega}^2 &= (p_k, p_k) \ = \ \gamma_k \ > \ 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Die Normierung bzw. Skalierung der Polynome erfolgt oft durch Festlegung des führenden Koeffizienten (Hauptkoeffizient, Höchstk., Leitk.) auf Eins. Somit erhält man die Darstellung

$$p_k(x) \ = \ x^k + \delta_1 x^{k-1} + ... + \delta_k. \tag{1.4}$$

Satz 1.1 *Es gibt unter den Bedingungen (1.2),(1.3) eine eindeutig definierte Folge von orthogonalen Polynomen (1.4) mit führenden Koeffizienten Eins sowie eine Drei-Term-Rekursion*

$$p_k(x) \;=\; (x+\tilde\beta_{k-1})p_{k-1}(x)+\tilde\beta_{k-2}p_{k-2}(x), \quad k=1,2,..., \tag{1.5}$$

mit $p_{-1}(x)=0,\; p_0(x)=1$ *und*

$$\begin{aligned} \tilde\beta_{k-1} &= -\frac{(xp_{k-1},p_{k-1})}{(p_{k-1},p_{k-1})} = -\frac{(xp_{k-1},p_{k-1})}{\gamma_{k-1}}, \\ \tilde\beta_{k-2} &= -\frac{(xp_{k-2},p_{k-1})}{(p_{k-2},p_{k-2})} = -\frac{(p_{k-1},p_{k-1})}{(p_{k-2},p_{k-2})} = -\frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} < 0 \textit{ für } k>1,\; \tilde\beta_{-1}=0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Bildungsvorschrift (1.5) für $p_k(x)$ genau mit den angegebenen Koeffizienten gilt, wobei diese jeweils zum k-ten Schritt gehören.

Das Polynom $p_0(x)=1\in\mathcal{P}_0(x)$ ist gegeben und orthogonal. Als nächstes zu $p_0(x)$ orthogonales Polynom erhält man $p_1(x)=x+\delta_1=x+\tilde\beta_0=(x+\tilde\beta_0)p_0(x)+\tilde\beta_{-1}p_{-1}(x)$ mit $(p_1,p_0)=0$ und $\tilde\beta_{-1}=0$, $\tilde\beta_0=-(xp_0,p_0)/(p_0,p_0)$.

Es wird nun der Induktionsschritt von $k-1$ auf k durchgeführt.

Gegeben seien die orthogonalen Polynome $p_0,p_1,...,p_{k-1}$ mit Hauptkoeffizienten 1. Sie bilden eine Basis in $\mathcal{P}_{k-1}(x)$.

Sei $p_k\in\mathcal{P}_k(x)$ und $p_k(x)=x^k+\delta_1x^{k-1}+...$.

Daraus folgen der Reihe nach die Aussagen

$$\begin{aligned} p_k-xp_{k-1} &\in \mathcal{P}_{k-1}(x), \\ p_k-xp_{k-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} c_ip_i. \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} (p_j,p_k-xp_{k-1}) &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i(p_j,p_i) \;=\; c_j(p_j,p_j), \quad j=0,1,...,k-1, \\ c_j &= \frac{(p_j,p_k-xp_{k-1})}{(p_j,p_j)}, \quad \text{wobei } (p_j,p_k)=0 \\ &= -\frac{(p_j,xp_{k-1})}{(p_j,p_j)} \;=\; -\frac{(xp_j,p_{k-1})}{(p_j,p_j)}. \end{aligned}$$

Für $j\le k-3$ ist $xp_j\in\mathcal{P}_{k-2}(x)$ und $c_j=0$.

Für $j=k-2$ und $j=k-1$ gelten

$$\begin{aligned} c_{k-2} &= -\frac{(xp_{k-2},p_{k-1})}{(p_{k-2},p_{k-2})}, \\ c_{k-1} &= -\frac{(xp_{k-1},p_{k-1})}{(p_{k-1},p_{k-1})}. \end{aligned}$$

Wegen $xp_{k-2} = x^{k-1} + q = p_{k-1} + \tilde{q},\ \tilde{q} \in \mathcal{P}_{k-2}(x)$, erhält man

$$c_{k-2} = -\frac{(p_{k-1}, p_{k-1})}{(p_{k-2}, p_{k-2})}.$$

Die Summe (1.7) vereinfacht sich damit zur gewünschten Drei-Term-Rekursion

$$\begin{aligned} p_k - xp_{k-1} &= c_{k-2}p_{k-2} + c_{k-1}p_{k-1}, \\ p_k &= (x + c_{k-1})p_{k-1} + c_{k-2}p_{k-2} \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten $\tilde{\beta}_{k-1} = c_{k-1}$ und $\tilde{\beta}_{k-2} = c_{k-2}$. □

Bemerkung 1.1 (1) Der Satz kann entsprechend auch für Polynome der Form $p_k(x) = a_k x^k + b_k x^{k-1} + ...$ mit einem Hauptkoeffizient verschieden von Eins formuliert werden.
Die Drei-Term-Rekursion hat dann die etwas allgemeinere Darstellung

$$p_k(x) = (\alpha_{k-1}x + \beta_{k-1})p_{k-1}(x) + \beta_{k-2}p_{k-2}(x), \quad k = 1, 2, ..., \tag{1.8}$$

mit $p_{-1}(x) = 0,\ p_0(x) = a_0$ und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha_{k-1} &= \frac{a_k}{a_{k-1}}, \quad \gamma_k = (p_k, p_k), \\ \beta_{k-1} &= \alpha_{k-1}\left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}}\right), \\ \beta_{k-2} &= -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_{k-2}}\frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} = -\frac{a_k a_{k-2}}{a_{k-1}^2}\frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} < 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Wir machen noch einmal die wichtigsten Schritte dafür analog zur Vorgehensweise im Beweis von Satz 1.1, wobei die ersten beiden Koeffizienten im Polynomansatz

$$\begin{aligned} p_k(x) &= a_k x^k + b_k x^{k-1} + a_{k-2}^{(k)} x^{k-2} + ... + a_0^{(k)}, \quad a_k > 0 \\ p_{k-1}(x) &= a_{k-1}x^{k-1} + b_{k-1}x^{k-2} + a_{k-3}^{(k-1)} x^{k-3} + ... + a_0^{(k-1)}, \quad a_{k-1} > 0, \end{aligned}$$

von ausschlaggebender Bedeutung sind.
Damit ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} p_k - \frac{a_k}{a_{k-1}} xp_{k-1} &\in \mathcal{P}_{k-1}(x), \\ p_k - \frac{a_k}{a_{k-1}} xp_{k-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i p_i. \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
(p_j, p_k - \tfrac{a_k}{a_{k-1}}\, xp_{k-1}) &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i(p_j,p_i) \;=\; c_j(p_j,p_j), \quad j=0,1,...,k-1,\\
c_j &= \frac{(p_j, p_k - \tfrac{a_k}{a_{k-1}}\, xp_{k-1})}{(p_j,p_j)}, \quad \text{wobei } (p_j,p_k)=0\\
&= -\frac{1}{(p_j,p_j)}\frac{a_k}{a_{k-1}}(p_j, xp_{k-1})\\
&= -\frac{1}{(p_j,p_j)}\frac{a_k}{a_{k-1}}(xp_j, p_{k-1}).
\end{aligned}$$

Für $j \le k-3$ ist $xp_j \in \mathcal{P}_{k-2}(x)$ und $c_j = 0$.
Für $j = k-2$ und $j = k-1$ gelten

$$\begin{aligned}
c_{k-2} &= -\frac{1}{(p_{k-2},p_{k-2})}\frac{a_k}{a_{k-1}}(xp_{k-2},p_{k-1}),\\
c_{k-1} &= -\frac{1}{(p_{k-1},p_{k-1})}\underbrace{\frac{a_k}{a_{k-1}}}_{\alpha_{k-1}}(xp_{k-1},p_{k-1}).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Die Summe (1.10) vereinfacht sich damit zur gewünschten Drei-Term-Rekursion

$$\begin{aligned}
p_k - \alpha_{k-1}xp_{k-1} &= c_{k-2}p_{k-2} + c_{k-1}p_{k-1},\\
p_k &= (\alpha_{k-1}x + c_{k-1})p_{k-1} + c_{k-2}p_{k-2}
\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten $\alpha_{k-1} = \frac{a_k}{a_{k-1}}$ und $c_{k-1},\ c_{k-2}$ gemäß (1.11).
Weiterhin gelten

$$\begin{aligned}
p_{k-1} &= a_{k-1}x^{k-1} + b_{k-1}x^{k-2} + ...,\\
xp_{k-1} &= a_{k-1}x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ...\\
&= \tfrac{a_{k-1}}{a_k}\,(a_kx^k + \tfrac{b_{k-1}}{a_{k-1}}a_kx^{k-1} + ...)\\
&= \tfrac{a_{k-1}}{a_k}\,(a_kx^k + b_kx^{k-1} - b_kx^{k-1} + \tfrac{a_k}{a_{k-1}}b_{k-1}x^{k-1} + ...)\\
&= \tfrac{a_{k-1}}{a_k}\,(p_k + (\tfrac{a_k}{a_{k-1}}b_{k-1} - b_k)x^{k-1} + ...)\\
&= \tfrac{a_{k-1}}{a_k}\,(p_k + \tfrac{1}{a_{k-1}}(\tfrac{a_k}{a_{k-1}}b_{k-1} - b_k)a_{k-1}x^{k-1} + ...)\\
&= \tfrac{a_{k-1}}{a_k}\,(p_k + (\tfrac{a_k}{a_{k-1}}\tfrac{b_{k-1}}{a_{k-1}} - \tfrac{b_k}{a_{k-1}})p_{k-1} + q), \quad q \in \mathcal{P}_{k-2}(x),\\
(xp_{k-1},p_{k-1}) &= \tfrac{a_{k-1}}{a_k}\,(\tfrac{a_k}{a_{k-1}}\tfrac{b_{k-1}}{a_{k-1}} - \tfrac{b_k}{a_{k-1}})\,(p_{k-1},p_{k-1}),\\
\frac{(xp_{k-1},p_{k-1})}{(p_{k-1},p_{k-1})} &= \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} - \frac{b_k}{a_k}.
\end{aligned}$$

Somit folgen aus

$$\begin{aligned}
c_{k-1} &= -\frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{(xp_{k-1}, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})} \\
&= -\frac{a_k}{a_{k-1}} \Big(\frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} - \frac{b_k}{a_k} \Big) \\
&= \alpha_{k-1} \Big(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} \Big) \\
&= \beta_{k-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{k-2} &= a_{k-2}x^{k-2} + b_{k-2}x^{k-3} + ..., \\
xp_{k-2} &= a_{k-2}x^{k-1} + b_{k-2}x^{k-2} + ... \\
&= \tfrac{a_{k-2}}{a_{k-1}} (a_{k-1}x^{k-1} + \tfrac{b_{k-2}}{a_{k-2}} a_{k-1}x^{k-2} + ...) \\
&= \tfrac{a_{k-2}}{a_{k-1}} (p_{k-1} + (\tfrac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \tfrac{b_{k-2}}{a_{k-2}} - \tfrac{b_{k-1}}{a_{k-2}}) p_{k-2} + q), \quad q \in \mathcal{P}_{k-3}(x), \\
(xp_{k-2}, p_{k-1}) &= \tfrac{a_{k-2}}{a_{k-1}} (p_{k-1}, p_{k-1}), \\
\frac{(xp_{k-2}, p_{k-1})}{(p_{k-2}, p_{k-2})} &= \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}} \frac{(p_{k-1}, p_{k-1})}{(p_{k-2}, p_{k-2})} \\
&= \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}} \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} \;=\; \alpha_{k-1} \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
c_{k-2} &= -\frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{(xp_{k-2}, p_{k-1})}{(p_{k-2}, p_{k-2})} \\
&= -\frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}} \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} \\
&= -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_{k-2}} \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} \\
&= \beta_{k-2}
\end{aligned}$$

die Koeffizienten der allgemeineren Form der Rekursion von orthogonalen Polynomen.

(2) Eine weitere Rekursionsformel dieser Polynome mit einem positiven Hauptkoeffizienten $\neq 1$ ergibt sich durch den Ansatz

$$\tilde{\gamma}_k p_k(x) = (x - \tilde{\alpha}_k) p_{k-1}(x) - \tilde{\beta}_k p_{k-2}(x), \quad k = 1, 2, ..., \tag{1.12}$$

und $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = p_0 = a_0$.

Der Vergleich der Formeln (1.8)

$$p_k(x) = (\alpha_{k-1}x + \beta_{k-1})p_{k-1}(x) + \beta_{k-2}p_{k-2}(x),$$

wobei

$$\begin{aligned}\alpha_{k-1} &= \frac{a_k}{a_{k-1}},\\ \beta_{k-1} &= -\frac{a_k}{a_{k-1}}\frac{(xp_{k-1}, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})},\\ \beta_{k-2} &= -\frac{a_k}{a_{k-1}}\frac{(xp_{k-2}, p_{k-1})}{(p_{k-2}, p_{k-2})},\end{aligned}$$

und

$$p_k(x) = \Big(\frac{1}{\tilde{\gamma}_k}x - \frac{\tilde{\alpha}_k}{\tilde{\gamma}_k}\Big)p_{k-1}(x) - \frac{\tilde{\beta}_k}{\tilde{\gamma}_k}p_{k-2}(x)$$

liefert die Koeffizienten in (1.12).

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_k &= \frac{1}{\alpha_{k-1}} = \frac{a_{k-1}}{a_k},\\ -\frac{\tilde{\alpha}_k}{\tilde{\gamma}_k} &= \beta_{k-1} = -\frac{a_k}{a_{k-1}}\frac{(xp_{k-1}, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})},\\ \tilde{\alpha}_k &= \tilde{\gamma}_k\frac{a_k}{a_{k-1}}\frac{(xp_{k-1}, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})} = \frac{(xp_{k-1}, p_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})},\\ -\frac{\tilde{\beta}_k}{\tilde{\gamma}_k} &= \beta_{k-2} = -\frac{a_k}{a_{k-1}}\frac{(xp_{k-2}, p_{k-1})}{(p_{k-2}, p_{k-2})},\\ \tilde{\beta}_k &= \tilde{\gamma}_k\frac{a_k}{a_{k-1}}\frac{(xp_{k-2}, p_{k-1})}{(p_{k-2}, p_{k-2})} = \frac{(xp_{k-2}, p_{k-1})}{(p_{k-2}, p_{k-2})} = \frac{(p_{k-2}, xp_{k-1})}{(p_{k-2}, p_{k-2})}\\ &= \frac{(p_{k-1}, p_{k-1})}{(p_{k-2}, p_{k-2})}, \quad \text{falls Hauptkoeffizient} = 1.\end{aligned}$$

Die skalare Multiplikation von (1.12) mit p_k ergibt

$$\begin{aligned}(\tilde{\gamma}_k p_k, p_k) &= (xp_{k-1}, p_k) + 0,\\ \tilde{\gamma}_k &= \frac{(xp_{k-1}, p_k)}{(p_k, p_k)} = \frac{(p_{k-1}, xp_k)}{(p_k, p_k)}\\ &= \frac{(p_k, p_k)}{(p_k, p_k)} = 1, \quad \text{falls Hauptkoeffizient} = 1.\end{aligned}$$

Falls also der Hauptkoeffizient gleich Eins ist, dann ist die Formel (1.12) mit der Beziehung (1.5) identisch.

Die Darstellung (1.12) dient auch zu einer speziellen Polynomauswertung.
Es gilt

$$\tilde{\gamma}_k p_k(0) \;=\; (0-\tilde{\alpha}_k)p_{k-1}(0) - \tilde{\beta}_k p_{k-2}(0). \tag{1.13}$$

Wenn $p_i(0) = 1$ für alle i ist, dann erhält man unmittelbar

$$\tilde{\gamma}_k \;=\; -(\tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k). \tag{1.14}$$

Da für die Orthogonalität in Funktionensystemen die Skalierung mit einem konstanten Faktor ohne Bedeutung ist, bietet sich zur Konstruktion des Orthogonalsystems der Polynome zunächst die Rekursionsvorschrift (1.5) mit dem Hauptkoeffizienten gleich Eins an. Die Umrechnung auf die anderen Darstellungen (1.8) bzw. (1.12) mit $a_k > 0,\ a_k \neq 1$, ist ohne Weiteres möglich.
Die Wahl und Skalierung mit a_k ist oft abhängig von dem Wunsch, dass z. B. a_k eine bestimmte Form hat, alle Polynomkoeffizienten ganzzahlig sein sollen, seine Norm gleich Eins ist oder das absolute Glied gleich Eins wird.

Beispiel 1.1 Anwendung von Satz 1.1 und der nachfolgenden Bemerkungen.

Seien das Intervall $[a,b] = [0,1]$, das Gewicht $\omega(x) = 1$, das Skalarprodukt gemäß (1.2) sowie für die skalierten orthogonalen Polynome

$$p_k(x) \;=\; \delta_0 x^k + \delta_1 x^{k-1} + \ldots + \delta_k \;=\; a_k x^k + b_k x^{k-1} + a_{k-2}^{(k)} x^{k-2} + \ldots, \quad \delta_0 = a_k = 1,$$

das Skalarprodukt $\gamma_k = (p_k, p_k) > 0$.
Es gelten $p_{-1}(x) = 0$ und $p_0(x) = a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ \gamma_0 = (p_0,p_0) = a_0^2 = 1$.
Die nächsten Polynome berechnen sich gemäß der Drei-Term-Rekursion (1.5)

$$p_k(x) \;=\; (x + \tilde{\beta}_{k-1})p_{k-1}(x) + \tilde{\beta}_{k-2}p_{k-2}(x)$$

mit den Koeffizienten $\tilde{\beta}_{k-1}$ und $\tilde{\beta}_{k-2}$ aus (1.6).

$$\begin{aligned}
p_1 \;&=\; (x+\tilde{\beta}_0)p_0 + \tilde{\beta}_{-1}p_{-1} = (x+\tilde{\beta}_0)p_0,\\
&\;\; \tilde{\beta}_0 = -\frac{(xp_0,p_0)}{(p_0,p_0)} = -\frac{(xp_0,p_0)}{\gamma_0} = -\int_0^1 x\,dx = -\frac{1}{2},\\
&\;\; \tilde{\beta}_{-1} = 0,\\[1ex]
p_1 \;&=\; (x-\tfrac{1}{2})p_0 + 0 \;=\; x - \tfrac{1}{2},\\
&\;\; \gamma_1 = (p_1,p_1) = \int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})^2\,dx = \tfrac{1}{12}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_2 &= (x+\tilde\beta_1)p_1 + \tilde\beta_0 p_0,\\
&\qquad \tilde\beta_1 = -\frac{(xp_1,p_1)}{(p_1,p_1)} = -\frac{(xp_1,p_1)}{\gamma_1} = -12\int_0^1 x(x-\tfrac{1}{2})^2\,dx = -\frac{1}{2},\\
&\qquad \tilde\beta_0 = -\frac{(p_1,p_1)}{(p_0,p_0)} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = -\frac{1}{12} < 0,\\
p_2 &= (x-\tfrac{1}{2})p_1 - \tfrac{1}{12}p_0 \;=\; x^2 - x + \tfrac{1}{6},\\
&\qquad \gamma_2 = (p_2,p_2) = \int_0^1 (x^2-x+\tfrac{1}{6})^2\,dx = \tfrac{1}{180}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_3 &= (x+\tilde\beta_2)p_2 + \tilde\beta_1 p_1,\\
&\qquad \tilde\beta_2 = -\frac{(xp_2,p_2)}{(p_2,p_2)} = -\frac{(xp_2,p_2)}{\gamma_2} = -180\int_0^1 x(x^2-x+\tfrac{1}{6})^2\,dx = -\frac{1}{2},\\
&\qquad \tilde\beta_1 = -\frac{(p_2,p_2)}{(p_1,p_1)} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{1}{15} < 0,\\
p_3 &= (x-\tfrac{1}{2})p_2 - \tfrac{1}{15}p_1 \;=\; x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{5}x - \tfrac{1}{20},\\
&\qquad \gamma_3 = (p_3,p_3) = \int_0^1 (x^3-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{3}{5}x-\tfrac{1}{20})^2\,dx = \tfrac{1}{2880},
\end{aligned}
$$

usw.

Nehmen wir die nicht skalierten Polynome $p_k(x) = a_k x^k + b_k x^{k-1} + a_{k-2}^{(k)} x^{k-2} + \ldots$ mit $\gamma_k = (p_k,p_k) > 0$ und $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = a_0$, $b_0 = 0$, $\gamma_0 = a_0^2$, dann berechnen sich die nächsten Polynome gemäß

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= (\alpha_0 x + \beta_0)p_0(x) + \beta_{-1}p_{-1}(x)\\
&= (\alpha_0 x + \beta_0)p_0(x),\\
&\qquad \alpha_0 = \frac{a_1}{a_0},\quad \beta_0 = \frac{a_1}{a_0}\Big(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_0}{a_0}\Big) = \frac{b_1}{a_0},\quad \beta_{-1} = 0,\\
p_1(x) &= \Big(\frac{a_1}{a_0}x + \frac{b_1}{a_0}\Big)p_0(x) \;=\; a_1 x + b_1,\\
&\qquad \gamma_1 = \int_0^1 (a_1x+b_1)^2\,dx = \tfrac{1}{3}a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2,\\
p_2(x) &= (\alpha_1 x + \beta_1)p_1(x) + \beta_0 p_0(x)\\
&= \left(\frac{a_2}{a_1}x + \frac{a_2}{a_1}\Big(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}\Big)\right)(a_1x+b_1) - \frac{a_2 a_0}{a_1^2}\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\,a_0,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= a_2x^2 + b_2x + \underbrace{(b_2 - a_2)\frac{b_1}{a_1} - a_2\left(\frac{1}{3} + 2\Big(\frac{b_1}{a_1}\Big)^2\right)}_{a_0^{(2)}} \\
&= a_2x^2 + b_2x + a_0^{(2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 = \int\limits_0^1 (a_2x^2 + b_2x + a_0^{(2)})^2\,dx = \frac{1}{90a_1^4}(8a_2^2a_1^4 + 15b_2a_2a_1^4 \\
-90a_2a_1^3b_1b_2 + 90a_2^2a_1^2b_1^2 + 30b_2^2a_1^4 + 90b_2^2a_1^3b_1 - 360b_2a_1^2a_2b_1^2 \\
+90b_1^2a_1^2b_2^2 - 360b_1^3a_1b_2a_2 + 360b_1^3a_1a_2^2 + 360a_2^2b_1^4)
\end{aligned}$$

usw.

Wir wählen nun solche Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten.

$$\begin{array}{ll}
p_{-1} = 0 & \\
p_0 = 1, & \gamma_0 = 1, \\
p_1 = 2x - 1, & \gamma_1 = \frac{1}{3}, \\
p_2 = 6x^2 - 6x + 1, & \gamma_2 = \frac{1}{5}, \\
p_3 = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1, & \gamma_3 = \frac{5}{36}, \\
\text{usw.} &
\end{array}$$

Damit berechnet man die jeweiligen zugehörigen Koeffizienten α_k und β_k und es gelten die Rekursionen

$$\begin{array}{lcl}
p_1 = (\alpha_0 x + \beta_0)p_0 + \beta_{-1}p_{-1} & = & (2x-1)\cdot 1 + 0, \\
p_2 = (\alpha_1 x + \beta_1)p_1 + \beta_0 p_0 & = & (3x - \frac{3}{2})\,(2x-1) - \frac{1}{2}\cdot 1, \\
p_3 = (\alpha_2 x + \beta_2)p_2 + \beta_1 p_1 & = & (\frac{10}{3}x - \frac{5}{3})\,(6x^2 - 6x + 1) - \frac{2}{3}(2x-1), \\
\text{usw.} & &
\end{array}$$

Es ist zu beachten, dass gemäß (1.9) z. B. die Größe $\beta_1 = \alpha_1(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1})$ in der Rekursionsformel für p_2 trotz gleicher Bezeichnung eine andere ist als $\beta_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ in p_3.

Ein wichtiger Aspekt bei orthogonalen Polynomen ist die Verteilung ihrer Nullstellen im Intervall (a, b). Diese Nullstellen finden z. B. auch Anwendung bei der Interpolation mit nicht äquidistanten Stützstellen sowie bei Quadraturformeln vom Gauß-Typ.

Satz 1.2 *Das orthogonale Polynom $p_k(x) \in \mathcal{P}_k(x)$ hat genau k einfache reelle Nullstellen in (a, b).*

Beweis. Seien $x_1, x_2, ..., x_m \in (a, b)$ die paarweise verschiedenen Punkte, wo das Polynom $p_k(x)$ das Vorzeichen wechselt. Zu zeigen ist, dass $m = k$ gilt.

An den Werten x_i hat das spezielle Knotenpunktpolynom

$$q(x) \ = \ \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)$$

seine Nullstellen und dort auch Vorzeichenwechsel.

Somit wechselt die Funktion $\omega(x)q(x)p_k(x),\ \omega(x) > 0$, im Intervall (a, b) nicht das Vorzeichen, woraus

$$(q, p_k) \ = \ \int_a^b \omega(x)q(x)p_k(x)dx \ \neq \ 0$$

folgt. Das Polynom p_k steht aber senkrecht auf $\mathcal{P}_{k-1}(x)$, damit kann q nicht den Grad $m \leq k - 1$ haben (was zu $(q, p_k) = 0$ führen würde).

q hat also den Grad $m \geq k$, genauer $m = k$. Damit ist $q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)$ und $x_1, x_2, ..., x_k \in (a, b)$ sind die einfachen Nullstellen von p_k. $\square$

Kapitel 2

Orthogonalsysteme von Polynomen

2.1 Die orthogonalen Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome $P_k(x)$ bilden ein OGS mit dem Gewicht $\omega(x) = 1$ auf $[-1, 1]$ und dem Skalarprodukt

$$(P_k, P_l) \;=\; \int_{-1}^{1} P_k(x) P_l(x)\, dx \;=\; \frac{2}{2k+1}\delta_{kl} \;=\; \gamma_k \delta_{kl}. \tag{2.1}$$

Damit sind die Polynome

$$\sqrt{\frac{2k+1}{2}}P_k(x)$$

ein Orthonormalsystem (ONS).
Sie ermittelt man praktisch durch die Orthogonalisierung des Systems der linear unabhängigen Polynome $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$.

Einige ihrer Eigenschaften sollen nur aufgelistet werden.

Explizite Formel:

$$P_k(x) \;=\; \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.2}$$

Hauptkoeffizient:

$$a_k \;=\; \frac{(2k)!}{2^k\,(k!)^2}. \tag{2.3}$$

Die explizite Darstellung (2.2) soll nun hergeleitet werden.

Die Orthogonalität der Legendre-Polynome gemäß (2.1) und ihre Konstruktion bedeutet für $m < k$ gleichzeitig die Beziehungen $(P_k, P_m) = 0$, $(P_k, x^m) = 0$ und $(P_k, p) = 0,\ p \in \mathcal{P}_m(x)$, insbesondere $(P_k, p) = 0,\ p \in \mathcal{P}_{k-1}(x)$.
Wir benutzen diese Zusammenhänge, um die normierten Legendre-Polynome $L_k(x) = P_k(x)/\|P_k\|$ zu bestimmen.
Dazu nehmen wir den Ansatz (siehe [1])

$$L_k(x) \;=\; \frac{\varphi_k(x)}{\|\varphi_k\|}, \quad \varphi_k(x) = \frac{d^k\, \zeta_k(x)}{dx^k} = \zeta_k^{(k)}(x)$$

mit den Stammfunktionen

$$\zeta_k^{(k-m)}(x) \;=\; \int\limits_{-1}^{x} \zeta_k^{(k-m+1)}(t)\, dt, \quad \zeta_k^{(k-m)}(-1) = 0, \quad 1 \le m \le k.$$

Sei nun $p(x) \in \mathcal{P}_{k-1}(x)$. Bei wiederholter partieller Integration erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{+1} \underbrace{p(t)}_{u}\, \underbrace{\zeta_k^{(k)}(t)}_{v'}\, dt \;&=\; p(t)\zeta_k^{(k-1)}(t)\Big|_{-1}^{+1} - \int\limits_{-1}^{+1} p'(t)\zeta_k^{(k-1)}(t)\, dt \\
&=\; p(t)\zeta_k^{(k-1)}(t)\Big|_{-1}^{+1} - p'(t)\zeta_k^{(k-2)}(t)\Big|_{-1}^{+1} + \int\limits_{-1}^{+1} p''(t)\zeta_k^{(k-2)}(t)\, dt \\
&=\; \ldots \\
&=\; p(t)\zeta_k^{(k-1)}(t)\Big|_{-1}^{+1} - p'(t)\zeta_k^{(k-2)}(t)\Big|_{-1}^{+1} + p''(t)\zeta_k^{(k-3)}(t)\Big|_{-1}^{+1} - \ldots \\
&\qquad\qquad + (-1)^{k-1}\; p^{(k-1)}(t)\zeta_k(t)\Big|_{-1}^{+1}, \quad p^{(k)}(t) = 0.
\end{aligned}$$

Die Orthogonalitätsforderung $(\varphi_k(x), x^m) = (\zeta_k^{(k)}(x), x^m) = 0,\ m = 0, 1, \ldots, k-1$, führt bei $m = 0$, d. h. $p(x) = 1$, zunächst zu

$$0 \;=\; \int\limits_{-1}^{+1} 1 \cdot \zeta_k^{(k)}(t)\, dt \;=\; 1 \cdot \zeta_k^{(k-1)}(t)\Big|_{-1}^{+1} \;=\; \zeta_k^{(k-1)}(+1) - \underbrace{\zeta_k^{(k-1)}(-1)}_{=0} \;=\; \zeta_k^{(k-1)}(+1).$$

Damit gelten für $m = 1$ bzw. $p(x) = x$ die Beziehungen $(\zeta_k^{(k)}(x), x) = 0$ und

$$0 = \int\limits_{-1}^{+1} t\, \zeta_k^{(k)}(t)\, dt = t\, \zeta_k^{(k-1)}(t)\Big|_{-1}^{+1} - t'\, \zeta_k^{(k-2)}(t)\Big|_{-1}^{+1} = 0 - 0 - [\zeta_k^{(k-2)}(+1) - \underbrace{\zeta_k^{(k-2)}(-1)}_{=0}],$$

$$0 = \zeta_k^{(k-2)}(+1).$$

Analog kann man bei $m = 2$ vorgehen und erhält $0 = \zeta_k^{(k-3)}(+1)$.

Mit $\zeta_k^{(k-m)}(-1) = 0$ genügen die Werte $\zeta_k^{(k-m)}(+1)$ der Gleichung

$$0 \;=\; \sum_{i=0}^{m} \left((-1)^i \, \zeta_k^{(k-1-i)}(+1) \prod_{j=m(-1)}^{m+1-i} j \right), \quad m = 0, 1, ..., k-1,$$

so dass allgemein $0 = \zeta_k^{(k-m)}(+1),\; m = 1, 2, ..., k$, folgt.
Damit ist $\zeta_k(x)$ also von der Form

$$\zeta_k(x) \;=\; c_k(x^2-1)^k$$

mit der Normierungskonstanten c_k.
Daraus ergeben sich die orthogonalen Polynome

$$\varphi_k(x) \;=\; c_k \, \frac{d^k\,(x^2-1)^k}{dx^k}$$

sowie das Orthogonalsystem der Polynome

$$\frac{k!}{(2k)!} \, \frac{d^k\,(x^2-1)^k}{dx^k} \;=\; x^k + ...$$

mit den Hauptkoeffizienten Eins.
Aus der Normierungsforderung $\|L_k\| = 1$ bestimmt man die Konstante c_k gemäß

$$1 = \int_{-1}^{+1} [\varphi_k(t)]^2 \, dt = c_k^2 \int_{-1}^{+1} \left[\frac{d^k\,(t^2-1)^k}{dt^k} \right]^2 dt = c_k^2 \int_{-1}^{+1} [\xi_k^{(k)}(t)]^2 \, dt, \quad \xi_k(t) = (t^2-1)^k.$$

Die Auswertung des Integrals in der Formel erfordert wiederum mehrfach partielle Integration und berücksichtigt $\xi_k^{(j)}(\pm 1) = 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} [\xi_k^{(k)}(t)]^2 \, dt \;&=\; \Big[\xi_k^{(k-1)}(t)\xi_k^{(k)}(t) - \xi_k^{(k-2)}(t)\xi_k^{(k+1)}(t) + ... + (-1)^{k-1}\xi_k^{(0)}(t)\xi_k^{(2k-1)}(t) \Big]_{-1}^{+1} \\
&\quad + (-1)^k \int_{-1}^{+1} \xi_k(t)\xi_k^{(2k)}(t) \, dt \\
&=\; (-1)^k (2k)! \int_{-1}^{+1} \xi_k(t) \, dt \\
&=\; (-1)^k (2k)! \underbrace{\int_{-1}^{+1} (t^2-1)^k \, dt}_{I_k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_k = \int_{-1}^{+1} (t^2-1)^k\,dt &= \int_{-1}^{+1} (t^2-1)(t^2-1)^{k-1}\,dt \\
&= \int_{-1}^{+1} t^2(t^2-1)^{k-1}\,dt - I_{k-1} \\
&= \int_{-1}^{+1} \underbrace{\tfrac{1}{2}t}_{u}\ \underbrace{2t(t^2-1)^{k-1}}_{v'}\,dt - I_{k-1} \\
&= \tfrac{1}{2}t\,\tfrac{1}{k}(t^2-1)^k\Big|_{-1}^{+1} - \tfrac{1}{2k}\int_{-1}^{+1}(t^2-1)^k\,dt - I_{k-1} \\
&= -\tfrac{1}{2k} I_k - I_{k-1}, \\
I_k &= -\tfrac{2k}{2k+1} I_{k-1} \\
&= (-1)^k \tfrac{2k}{2k+1}\tfrac{2k-2}{2k-1}\cdot \ldots \cdot \tfrac{2}{3} I_0, \quad I_0 = 2 \\
&= (-1)^k \tfrac{2^k\,k!}{(2k+1)(2k-1)\cdot\ldots\cdot 3}\,2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun die Normierungskonstante

$$\begin{aligned}
c_k &= \left\{\int_{-1}^{+1} [\xi_k^{(k)}(t)]^2\,dt\right\}^{-1/2} \\
&= \left\{(-1)^k(2k)!\,(-1)^k \tfrac{2^k\,k!}{(2k+1)(2k-1)\cdot\ldots\cdot 3}\,2\right\}^{-1/2} \\
&= \left\{\tfrac{2}{2k+1}\ \tfrac{2^k\,k!\,(2k)!}{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\ldots\cdot 3}\right\}^{-1/2} \\
&= \left\{\tfrac{2}{2k+1}\ \tfrac{2^k\,k!\,(2k)(2k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}\right\}^{-1/2} \\
&= \left\{\tfrac{2}{2k+1}\,2^k\,k!\,(2k)(2k-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2\right\}^{-1/2} \\
&= \left\{\tfrac{2}{2k+1}\,(2^k\,k!)^2\right\}^{-1/2} \\
&= \sqrt{\tfrac{2k+1}{2}}\ \tfrac{1}{2^k\,k!}.
\end{aligned}$$

Die normierten Legendre-Polynome sind damit

$$L_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\,\frac{1}{2^k\,k!}\,\frac{d^k\,(x^2-1)^k}{dx^k}, \quad (L_k, L_k) = 1.$$

Man verwendet jedoch im Allgemeinen ihre nicht normierte Darstellung $P_k(x)$ wie in (2.2) mit $(P_k, P_k) = \frac{2}{2k+1}$.

Rekursionsformel, Drei-Term-Rekursion:

$$P_k(x) \;=\; \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x),\; k=2,3,...,\; P_0(x)=1,\; P_1(x)=x. \quad (2.4)$$

Wir wollen hier den Nachweis der Drei-Term-Rekursion führen.
Als Ansatz zum OGS $\{P_k\}$ nehmen wir

$$xP_k(x) \in \mathcal{P}_{k+1}(x), \quad xP_k(x) \;=\; a_0 P_{k+1}(x) + a_1 P_k(x) + a_2 P_{k-1}(x) + ... + a_{k+1} P_0(x)$$

und bestimmen der Reihe nach seine Koeffizienten.
Zuerst zeigen wir $a_3 = a_4 = ... = a_{k+1} = 0$. Sei also $m \le k-2$.
Wegen $(P_k, P_m) = \gamma_k \delta_{km}$ und $(P_k, Q) = 0$ für Grad$(Q) < k$ folgen

$$0 = (P_k, xP_m) = (xP_k, P_m) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j (P_{k+1-j}, P_m) = a_{k+1-m}(P_m, P_m)$$

und somit $a_{k+1-m} = 0$ für $m = k-2, k-3, ..., 0$.
Damit erhält man schon die verkürzte Form (verkürzte Rekursion)

$$xP_k(x) \;=\; a_0 P_{k+1}(x) + a_1 P_k(x) + a_2 P_{k-1}(x).$$

$P_k(x)$ besitzt entweder nur gerade oder ungerade Potenzen von x, da einerseits das Polynom $(x^2-1)^k$ nur gerade Potenzen hat, die andererseits durch eine gerade (ungerade) Anzahl von Differentiationen in gerade (ungerade) Potenzen übergehen.
Das Polynom $xP_k(x)$ enthält kein Glied mit x^k, das jedoch in $P_k(x)$ auftritt, also muss $a_1 = 0$ sein. Damit ist

$$xP_k(x) \;=\; a_0 P_{k+1}(x) + a_2 P_{k-1}(x).$$

Der Koeffizientenvergleich auf beiden Seiten bei x^{k+1} liefert

$$\frac{(2k)!}{2^k\,(k!)^2} \;=\; a_0 \frac{(2(k+1))!}{2^{k+1}\,((k+1)!)^2}, \quad \text{also} \quad a_0 \;=\; \frac{k+1}{2k+1}.$$

Die Berechnung von a_2 ist mit zwei Varianten möglich.
Das Einsetzen von $x = 1$ in die verkürzte Formel bei Kenntnis von $P_k(1) = 1 \;\forall\; k$ ergibt sofort

$$1 = a_0 + a_2 \quad \text{und} \quad a_2 = 1 - a_0 = \frac{k}{2k+1}.$$

Anderfalls benutzt man aus den Formeln (2.6) die von $\beta_{k-2} = -\frac{k-1}{k}$, was hier bei Verschiebung des Index um Eins zu $\beta_{k-1} = -\frac{k}{k+1} = -\frac{a_2}{a_0}$ führt und damit das gleiche Ergebnis

$$a_2 \;=\; a_0 \frac{k}{k+1} = \frac{k}{2k+1}$$

liefert.

Das modifizierte Legendre-Polynom mit Hauptkoeffizient 1 ist $\bar{P}_k(x) = \frac{1}{a_k} P_k(x)$. Die Norm von $P_k(x)$ folgt aus

$$\gamma_k \;=\; \|P_k\|_{2,1}^2 \;=\; (P_k, P_k) \;=\; \int\limits_{-1}^{1} P_k^2(x)\,dx \;=\; \frac{2}{2k+1}. \tag{2.5}$$

Die Rekursionskoeffizienten erhält man aus den Darstellungen

$$\begin{aligned}
P_k &= (\alpha_{k-1}x + \beta_{k-1})P_{k-1} + \beta_{k-2}P_{k-2}\\
&= a_k x^k + b_k x^{k-1} + a_{k-2}^{(k)} x^{k-2} + ... + a_0^{(k)},\ k = 1, 2, ...,\\
\alpha_{k-1} &= \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{2k-1}{k},\\
\beta_{k-1} &= \alpha_{k-1}\left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}}\right) = 0,\quad b_{k-1} \text{ ist 2. Koeffizient von } P_{k-1} \text{ bei } x^{k-2},\\
\beta_{k-2} &= -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_{k-2}}\frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} = -\frac{a_k a_{k-2}}{a_{k-1}^2}\frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} = -\frac{k-1}{k} < 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Summenformel hat die Form

$$\begin{aligned}
P_k(x) &= \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^i\,(2k-2i)!}{i!\,(k-i)!\,(k-2i)!} x^{k-2i},\\
P_k(1) &= 1,\ P_k(-1) \;=\; (-1)^k,\quad |P_k(x)| \le 1 \text{ für } |x| \le 1.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Die ersten Polynome sind

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1,\\
P_1 &= x,\\
P_2 &= \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2},\\
P_3 &= \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x,\\
P_4 &= \tfrac{35}{8}x^4 - \tfrac{15}{4}x^2 + \tfrac{3}{8},\\
P_5 &= \tfrac{63}{8}x^5 - \tfrac{35}{4}x^3 + \tfrac{15}{8}x,\\
P_6 &= \tfrac{231}{16}x^6 - \tfrac{315}{16}x^4 + \tfrac{105}{16}x^2 - \tfrac{5}{16},\\
P_7 &= \tfrac{429}{16}x^7 - \tfrac{693}{16}x^5 + \tfrac{315}{16}x^3 - \tfrac{35}{16}x,\\
P_8 &= \tfrac{6435}{128}x^8 - \tfrac{3003}{32}x^6 + \tfrac{3465}{64}x^4 - \tfrac{315}{32}x^2 + \tfrac{35}{128},\\
P_9 &= \tfrac{12155}{128}x^9 - \tfrac{6435}{32}x^7 + \tfrac{9009}{64}x^5 - \tfrac{1155}{32}x^3 + \tfrac{315}{128}x.
\end{aligned}$$

Die Legendre-Polynome $P_k(x)$ sind Lösung der RWA

$$\begin{aligned}
((1-x^2)y')' + (k-1)ky &= (1-x^2)y'' - 2xy + (k-1)ky \;=\; 0,\\
&\quad x \in [-1,1],\ |y(\pm 1)| = 1.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Andere Darstellungen bzw. Rekursionsformeln, u. a. mit seiner Ableitung:

$$
\begin{aligned}
(k+1)P_{k+1} &= (2k+1)xP_k - kP_{k-1},\ k=1,2,...,\quad P_0=1,\ P_1=x,\\
(k+1)P_{k+1} &= (2k+1)xP_k - kP_{k-1},\ k=0,1,...,\quad P_{-1}=0,\ P_0=1,\\
(2k+3)xP_{k+1} &= (k+2)P_{k+2} + (k+1)P_k, \qquad (2.9)\\
(1-x^2)P'_{k+1} &= (k+2)xP_{k+1} - (k+2)P_{k+2}\\
&= (k+1)P_k - (k+1)xP_{k+1}.
\end{aligned}
$$

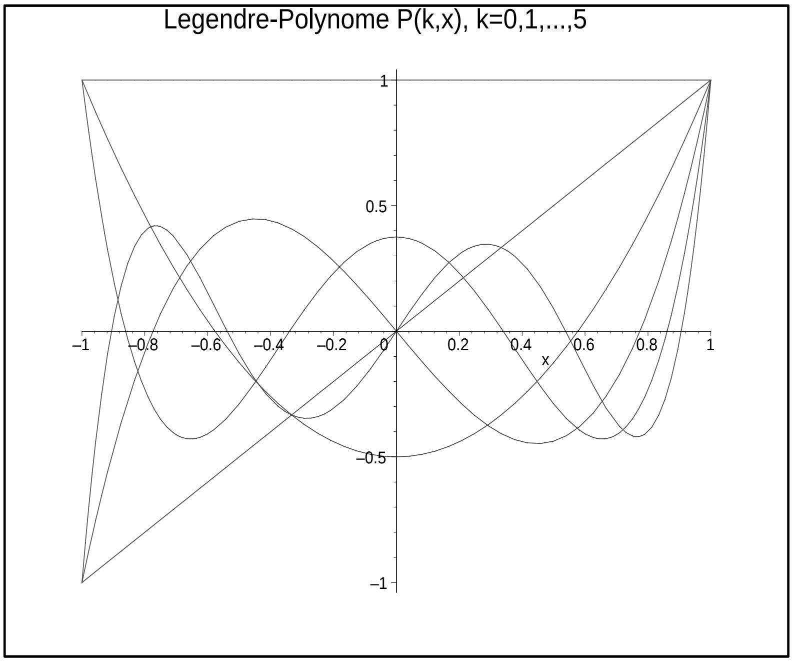

Abb. 2.1 Grafik der ersten Legendre-Polynome $P_k(x),\ k=0,1,...,5$

Übersicht zu den Nullstellen der Legendre-Polynome

$P_{k+1}(x)$ hat $k+1$ paarweise verschiedene Nullstellen $x_0, x_1, ..., x_k,\ x_i \in (-1,1)$, mit $x_i = -x_{k-i} < 0$.

$$
\begin{aligned}
k=0,\quad P_1:&\quad x_0 = 0,\\
k=1,\quad P_2:&\quad x_{0,1} = \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0.577\,350\,269\,189\,625\,764,\\
k=2,\quad P_3:&\quad x_{0,2} = \pm\sqrt{\tfrac{3}{5}} = \pm 0.774\,596\,669\,241\,483\,377,\quad x_1 = 0,\\
k=3,\quad P_4:&\quad x_{0,3} = \pm\sqrt{\tfrac{15+2\sqrt{30}}{35}} = \pm 0.861\,136\,311\,594\,052\,575,\\
&\quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\tfrac{15-2\sqrt{30}}{35}} = \pm 0.339\,981\,043\,584\,856\,264,\\
k=4,\quad P_5:&\quad x_{0,4} = \pm\sqrt{\tfrac{35+2\sqrt{70}}{63}} = \pm 0.906\,179\,845\,938\,663\,993,\\
&\quad x_{1,3} = \pm\sqrt{\tfrac{35-2\sqrt{70}}{63}} = \pm 0.538\,469\,310\,105\,683\,091,\quad x_2 = 0.
\end{aligned}
$$

2.2 Die orthogonalen Tschebyscheff-Polynome

Im Zusammenhang mit Konvergenzfragen zum Verfahren der konjugierten Gradienten (CG) ist im Teil I Abschnitt 3.6.4 das orthogonale Tschebyscheff-Polynom 1. Art verwendet worden.
Seine explizite Darstellung lautet

$$T_k(x) \; = \; \cos(k \; \arccos(x)), \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{2.10}$$

Dass es sich hierbei wirklich um ein Polynom handelt, sieht man zunächst nur an den ersten Polynomen $T_0(x) = \cos(0 \cdot \arccos(x)) = 1$ und $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$. Die weiteren Polynome erkennt man durch das Auffinden einer rekursiven Beziehung zwischen diesen.
Ein einfacher Zugang zu den Tschebyscheff-Polynomen $T_k(x)$ erfolgt über die Anwendung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen $\{\cos(kz), \sin(kz)\}$ gemäß

$$\begin{aligned} \cos((k+1)z) &= \cos(kz)\cos(z) - \sin(kz)\sin(z), \\ \cos((k-1)z) &= \cos(kz)\cos(z) + \sin(kz)\sin(z), \\ \sin((k \pm 1)z) &= \sin(kz)\cos(z) \pm \cos(kz)\sin(z), \end{aligned} \tag{2.11}$$

um bei Funktionsberechnungen damit auf bekannte Auswertungen zurückzugreifen. Bezieht man mehr vorhergehende Stufen $k-2, \; k-3$ usw. ein, kann man eventuell noch günstiger auswerten.
Aus der Addition der 1. und 2. trigonometrischen Beziehung in (2.11) erhält man die Drei-Term-Rekursion für die Funktionen $\varphi_k(z) = \cos(kz)$ gemäß

$$\begin{aligned} \cos((k+1)z) + \cos((k-1)z) &= 2\cos(kz)\cos(z), \\ \cos((k+1)z) &= 2\cos(kz)\cos(z) - \cos((k-1)z), \\ \varphi_{k+1}(z) &= 2\cos(z)\,\varphi_k(z) - \varphi_{k-1}(z), \end{aligned} \tag{2.12}$$

die mit

$$\begin{aligned} x &= \cos(z), \\ z &= \arccos(x), \\ \varphi_k(z) &= \cos(kz) \; = \; \cos(k \; \arccos(x)) \; = \; T_k(x) \end{aligned}$$

zur Rekursionsformel der Tschebyscheff-Polynome

$$T_k(x) \; = \; 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, \ldots, \; T_0(x) = 1, \; T_1(x) = x, \tag{2.13}$$

führt. Die polynomiale Eigenschaft ist damit offensichtlich.

Der übliche Fall ist der, das Tschebyscheff-Polynom damit als reelle Abbildung $T_k \; : \; [-1, 1] \; \to \; [-1, 1]$ zu verwenden.

Wir stellen fest, dass die Tschebyscheff-Polynome ein orthogonales Funktionensystem mit dem Gewicht $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ auf $[-1,1]$ bilden.
Es gelten die Orthogonalitätsbedingungen gemäß

$$\begin{aligned}
x &= \cos(z), \quad z \;=\; \arccos(x), \\
&\quad \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1, \quad \sin(z) = \sqrt{1-\cos^2(z)}, \\
dx &= -\sin(z)\,dz, \\
\frac{1}{\sin(z)}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; -dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_k\delta_{kl} \;=\; (T_k, T_l) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) T_l(x)\,dx \\
&= -\int_{\pi}^{0} \cos(kz)\cos(lz)\,dz \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos(kz)\cos(lz)\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [\cos((k-l)z) + \cos((k+l)z)]\,dz \\
&= \begin{cases} \pi, & \text{falls } k = l = 0, \\ \pi/2, & \text{falls } k = l \neq 0, \\ 0, & \text{falls } k \neq l. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Damit sind die Polynome $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ und $\frac{1}{\sqrt{\pi/2}} T_k(x),\ k = 1, 2, ...,$ ein ONS.

Weitere wichtige Eigenschaften sind die Folgenden.

Explizite Formel:

$$T_k(x) \;=\; \cos(k \arccos(x)) \;=\; (-1)^k \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2k-1)!!} \frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^{k-1/2}. \tag{2.15}$$

Hauptkoeffizient:

$$a_k \;=\; 2^{k-1}, \; k \geq 1, \quad a_0 = 1. \tag{2.16}$$

Rekursionsformel, Drei-Term-Rekursion:

$$T_k(x) \;=\; 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, ..., \quad T_0(x) = 1, \; T_1(x) = x. \tag{2.17}$$

Möchte man die Rekursionvorschrift mit $k = 1$ beginnen, so ist wegen der abweichenden Norm $\gamma_0 = \pi$ dafür die extra Formel $T_1 = xT_0 - 0 \cdot T_{-1}$, $T_{-1} = 0$, $T_0 = 1$, zu notieren.

Das modifizierte Tschebyscheff-Polynom mit Hauptkoeffizient 1 ist $\bar{T}_k(x) = \frac{1}{a_k} T_k(x)$.

Die Norm von $T_k(x)$ folgt aus

$$\gamma_k \;=\; \|T_k\|_{2,\omega}^2 \;=\; (T_k, T_k) \;=\; \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k^2(x)\, dx = \begin{cases} \pi, & \text{falls } k = 0, \\ \pi/2, & \text{falls } k > 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Die Rekursionskoeffizienten, ausgenommen der erste Schritt, erhält man aus den Darstellungen

$$\begin{aligned} T_k &= (\alpha_{k-1} x + \beta_{k-1}) T_{k-1} + \beta_{k-2} T_{k-2} \\ &= a_k x^k + b_k x^{k-1} + a_{k-2}^{(k)} x^{k-2} + ... + a_0^{(k)}, \quad k = 2, 3, ..., \\ \alpha_{k-1} &= \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{2^{k-1}}{2^{k-2}} = 2, \quad k \geq 2, \\ \beta_{k-1} &= \alpha_{k-1} \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} \right) = 0, \quad b_{k-1} \text{ ist 2. Koeffizient von } T_{k-1} \text{ bei } x^{k-2}, \\ \beta_{k-1} &= -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_{k-2}} \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} = -\frac{a_k a_{k-2}}{a_{k-1}^2} \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} = -1 \;<\; 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die Summenformel, deren Herleitung sich aus der Formel von Moivre

$$(e^{iz})^n = (\cos(z) + i\, \sin(z))^n = \cos(nz) + i\, \sin(nz) = e^{inz}$$

(siehe [2]) ergibt, hat die Form

$$\begin{aligned} T_k(x) &= x^k - \binom{k}{2} x^{k-2}(1-x^2) \\ &\quad + \binom{k}{4} x^{k-4}(1-x^2)^2 - \binom{k}{6} x^{k-6}(1-x^2)^3 \pm ... \\ &\quad \pm \begin{cases} \binom{k}{k-1} x^1 (1-x^2)^{(k-1)/2}, & \text{falls } k \text{ ungerade}, \\ \binom{k}{k} x^0 (1-x^2)^{k/2}, & \text{falls } k \text{ gerade}. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.20}$$

$T_k(x)$ ist eine gerade Funktion für k gerade ($T_k(-x) = T_k(x)$), für ungeraden Index gilt $T_k(-x) = -T_k(x)$.

Ihre explizite Form (Normalform) bzw. Produktdarstellung mit den Nullstellen sind $T_k(x) \;=\; 2^{k-1} x^k - a_{k-2} x^{k-2} + a_{k-4} x^{k-4} - ... \;=\; 2^{k-1}(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{k-1})$.

Die ersten Polynome sind

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 1,\\
T_1 &= x,\\
T_2 &= 2x^2-1,\\
T_3 &= 4x^3-3x,\\
T_4 &= 8x^4-8x^2+1,\\
T_5 &= 16x^5-20x^3+5x,\\
T_6 &= 32x^6-48x^4+18x^2-1,\\
T_7 &= 64x^7-112x^5+56x^3-7x,\\
T_8 &= 128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1,\\
T_9 &= 256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x.
\end{aligned}
$$

Die Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$ sind Lösung der RWA

$$(1-x^2)y''-xy'+k^2y \;=\; 0,\quad x\in[-1,1],\;\; |y(\pm 1)|=1. \tag{2.21}$$

Andere Darstellungen von $T_k(x)$ bzw. Rekursionsformeln bei Einbeziehung der Additionstheoreme (2.11), u. a. mit seiner Ableitung:

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= \cos((k+1)\arccos(x)) \;=\; 2xT_k-T_{k-1},\quad k=1,2,...,\\
& \quad x=\cos(z),\quad z=\arccos(x),\\
& \quad \sin(z)=\sqrt{1-\cos^2(z)}=\sqrt{1-x^2},\\
T'_k &= \tfrac{k}{\sqrt{1-x^2}}\sin(k\arccos(x)) \;=\; \tfrac{k}{\sin(z)}\sin(kz),\\
T'_{k\pm 1} &= \tfrac{k\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}\sin((k\pm 1)\arccos(x)) \;=\; \tfrac{k\pm 1}{\sin(z)}\sin((k\pm 1)z),\\
T_{k+2} &= \cos((k+2)\arccos(x))\\
&= \cos((k+1)z)\cos(z)-\sin((k+1)z)\sin(z),\\
&= xT_{k+1}-\tfrac{\sqrt{1-x^2}}{k+1}T'_{k+1}\sqrt{1-x^2},\\
&= xT_{k+1}-\tfrac{1-x^2}{k+1}T'_{k+1},\\
\tfrac{1-x^2}{k}T'_k &= xT_k-T_{k+1},\\
T'_k &= \tfrac{k}{1-x^2}(xT_k-T_{k+1}) \;=\; \tfrac{k}{1-x^2}(-xT_k+T_{k-1}),\\
2T_k &= \tfrac{1}{k+1}T'_{k+1}-\tfrac{1}{k-1}T'_{k-1}.
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

Die letzte Beziehung gilt wegen $T'_{k\pm 1} = \frac{k\pm 1}{\sin(z)} \sin((k\pm 1)z)$ und

$$\begin{aligned}
\sin((k+1)z) - \sin((k-1)z) &= \sin(z)(\tfrac{1}{k+1}T'_{k+1} - \tfrac{1}{k-1}T'_{k-1}),\\
2\sin(z)\cos(kz) &= ...,\\
2\sin(z)\,T_k &= \sin(z)(\tfrac{1}{k+1}T'_{k+1} - \tfrac{1}{k-1}T'_{k-1}).
\end{aligned}$$

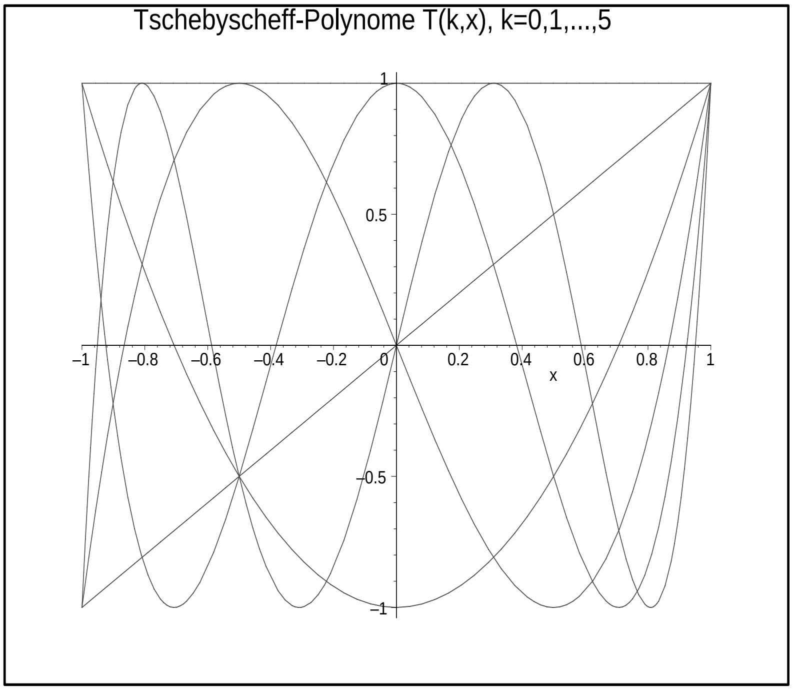

Abb. 2.2 Grafik der ersten Tschebyscheff-Polynome $T_k(x),\ k = 0, 1, ..., 5$

Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome

$T_{k+1}(x)$ hat $k+1$ paarweise verschiedene Nullstellen $x_0, x_1, ..., x_k,\ x_i \in (-1, 1)$,
$x_i = -x_{k-i} < 0$,

$$x_i \;=\; -\cos\left(\frac{2i+1}{2k+2}\pi\right), \quad i = 0, 1, ..., k. \tag{2.23}$$

Übersicht zu den Nullstellen

$$k,\ \ T_{k+1}:\ \ x_i \;=\; -\cos(\tfrac{2i+1}{2k+2}\pi),\ i = 0, 1, ..., k.$$

$$\begin{aligned}
k=0,\ \ T_1:\ \ & x_0 = -\cos(\tfrac{\pi}{2}) && = 0,\\
k=1,\ \ T_2:\ \ & x_0 = -\cos(\tfrac{\pi}{4}) && = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} = -0.707\,106\,781\,186\,547\,524,\\
& x_1 = -\cos(\tfrac{3\pi}{4}) && = -x_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 2,\quad T_3:\quad & x_0 = -\cos(\tfrac{\pi}{6}) && = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} = -0.866\,025\,403\,784\,438\,647,\\
& x_1 = -\cos(\tfrac{\pi}{2}) && = 0,\\
& x_2 = -\cos(\tfrac{5\pi}{6}) && = -x_0,\\
k = 3,\quad T_4:\quad & x_0 = -\cos(\tfrac{\pi}{8}) && = -\tfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = -0.923\,879\,532\,511\,286\,756,\\
& x_1 = -\cos(\tfrac{3\pi}{8}) && = -\tfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = -0.382\,683\,432\,365\,089\,772,\\
& x_2 = -\cos(\tfrac{5\pi}{8}) && = -x_1,\\
& x_3 = -\cos(\tfrac{7\pi}{8}) && = -x_0,\\
k = 4,\quad T_5:\quad & x_0 = -\cos(\tfrac{\pi}{10}) && = -\tfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = -0.951\,056\,516\,295\,153\,572,\\
& x_1 = -\cos(\tfrac{3\pi}{10}) && = -\tfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = -0.587\,785\,252\,292\,473\,129,\\
& x_2 = -\cos(\tfrac{5\pi}{10}) && = 0,\\
& x_3 = -\cos(\tfrac{7\pi}{10}) && = -x_1,\\
& x_4 = -\cos(\tfrac{9\pi}{10}) && = -x_0.
\end{aligned}$$

Dazu notieren wir noch die folgenden Betrachtungen zu den Nullstellen unter Verwendung von (2.22).

$$\begin{aligned}
T_{k+1}(x_i) &= \cos((k+1)\arccos(x_i)) = 0,\\
&\ \Rightarrow \sin((k+1)\arccos(x_i)) = \pm 1,\\
T'_{k+1}(x_i) &= \tfrac{k+1}{\sqrt{1-x_i^2}}\sin((k+1)\arccos(x_i)) \;=\; \pm\tfrac{k+1}{\sqrt{1-x_i^2}},\\
T_{k+2}(x_i) &= 2x_iT_{k+1}(x_i) - T_k(x_i) \;=\; -T_k(x_i),\\
T_{k+2}(x_i) &= x_iT_{k+1}(x_i) - \tfrac{\sqrt{1-x_i^2}}{k+1}\,T'_{k+1}(x_i)\,\sqrt{1-x_i^2}\\
&= -\tfrac{\sqrt{1-x_i^2}}{k+1}\,T'_{k+1}(x_i)\,\sqrt{1-x_i^2},\\
-T_k(x_i) &= T_{k+2}(x_i) \;=\; -\tfrac{\sqrt{1-x_i^2}}{k+1}\,T'_{k+1}(x_i)\,\sqrt{1-x_i^2}\\
&= \mp\sqrt{1-x_i^2}\\
&= \mp\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x_i))},\\
T_k(x_i) &= \pm\sin(\arccos(x_i)) \;=\; \pm\sin(\tfrac{2i+1}{2k+2}\pi).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Zuweilen ist noch eine Transformation des Intervalls $[-1,1]$ auf das Intervall $[0,1]$ sinnvoll, also $x = 2t-1,\ t \in [0,1]$. Wegen

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{dT_n(2t-1)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dT_n(2t-1)}{dt}$$

notieren wir die Rekursion $2T_k = \frac{1}{k+1}T'_{k+1} - \frac{1}{k-1}T'_{k-1}$ in der Form

$$4T_n(2t-1) = \frac{1}{n+1}\frac{dT_{n+1}(2t-1)}{dt} - \frac{1}{n-1}\frac{dT_{n-1}(2t-1)}{dt}, \quad n > 1.$$

Für die ersten beiden Tschebyscheff-Polynome haben wir extra Formeln

$$4T_1(2t-1) = \frac{1}{2}\frac{dT_2(2t-1)}{dt}, \quad 2T_0(2t-1) = \frac{dT_1(2t-1)}{dt}.$$

Einige zusätzliche Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome

(a) Das Tschebyscheff-Polynom 2. Art ist $U_k(x) = \frac{1}{k+1}T'_{k+1}(x)$.

(b) $\int\limits_{-1}^{1} T_k^2(x)dx = 1 - \frac{1}{4k^2-1} \begin{cases} = 2 \text{ für } k = 0, \\ < 1 \text{ für } k \geq 1 \end{cases}$.

(c) $\int\limits_{0}^{\pi} T_k(\cos(z))\cos(iz)dz = 0, \quad i = 0,1,...,k-1.$

(d) $T_{i+j}(x) + T_{|i-j|}(x) = 2T_i(x)\,T_j(x).$

(e) $|T_k(x)| \leq 1$ für $x \in [-1,1]$ und alle k, $\|T_k(x)\|_\infty = 1,\ |x| \leq 1.$

(f) $T_k(x),\ k \geq 1$, hat im Intervall $[-1,1]$ $k+1$ Stellen mit Extremwerten ± 1.
Dies sind

$$\bar{x}_i = -\cos\left(\tfrac{i\pi}{k}\right),\ i = 0,1,...,k, \text{ mit } T_k(\bar{x}_i) = (-1)^{k-i},\ T_k(1) = 1. \qquad (2.25)$$

(g) Minimax-Eigenschaft
Sei $p_k(x)$ ein beliebiges Polynom k-ten Grades mit dem Koeffizienten 1 bei x^k.
Dann gilt

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |2^{1-k}\,T_k(x)| \leq \max_{-1\leq x\leq 1} |p_k(x)|. \qquad (2.26)$$

Die geringe Abweichung der Tschebyscheff-Polynome von der x-Achse entsteht durch ihr oszillierendes Verhalten sowie die Verteilung der Nullstellen und damit der Extremalstellen im Intervall $[-1,1]$.

(h) Falls $T_k(x) = \sum a_j\,x^j$, so sind die nicht verschwindenden Koeffizienten

$$a_j = 2^{j-1}(-1)^{(k-j)/2}\left[2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(k+j)\\ \frac{1}{2}(k-j)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(k+j)-1\\ \frac{1}{2}(k-j)\end{pmatrix}\right]. \qquad (2.27)$$

(i) Aus den binomischen Formeln für $2^k = (1+1)^k$ und $0 = 0^k = (1-1)^k$ folgt

$$2^{k-1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \binom{k}{4} + \ldots .$$

(j) $T_k(1) = 1, \quad T_k(-1) = (-1)^k, \quad T_{2k+1}(0) = 0, \quad T_{2k}(0) = (-1)^k.$

(k) Für $|x| \geq 1$ haben die Tschebyscheff-Polynome die Darstellung

$$T_k(x) = \cosh(k \operatorname{arcosh}(x)), \ |x| \geq 1, \quad \cosh(z) = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}). \tag{2.28}$$

Diese genügen derselben Rekursion, was aus der Produkteigenschaft von Hyperbelfunktionen folgt.

$$\begin{aligned}
\cosh(\alpha)\cosh(\beta) &= \tfrac{1}{2}[\cosh(\alpha+\beta) + \cosh(\alpha-\beta)], \\
\cosh(kz)\cosh(z) &= \tfrac{1}{2}[\cosh(kz+z) + \cosh(kz-z)], \\
\cosh(kz)\cosh(z) &= \tfrac{1}{2}[\cosh((k+1)z) + \cosh((k-1)z)], \ z = \operatorname{arcosh}(x), \\
2\cosh(z)\,\varphi_k(z) &= \varphi_{k+1}(z) + \varphi_{k-1}(z), \\
2x\,T_k(x) &= T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x).
\end{aligned}$$

Somit kann man eine gemeinsame Darstellung und Rekursion auf $\mathbb{R}$ finden.

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \ \arccos(x)), & \text{falls } x \in [-1,1], \\ \cosh(k \operatorname{arcosh}(x)) > 0, & \text{falls } x \geq 1, \\ (-1)^k \cosh(k \operatorname{arcosh}(-x)), & \text{falls } x \leq -1. \end{cases}$$

(l) Mit $T_1(x) = x$ und der Identität

$$x = \frac{1}{2}\Big(x \pm \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x \pm \sqrt{x^2-1}}\Big) \tag{2.29}$$

hat man

$$T_1(x) = \frac{1}{2}\Big(x \pm \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x \pm \sqrt{x^2-1}}\Big), \quad x \geq 1. \tag{2.30}$$

(m) Sehr nützlich ist die Formel

$$T_k\Big(\frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\Big) = \frac{1}{2}\Big(x^k + \frac{1}{x^k}\Big) = \frac{1+x^{2k}}{2x^k}, \tag{2.31}$$

die für beliebiges (komplexes) $x \neq 0$ mit vollständiger Induktion und der Rekursionsformel gezeigt werden kann. Für reelles $x > 0$ ist $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \geq 1$ und damit grob abgeschätzt $T_k(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})) \geq \frac{1}{2}x^k$.

(n) Folglich gilt wegen (2.29),(2.31) für beliebiges $x \in \mathbb{C}$ in den verschiedenen Formen

$$\begin{aligned}
T_k(x) &= T_k\Big(\frac{1}{2}\Big(x \pm \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x \pm \sqrt{x^2-1}}\Big)\Big)\\
&= \tfrac{1}{2}[(x-\sqrt{x^2-1})^k + (x-\sqrt{x^2-1})^{-k}]\\
&= \tfrac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^k + (x-\sqrt{x^2-1})^k]\\
&= \tfrac{1}{2}[(x+\imath\sqrt{1-x^2})^k + (x-\imath\sqrt{1-x^2})^k], \quad \imath = \sqrt{-1},\\
T_k(x) &= \tfrac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^k + (x+\sqrt{x^2-1})^{-k}].
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Der Nachweis von (2.32) kann auch mit der Substitution $x = \cos(\xi)$ und der Formel von Moivre durchführen.

(o) Weiterhin hat man die Beziehungen und Abschätzungen

$$T_k(x) \;=\; \frac{1}{2}\Big[(x+\sqrt{x^2-1})^k + \Big(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\Big)^k\Big] \;\geq\; x^k \geq \frac{1}{2}x^k \quad \text{für } x \geq 1, \tag{2.33}$$

$$|T_k(x)| \;\geq\; |x|^k \quad \text{für } |x| \geq 1, \tag{2.34}$$

$$\frac{x+1}{x-1} \;=\; \frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\Big) \quad \text{für } x > 1, \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
T_k\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big) &= T_k\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Big)^k + \Big(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\Big)^k\Big] \;\geq\; \frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Big)^k,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

andererseits mit

$$\frac{\sqrt{x}\pm 1}{\sqrt{x}\mp 1} \;=\; \frac{x+1}{x-1} \pm \sqrt{\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^2 - 1} \;=\; y \pm \sqrt{y^2-1}, \quad x > 1,$$

insbesondere

$$T_k\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big) = \frac{1}{2}[(y+\sqrt{y^2-1})^k + (y-\sqrt{y^2-1})^k] \;\geq\; y^k \;=\; \Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^k, \tag{2.37}$$

und mit den Größen

$$1 \;>\; \eta \;=\; \frac{x-1}{x+1} \;>\; \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \;=\; c \tag{2.38}$$

die Formeln

$$\eta \;=\; \frac{2c}{1+c^2}, \quad c \;=\; \frac{1-\sqrt{1-\eta^2}}{\eta},$$

$$
\begin{aligned}
1 &< \frac{1}{\eta} = \frac{1+c^2}{2c} = \frac{1}{2}\Big(c+\frac{1}{c}\Big),\\
1 &< \frac{1}{c} = \frac{\eta}{1-\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{1+\sqrt{1-\eta^2}}{\eta} = \frac{1}{\eta}+\sqrt{\Big(\frac{1}{\eta}\Big)^2-1}\,.
\end{aligned}
$$

(p) Das Verhalten von $T_k(x)$ für große Argumente $|x| \gg 1,\ x = (1+y)/(1-y)$, wird durch die Ungleichungen

$$
\frac{1}{2}\Big(\frac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}\Big)^k \;\le\; T_k\Big(\frac{1+y}{1-y}\Big) \;\le\; \Big(\frac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}\Big)^k. \tag{2.39}
$$

charakterisiert.

(q) Es gilt

$$
T_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} T_k(x)\, t^n \;=\; \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}. \tag{2.40}
$$

(r) Die Darstellung der ersten Potenzen mittels Tschebyscheff-Polynomen ist

$$
\begin{aligned}
1 &= T_0,\\
x &= T_1,\\
x^2 &= 2^{-1}(T_0+T_2),\\
x^3 &= 2^{-2}(3T_1+T_3),\\
x^4 &= 2^{-3}(3T_0+4T_2+T_4),\\
x^5 &= 2^{-4}(10T_1+5T_3+T_5),\\
x^6 &= 2^{-5}(10T_0+15T_2+6T_4+T_6),\\
x^7 &= 2^{-6}(35T_1+21T_3+7T_5+T_7),\\
x^8 &= 2^{-7}(35T_0+56T_2+28T_4+8T_6+T_8),\\
x^9 &= 2^{-8}(126T_1+84T_3+36T_5+9T_7+T_9),
\end{aligned}
$$

mit der Umrechnung der Koeffizienten von x^k auf die von x^{k+1} gemäß

$$
\begin{aligned}
x^k &= 2^{-(k-1)}(\ldots + c_{k-4}T_{k-4} + c_{k-2}T_{k-2} + c_k T_k),\ c_k = 1,\\
x^{k+1} &= 2^{-k}(\ldots + c'_{k-3}T_{k-3} + c'_{k-1}T_{k-1} + c'_{k+1}T_{k+1}) \quad \text{mit}\\
c'_{k+1} &= 1,\\
c'_i &= c_{i+1} + c_{i-1} \quad \text{für } i = k-1, k-3, \ldots, \left\{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\},\\
c'_0 &= c_1 \qquad\qquad \text{für } k \text{ ungerade},\\
c'_1 &= 2c_0 + c_2 \qquad \text{für } k \text{ gerade}.
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Literaturverzeichnis

[1] HÄMMERLIN G. und K.-H. HOFFMANN: *Numerische Mathematik*. Grundwissen Mathematik 7. Springer-Verlag Berlin 1991.

[2] NEUNDORF, W.: *Numerische Mathematik*. Vorlesungen, Übungen, Algorithmen und Programme. Shaker Verlag Aachen 2002.

[3] SCHWARZ, H. R.: *Numerische Mathematik*. B. G. Teubner Stuttgart 1988.

Anschrift:

Dr. rer. nat. habil. Werner Neundorf
Technische Universität Ilmenau, Institut für Mathematik
PF 10 05 65
D - 98684 Ilmenau

E-mail : werner.neundorf@tu-ilmenau.de
Homepage : http://www.mathematik.tu-ilmenau.de/~neundorf/index_de.html