Das graphentheoretische Dominanzproblem als stetiges Optimierungsproblem

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Dr. rer. nat.

vorgelegt
der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Ilmenau

von
Dipl.-Math. Anja Pruchnewski
Institut für Mathematik
der TU Ilmenau
D-98693 Ilmenau

Gutachter: Prof. Dr. Jochen Harant, TU Ilmenau
Prof. Dr. Arnfried Kemnitz, TU Braunschweig
Prof. Dr. Ingo Schiermeyer, TU Bergakademie Freiberg

Tag der Einreichung: 20. April 2004
Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 18. November 2004

urn:nbn:de:gbv:ilm1-2004000158

Vorwort

Obwohl das Studium dominierender Mengen in Graphen erst vor etwa 40 Jahren einen großen Aufschwung erfuhr, hat dieses Teilgebiet der Graphentheorie seinen historischen Ursprung bereits im 19. Jahrhundert. Damals beschäftigte man sich mit der Frage nach der Minimalanzahl an Damen, die man benötigt, um ein $(n \times n)$-Schachfeld zu überdecken bzw. zu dominieren. Der Erste, der dann die Begriffe dominierende Menge und Dominanzzahl tatsächlich verwendete, war O. Ore [37].

Man könnten auch sagen, eine dominierende Menge hat als Elemente solche Knotenpunkte, von denen aus alle Knotenpunkte eines Graphen in höchstens einem Schritt erreichbar sind. Mit anderen Worten entspricht die abgeschlossene Nachbarschaft einer dominierenden Menge der gesamten Knotenpunktmenge des Graphen. Unter dem graphentheoretischen Dominanzproblem verstehen wir die Bestimmung der Mächtigkeit einer kleinsten dominierenden Menge in einem Graphen G. Diese Größe wird als Dominanzzahl $\gamma(G)$ bezeichnet.

In der Graphentheorie werden viele Graphenparameter untersucht. Eine besondere Bedeutung kommt dabei den Problemen ihrer Bestimmung und dem Finden realisierender Mengen zu. Beispielsweise interessieren die Matchingzahl $\alpha_o(G)$ und ein größtes Matching, die chromatische Zahl $\chi(G)$ und eine zugehörige Färbung mit $\chi(G)$ Farben, die Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ und eine größte unabhängige Menge sowie die Dominanzzahl $\gamma(G)$ und eine kleinste dominierende Menge. Die Bestimmung solcher Graphenparameter und der entsprechenden realisierenden Mengen finden vielfältige Anwendung, so z.B. die Dominanzproblematik bei der Standortbestimmung von Sendemasten in Funknetzwerken.

Einige der Probleme erweisen sich als leicht, so bestimmt man beispielsweise ein größtes Matching mittels des Matching-Algorithmus von J. Edmonds [13]. Andere erweisen sich als schwer, z.B. die Bestimmung der chromatischen Zahl, der Unabhängigkeitszahl und der Dominanzzahl. Die zugehörigen Entscheidungsprobleme sind NP-vollständig [21]. Deshalb lohnt es sich, über gute Näherungen und Schranken nachzudenken. Weiterführendes zur Problematik der NP-Vollständigkeit, auf die von uns nicht näher eingegangen wird, ist ebenfalls in [21] zu finden. In der vorliegenden Arbeit steht das Dominanzproblem im Vordergrund.

N. Alon und J. H. Spencer beschreiben in [2], wie mittels der von P. Erdős eingeführten wahrscheinlichkeitstheoretischen Methode eine obere Schranke für die Dominanzzahl $\gamma(G)$ eines Graphen gefunden werden kann: Mit einheitlicher Wahrscheinlichkeit p wird eine zufällige Menge von Knotenpunkten bestimmt und zu einer dominierenden Menge D ergänzt. Der Erwartungswert $\boldsymbol{E}(|D|)$ der Mächtigkeit von D ist dann eine obere Schranke für $\gamma(G)$. Die so gewonnene Schranke $S(p) = \boldsymbol{E}(|D|)$ wird über $p \in [0,1]$ minimiert. Das Resultat dieser Vorgehensweise ist in Satz 1.1 zitiert.

Ziel dieser Arbeit ist es, die oben beschriebene Methode in erweiterter Weise auf geeignete Dominanzkonzepte anzuwenden. Dazu arbeiten wir nicht mit einer einheitlichen Wahrscheinlichkeit, sondern ordnen jedem Knotenpunkt seine eigene Wahrscheinlichkeit zu. Dieser Verallgemeinerungsschritt war der Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit. Für einen Graphen mit n Knotenpunkten erfolgt die oben beschriebene Minimierung nun nicht mehr über dem Intervall $[0,1]$, sondern über dem n-dimensionalen Einheitswürfel $\mathbf{C}_n$. Wir zeigen, dass die so gewonnene obere Schranke scharf ist.

Für ausgewählte Dominanzkonzepte gelingt es, das diskrete Optimierungsproblem, die entsprechende Dominanzzahl zu bestimmen, einem stetigen Optimierungsproblem mit einer multilinearen Funktion f über der kompakten Menge $\mathbf{C}_n$ gleichzusetzen. Damit lassen sich Verfahren der stetigen Optimierung nutzen. Da das Dominanzproblem schwer ist, wird natürlich das Lösen eines äquivalenten stetigen Optimierungsproblems ebenfalls schwer sein. Jedoch können Näherungslösungen gute obere Schranken für $\gamma(G)$ und geeignete Startwerte $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ für einen polynomialen Algorithmus liefern, der eine dominierende Menge bestimmt, deren Mächtigkeit den Wert $f(\mathfrak{p})$ nicht übersteigt.

Dominanzkonzepte, die unserer Herangehensweise entgegenkommen, sind neben der Dominanz, auch die totale Dominanz, bei der kein Knotenpunkt sich selbst dominiert, sowie die entsprechenden Verallgemeinerungen, die Vektordominanz und die totale Vektordominanz. Dort ist für jeden Knotenpunkt die Mindestanzahl dominierender Nachbarn vorgeschrieben. In den Kapiteln 2 und 3 werden nacheinander für alle genannten Konzepte stetige Formulierungen des graphentheoretischen Problems, realisierende Algorithmen sowie Schranken für die zugehörige Dominanzzahl angegeben. Aus einem Spezialfall der Vektordominanz werden auch entsprechende Aussagen über unabhängige Mengen und die Unabhängigkeitszahl in Graphen gewonnen.

In Kapitel 4 geben wir für die Klasse paarer Graphen verbesserte Schranken für $\gamma(G)$ an, die sich durch Einschränkung des zulässigen Bereiches von $\mathbf{C}_n$ auf $\mathbf{C}_2$ gewinnen lassen, denn paare Graphen haben eine, unserer Herangehensweise entgegenkommende, lokale Eigenschaft: Die Nachbarschaft eines jeden Knotenpunktes einer Partitionsmenge gehört komplett der anderen Partitionsmenge an. Da zudem die in den Kapiteln 2 und 3 behandelten Dominanzprobleme für paare Graphen schwer bleiben, ist eine Untersuchung dieser Dominanzkonzepte im Falle der Paarheit lohnenswert, um brauchbare Schranken zu gewinnen.

Kapitel 1 enthält eine Zusammenstellung der für das Verständnis dieser Arbeit notwendigen Begriffe und Sätze.

An dieser Stelle danke ich allen, die mir bei der Anfertigung dieser Arbeit mit Rat und Tat beiseite standen. Stellvertretend dafür seien mein Betreuer Prof. Dr. Jochen Harant, meine Kollegen und ehemaligen Kollegen, Dr. Thomas Böhme, Dr. Igor Fabrici, Tobias Gerlach, Dr. Frank Göring, Jens Schreyer und Dr. Margit Voigt, genannt. Für wertvolle Hinweise danke ich auch Dr. Andreas Hartwig. Mein Lebenspartner und unsere Kinder gaben mir die nötige erfrischende Ablenkung und unterstützende Geduld, besonders in der Endphase der Erstellung dieser Arbeit.

Ilmenau im April 2004 Anja Pruchnewski

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Definitionen und Begriffe

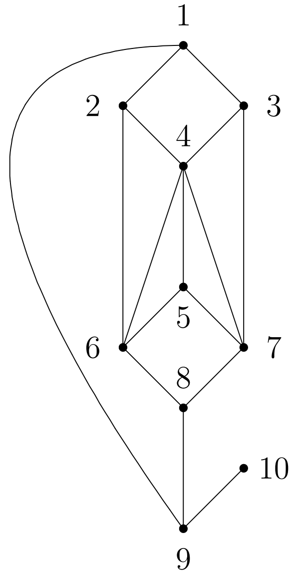
Wir werden an dieser Stelle einige Bezeichnungen festlegen, die wir in der gesamten Arbeit verwenden werden, ohne später nochmals näher darauf einzugehen.

Die den Betrachtungen der vorliegenden Arbeit zugrundeliegenden Graphen $G = (V, E)$ mit der Knotenpunktmenge $V = V(G)$[1]$= \{1, \ldots, n\}$ seien alle endlich, schlicht, ungerichtet und ohne isolierte Knotenpunkte. Wir beschränken uns auf die Betrachtung von Graphen ohne isolierte Knotenpunkte, da die isolierten Knotenpunkte zu jeder Dominanzmenge gehören und Graphen mit isolierten Knotenpunkten keine total dominierenden Mengen enthalten. Die Elemente der Kantenmenge $E = E(G)$ werden mittels ihrer Endknoten angegeben, etwa $(i, j) \in E$, wobei $i, j \in V$. Die Anzahl der Kanten in einem Graphen G wird mit m bezeichnet, d.h. $m = |E(G)|$.

Im Folgenden werden wir einige wichtige graphentheoretische Begriffe, Zusammenhänge und Eigenschaften anführen. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf gängige Lehrbücher über Graphentheorie wie [12] und [41] verwiesen. Einige der vorgestellten Begriffe werden am nachfolgenden Beispielgraphen verdeutlicht.

[1] Bei Bezeichnungen, die den Bezugsgraphen als Argument angeben, werden wir diesen weglassen, wenn der Bezug klar ist.

Beispielgraph G_{Bsp}

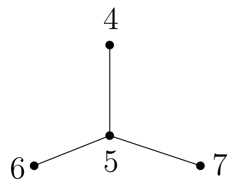


In G_{Bsp} sind die Knotenpunktmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $n = 10$, die Kantenmenge $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 9), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 7), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 8), (7, 8), (8, 9), (9, 10)\}$ und $m = 16$.

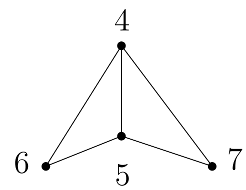
Die *Nachbarschaft* $N(i)$ eines Knotenpunktes $i \in V$ ist die Menge aller Nachbarn von i in G. Die Anzahl der Nachbarn von i wird als *Valenz* d_i von i definiert, d.h. $d_i = |N(i)|$. Wir nennen $\mathfrak{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ den *Valenzvektor* des Graphen G. Mit δ bzw. Δ werden die *Minimal-* bzw. die *Maximalvalenz* in G bezeichnet. In der gesamten Arbeit wird $\delta > 0$ vorausgesetzt. Die Menge $N[i] = N(i) \cup \{i\}$ heißt *abgeschlossene Nachbarschaft* von i. Mit $N_2(i) = \Big(\bigcup\limits_{j \in N(i)} N(j) \Big) \setminus N[i]$ wird die Menge aller *Übernachbarn* von i (Nachbarn im Abstand 2) bezeichnet. In G_{Bsp} ist für den Knoten 5 die Nachbarschaft $N(5) = \{4, 6, 7\}$, die abgeschlossene Nachbarschaft $N(5) = \{4, 5, 6, 7\}$ und die Übernachbarschaft $N_2(5) = \{2, 3, 8\}$. Der Vektor der Valenzen ist $\mathfrak{d} = (3, 3, 3, 5, 3, 4, 4, 3, 3, 1)$, $\delta = 1$ und $\Delta = 5$.

Mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq \{(i, j) \in E \mid i, j \in V'\}$ heißt $G' = (V', E')$ *Untergraph* von G. Wir bezeichnen mit $G[X] = (X, \{(i, j) \in E \mid i, j \in X\})$ den durch eine Knotenpunktmenge $X \subseteq V$ *induzierten Untergraphen* von G.

Ein Untergraph von G_{Bsp}



Ein induzierter Untergraph von G_{Bsp}



Eine *dominierende Menge* oder *Dominanzmenge* in G ist eine Menge $D \subseteq V$ derart, dass jeder Knotenpunkt $i \in V \backslash D$ wenigstens einen Nachbarn in D hat, d.h. für alle $i \in V$ gilt $N[i] \cap D \neq \emptyset$. Eine Dominanzmenge D in G heißt *minimum Dominanzmenge* in G, wenn es keine Dominanzmenge D' in G mit $|D'| < |D|$ gibt. Die *Dominanzzahl* $\gamma(G)$ ist die Mächtigkeit einer minimum Dominanzmenge in G. Eine dominierende Menge in G_{Bsp} ist $\{1, 5, 9\}$, eine minimum dominierende Menge $\{4, 9\}$ und $\gamma = 2$.

Eine *total dominierende Menge* in G ist eine Menge $D_T \subseteq V(G)$ derart, dass jeder Knotenpunkt $i \in V$ wenigstens einen Nachbarn in D_T hat, d.h. ein Knotenpunkt dominiert nur seine Nachbarschaft $N(i)$ und nicht sich selbst, also gilt $N(i) \cap D \neq \emptyset$ für alle $i \in V$. Die *totale Dominanzzahl* $\gamma_T(G)$ ist die Mächtigkeit einer minimum total dominierenden Menge in G. Eine minimum total dominierende Menge in G_{Bsp} ist $\{4, 5, 8, 9\}$ und $\gamma_T = 4$.

Der Knotenpunktmenge $V(G)$ sei ein ganzzahliger Vektor $\mathfrak{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ mit $1 \leq k_i \leq d_i$ für alle $i \in V$ zugeordnet. Dann heißt die Menge $D_{\mathfrak{k}} \subseteq V$ eine $\mathfrak{k}$-*dominierende Menge*, wenn jedes $i \in V \setminus D_{\mathfrak{k}}$ mindestens k_i Nachbarn in $D_{\mathfrak{k}}$ hat, d.h. für alle $i \in V \setminus D_{\mathfrak{k}}$ gilt $|N(i) \cap D_{\mathfrak{k}}| \geq k_i$. Die $\mathfrak{k}$-*Dominanzzahl* $\gamma_{\mathfrak{k}}(G)$ ist die Mächtigkeit einer minimum $\mathfrak{k}$-dominierenden Menge. Mit $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$ entspricht die $\mathbb{1}$-Dominanz der Dominanz, es gilt $\gamma_{\mathbb{1}} = \gamma$. Wählen wir für G_{Bsp} $\mathfrak{k} = (2, 1, 2, 4, 3, 2, 3, 3, 2, 1)$, dann ist $\{3, 4, 5, 8, 9\}$ eine minimum $\mathfrak{k}$-dominierende Menge und $\gamma_{\mathfrak{k}} = 5$.

Eine *total* $\mathfrak{k}$-*dominierende Menge* in G ist eine Menge $D_{T\mathfrak{k}} \subseteq V(G)$ derart, dass jeder Knotenpunkt $i \in V$ wenigstens k_i Nachbarn in $D_{T\mathfrak{k}}$ hat, d.h. für alle $i \in V$ gilt $|N(i) \cap D_{\mathfrak{k}}| \geq k_i$. Die *totale* $\mathfrak{k}$-*Dominanzzahl* $\gamma_{T\mathfrak{k}}(G)$ ist die Mächtigkeit einer minimum total $\mathfrak{k}$-dominierenden Menge in G. Mit $\mathfrak{k}$ wie oben gegeben ist $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ eine minimum total $\mathfrak{k}$-dominierende Menge in G_{Bsp} und $\gamma_{T\mathfrak{k}} = 8$.

Eine Menge $I \subseteq V(G)$ heißt *unabhängig* in G, wenn $G[I]$ keine Kanten enthält. Ist I eine unabhängige Menge in G und gibt es keine unabhängige Menge I' in G mit $|I'| > |I|$, so heißt I *maximum unabhängige Menge* in G und $\alpha(G) = |I|$ *Unabhängigkeitszahl von G*. Eine unabhängige Menge in G_{Bsp} ist $\{2, 7, 10\}$, eine maximum unabhängige Menge $\{2, 3, 5, 8, 10\}$ und $\alpha = 5$.

Eine Knotenmenge $T \subseteq V(G)$ in G heißt *Überdeckung*, wenn jede Kante des Graphen mit mindestens einem Knotenpunkt aus T inzidiert. Die *Überdeckungszahl* $\beta(G)$ ist die Mächtigkeit einer minimum Überdeckung. Eine minimum Überdeckung in G_{Bsp} ist $\{1, 4, 6, 7, 9\}$ und $\beta = 5$.

Eine Kantenmenge $M \subseteq E(G)$ in G heißt *unabhängig* in G, wenn in M keine zwei Kanten adjazent sind. M wird auch *Matching* in G genannt. Ist M ein maximum Matching in G, so heißt $\alpha_0(G) = |M|$ *Kantenunabhängigkeitszahl* oder *Matchingzahl* von G. Ein maximum Matching in G_{Bsp} ist $\{(1, 3), (2, 6), (4, 5), (7, 8), (9, 10)\}$ und $\alpha_0 = 5$.

In der üblichen Weise seien mit $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{N}$ die Mengen der reellen bzw. natürlichen Zahlen bezeichnet (vgl. [4]). Mit

$$\mathbf{C}_n = \{\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq p_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$$

bezeichnen wir den n-dimensionalen Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$.

Wir definieren für Funktionen f, $g : \mathcal{G} \times \mathbf{C}_n \to \mathbb{R}$ eine Funktionenrelation. Dabei sei $\mathcal{G}$ die Klasse der ungerichteten Graphen mit n Knotenpunkten und $\delta > 0$. Wir schreiben $f \leq g$, wenn $f(G, \mathfrak{p}) \leq g(G, \mathfrak{p})$ für alle Graphen $G \in \mathcal{G}$ und für jeden Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ gilt. Der Einfachheit halber werden wir von nun an für solche Funktionen nur die Abhängigkeit von $\mathfrak{p}$ explizit angeben, der Graphenbezug wird aus dem Kontext ersichtlich sein, d.h. wir schreiben $f(\mathfrak{p})$ anstelle von $f(G, \mathfrak{p})$. Es bezeichne $f <> g$ den Fall, dass weder $f \leq g$ noch $f \geq g$ gilt.

An dieser Stelle formulieren wir Entscheidungsprobleme, auf die später Bezug genommen werden wird.

(TOTAL) VECTOR DOMINATING SET:

Gegeben:	Ein Graph $G = (V, E)$, $V = \{1, \ldots, n\}$, ein ganzzahliger Vektor $\mathfrak{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ mit $1 \leq k_i \leq d_i$ für alle $i \in V$ sowie eine positive ganze Zahl ℓ.
Frage:	Besitzt G eine (total) $\mathfrak{k}$-dominierende Menge der Mächtigkeit $\leq \ell$?

(TOTAL) DOMINATING SET:

Gegeben:	Ein Graph $G = (V, E)$ sowie eine positive ganze Zahl ℓ.
Frage:	Besitzt G eine (total) dominierende Menge der Mächtigkeit $\leq \ell$?

INDEPENDENT SET:
Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$ sowie eine positive ganze Zahl ℓ.
Frage: Besitzt G eine unabhängige Menge der Mächtigkeit $\geq \ell$?

Arbeitet ein Algorithmus mit einem Rechenzeitaufwand, der polynomial in der Eingabegröße (bei uns stets die Anzahl n der Knotenpunkte) ist, so nennen wir ihn auch kurz einen *polynomialen Algorithmus*.

Die Klasse der Entscheidungsprobleme, die durch einen polynomialen Algorithmus gelöst werden können, wird mit *P* bezeichnet, die Klasse der nichtdeterministisch polynomialen Entscheidungsprobleme mit *NP*. Ein Entscheidungsproblem heißt *NP-schwer*, falls sich alle Probleme aus NP polynomial auf dieses transformieren lassen. Ist ein Entscheidungsproblem in NP und NP-schwer, so heißt es auch *NP-vollständig*. Die Klasse der NP-vollständigen Probleme nennt man *NPC*, sie ist damit die Menge der schwersten Probleme in NP. Näheres über die Komplexitätstheorie und die Zuordnung von Problemen zu den Komplexitätsklassen P, NP sowie NPC ist in [21] bzw. [31] und [32] zu finden.

1.2 Hilfsmittel aus der Graphentheorie

An dieser Stelle wollen wir einige Sätze und Beziehungen angeben, auf die wir später verweisen werden. Nähere Ausführungen bzw. die Beweise der zitierten Aussagen sind u.a. in [41] nachzulesen.

Satz 1.1 (N. Alon, J. H. Spencer [2])

$$\gamma(G) \leq \frac{n(1 + \ln(\delta + 1))}{\delta + 1}\,.$$

Satz 1.2 (Y. Caro, Y. Roditty [6]) *Falls $\delta > 0$, so gilt*

$$\gamma(G) \leq n\Big(1 - \delta\Big(\frac{1}{\delta + 1}\Big)^{1+\frac{1}{\delta}}\Big)\,.$$

Satz 1.3 (T. Gallai [20])

(i) Eine Knotenmenge $I \subseteq V$ ist genau dann unabhängig in G, wenn die Knotenmenge $V \setminus I$ eine Überdeckung ist.

(ii) $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

Satz 1.4 *Falls $\delta > 0$, so gilt*

(i) Ist I eine unabhängige Menge in G, so ist $D = V \setminus I$ dominierend in G.

(ii) $\gamma(G) \leq n - \alpha(G)$.

Satz 1.5 (O. Ore [37]) *Falls $\delta > 0$, so gilt*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}\,.$$

Satz 1.6 (Y. Caro, V. K. Wei [5, 42, 7])

$$\alpha(G) \geq \sum_{i \in V} \frac{1}{d_i + 1}\,.$$

Satz 1.7 (E. J. Cockayne, R. M. Dawes, S. T. Hedetniemi [9])

$$\gamma_T(G) \leq \frac{2}{3} n\,.$$

Satz 1.8 (O.Favaron, M.A.Hennig, C.M.Mynhardt, J.Puech [16])
Falls $\delta \geq 3$, so gilt

$$\gamma_T(G) \leq \frac{7}{13} n\,.$$

1.3 Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Nähere Ausführungen zu Begriffen und Beziehungen der Wahrscheinlichkeitstheorie sind u.a. in [4] bzw. [24] zu finden.

Alle Ergebnisse eines Versuches, bei dem bestimmte Bedingungen eingehalten werden und bei dessen Ablauf das Resultat im Rahmen verschiedener Möglichkeiten ungewiss ist, werden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung als *Ereignisse* bezeichnet. Alle möglichen, einander ausschließenden Ausgänge eines Versuches heißen seine *Elemantarereignisse* und werden in der Menge Ω zusammengefasst. Im Folgenden sei Ω endlich. Wir definieren die *Ereignismenge* $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$. Weiterhin definieren wir mit $P(A)$, wobei $0 \leq P(A) \leq 1$, die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass das Ereignis $A \in \mathcal{A}$ eintritt. Für das sichere Ereignis Ω gilt $P(\Omega) = 1$.

Einige Rechenregeln:

Aus $B \subseteq A$ folgt $P(B) \leq P(A)$.
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$, wobei $\bar{A} = \Omega \backslash A$ das *Komplementärereignis* von A ist.
Für endlich viele, *paarweise einander ausschließende Ereignisse* A_i
(d.h. $A_i \cap A_k = \emptyset$, $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq k$) gilt:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,. \tag{1.1}$$

Siebformel von Poincaré [24]:
Für beliebige Ereignisse A_i $(i = 1, \ldots, n)$ gilt:

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|T|-1} P(\bigcap_{i \in T} A_i)\,. \tag{1.2}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist, die sogenannte *bedingte Wahrscheinlichkeit* $P(A \mid B)$, wird definiert durch $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit [4]:
Seien $B_1, \ldots, B_n$ paarweise unvereinbare Ereignisse mit $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i) = 1$, dann gilt für jedes beliebige Ereignis A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)\,. \tag{1.3}$$

Unabhängige Ereignisse A und B liegen vor, wenn $P(A \mid B) = P(A)$ und $P(B \mid A) = P(B)$ erfüllt ist. Für sie gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1.4}$$

Jedes zufällige Ereignis eines gewissen Versuches soll durch eine reelle Zahl x charakterisiert werden. Alle zufälligen Ereignisse dieses Versuchs werden durch die Variable Z beschrieben, die *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* genannt wird. Nimmt Z endlich oder abzählbar unendlich viele Werte an, dann spricht man von einer *diskreten Zufallsgröße*. Ist A ein zufälliges Ereignis mit $P(A) = p$, dann heißt die Zufallsgröße Z mit

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ eintritt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorvariable des Ereignisses A.

Die Verteilung der Zufallsvariablen Z wird durch die *Verteilungsfunktion* $F(x) = P(Z < x)$ beschrieben. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallsgröße Z einen Wert zwischen $-\infty$ und x annimmt. Die Verteilungsfunktion ist eine nicht fallende, linksseitig stetige Funktion in x mit $F(-\infty) = 0$ und $F(+\infty) = 1$. Eine diskrete Zufallsgröße Z, die die Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten $P(Z = x_i) = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ annimmt, hat die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \,.$$

Als *Mittelwert* oder *Erwartungswert* einer diskreten Zufallsgröße wird

$$\boldsymbol{E}(Z) = \sum_i x_i p_i$$

definiert.

Für den Erwartungswert gilt Linearität:

$$\boldsymbol{E}(c_1 Z_1 + \ldots + c_n Z_n) = c_1 \boldsymbol{E}(Z_1) + \ldots c_n \boldsymbol{E}(Z_n)\,,$$

wobei $Z_1, \ldots, Z_n$ Zufallsgrößen und $c_1, \ldots, c_n$ beliebige Konstanten sind. Für jede Zufallsgröße Z gilt

$$P(Z \leq \boldsymbol{E}(Z)) > 0 \text{ und } P(Z \geq \boldsymbol{E}(Z)) > 0\,. \tag{1.5}$$

Für eine zufällige Teilmenge K einer gegebenen endlichen Menge L gilt:

$$\boldsymbol{E}(|K|) = \sum_{i=0}^{|L|} i \cdot P(|K| = i) = \sum_{x \in L} P(x \in K) \tag{1.6}$$

Kapitel 2

Das Dominanzproblem als stetiges Optimierungsproblem

Im ersten Teil dieses Kapitels werden wir eine stetige Formulierung des Vektordominanzproblems sowie einen Algorithmus angeben. Dieser Algorithmus bestimmt eine vektordominierende Menge, deren Kardinalität eine vorgegebene Schranke nicht übersteigt, und ist bei beschränkter Maximalvalenz Δ sogar linear in n.

Die Vektordominanz wird auch als $\mathfrak{k}$-Dominanz bezeichnet. Für $\mathfrak{k} = (1, \ldots, 1)$ entspricht sie dem gewöhnlichen Dominanzkonzept, auf welches wir im Abschnitt 2.2 näher eingehen werden. Für $\mathfrak{k} = (d_1, \ldots, d_n)$ erhalten wir Aussagen über Knotenüberdeckungen und deren Komplement, die unabhängigen Mengen. Näheres dazu beschreiben wir in Abschnitt 2.3.

Wenn zu einem diskreten Optimierungsproblem auf einem Graphen bekannt ist, dass das zugehörige Entscheidungsproblem in der Klasse NPC liegt, lohnt es sich, dieses Optimierungsproblem näherungsweise zu untersuchen, da exakte Algorithmen wegen zu hoher Rechenzeit nicht nutzbar sind. Bekanntermaßen sind DOMINATING SET und INDEPENDENT SET NPC-Probleme. Man sieht leicht, dass das Problem VECTOR DOMINATING SET ebenfalls der Komplexitätsklasse NPC angehört, da es als Oberproblem von DOMINATING SET betrachtet werden kann.

Dem Übergang vom diskreten Optimierungsproblem zur stetigen Formulierung liegt für alle in dieser Arbeit behandelten Dominanzkonzepte eine gemeinsame Idee zugrunde, die von N. Alon und J. H. Spencer in [2] beschrieben worden ist. Sie benutzt Mittel der auf P. Erdős zurückgehenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Methode. Durch eine geeignete Verallgemeinerung dieser Idee gelangen wir zu stetigen Formulierungen des Dominanzproblems und verwandter Probleme.

2.1 Das Vektordominanzproblem

In der gemeinsamen Arbeit mit J. Harant und M. Voigt [28] wird ein verallgemeinertes Domianzkonzept formuliert, die $\mathfrak{k}$-Dominanz. Es gelingt dort, das $\mathfrak{k}$-Dominanzproblem als stetiges Optimierungsproblem zu formulieren. Dabei stellt sich heraus, dass sowohl das Dominanzproblem als auch das Unabhängigkeitsproblem als Spezialfälle enthalten sind.

2.1.1 Eine stetige Formulierung

Wir ersetzen das diskrete Optimierungsproblem, eine minimum $\mathfrak{k}$-dominierende Menge in einem Graphen zu ermitteln, durch ein stetiges Optimierungsproblem über dem n-dimensionalen Einheitswürfel $\mathbf{C}_n$. Dabei orientieren wir uns an einem in [2] beschriebenen Beweis des Satzes 1.1 über eine obere Schranke für die Dominanzzahl γ in Abhängigkeit von der Anzahl n der Knotenpunkte und der Minimalvalenz δ.

Dort wird mit einheitlicher Wahrscheinlichkeit $p = P(i \in X)$ eine zufällige Menge X von Knotenpunkten gebildet und geeignet zu einer dominierenden Menge D ergänzt. Der Erwartungwert $\boldsymbol{E}(|D|) = f(p)$, $0 \leq p \leq 1$, ist dann eine obere Schranke für γ und damit gilt auch $\gamma \leq \min\limits_{p\in[0,1]} f(p)$.

Nun ordnen wir jedem Knotenpunkt seine eigene Wahrscheinlichkeit zu, in der zufälligen Menge X zu liegen. Dieser Verallgemeinerungsschritt führt zu Schranken, die sich als scharf erweisen, und war damit Ausgangspunkt dieser Arbeit.

Satz 2.1 (J. Harant, A. Pruchnewski, M. Voigt [28])
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $f_{\mathfrak{k}} : \mathbf{C}_n \to \mathbb{R}$ mit

$$f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) = \sum_{i\in V} p_i + \sum_{i\in V} (1-p_i)\Big(\sum_{\ell=0}^{k_i-1} \sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\ |L|=\ell}} \prod_{j\in L} p_j \prod_{j\in N(i)\setminus L} (1-p_j)\Big) .$$

Dann gilt für die $\mathfrak{k}$-Dominanzzahl

$$\gamma_{\mathfrak{k}}(G) = \min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) .$$

Beweis.
Mittels zufälliger und unabhängiger Wahl von Knotenpunkten $i \in V$ bilden wir eine Menge $X \subseteq V$, wobei $P(i \in X) = p_i$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass i zu X gehört. Mit

$$Y = \{i \in V \setminus X \mid |N(i) \cap X| < k_i\}$$

wird die Menge $D = X \cup Y$ eine $\mathfrak{k}$-dominierende Menge von G. Für den Erwartungswert $\boldsymbol{E}(|D|)$ der Mächtigkeit von D erhalten wir wegen der Linearität des Erwartungswertes (man beachte, dass $X \cap Y = \emptyset$ gilt)

$$\boldsymbol{E}(|D|) = \boldsymbol{E}(|X|) + \boldsymbol{E}(|Y|)\,.$$

Mit der Beziehung (1.6) zur Berechnung des Erwartungswertes der Mächtigkeit einer zufälligen Teilmenge einer endlichen Menge ergibt sich

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(|D|) &= \sum_{i \in V} P(i \in X) + \sum_{i \in V} P(i \in Y)\\
&= \sum_{i \in V} p_i + \sum_{i \in V} P(i \notin X \wedge |N(i) \cap X| < k_i)\\
&= \sum_{i \in V} p_i + \sum_{i \in V} P(i \notin X) \cdot P(|N(i) \cap X| < k_i)\,,
\end{aligned}$$

da die Ereignisse $(i \notin X)$ und $(|N(i) \cap X| < k_i)$ unabhängig sind (siehe (1.4)). Das Ereignis $(|N(i) \cap X| < k_i)$ kann in disjunkte Ereignisse zerlegt werden:

$$\begin{aligned}
(|N(i) \cap X| < k_i) &= (|N(i) \cap X| = 0) \vee (|N(i) \cap X| = 1) \vee \ldots\\
&\quad \ldots \vee (|N(i) \cap X| = k_i - 1)\,.
\end{aligned}$$

Für diese paarweise einander ausschließenden Ereignisse ergibt sich (siehe (1.1))

$$P(|N(i) \cap X| < k_i) = \sum_{\ell=0}^{k_i - 1} P(|N(i) \cap X| = \ell)\,.$$

Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass genau ℓ Nachbarn von i in X liegen, betrachten wir ℓ-elementige Teilmengen $L \subseteq N(i)$:

$$P(|N(i) \cap X| = \ell) = \sum_{\substack{L \subseteq N(i)\\ |L| = \ell}} \prod_{j \in L} p_j \prod_{j \in N(i) \setminus L} (1 - p_j)\,.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|D|) &= \sum_{i\in V} p_i + \sum_{i\in V}(1-p_i)\Big(\sum_{\ell=0}^{k_i-1} P(|N(i)\cap X| = \ell)\Big) \\ &= \sum_{i\in V} p_i + \sum_{i\in V}(1-p_i)\Big(\sum_{\ell=0}^{k_i-1} \sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\ |L|=\ell}} \prod_{j\in L} p_j \prod_{j\in N(i)\setminus L}(1-p_j)\Big)\,.\end{aligned}$$

Da es (siehe (1.5)) für die Zufallsgröße $|D|$ eine Realisierung gibt, die kleiner oder gleich ihrem Erwartungswert ist, erhalten wir

$$\gamma_{\mathfrak{k}} \leq \min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})\,.$$

Sei nun $D^*_{\mathfrak{k}}$ eine $\mathfrak{k}$-dominierende Menge von G mit der Mächtigkeit $\gamma_{\mathfrak{k}}$.
Für $\mathfrak{p}^* = (p^*_1, ..., p^*_n)$ mit

$$p^*_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i \in D^*_{\mathfrak{k}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird offenbar $\gamma_{\mathfrak{k}} = f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}^*)$, denn die erste Summe ergibt $\gamma_{\mathfrak{k}}$; in der zweiten Summe wird $(1-p^*_i) = 0$, falls $i \in D^*_{\mathfrak{k}}$; für $i \notin D^*_{\mathfrak{k}}$ sind mindestens k_i Nachbarn von i in $D^*_{\mathfrak{k}}$ und es folgt

$$\sum_{\ell=0}^{k_i-1} \sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\ |L|=\ell}} \prod_{j\in L} p_j \prod_{j\in N(i)\setminus L}(1-p_j) = 0\,.$$

Damit ist Satz 2.1 bewiesen. □

2.1.2 Ein Algorithmus für vektordominierende Mengen

Wir werden einen Algorithmus angeben, der zu einem beliebigen Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$, der Ergebnis irgendeines Näherungsverfahrens für das stetige Optimierungsproblem für $\gamma_{\mathfrak{k}}$ aus Satz 2.1 oder zufällig gewählt sein könnte, in $\mathcal{O}(\Delta^2 2^\Delta n)$-Zeit eine $\mathfrak{k}$-dominierende Menge $D_{\mathfrak{k}}$ bestimmt, die in ihrer Mächtigkeit die Schranke $f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$ nicht überschreitet. Bei beschränkter Maximalvalenz Δ ist dieser Algorithmus sogar linear.

Zugrunde liegt die Funktion $f_{\mathfrak{k}} : \mathbf{C}_n \to \mathbb{R}$ aus Satz 2.1,

$$f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) = \sum_{i \in V} p_i + \sum_{i \in V} (1 - p_i) \Big(\sum_{\ell=0}^{k_i - 1} \sum_{\substack{L \subseteq N(i) \\ |L| = \ell}} \prod_{j \in L} p_j \prod_{j \in N(i) \setminus L} (1 - p_j) \Big) .$$

Es ist leicht einzusehen, dass $f_{\mathfrak{k}}$ die Eigenschaft hat, linear in jeder Komponente zu sein. Wir nennen solche Funktionen auch *multilinear*. Folglich sind lokale und globale Extremwerte von $f_{\mathfrak{k}}$ in den Ecken $\mathfrak{p} \in \{0,1\}^n$ des zulässigen Bereiches $\mathbf{C}_n$ zu finden. Alle Ecken abzulaufen, kann nur mit exponentiellem Aufwand $\mathcal{O}(2^n)$ geschehen. Wir finden jedoch in linearer Zeit ein lokales Minimum $\mathfrak{p} \in \{0,1\}^n$, indem wir vom Startpunkt $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ ausgehend nacheinander alle partiellen Ableitungen untersuchen. Wenn $\frac{\partial}{\partial p_i} f(p_1, \ldots, p_n) \geq 0$, dann setze $p_i := 0$ sonst $p_i := 1$. Für die partiellen Ableitungen gilt wegen der Multilinearität von $f_{\mathfrak{k}}$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} f_{\mathfrak{k}}(p_1, \ldots, p_n) = f_{\mathfrak{k}}(p_1, \ldots, p_i = 1, \ldots, p_n) - f_{\mathfrak{k}}(p_1, \ldots, p_i = 0, \ldots, p_n) .$$

Da die Betrachtung der Ableitungen nur sequenziell erfolgen kann, muss eine Abarbeitungsreihenfolge gewählt werden, die im Allgemeinen lexikographisch der zugrundeliegenden Knotenpunktnummerierung folgt.

Satz 2.2 (J. Harant, A. Pruchnewski, M. Voigt [28]) *Es gibt einen $\mathcal{O}(\Delta^2 2^\Delta n)$-Algorithmus, der für einen beliebig vorgegebenen Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine $\mathfrak{k}$-dominierende Menge $D_{\mathfrak{k}}$ in G mit $|D_{\mathfrak{k}}| \leq f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$ konstruiert.*

Beweis.
Gegeben sei ein $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$. Wir setzen $f^* = f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$.

Bevor wir einen Algorithmus angeben, der uns eine $\mathfrak{k}$-dominierende Menge $D_{\mathfrak{k}} \subseteq V$ mit den genannten Eigenschaften konstruiert, führen wir der Übersicht halber zwei Abkürzungen ein. Für das aktuelle $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ des Algorithmus und $i = 1, ..., n$ seien

$$\begin{aligned} Q_i &:= \sum_{\ell=0}^{k_i - 1} \sum_{\substack{L \subseteq N(i) \\ |L| = \ell}} \prod_{j \in L} p_j \prod_{j \in N(i) \setminus L} (1 - p_j) \text{ und} \\ R_i &:= \sum_{j \in N(i)} (1 - p_j) \sum_{\substack{L \subseteq N(j) \setminus \{i\} \\ |L| = k_j - 1}} \prod_{k \in L} p_k \prod_{k \in N(j) \setminus (L \cup \{i\})} (1 - p_k) . \end{aligned}$$

Man beachte, dass Q_i und R_i nicht von p_i abhängig sind.

Algorithmus:

INPUT: $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$
OUTPUT: $\mathfrak{k}$-dominierende Menge $D_{\mathfrak{k}}$ mit $|D_{\mathfrak{k}}| \leq f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$

BEGIN

1. For $i = 1, ..., n$ do
   if $1 - Q_i - R_i \geq 0$ then $p_i := 0$
   else $p_i := 1$

2. For $i = 1, ..., n$ do
   if $Q_i = 1$ then $p_i := 1$

3. $D_{\mathfrak{k}} := \{i \in V \mid p_i = 1\}$

END

Wir zeigen zunächst, dass Q_i und R_i in $\mathcal{O}(\Delta^2 2^\Delta)$-Zeit berechenbar sind.

Es gibt $\binom{d_i}{\ell}$ ℓ-elementige Teilmengen L von $N(i)$ für jedes $i \in V$. Jedes Produkt $\prod_{j \in L} p_j \prod_{j \in N(i) \setminus L} (1-p_j)$ hat nicht mehr als d_i Faktoren. Die Anzahl der Rechenoperationen, um Q_i zu berechnen, lässt sich somit in folgender Weise abschätzen:

$$\sum_{\ell=0}^{k_i-1} \binom{d_i}{\ell} d_i \leq \sum_{\ell=0}^{k_i-1} \binom{d_i}{\ell} \Delta \leq \Delta \sum_{\ell=0}^{d_i} \binom{d_i}{\ell} = \Delta 2^{d_i} \leq \Delta 2^\Delta .$$

Um R_i zu berechnen sind höchstens

$$\Delta \binom{d_i}{k_i - 1} \Delta \leq \Delta^2 2^\Delta$$

Rechenoperationen nötig. Somit arbeitet der Algorithmus in $\mathcal{O}(\Delta^2 2^\Delta n)$-Zeit.

Nun zeigen wir, dass die Mächtigkeit der Menge $D := \{i \in V \mid p_i = 1\}$ den Wert f^* nicht übersteigt und D $\mathfrak{k}$-dominierend ist.

Wir zeigen $|D| \leq f^*$.

Zunächst ändern wir im 1. Algorithmusschritt das gegebene $\mathfrak{p}$ so ab, dass der entstehende Vektor $\mathfrak{p}$ ganzzahlig mit $\mathfrak{p} \in \{0,1\}^n$ wird. Dann ist $f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$ gewiss nicht größer als f^*. Wir wollen letzteres kurz begründen.

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen wird

$$f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) = \sum_{i \in V} p_i + \sum_{i \in V} (1 - p_i) Q_i ,$$

und für die partiellen Ableitungen gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial p_i} f_{\mathfrak{k}}(p_1, \ldots, p_n) \\
&\quad = 1 - Q_i + \sum_{j \in N(i)} (1 - p_j) \sum_{\ell=1}^{k_j - 1} \Big(\sum_{\substack{L \subseteq N(j) \\ |L| = \ell\,,\, i \in L}} \prod_{\substack{k \in L \\ k \neq i}} p_k \prod_{k \in N(j) \setminus L} (1 - p_k) \Big) \\
&\quad - \sum_{j \in N(i)} (1 - p_j) \sum_{\ell=0}^{k_j - 1} \Big(\sum_{\substack{L \subseteq N(j) \\ |L| = \ell\,,\, i \in N(j) \setminus L}} \prod_{k \in L} p_k \prod_{\substack{k \in N(j) \setminus L \\ k \neq i}} (1 - p_k) \Big) \\
&\quad = 1 - Q_i + \sum_{j \in N(i)} (1 - p_j) \sum_{\ell=0}^{k_j - 2} \Big(\sum_{\substack{L \subseteq N(j) \setminus \{i\} \\ |L| = \ell}} \prod_{k \in L} p_k \prod_{k \in N(j) \setminus (L \cup \{i\})} (1 - p_k) \Big) \\
&\quad - \sum_{j \in N(i)} (1 - p_j) \sum_{\ell=0}^{k_j - 1} \Big(\sum_{\substack{L \subseteq N(j) \setminus \{i\} \\ |L| = \ell}} \prod_{k \in L} p_k \prod_{k \in N(j) \setminus (L \cup \{i\})} (1 - p_k) \Big) \\
&\quad = 1 - Q_i - R_i\,.
\end{aligned}
$$

Im 1. Algorithmusschritt werden somit die Knotenpunkte sukzessive abgearbeitet, und es wird $p_i = 0$ gesetzt, wenn der Anstieg von $f_{\mathfrak{k}}$ in p_i-Richtung nicht negativ ist, $p_i = 1$ im anderen Fall, der Funktionswert $f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$ vergrößert sich bei diesem Vorgehen nie. Damit gilt nach diesem Schritt $p_i \in \{0, 1\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $f_{\mathfrak{k}}(p_1, \ldots, p_n) \leq f^*$.

Im 2. Schritt wird die Menge $D = \{i \in V \mid p_i = 1\}$ zu einer $\mathfrak{k}$-dominierenden Menge korrigiert. Wir zeigen, dass genau dann $Q_i = 1$ gilt, wenn i weniger als k_i Nachbarn in D hat, d.h. wenn es keine Teilmenge $S \subseteq N(i) \cap D$ mit $|S| \geq k_i$ gibt.

Im ersten Fall sei $i \in V$ ein Knotenpunkt mit mindestens k_i Nachbarn in D. Dann gilt $p_j = 1$ für ein $j \in N(i) \setminus L$ und damit

$$\prod_{j \in N(i) \setminus L} (1 - p_j) = 0$$

für alle Teilmengen $L \subseteq N(i)$ mit $|L| < k_i$ und somit $Q_j = 0$.

Sei nun im zweiten Fall $i \in V$ ein Knotenpunkt mit weniger als k_i Nachbarn in D, und sei $S = N(i) \cap D$. Offensichtlich gilt $|S| \leq k_i - 1$. Für die Teilmengen $L \subseteq N(i)$ mit $|L| = \ell \leq k_i - 1$ gilt

$$\prod_{j \in L} p_j \prod_{j \in N(i) \setminus L} (1 - p_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } L = S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Und folglich ist in diesem Fall $Q_i = 1$.

Also gilt $Q_i = 1$ genau dann, wenn i weniger als k_i Nachbarn in D hat und demzufolge noch nicht k_i-dominiert ist. In diesem Falle wird $p_i = 1$ gesetzt und i damit zur Menge D hinzugefügt.

Wir zeigen nun, dass sich $f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$ dabei nicht vergrößert. Wir erinnern uns, dass abkürzend

$$f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n}(1 - p_i)Q_i$$

geschrieben werden kann. Hat p_i bereits vor dem 2. Schritt den Wert 1, so ändert sich der Wert $f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$ nicht. Hat p_i vor diesem Schritt den Wert 0, dann wird $p_i = 1$ gesetzt. Dabei erhöht sich $\sum_{i \in V} p_i$ um 1, wohingegen sich $\sum_{i \in V}(1 - p_i)Q_i$ um mindestens 1 verringert, denn $(1 - p_i)Q_i$ hatte vorher den Wert 1 und bekommt jetzt den Wert 0. Dabei werden eventuell weitere Terme $(1 - p_j)Q_j$ ihren Wert von 1 auf 0 ändern. Somit übersteigt der Wert der Funktion $f_{\mathfrak{k}}$ an der Stelle $\mathfrak{p}$ nach dem 2. Schritt nicht den Wert dieser Funktion vor diesem Schritt.

Folglich erhöht sich der Wert von $f_{\mathfrak{k}}$ während der Abarbeitung des Algorithmus nicht. Darüber hinaus gilt für alle $i \in V$ mit $p_i = 0$ am Ende des Algorithmus $Q_i = 0$, und somit hat i dann mindestens k_i Nachbarn in der Menge D. Damit ist $D = \{i \in V \mid p_i = 1\}$ eine $\mathfrak{k}$-dominierende Menge mit $|D| \leq f^*$.

Wie setzen $D_{\mathfrak{k}} = D$ und der Beweis von Satz 2.2 ist vollendet. □

2.1.3 Bemerkungen

1. In der Literatur ist die $\mathfrak{k}$-Dominanz auch als f-Dominanz mit einer Funktion $f : V \to \mathbb{Z}$ zu finden [43].

2. Das Optimierungsproblem in Satz 2.1 ist über einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gegeben und die Zielfunktion $f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$ multilinear. Diese Eigenschaften lassen darauf hoffen, mittels bekannter stetiger Optimierungsverfahren gute Schranken für $\gamma_{\mathfrak{k}}$ und damit gute Startpunkte $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ für den Algorithmus in Abschnitt 2.1.2 zu finden.

3. In den speziellen Fällen ($\mathfrak{k} = \mathfrak{1}$ bzw. $\mathfrak{k} = \mathfrak{d}$) arbeitet der Algorithmus aus Satz 2.2 in $\mathcal{O}(\Delta^2 n)$-Zeit. Im Falle $\mathfrak{k} = \mathfrak{1}$ ist das offensichtlich, im Falle $\mathfrak{k} = \mathfrak{d}$ wird der verringerte Aufwand aufgrund der Gültigkeit der

Beziehung $P(|N(i) \cap X| < d_i) = 1 - P(|N(i) \cap X| = d_i)$ erzielt. Wir werden darauf im Abschnitt 2.3 über unabhängige Mengen nochmal zurückkommen.

4. Wir betrachten den Fall, dass alle Komponenten des Vektors $\mathfrak{k}$ gleich einer ganzen Zahl c mit $1 \leq c \leq \delta$ sind. Dieses Dominanzkonzept wird als *c-Dominanz* bezeichnet und wurde von J. F. Fink und M. S. Jacobson [17, 18] eingeführt. Bekannte Schranken für die c-Dominanzzahl sind u.a. [10]

$$\gamma_{\mathfrak{c}} \leq \frac{cn}{c+1} \tag{2.1}$$

und [40]

$$\gamma_{\mathfrak{c}} \leq n - \max_{c \leq k \leq 2c-1} \frac{|\{i \in V \mid d_i \geq k\}|}{2c-k+1}\,. \tag{2.2}$$

Weitere Resultate für $\gamma_{\mathfrak{c}}$ sind in [40], [17], [18], [15], [14] und [3] zu finden. Der Versuch, eine geeignete obere Schranke für $\gamma_{\mathfrak{c}}$ aus Satz 2.1 herzuleiten, deren Güte sich mit (2.1) bzw. (2.2) vergleichen lässt, schlug leider fehl.

2.2 Das Dominanzproblem

In diesem Abschnitt behandeln wir das Dominanzkonzept, welches man als das ursprüngliche Dominanzkonzept ansehen könnte. Jeder Knotenpunkt des Graphen ist in höchstens einem Schritt von einer dominierenden Knotenpunktmenge aus erreichbar, und es interessieren natürlich möglichst kleine Mengen dieser Art.

Mit $\mathfrak{k} = \mathfrak{1}$ lässt sich die Dominanz als Spezialfall der $\mathfrak{k}$-Dominanz betrachten. Somit lassen sich die Resultate für die Vektordominanz aus Abschnitt 2.1 auf das Dominazproblem anwenden.

Wir nutzen die Beweisidee von Satz 2.1, um weitere und bessere[1] Zielfunktionen f_ν $(\nu = 1, \ldots, 4)$ zu gewinnen, die im Optimum die Dominanzzahl γ ergeben. Dabei verfolgen wir das Ziel, verbesserte Schranken für γ und bessere Startwerte für realisierende Algorithmen abzuleiten. Diese Algorithmen ermitteln zu einem gegebenen $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine dominierende Menge, deren

[1] im Sinne der auf Seite 9 definierten Vergleichsrelation

Mächtigkeit die entsprechende Schranke $f_\nu(\mathfrak{p})$ nicht übersteigt. Ein Teil der Resultate ist von uns in [38] veröffentlicht worden, Ergänzendes in [23] zu finden.

Wir nehmen stets eine zufällige Knotenpunktmenge $X \subseteq V(G)$, wobei jeder Knotenpunkt i mit einer eigenen Wahrscheinlichkeit p_i in X liegen möge. Aus X erzeugen wir im Sinne einer nachträglichen Korrektur eine dominierende Menge $D_\nu(X)$ ($\nu = 1, \ldots, 4$). Die Funktionen $f_\nu : \mathbf{C}_n \to \mathbb{R}$ entsprechen dann den Erwartungswerten der Größen $|D_\nu(X)|$. Dabei entsteht $D_1(X)$ aus X durch Hinzunahme aller bisher noch nicht durch X dominierten Knotenpunkte. Mögen diese Knotenpunkte die Menge Y bilden. Der sich ergebende Erwartungswert für $|D_1(X)|$ wird nicht weiter abgeschätzt. $D_2(X)$ entsteht aus X durch Hinzunahme einer dominierenden Menge in $G[Y]$. Für die Berechnung des Erwartungswertes von $|D_2(X)|$ wird eine Abschätzung von $\gamma(G[Y])$ nach oben verwendet. Mit einer weiteren Abschätzung ergibt sich f_3. Bei $D_4(X)$ wird $D_1(X)$ noch um eine möglichst große unabhängige Menge der in $G[Y]$ nicht isolierten Knotenpunkte verringert. Die Mächtigkeit dieser Menge wird nach unten abgeschätzt.

2.2.1 Eine stetige Formulierung

Seien die Funktionen $f_\nu : \mathbf{C}_n \to \mathbb{R}$ für $\nu = 1, \ldots, 4$ in der folgenden Weise definiert:

$$
\begin{aligned}
f_1(\mathfrak{p}) &= \sum_{i \in V} \Big(p_i + (1-p_i) \prod_{j \in N(i)} (1-p_j) \Big), \\
f_2(\mathfrak{p}) &= \sum_{i \in V} \Big(p_i + \frac{1}{2}(1-p_i) \prod_{j \in N(i)} (1-p_j) \Big) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i \in V} \Bigg((1-p_i) \prod_{j \in N(i)} (1-p_j) \\
&\quad \cdot \Big(1 - \sum_{\ell=1}^{d_i} (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{L \subseteq N(i) \\ |L| = \ell}} \Big(\prod_{k \in (\bigcup_{j \in L} N(j)) \setminus N[i]} (1-p_k) \Big) \Big) \Bigg), \\
f_3(\mathfrak{p}) &= \sum_{i \in V} \Big(p_i + \frac{1}{2}(1-p_i) \prod_{j \in N(i)} (1-p_j) \Big) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in V} \Big((1-p_i) \prod_{j \in N(i)} (1-p_j) \Big(1 - \prod_{k \in N_2(i)} (1-p_k) \Big) \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\in V}\Big(p_i + (1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\Big) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i\in V}\Big((1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\prod_{k\in N_2(i)}(1-p_k)\Big)\,, \\
f_4(\mathfrak{p}) &= \sum_{i\in V}\Big(p_i + (1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\Big) \\
&\quad - \sum_{i\in V}\Big(\frac{1}{1+d_i}(1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\prod_{k\in N_2(i)}(1-p_k)\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Satz 2.3 (A. Pruchnewski [38]) *Seien $G=(V,E)$ ein Graph mit $|V|=n$ und $f_\nu : \mathbf{C}_n \to \mathbb{R}$ ($\nu = 1,\dots,4$) wie oben definiert. Dann gilt für die Dominanzzahl*

$$\gamma(G) = \min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f_\nu(\mathfrak{p})\,,\ \nu = 1,\dots,4\,.$$

Beweis.
Seien $X \subseteq V$ eine zufällige Menge mit $P(i\in X) = p_i \in [0,1]$ und $Y = \{i \in V\setminus X \mid N(i)\cap X = \emptyset\}$ die Menge aller Knotenpunkte, die nicht in X liegen und nicht von X dominiert werden. Mit Y' bezeichnen wir die Menge aller nichtisolierten Knotenpunkte in dem von Y induzierten Untergraphen $G[Y]$, mit U eine minimum Dominanzmenge in $G[Y]$ und mit S die Menge aller isolierten Knotenpunkte in $G[Y]$. Dann sind sowohl $X\cup Y$ als auch $X\cup U$ dominierende Mengen in G.

Die Erwartungswerte der Mächtigkeiten dieser Mengen ergeben obere Schranken für γ. Unter Beachtung der Linearitätseigenschaft des Erwartungswertes ergeben sich die folgenden Beziehungen.

$$
\begin{aligned}
\gamma \le \boldsymbol{E}(|X\cup Y|) &= \boldsymbol{E}(|X|) + \boldsymbol{E}(|Y|)\,, && (2.3)\\
\gamma \le \boldsymbol{E}(|X\cup U|) &= \boldsymbol{E}(|X|) + \boldsymbol{E}(\gamma(G[Y])) \\
&\le \boldsymbol{E}(|X|) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}(|Y|) + \boldsymbol{E}(|S|)) && (2.4)
\end{aligned}
$$

wegen Satz 1.5,

$$
\begin{aligned}
\gamma \le \boldsymbol{E}(|X\cup U|) &= \boldsymbol{E}(|X|) + \boldsymbol{E}(|S|) + \boldsymbol{E}(\gamma(G[Y'])) \\
&\le \boldsymbol{E}(|X|) + \boldsymbol{E}(|S|) + \boldsymbol{E}(|Y'|) - \boldsymbol{E}(\alpha(G[Y'])) \\
&= \boldsymbol{E}(|X|) + \boldsymbol{E}(|Y|) - \boldsymbol{E}(\alpha(G[Y'])) && (2.5)
\end{aligned}
$$

wegen Satz 1.4.

Nachfolgend berechnen wir $\boldsymbol{E}(|X|)$ und $\boldsymbol{E}(|Y|)$, geben für $\boldsymbol{E}(|S|)$ sowohl einen exakten Ausdruck als auch eine Abschätzung nach oben an und leiten eine untere Schranke für $\boldsymbol{E}(\alpha(G[Y']))$ her.

$$\boldsymbol{E}(|X|) = \sum_{i\in V} P(i \in X) = \sum_{i\in V} p_i\,. \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|Y|) &= \sum_{i\in V} P(i \in Y) = \sum_{i\in V} P(i \notin X)\cdot P(N(i)\cap X = \emptyset)\\ &= \sum_{i\in V}(1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} S &= \{i \in Y \mid N(i)\cap Y = \emptyset\}\\ &= \Big\{i\notin X \mid (N(i)\cap X=\emptyset)\wedge\Big(\bigwedge_{j\in N(i)} N(j)\cap X \neq \emptyset\Big)\Big\}\\ &= \Big\{i\notin X \mid (N(i)\cap X=\emptyset)\wedge\Big(\bigwedge_{j\in N(i)} (N(j)\setminus N[i])\cap X \neq \emptyset\Big)\Big\}\,. \end{aligned}$$

Da die Ereignisse $(N(i)\cap X = \emptyset)$ und $((N(j)\setminus N[i])\cap X \neq \emptyset)$ unabhängig sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|S|) &= \sum_{i\in V} P\Big(i\notin X \wedge (N(i)\cap X=\emptyset)\wedge(\bigwedge_{j\in N(i)}(N(j)\setminus N[i])\cap X\neq\emptyset)\Big)\\ &= \sum_{i\in V} P(i\notin X)\cdot P(N(i)\cap X=\emptyset)\\ &\quad\cdot P\Big(\bigwedge_{j\in N(i)}(N(j)\setminus N[i])\cap X\neq\emptyset)\Big)\,.\end{aligned}$$

Mit der Betrachtung des Komplementärereignisses ergibt sich

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|S|) &= \sum_{i\in V} P(i\notin X)\cdot P(N(i)\cap X=\emptyset)\\ &\quad\cdot\Big(1-P\Big(\bigvee_{j\in N(i)}((N(j)\setminus N[i])\cap X=\emptyset)\Big)\,.\end{aligned}$$

Für $j \in N(i)$ definieren wir die Ereignisse

$$A_j := \Big((N(j)\setminus N[i])\cap X = \emptyset\Big)$$

und schließen mit der Siebformel von Poincaré (siehe (1.2))

$$P(\bigcup_{j\in N(i)} A_j) = \sum_{\emptyset\neq L\subseteq N(i)} (-1)^{|L|-1} P(\bigcap_{j\in L} A_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\ell=1}^{d_i}(-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\ |L|=\ell}} P(\bigcap_{j\in L} A_j) \\
&= \sum_{\ell=1}^{d_i}(-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\ |L|=\ell}} \Big(\prod_{k\in(\bigcup_{j\in L} N(j))\setminus N[i]} (1-p_k)\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(|S|) \;=\; & \sum_{i\in V} \Bigg((1-p_i) \prod_{j\in N(i)} (1-p_j) \\
& \cdot \Bigg(1 - \sum_{\ell=1}^{d_i}(-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\ |L|=\ell}} \Big(\prod_{k\in(\bigcup_{j\in L} N(j))\setminus N[i]} (1-p_k)\Big)\Bigg)\Bigg)\,. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Unter Ausnutzung des Begriffs der Übernachbarn $N_2(i)$ kann $\boldsymbol{E}(|S|)$ in folgender Weise weiter abgeschätzt werden (siehe auch [23]).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(|S|) &= \sum_{i\in V} P(i\in S) \\
&= \sum_{i\in V} P(i\in Y \wedge (\bigwedge_{j\in N(i)} N(j)\cap X \neq \emptyset)) \\
&\leq \sum_{i\in V} P(i\notin X \wedge (N(i)\cap X=\emptyset) \wedge (N_2(i)\cap X\neq\emptyset))\,, \\
&\quad \text{denn das Ereignis } \bigwedge_{j\in N(i)} N(j)\cap X\neq\emptyset \text{ zieht das Ereignis} \\
&\quad N_2(i)\cap X\neq\emptyset \text{ nach sich, falls } N[i]\cap X\neq\emptyset\,. \\
&= \sum_{i\in V} P(i\notin X)\cdot P(N(i)\cap X=\emptyset)\cdot P(N_2(i)\cap X\neq\emptyset) \\
&= \sum_{i\in V}(1-p_i) \prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\Big(1-\prod_{k\in N_2(i)}(1-p_k)\Big)\,. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Die Idee für die nachfolgende Herleitung einer unteren Schranke für $\boldsymbol{E}(\alpha(G[Y'])$ ist der Arbeit [23] von F. Göring und J. Harant entnommen.

Wir definieren uns für jeden Knotenpunkt $i\in V$ eine Zufallsvariable Z_i mit

$$
Z_i = \begin{cases} \frac{1}{1+d_i}, & \text{falls } i\in V(G[Y']) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \,.
$$

Daraus können wir mit Satz 1.6, der Caro-Wei-Schranke für die Unabhängigkeitszahl, folgern

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\alpha(G[Y'])) &\geq \boldsymbol{E}(\sum_{i\in V} Z_i) = \sum_{i\in V}\boldsymbol{E}(Z_i) = \sum_{i\in V}\frac{1}{1+d_i}P(i\in Y') \\ &= \sum_{i\in V}\frac{1}{1+d_i}P(i\notin X \wedge N(i)\cap X=\emptyset \wedge N(i)\cap Y\neq\emptyset)\,.\end{aligned}$$

Da $d_i \geq 1$, folgt mit $i \notin X$ aus $N(i)\cap Y=\emptyset$ die Beziehung $N_2(i)\cap X\neq\emptyset$, bzw. aus $N_2(i)\cap X=\emptyset$ folgt $N(i)\cap Y\neq\emptyset$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\alpha(G[Y'])) &\geq \sum_{i\in V}\frac{1}{1+d_i}P(i\notin X\wedge N(i)\cap X=\emptyset\wedge N_2(i)\cap X=\emptyset) \\ &= \sum_{i\in V}\frac{1}{1+d_i}P(i\notin X)\cdot P(N(i)\cap X=\emptyset)\cdot P(N_2(i)\cap X=\emptyset) \\ &= \sum_{i\in V}\frac{1}{1+d_i}(1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\prod_{k\in N_2(i)}(1-p_k)\,. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Mit (2.3), (2.6) und (2.7) folgt $\gamma \leq f_1(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n$.
Mit (2.4), (2.6), (2.7) und (2.8) folgt $\gamma \leq f_2(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n$.
Mit (2.4), (2.6), (2.7) und (2.9) folgt $\gamma \leq f_3(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n$.
Mit (2.5), (2.6), (2.7) und (2.10) folgt $\gamma \leq f_4(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n$.

Somit gilt

$$\gamma \leq \min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f_\nu(\mathfrak{p})\,,\ \nu=1,\ldots,4\,.$$

Sei nun D^* eine minimum dominierende Menge von G, d.h. $|D^*|=\gamma$. Und sei $\mathfrak{p}^*=(p_1^*,\ldots,p_n^*)$ mit

$$p_i^* = \begin{cases} 1, & \text{falls } i\in D^* \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\,.$$

Da dann $\sum_{i\in V} p_i^* = \gamma$ und $(1-p_i^*)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j^*)=0$ für alle $i\in V$ gilt, folgt $\gamma = f_\nu(\mathfrak{p}^*)$ $(nu=1,\ldots,4)$.

Satz 2.3 ist bewiesen. □

Bemerkung: Für $\nu=1$ folgt die Aussage des Satzes 2.3 mit $\mathfrak{k}=\mathbb{1}$ auch direkt aus Satz 2.1.

Satz 2.4 (A. Pruchnewski 2002) *Seien $f_\nu : \mathbf{C}_n \to \mathbb{R}$ ($\nu = 1, \ldots, 4$) wie oben definiert. Dann gilt*

$$f_1 \geq f_4 \geq f_3 \geq f_2\,.$$

Beweis.
Es gilt $f_1 \geq f_4$, da

$$f_1(\mathfrak{p}) - f_4(\mathfrak{p}) = \sum_{i\in V}\Big(\frac{1}{1+d_i}(1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\prod_{k\in N_2(i)}(1-p_k)\Big) \geq 0$$

für alle $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ gilt.

Es gilt $f_4 \geq f_3$, denn

$$f_4(\mathfrak{p}) - f_3(\mathfrak{p}) = \sum_{i\in V}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+d_i}\Big)(1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\prod_{k\in N_2(i)}(1-p_k) \geq 0\,,$$

da wir Graphen ohne isolierte Knotenpunkte betrachten und folglich $\frac{1}{2} - \frac{1}{1+d_i} \geq 0$ für alle $i \in V$ gilt.

Offensichtlich gilt $f_3 \geq f_2$, denn f_3 unterscheidet sich von f_2 nur durch das Einsetzen einer Abschätzung nach oben für $\boldsymbol{E}(|S|)$ bei der Berechnung dieser Funktionen im Beweis von Satz 2.3.

Damit ist Satz 2.4 bewiesen. □

2.2.2 Algorithmen für dominierende Mengen

Wir geben Algorithmen an, die für einen gegebenen Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ dominierende Menge finden, deren Mächtigkeit die Werte $f_\nu(\mathfrak{p})$ ($\nu = 1, \ldots, 4$) nicht übersteigt. Die Idee des Algorithmus aus Abschnitt 2.1.2 für $\mathfrak{k}$-dominiernde Mengen war es, ausgehend von einer multilinearen Funktion $f : \mathbf{C}_n \to \mathbb{R}$ durch „Hinabrutschen“ entlang der Geraden in p_i-Richtung ($i = 1, \ldots, n$) ein lokales Minimum von f in einer Ecke $\mathfrak{p} = \{0,1\}^n$ des $\mathbf{C}_n$ zu finden. Die durch $D = \{i \in V \mid p_i = 1\}$ definierte Menge wird dann zu einer dominierenden Menge korrigiert, ohne dass sich dabei der Wert $f(\mathfrak{p})$ gegenüber dem Ausgangswert erhöht. Es gilt dann $|D| \leq f(\mathfrak{p})$. Diese Idee ist jedoch nur für f_1 nutzbar. Als Folgerung aus Satz 2.2 ergibt sich der nächste Satz.

Satz 2.5 *Es gibt einen $\mathcal{O}(\Delta^2 n)$-Algorithmus, der für einen beliebig vorgegebenen Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine dominierende Menge D von G mit $|D| \leq f_1(\mathfrak{p})$ konstruiert.*

Algorithmus für f_1:

$$Q_i := \prod_{j\in N(i)} (1-p_j)$$
$$R_i := \sum_{j\in N(i)} (1-p_j) \prod_{k\in N(j)\setminus\{i\}} (1-p_k)$$

INPUT: $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$
OUTPUT: dominierende Menge D mit $|D| \leq f_1(\mathfrak{p})$
BEGIN

1. For $i = 1, ..., n$ do
   if $1 - Q_i - R_i \geq 0$ then $p_i := 0$
   else $p_i := 1$
2. For $i = 1, ..., n$ do
   if $Q_i = 1$ then $p_i := 1$
3. $D := \{i \in V \mid p_i = 1\}$

END

Hinter den Algorithmen für f_2, f_3 und f_4 steckt eine andere Herangehensweise. Erinnern wir uns dazu an den Beweis des Satzes 2.3. Um eine dominierende Menge zu erhalten, deren Mächtigkeit die obere Schranke $\min\limits_{\mathfrak{p}\in C_n} f_2(\mathfrak{p})$ einhält, hatten wir eine zufällige Knotenpunktmenge X mit einer dominierenden Menge in $G[Y]$ vereinigt. Dabei war Y die Menge aller durch X noch nicht dominierten Knotenpunkte. S war die Menge aller isolierten Knotenpunkte in $G[Y]$ und $Y' = Y \setminus S$. Betrachte nun in $G[Y']$ einen aufspannenden Wald[2], färbe die Knotenpunkte dieses Waldes mit zwei Farben. Die kleinere der beiden Farbklassen sei F. Dann ist F in $G[Y']$ dominierend und $|F|$ entspricht wegen $|F| \leq \frac{|Y'|}{2}$ der verwendeten Abschätzung für $\gamma(G[Y'])$, die für die Berechnung von f_2 und f_3 im Beweis des Satzes 2.3 benutzt wurde. Damit ist $D = X \cup S \cup F$ eine dominierende Menge. Der nachfolgende Algorithmus liefert für ein gegebenes $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ im ersten Schritt eine Ecke des $\mathbf{C}_n$, die einer Teilmenge $X \subseteq V$ zugeordnet werden kann. Konstruiert man Y, Y', S und F in der beschriebenen Weise, dann gilt

$$|D| = |X \cup S \cup F| \leq f_2(\mathfrak{p}) \leq f_3(\mathfrak{p}) .$$

[2] Das ist ein kreisfreier Untergraph mit maximaler Kantenanzahl, der alle Knotenpunkte enthält.

Algorithmus für f_ν, $\nu = 2, 3$:

INPUT: $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$
OUTPUT: dominierende Menge D mit $|D| \leq f_\nu(\mathfrak{p})$

BEGIN

1. For $i = 1, ..., n$ do
   if $\frac{\partial}{\partial p_i} f_\nu(p_1, \ldots, p_n) \geq 0$ then $p_i := 0$
   else $p_i := 1$.

2. $X := \{i \in V \mid p_i = 1\}$
   Berechne Y, Y', S und F wie oben beschrieben

3. $D := X \cup S \cup F$

END

Da $\frac{\partial}{\partial p_i} f_4(p_1, \ldots, p_n)$ in $\mathcal{O}(\Delta^4)$-Zeit berechenbar ist, hat der Algorithmus einen Aufwand von $\mathcal{O}(\Delta^4 n)$.

Um eine dominierende Menge zu erhalten, deren Mächtigkeit die obere Schranke $\min\limits_{\mathfrak{p} \in C_n} f_4(\mathfrak{p})$ einhält, hatten wir eine zufällige Knotenpunktmenge X mit der Menge Y aller von X nicht dominierten Knotenpunkte vereinigt und dann um eine maximum unabhängige Menge I in der Menge Y' der nicht isolierten Knotenpunkte in $G[Y]$ verringert.

In [7] wird gezeigt, dass es für einen Graphen H mit n_H Knoten und m_H Kanten einen $\mathcal{O}(n_H + m_H)$-Algorithmus $\mathcal{A}$ gibt, der in H eine unabhängige Menge einer Kardinalität nicht kleiner als $\sum\limits_{i \in V(H)} \frac{1}{1+d_i}$ findet.

Der nächste Satz ist eine Folgerung aus einem Resultat von F. Göring und J. Harant [23].

Satz 2.6 *Es gibt einen $\mathcal{O}(\Delta^4 n)$-Algorithmus, der für einen beliebig vorgegebenen Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine dominierende Menge D von G mit $|D| \leq f_4(\mathfrak{p})$ konstruiert.*

Beweis.
Wir geben zunächst einen Algorithmus an.

Algorithmus für f_4:

INPUT: $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$
OUTPUT: dominierende Menge D mit $|D| \leq f_4(\mathfrak{p})$

BEGIN

1. For $i = 1, ..., n$ do
   if $\frac{\partial}{\partial p_i} f_4(p_1, \ldots, p_n) \geq 0$ then $p_i := 0$
   else $p_i := 1$.

2. $X := \{i \in V \mid p_i = 1\}$
   Berechne Y, Y' und I mit Hilfe von $\mathcal{A}$

3. $D := X \cup (Y \setminus I)$

END

Wir zeigen, dass dieser Algorithmus den Anforderungen des Satzes genügt. Sei $f^* = f_4(\mathfrak{p})$, wobei $\mathfrak{p}$ der Startvektor des Algorithmus ist. Nach dem 1. Schritt ist das aktuelle $\mathfrak{p} \in \{0,1\}^n$ ein ganzzahliger Vektor, der Wert $f_4(\mathfrak{p})$ ist dabei nicht gestiegen.

Mit den obigen Bemerkungen ist $D = X \cup (Y \setminus I)$ eine dominierende Menge, und es gilt (siehe Beweis von Satz 2.3)

$$f_4(\mathfrak{p}) \geq \boldsymbol{E}(|X|) + \boldsymbol{E}(|Y|) - \boldsymbol{E}(|I|) = |D|\,,$$

da $|S| = \boldsymbol{E}(|S|)$ für deterministische Mengen S gilt. Der Wert $f_4(\mathfrak{p})$ steigt auch nach dem 3. Algorithmusschritt nicht. Somit gilt $|D| \leq g^*$.

Es ist leicht einzusehen, dass $\frac{\partial}{\partial p_i} f_4(p_1, \ldots, p_n)$ in $\mathcal{O}(\Delta^4)$-Zeit berechenbar ist und der Algorithmus damit einen Aufwand von $\mathcal{O}(\Delta^4 n)$ hat. □

2.2.3 Einige Schranken für die Dominanzzahl

Für jeden Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ erhält man mit $f_\nu(\mathfrak{p})$ ($\nu = 1, \ldots, 4$) aus Abschnitt 2.2.1 obere Schranken für γ. Wir erläutern das Gewinnen guter Schranken durch die Wahl geeigneter $\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ am Beispiel von $\nu = 1$ und $\nu = 3$.

Zunächst zeigen wir die Ableitung der Alon-Spencer-Schranke (Satz 1.1) und der Caro-Roditty-Schranke (Satz 1.2) aus der Beziehung (siehe Satz 2.3)

$$\gamma = \min_{\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n} f_1(\mathfrak{p})\,, \text{ wobei } \; f_1(\mathfrak{p}) = \sum_{i \in V} \Big(p_i + (1 - p_i) \prod_{j \in N(i)} (1 - p_j) \Big)\,.$$

Mit $p_i = p \in [0,1]$ $(i = 1, \ldots, n)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\gamma &\leq \min_{p\in[0,1]} \Big(np + \sum_{i\in V}(1-p)^{d_i+1}\Big) && (2.11)\\
&\leq \min_{p\in[0,1]} n\Big(p + (1-p)^{\delta+1}\Big) && (2.12)\\
&\leq \min_{p\in[0,1]} n\Big(p + e^{-p(\delta+1)}\Big), && (2.13)\\
&\quad \text{da } 1-p < e^{-p}.
\end{aligned}$$

Das Minimum von $n\Big(p+e^{-p(\delta+1)}\Big)$ in (2.13) wird für $p = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ angenommen, das Minimum von $n\Big(p+(1-p)^{\delta+1}\Big)$ in (2.12) für $p = \Big(1-\frac{1}{\delta+1}\Big)^{\frac{1}{\delta}}$. Es ergeben sich die Alon-Spencer-Schranke (Satz 1.1)

$$\gamma \leq \frac{n(1+\ln(\delta+1))}{\delta+1}.$$

bzw. die Caro-Roditty-Schranke (Satz 1.2)

$$\gamma(G) \leq n\Big(1-\delta\Big(\frac{1}{\delta+1}\Big)^{1+\frac{1}{\delta}}\Big).$$

Setzen wir $p_i = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ bzw. $p = \Big(1-\frac{1}{\delta+1}\Big)^{\frac{1}{\delta}}$ $(i = 1, \ldots, n)$, so liefert der in Satz 2.5 vorgestellte Algorithmus einen konstruktiven Beweis dieser Schranken.

Ziehen wir zusätzlich die Menge $V_{\delta+} \subseteq V$ aller Knotenpunkte, deren Valenz größer als die Minimalvalenz δ ist, in Betracht, können wir im Falle nichtregulärer Graphen Schrankenverbesserungen erzielen. Folgende Verbesserung der Caro-Roditty-Schranke (Satz 1.2) gewinnen wir aus der Relation (2.11).

Satz 2.7 (J. Harant, A. Pruchnewski [27]) *Sei $G = (V,E)$ ein nichtregulärer Graph mit n Knotenpunkten und Minimalvalenz δ, und seien*

$$g = \Big(\prod_{i\in V_{\delta+}} (d_i - \delta)\Big)^{\frac{1}{n_{\delta+}}} \text{ und } a = \frac{1}{n_{\delta+}} \sum_{i\in V_{\delta+}} d_i\,,$$

wobei $V_{\delta+} = \{i \in V \mid d_i > \delta\}$ und $n_{\delta+} = |V_{\delta+}|$.
Dann gilt für die Dominanzzahl

$$\gamma(G) \leq \min_{p\in[0,1]} \Big(np + n(1-p)^{\delta+1} - n_{\delta+}gp(1-p)^{\frac{\delta+1+a}{2}}\Big).$$

Beweis.
Es gilt (siehe (2.11))

$$\gamma \le \min_{p\in[0,1]} \Big(np + \sum_{i=1}^{n}(1-p)^{d_i+1}\Big) \le \min_{p\in[0,1]} \Big(np + n(1-p)^{\delta+1}\Big)$$

Für ein festes $p \in [0,1]$ sei

$$\begin{aligned}
\epsilon_p &= n(1-p)^{\delta+1} - \sum_{i=1}^{n}(1-p)^{d_i+1} \\
&= (1-p)^{\delta+1}\sum_{i=1}^{n}\Big(1-(1-p)^{d_i-\delta}\Big) \\
&= (1-p)^{\delta+1}\sum_{i=1}^{n} p\Big(1+(1-p)+\ldots+(1-p)^{d_i-\delta-1}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Da das arithmetische Mittel stets größer oder gleich dem geometrischen Mittel ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\epsilon_p &\ge (1-p)^{\delta+1} p \sum_{i=1}^{n}(d_i-\delta)(1-p)^{\frac{d_i-\delta-1}{2}} \\
&= (1-p)^{\frac{\delta+1}{2}} p \sum_{i\in V_{\delta+}}(d_i-\delta)(1-p)^{\frac{d_i}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Wir nutzen erneut die Relation zwischen dem arithmetischen Mittel und dem geometrischen Mittel. Es folgt

$$\begin{aligned}
\epsilon_p &\ge n_{\delta+}\Big(\prod_{i\in V_{\delta+}}(d_i-\delta)\Big)^{\frac{1}{n_{\delta+}}} p(1-p)^{\frac{1}{2}\Big(\delta+1+\frac{1}{n_{\delta+}}\sum_{i\in V_{\delta+}} d_i\Big)} \\
&= n_{\delta+} g p (1-p)^{\frac{\delta+1+a}{2}}
\end{aligned}$$

und mit

$$\gamma \le \min_{p\in[0,1]} \Big(np + n(1-p)^{\delta+1} - \epsilon_p\Big) \tag{2.14}$$

die Behauptung. □

Die Schranke aus Satz 2.7 ist natürlich nur dann eine wesentliche Verbesserung der Caro-Roditty-Schranke (Satz 1.2), wenn $\Delta - \delta$ klein ist und die

Anzahl $n - n_{\delta+}$ der Knotenpunkte mit Minimalvalenz δ ebenfalls klein wird, denn die effektive Verbesserung ϵ_{p_0} lässt sich mit

$$\epsilon_{p_0} \geq n_{\delta+} g p_0 (1-p_0)^{\frac{\delta+1+a}{2}} \geq n_{\delta+} p_0 (1-p_0)^{\frac{1}{2}(\delta+\Delta+1)}$$

nach unten abschätzen, da $g \geq 1$ und $a \leq \Delta$. Dabei sei p_0 die Minimalstelle in (2.14).

Wir wollen weitere Schranken für γ aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
\gamma &= \min_{\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n} f_3(\mathfrak{p}) \text{ mit} \\
f_3(\mathfrak{p}) &= \sum_{i \in V} \Big(p_i + (1-p_i) \prod_{j \in N(i)} (1-p_j) \Big) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i \in V} \Big((1-p_i) \prod_{j \in N(i)} (1-p_j) \prod_{k \in N_2(i)} (1-p_k) \Big)
\end{aligned}$$

gewinnen.

Um eine möglichst kleine dominierende Menge zu erhalten, verwenden wir die Heuristik, dass p_i so in Abhängigkeit von der Valenz d_i gewählt wird, dass p_i mit d_i streng monoton wächst und Knotenpunkte hoher Valenz mit höherer Wahrscheinlichkeit zur dominierenden Menge gehören als Knotenpunkte geringerer Valenz. Setzen wir $\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ mit $p_i = 1 - \left(\frac{1}{d_i+1}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ in $f_3(\mathfrak{p})$ ein, so erhalten wir $\gamma \leq S_1$ in Satz 2.8.

Zwei weitere Schranken für γ erhalten wir mittels $f_3(\mathfrak{p})$, indem zunächst $p_i = p \in [0,1]$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gesetzt wird. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\gamma &\leq \min_{p \in [0,1]} \Big(np + \sum_{i \in V} (1-p)^{d_i+1} - \frac{1}{2} \sum_{i \in V} (1-p)^{d_i+1+|N_2(i)|} \Big) \\
&\leq n(p + (1-p)^{\delta+1}) - \frac{1}{2} n (1-p)^{\Delta^2+1} \text{ für alle } p \in [0,1]. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Mit $p = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ folgt aus (2.15)

$$\gamma \leq n \Big(\frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1} + \Big(1 - \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}\Big)^{\delta+1} - \frac{1}{2} \Big(1 - \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}\Big)^{\Delta^2+1} \Big)$$

als Verbesserung der Alon-Spencer-Schranke (Satz 1.1), da $1 - x \leq e^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere für $x = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ und damit

$$\Big(1 - \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}\Big)^{\delta+1} \leq \frac{1}{\delta+1}\,.$$

Setzen wir $p = 1 - (\frac{1}{\delta+1})^{\frac{1}{\delta}}$ in (2.15), so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\gamma &\leq n\Big(1 - \Big(\frac{1}{\delta+1}\Big)^{\frac{1}{\delta}} + \Big(\frac{1}{\delta+1}\Big)^{1+\frac{1}{\delta}} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\delta+1}\Big)^{\frac{\Delta^2+1}{\delta}}\Big)\\
&= n\Big(1 - \delta\Big(\frac{1}{\delta+1}\Big)^{1+\frac{1}{\delta}} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\delta+1}\Big)^{\frac{\Delta^2+1}{\delta}}\Big)
\end{aligned}$$

als Verbesserung der Caro-Roditty-Schranke (Satz 1.2).

Mit den vorangegangenen Bemerkungen ist die Gültigkeit des nachfolgenden Satzes gezeigt.

Satz 2.8 (A. Pruchnewski 2002) *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$, Valenzen d_i $(i = 1, \ldots, n)$ und Minimalvalenz δ. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\gamma(G) &\leq \sum_{i\in V}\Big(1 - \Big(\frac{1}{d_i+1}\Big)^{\frac{1}{\delta}} + \Big(\frac{1}{d_i+1}\Big)^{\frac{1}{\delta}} \prod_{j\in N(i)}\Big(\frac{1}{d_j+1}\Big)^{\frac{1}{\delta}}\Big)\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i\in V}\Big(\Big(\frac{1}{d_i+1}\Big)^{\frac{1}{\delta}} \prod_{j\in N(i)}\Big(\frac{1}{d_j+1}\Big)^{\frac{1}{\delta}} \prod_{k\in N_2(i)}\Big(\frac{1}{d_k+1}\Big)^{\frac{1}{\delta}}\Big) =: S_1\\
\gamma(G) &\leq n\Big(\frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1} + \Big(1 - \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}\Big)^{\delta+1} - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}\Big)^{\Delta^2+1}\Big) =: S_2\\
\gamma(G) &\leq n\Big(1 - \delta\Big(\frac{1}{\delta+1}\Big)^{1+\frac{1}{\delta}} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\delta+1}\Big)^{\frac{\Delta^2+1}{\delta}}\Big) =: S_3
\end{aligned}$$

2.2.4 Bemerkungen

1. Die Schranken S_2 und S_3 in Satz 2.8 sind nicht vergleichbar. Um das einzusehen, setze man $\delta = \Delta = 2$ bzw. $\delta = \Delta = 4$. Das ergibt im ersten Fall $S_2 < S_3$ und $S_2 > S_3$ im zweiten.

   Für reguläre Graphen stimmen S_1 und S_3 überein, somit sind die Schranken S_1 und S_2 nicht vergleichbar.

   Dass für alle Graphen $S_1 \leq S_3$ gilt, kann an dieser Stelle nur vermutet, jedoch nicht gezeigt werden.

2. In [23] verkleinern F. Göring und J. Harant bei der Konstruktion von D auch die Menge X. Dazu werden alle $i \in X$ betrachtet, deren Nachbarschaften vollständig in X liegen, und diese in einer Menge X' zusammengefasst. Dann sei X'' die Menge aller $i \in X'$, die mindestens einen Nachbarn in $X \setminus X'$ haben. Die im Beweis von Satz 2.3 beschriebenen

Mengen $X \cup Y$ und $X \cup U$ können nun um X'' verkleinert werden und bleiben dennoch dominierend in G. Es ergibt sich

$$\gamma = \min_{\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n} g_\nu(\mathfrak{p}) \, , \; \nu = 1, \ldots, 4 \, ,$$

wobei

$$g_\nu(\mathfrak{p}) = f_\nu(\mathfrak{p}) - \boldsymbol{E}(|X''|) \, , \; \nu = 1, \ldots, 4$$

und

$$\boldsymbol{E}(|X''|) = \sum_{i \in V} p_i \Big(\prod_{m \in N(i)} p_m \Big) \Big(1 - \prod_{k \in N_2(i)} (1 - p_k)\Big) \, .$$

Die Funktionen g_ν ($\nu = 1, \ldots, 4$) verhalten sich im Vergleich untereinander genauso wie die entsprechenden Funktionen f_ν (siehe Satz 2.4). Es gilt $g_1 \geq g_4 \geq g_3 \geq g_2$.

In [23] wird ein $\mathcal{O}(\Delta^4 n)$-Algorithmus angegeben (siehe auch Satz 2.6), der für einen Graphen G und ein $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine dominierende Menge D mit $|D| \leq g_4(\mathfrak{p})$ bestimmt.

Um eine dominierende Menge D mit $|D| \leq g_1(\mathfrak{p})$ zu ermitteln, kann der Algorithmus aus Satz 2.5 in folgender Weise abgeändert werden.

Algorithmus für g_1:

INPUT: $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$
OUTPUT: dominierende Menge D mit $|D| \leq g_1(\mathfrak{p})$

BEGIN

1. For $i = 1, ..., n$ do
   if $\frac{\partial}{\partial p_i} g_1(p_1, \ldots, p_n) \geq 0$ then $p_i := 0$
   else $p_i := 1$
2. $X := \{i \in V \mid p_i = 1\}$
   $X' := \{i \in X \mid N(i) \subseteq X\}$
   $X'' := \{i \in X' \mid N(i) \cap (X \setminus X') \neq \emptyset\}$
3. For $i = 1, ..., n$ do
   if $i \in X''$ then $p_i := 0$
4. For $i = 1, ..., n$ do
   if $\prod_{j \in N(i)} (1 - p_j) = 1$ then $p_i := 1$

5. $D := \{i \in V \mid p_i = 1\}$

END

Um eine dominierende Menge D mit $|D| \leq g_\nu(\mathfrak{p})$ in den Fällen $\nu = 2$ bzw. $\nu = 3$ zu bestimmen, wird der Algorithmus für f_ν ($\nu = 2, 3$) auf Seite 30 in der Weise abgeändert, dass im 2. Schritt zusätzlich X' und X'' berechnet werden, anschließend wird im 3. Schritt $D := (X \setminus X'') \cup S \cup F$ ausgegeben.

3. Wenn obere Schranken für die Dominanzzahl $\gamma(G)$ eines Graphen G nur von der Knotenpunktanzahl n abhängig sein sollen, ist Folgendes zu beobachten:

   Ohne Einschränkungen an δ gilt $\gamma \leq n$.

   Für $\delta \geq 1$ gilt $\gamma \leq \frac{n}{2}$ (Satz 1.5).

   Für zusammenhängende Graphen mit $n > 7$ und $\delta \geq 2$ gilt $\gamma \leq \frac{2n}{5}$ [11].

   In zusammenhängenden Graphen mit $\delta \geq 3$ gilt $\gamma \leq \frac{3n}{8}$ [39].

   Die Caro-Roditty-Schranke (Satz 1.2) ist kleiner oder gleich $\frac{3n}{8}$, wenn $\delta \geq 7$ vorausgesetzt wird, die Alon-Spencer-Schranke (Satz 1.1) ist kleiner oder gleich $\frac{3n}{8}$ für $\delta \geq 8$. Dabei gilt stets

$$\text{Caro-Roditty-Schranke} \;\leq\; \text{Alon-Spencer-Schranke}\,,$$

   obgleich letztere nahezu optimal ist (siehe [2]).

2.3 Die Unabhängigkeitszahl und maximum unabhängige Mengen

Obgleich sich diese Arbeit mit Dominanzkonzepten befasst, wollen wir einige Bemerkungen zu unabhängigen Mengen einflechten, da das Komplement einer unabhängigen Menge $\mathfrak{d}$-dominierend ist. Weitergehende Ergebnisse sind u.a. in [25], [26] und [30] zu finden.

2.3.1 Eine stetige Formulierung des Problems

Eine maximum unabhängige Menge eines Graphen G entspricht dem Komplement einer minimum Überdeckung (siehe Satz 1.3) bzw. einer minimum

$\mathfrak{d}$-dominierenden Menge. Eine Menge $T \subseteq V$ ist $\mathfrak{d}$-dominierend, wenn für alle $i \in V \backslash T$ die gesamte Nachbarschaft $N(i)$ in T liegt. Dann hat jede Kante des Graphen einen Endknoten in T. Damit ist T eine Überdeckung im Graphen.

Sei X eine zufällige Knotenpunktmenge und

$$Y = \{i \in V \setminus X \mid |N(i) \cap X| < d_i\}$$

die Menge aller Knotenpunkte, die nicht in X liegen und nicht alle Nachbarn in X haben. Dann ist $X \cup Y$ eine Überdeckung.

Sei $P(i \in X) = p_i \in [0,1]$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $i \in V$ nicht alle Nachbarn in X hat, ist dann

$$P(|N(i) \cap X| < d_i) = 1 - P(|N(i) \cap X| = d_i) = 1 - \prod_{m \in N(i)} p_m \,.$$

Mit $\boldsymbol{E}(|X|) = \sum\limits_{i \in V} p_i$ und $\boldsymbol{E}(|Y|) = \sum\limits_{i \in V}(1-p_i)(1-\prod\limits_{m \in N(i)} p_m)$ erhalten wir aus dem Beweis des Satzes 2.1 mit $\mathfrak{k} = \mathfrak{d}$ Aussagen über die Überdeckungszahl β und damit auch über die Unabhängigkeitszahl α.

Satz 2.9 (J. Harant, A. Pruchnewski, M. Voigt [28]) *Sei $G = (V,E)$ ein Graph mit n Knotenpunkten. Dann gilt für die Überdeckungszahl*

$$\beta(G) \;=\; \min_{\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n} \sum_{i \in V} \Big(p_i + (1-p_i)(1 - \prod_{m \in N(i)} p_m)\Big)$$

und für die Unabhängigkeitszahl

$$\begin{aligned} \alpha(G) \;&=\; n - \min_{\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n} \sum_{i \in V} \Big(p_i + (1-p_i)(1 - \prod_{m \in N(i)} p_m)\Big) \\ &=\; \max_{\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n} \sum_{i \in V} (1-p_i) \prod_{m \in N(i)} p_m \,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

In [1] und [26] werden weitere stetige Optimierungsprobleme für α angegeben. An dieser Stelle sei eines von ihnen hervorgehoben, ein klassisches Resultat von T. S. Motzkin und E. G. Straus aus dem Jahre 1965 [35]. Dieses Resultat hat im Orginal eine andere Formulierung und wird dort mit anderen Methoden als den von uns verwendeten bewiesen.

$$\alpha \;=\; \max_{\mathfrak{o} \neq \mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n} \frac{\left(\sum_{i \in V} p_i\right)^2}{\sum_{i \in V} p_i^2 + 2\sum_{(i,j) \in E(G)} p_i p_j} \,. \tag{2.17}$$

2.3.2 Schranken mittels verallgemeinerter Bipartitionen

Untere Schranken für α erhält man aus (2.16) bzw. (2.17) durch Einsetzen eines beliebigen $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$. Man wird dabei natürlich bestrebt sein, dem tatsächlichen Optimum möglichst nah zu kommen. Desweiteren gewinnt man Schranken durch Einschränkung des zulässigen Bereiches $\mathbf{C}_n$.

Zunächst optimieren wir über $\mathbf{C}_1 = [0,1]$ und setzen in (2.16) und (2.17) jeweils $p_i = p \in [0,1]$ $(i = 1, \ldots, n)$, so erhalten wir Schranken

$$\alpha \geq \max_{p \in [0,1]} \sum_{i \in V} (1-p)p^{d_i} \geq \max_{p \in [0,1]} n(1-p)p^{\Delta} = \frac{n}{\Delta+1}\Big(\frac{\Delta}{\Delta+1}\Big)^{\Delta} \tag{2.18}$$

aus (2.16) sowie

$$\alpha \geq \frac{n^2}{n+2m} \tag{2.19}$$

aus (2.17).

Beide Schranken sind nicht besser als die Caro-Wei-Schranke (Satz 1.6), denn es gilt

$$\frac{n}{\Delta+1}\Big(\frac{\Delta}{\Delta+1}\Big)^{\Delta} < \frac{n^2}{n+2m}\,,$$

da $\frac{2m}{n} \leq \Delta$ und $\frac{\Delta}{\Delta+1} < 1$, und

$$\frac{n^2}{n+2m} \leq \sum_{i \in V} \frac{1}{d_i+1}\,,$$

da das harmonische Mittel der Zahlen $\frac{1}{d_i+1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ kleiner oder gleich ihrem arithmetischen Mittel $\frac{1}{n}\sum\limits_{i \in V} \frac{1}{d_i+1}$ ist.

Nun schränken wir den zulässigen Bereich $\mathbf{C}_n$ auf $\mathbf{C}_2 = [0,1]^2$ ein. Für alle anderen in dieser Arbeit behandelten Dominanzkonzepte gehen wir mit einer solchen Einschränkung zu paaren Graphen über, siehe Kapitel 4. Da aber INDEPENDENT SET für paare Graphen polynomial ist (siehe [31] und Bemerkungen am Ende des Abschnittes), lohnt sich ein solcher Zugang an dieser Stelle nicht. Die nachfolgenden Bemerkungen sollen andeuten, wie man über die Betrachtung von Partitionen der Knotenmenge, insbesondere Bipartitionen, auch zu Resultaten für Dominanzprobleme kommen kann. Darauf wird dann im Abschnitt 4.3 näher eingegangen.

Für einen nicht notwendig paaren Graphen betrachten wir *verallgemeinerte Bipartitionen*. Wir führen eine Zerlegung von $V = V_1 \cup V_2$ in disjunkte Mengen V_1 und V_2 durch. Für $i \in V_j$ $(j = 1, 2)$ seien d''_i die Anzahl der Nachbarn in der Menge, in der i liegt, und d'_i die Anzahl der Nachbarn in der Menge, in der i nicht liegt. Seien $n_j = |V_j|$, $\Delta'_j = \max\{d'_i | i \in V_j\}$ und $\Delta''_j = \max\{d''_i | i \in V_j\}$ für $j = 1, 2$. Man beachte, dass ein paarer Graph vorliegt, falls $d''_i = 0$ für alle $i \in V$ gilt.

Im Optimierungsproblem (2.16) setzen wir $p_i = q_1$ für $i \in V_1$ und $p_i = q_2$ für $i \in V_2$ und folgern

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \max_{(q_1,q_2)\in \mathbf{C}_2} \Big(\sum_{i \in V_1} (1 - q_1) q_1^{d''_i} q_2^{d'_i} + \sum_{i \in V_2} (1 - q_2) q_1^{d'_i} q_2^{d''_i} \Big) \\ &\geq \max_{(q_1,q_2)\in \mathbf{C}_2} \big(n_1 (1 - q_1) q_1^{\Delta''_1} q_2^{\Delta'_1} + n_2 (1 - q_2) q_1^{\Delta'_2} q_2^{\Delta''_2} \big) \,. \end{aligned}$$

Damit gilt der folgende Satz.

Satz 2.10 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit einer Zerlegung $\{V_1, V_2\}$ und $f : \mathbf{C}_2 \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(q_1, q_2) = n_1 (1 - q_1) q_1^{\Delta''_1} q_2^{\Delta'_1} + n_2 (1 - q_2) q_1^{\Delta'_2} q_2^{\Delta''_2} \,.$$

Dann gilt für die Unabhängigkeitszahl

$$\alpha \geq \max_{(q_1,q_2)\in \mathbf{C}_2} f(q_1, q_2) \,.$$

Es gelingt nicht, den Maximalwert von f, der nun mit der Einschränkung auf $\mathbf{C}_2$ auch im Inneren des Bereiches angenommen werden kann, allgemein und explizit anzugeben.

2.3.3 Bemerkungen über Algorithmen für unabhängige Mengen

1. In paaren Graphen gilt $\beta(G) = \alpha_o(G) \leq \frac{n}{2}$ (Satz von König [41]), die Mächtigkeit einer kleinsten Überdeckung ist gleich der Anzahl der Kanten in einem maximum Matching. Das Finden eines maximum Matchings und somit einer minimum Überdeckung ist mittels eines polynomialen Algorithmus (z.B. Algorithmus von Ford und Fulkerson [19] für

paare Graphen) möglich. Damit ist INDEPENDENT SET für paare Graphen polynomial.

2. Zu jedem gegebenen $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ (z.B. als Näherungslösung der Probleme in Satz 2.9) liefert der Algorithmus aus Satz 2.2 mit $\mathfrak{k} = \mathfrak{d}$ in $\mathcal{O}(\Delta^2 n)$-Zeit eine Überdeckung $T \subseteq V$ des Graphen $G = (V, E)$ mit

$$|T| \leq \sum_{i \in V} \Big(p_i + (1 - p_i)(1 - \prod_{m \in N(i)} p_m) \Big)$$

bzw. das Komplement einer unabhängigen Menge $I \subseteq V$ mit

$$|I| \geq \sum_{i \in V} (1 - p_i) \prod_{m \in N(i)} p_m \,.$$

Leider kennen wir keinen geeigneten Startwert für diesen Algorithmus, der eine unabhängige Menge liefert, deren Mächtigkeit die Caro-Wei-Schranke (Satz 1.6) einhält. In [7] beschreiben Y. Caro und Z. Tuza jedoch einen polynomialen Algorithmus für diese Problematik.

In [29] geben J. Harant, Z. Ryjáček und I. Schiermeyer eine Bedingung an den Graphen G in Form verbotener induzierter Untergraphen an, unter der der bekannte Greedy-Algorithmus[3] MIN [36] zum Finden maximaler unabhängiger Mengen stets eine maximum unabhängige Menge in G und somit den exakten Wert für α in Polynomialzeit liefert.

Ergänzendes über Algorithmen zum Finden unabhängiger Mengen in Graphen enthalten u.a. die Arbeiten [25] und [30].

3. In [26] wird die Beziehung

$$\alpha = \max_{\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n} \Big(\sum_{i \in V} p_i - \sum_{(i,j) \in E(G)} p_i p_j \Big)$$

bewiesen und ein $\mathcal{O}(\Delta n)$-Algorithmus aufgezeigt, der zu einem gegebenen $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine unabhängige Menge I mit

$$|I| \geq \Big(\sum_{i \in V} p_i - \sum_{(i,j) \in E(G)} p_i p_j \Big)$$

liefert.

4. In [1] werden weitere stetige Formulierungen für das Unabhängigkeitsproblem angegeben und entsprechende Algorithmen rechentechnisch an Beispielen auf Konkurrenzfähigkeit getestet.

---

[3] Lösche im Graphen rekursiv alle Nachbarn eines Knotenpunktes mit (im aktuellen Graphen) kleinster positiver Valenz.

Kapitel 3

Das totale Dominanzproblem als stetiges Optimierungsproblem

Total dominierende Mengen sind dominierende Mengen mit der Eigenschaft, dass jeder Knotenpunkt des Graphen dominiert wird, d.h. der durch eine totale Dominanzmenge induzierte Untergraph enthält keine isolierten Knotenpunkte. Eingeführt wurde das Konzept der totalen Dominanz von E.J. Cockayne, R.M. Dawes und S.T. Hedetniemi [9].

Mittlerweile sind eine Vielzahl von Dominanzkonzepten entwickelt worden. Aber nicht alle von ihnen eignen sich für unsere in Kapitel 2 ausführlich anhand der Dominanz durchgeführte Herangehensweise über die wahrscheinlichkeitstheoretische Methode. Das totale Dominanzkonzept wurde von uns gewählt, da sich total dominierende Mengen lokal über nächste Nachbarschaften charakterisieren lassen.

In Analogie zum Übergang von der Dominanz zur Vektordominanz in Kapitel 2 wird in diesem Kapitel eine Verallgemeinerung der totalen Dominanz, die totale Vektordominanz oder auch totale $\mathfrak{k}$-Dominanz, definiert. In der Literatur ist die totale $\mathfrak{k}$-Dominanz auch als totale f-Dominanz mit einer Funktion $f : V \to \mathbb{Z}$ zu finden [43].

Gegeben sei ein ganzzahliger Vektor $\mathfrak{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ mit $1 \leq k_i \leq d_i$ für alle $i \in V$. Für jeden Knotenpunkt i des Graphen wird gefordert, mindestens k_i Nachbarn in einer total $\mathfrak{k}$-dominierenden Menge $D_{T\mathfrak{k}}$ zu haben. Für $\mathfrak{k} = \mathfrak{1} = (1, \ldots, 1)$ entspricht die totale $\mathfrak{k}$-Dominanz der totalen Dominanz, auf die wir im Abschnitt 3.2 näher eingehen werden. Es gilt $\gamma_T = \gamma_{T\mathfrak{1}}$. Für $\mathfrak{k} = \mathfrak{d}$, d.h.

jeder Knotenpunkt muss alle Nachbarn in einer totalen $\mathfrak{d}$-Dominanzmenge haben, gilt $\gamma_{T\mathfrak{d}} = n$. Die kleinste totale $\mathfrak{d}$-Dominanzmenge ist die Menge V aller Knotenpunkte selbst. Folglich ist dieses Problem uninteressant.

TOTAL DOMINATING SET und damit auch TOTAL VECTOR DOMINATING SET gehören der Komplexitätsklasse NPC an. Damit sind die nachfolgenden Untersuchungen lohnenswert.

In Anlehnung an die Ausführungen im vorherigen Kapitel lassen sich stetige Optimierungsprobleme aufstellen und realisierende Algorithmen angeben. Dabei sollen jedoch auch die Schwierigkeiten gegenüber der relativ glatt verlaufenen Vorgehensweise im Falle der Dominanz aufgezeigt werden. Im Falle totaler Dominanz ist es komplizierter, eine zufällig gewählte Menge X zu der geforderten Struktur der totalen Dominanz bzw. totalen Vektordominanz abzuändern. Für die Erwartungswerte dieser Mengen können nur obere Schranken angegeben werden. Zwar sind die Zielfunktionen der daraus gewonnenen Optimierungsprobleme für die totale Dominanzzahl bzw. die totale Vektordominanzzahl nicht gut, doch liefern sie im Optimum den gewünschten Wert.

3.1 Das totale Vektordominanzproblem

Im Folgenden nutzen wir wie in Kapitel 2 Mittel der wahrscheinlichkeitstheoretischen Methode, um für die totale $\mathfrak{k}$-Dominanzzahl $\gamma_{T\mathfrak{k}}$ ein stetiges Optimierungsproblem anzugeben.

3.1.1 Eine stetige Formulierung

Satz 3.1 (A. Pruchnewski 2001) *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und sei $f_{T\mathfrak{k}} : \mathbf{C}_n :\to \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned} f_{T\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) \;=\; & \sum_{i\in V} p_i + (\Delta+1)\cdot\sum_{i\in V}(1-p_i)\Big(\sum_{\ell=0}^{k_i-1}\sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\ |L|=\ell}}\prod_{j\in L}p_j\prod_{j\in N(i)\setminus L}(1-p_j)\Big) \\ & +\Delta\cdot\sum_{i\in V}p_i\Big(\sum_{\ell=0}^{k_i-1}\sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\ |L|=\ell}}\prod_{j\in L}p_j\prod_{j\in N(i)\setminus L}(1-p_j)\Big)\,. \end{aligned}$$

Dann gilt für die totale $\mathfrak{k}$-Dominanzzahl:

$$\gamma_{T\mathfrak{k}} = \min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f_{T\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})\,.$$

Beweis.
Mit der Wahrscheinlichkeit $P(i \in X) = p_i \in [0,1]$ wählen wir zufällig und unabhängig eine Teilmenge $X \subseteq V$. Sei dann

$$Y = \{i \in V \setminus X \mid |N(i) \cap X| < k_i\}$$

die Menge aller Knotenpunkte $i \in V \setminus X$, die weniger als k_i Nachbarn in X haben. Es ist leicht einzusehen, dass $X \cup Y$ zwar eine $\mathfrak{k}$-dominierende Menge aber noch nicht notwendigerweise eine total $\mathfrak{k}$-dominierende Menge von G ist. Nur die Knotenpunkte der Menge $V \setminus (X \cup Y)$ werden bereits durch $X \cup Y$ total $\mathfrak{k}$-dominiert (gerade so ist Y gewählt worden). Wir fügen nun für jeden Knotenpunkt i aus $X \cup Y$, der weniger als k_i Nachbarn in $X \cup Y$ hat, die fehlende Anzahl an Nachbarn aus $V \setminus (X \cup Y)$ zu $X \cup Y$ hinzu und erhalten eine total $\mathfrak{k}$-dominierende Menge in G.

Wir schätzen die Mächtigkeit der entstehenden Menge nach oben ab. Dazu betrachten wir die Menge Z_X aller $i \in X$ mit weniger als k_i Nachbarn in $X \cup Y$. Für jedes $i \in Z_X$ nehmen wir $(k_i - |N(i) \cap (X \cup Y)|)$ Nachbarn aus $V \setminus (X \cup Y)$ hinzu und fassen all diese Knotenpunkte in der Menge D_X zusammen. Analog sei Z_Y die Menge aller $i \in Y$ mit weniger als k_i Nachbarn in $X \cup Y$. Wir bilden eine Menge D_Y, indem wir für jedes $i \in Z_Y$ eine Menge von $(k_i - |N(i) \cap (X \cup Y)|)$ Nachbarn aus $V \setminus (X \cup Y)$ auswählen. Folglich wird nun jeder Knotenpunkt $i \in V$ durch mindestens k_i Knotenpunkte in $X \cup Y \cup D_X \cup D_Y$ total $\mathfrak{k}$-dominiert.

Und es gilt

$$\begin{aligned}
\gamma_{T\mathfrak{k}} &\leq |X| + |Y| + |D_X| + |D_Y| \\
|D_X| &\leq \sum_{i \in Z_X} (k_i - |N(i) \cap (X \cup Y)|) \leq \sum_{i \in Z_X} k_i \leq \sum_{i \in Z_X} d_i \\
&\leq \sum_{i \in Z_X} \Delta = \Delta \cdot |Z_X| \\
|D_Y| &\leq \sum_{i \in Z_Y} (k_i - |N(i) \cap (X \cup Y)|) \leq \Delta \cdot |Z_Y| \,.
\end{aligned}$$

Mit diesen groben Abschätzungen folgt

$$\gamma_{T\mathfrak{k}} \leq |X| + |Y| + \Delta \cdot (|Z_X| + |Z_Y|) \,.$$

Wir betrachten den Erwartungswert dieser oberen Schranke für die Mächtigkeit der total $\mathfrak{k}$-dominierenden Menge $D_{T\mathfrak{k}} = X \cup Y \cup D_X \cup D_Y$. Es ergibt sich

$$\boldsymbol{E}(|D_{T\mathfrak{k}}|) \leq \boldsymbol{E}(|X|) + \boldsymbol{E}(|Y|) + \Delta \cdot (\boldsymbol{E}(|Z_X|) + \boldsymbol{E}(|Z_Y|)) \,.$$

Den Erwartungswert $\boldsymbol{E}(|Z_Y|)$ zu berechnen, erweist sich als kompliziert, so dass wir weiter abschätzend $|Z_Y| \leq |Y|$ einsetzen. Wir erhalten

$$\boldsymbol{E}(|D_{T\mathfrak{k}}|) \leq \boldsymbol{E}(|X|) + (\Delta + 1) \cdot \boldsymbol{E}(|Y|) + \Delta \cdot \boldsymbol{E}(|Z_X|) .$$

Für $\boldsymbol{E}(|X|)$ und $\boldsymbol{E}(|Y|)$ verwenden wir Ergebnisse aus dem Beweis von Satz 2.1 und berechnen $\boldsymbol{E}(|Z_X|)$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(|X|) &= \sum_{i\in V} p_i \\
\boldsymbol{E}(|Y|) &= \sum_{i\in V}(1-p_i)\Big(\sum_{\ell=0}^{k_i-1} \sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\|L|=\ell}} \prod_{j\in L} p_j \prod_{j\in N(i)\setminus L} (1-p_j)\Big) \\
Z_X &= \{i \in X \mid |N(i)\cap(X\cup Y)| < k_i\} \\
\boldsymbol{E}(|Z_X|) &= \sum_{i\in V} P(i \in Z_X) \\
&= \sum_{i\in V} P(i \in X \wedge |N(i)\cap(X\cup Y)| < k_i) \\
&\leq \sum_{i\in V} P(i \in X \wedge |N(i)\cap X| < k_i) \\
& \text{(eine weitere recht grobe Abschätzung)} \\
&= \sum_{i\in V} P(i \in X)\cdot P(|N(i)\cap X| < k_i) \\
&= \sum_{i\in V} p_i\Big(\sum_{\ell=0}^{k_i-1} \sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\|L|=\ell}} \prod_{j\in L} p_j \prod_{j\in N(i)\setminus L} (1-p_j)\Big) .
\end{aligned}$$

Es gibt eine Realisierung, die kleiner oder gleich dem Erwartungswert der Zufallsgröße $|D_{T\mathfrak{k}}|$ ist (siehe (1.5)). Somit gilt

$$\gamma_{T\mathfrak{k}} \leq \min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f_{T\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) .$$

Sei nun $D^*_{T\mathfrak{k}}$ eine minimum total $\mathfrak{k}$-dominierende Menge, d.h. $|D^*_{T\mathfrak{k}}| = \gamma_{T\mathfrak{k}}$. Und sei $\mathfrak{p}^* = (p^*_1, \ldots, p^*_n)$ mit

$$p^*_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in D^*_{T\mathfrak{k}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt

$$\sum_{i\in V} p^*_i = \gamma_{T\mathfrak{k}} .$$

Für jedes $i \in V$ verschwindet das Produkt

$$\prod_{j \in L} p_j^* \prod_{j \in N(i) \setminus L} (1 - p_j^*)$$

für alle $L \subseteq N(i)$ mit $|L| < k_i$, da jedes $i \in V$ mindestens k_i Nachbarn in $D^*_{T\mathfrak{k}}$ hat, d.h. es gibt ein $j \in N(i) \setminus L$ mit $p_j^* = 1$.

Somit gilt $f_{T\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}^*) = \gamma_{T\mathfrak{k}}$ und folglich

$$\gamma_{T\mathfrak{k}} = \min_{\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n} f_{T\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})\,.$$

Damit ist Satz 3.1 bewiesen. □

3.1.2 Ein Algorithmus für total vektordominierende Mengen

Wir geben einen Algorithmus an, der in $\mathcal{O}(\Delta^2 2^\Delta n)$-Zeit für einen gegebenen Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine total $\mathfrak{k}$-dominierende Menge findet, deren Mächtigkeit den Wert $f_{T\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$ nicht überschreitet. Bei beschränkter Maximalvalenz Δ ist dieser Algorithmus linear.

Da die Funktion $f_{T\mathfrak{k}}$ multilinear ist, lässt sich die Idee des Algorithmus aus Abschnitt 2.1.2 für $\mathfrak{k}$-dominierende Mengen verwenden. Wir bestimmen, ausgehend von einem Startwert $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ ein lokales Minimum $\mathfrak{p} \in \{0,1\}^n$ von $f_{T\mathfrak{k}}$ und korrigieren die Menge $D = \{i \in V \mid p_i = 1\}$ zu einer total $\mathfrak{k}$-dominierenden Menge $D_{T\mathfrak{k}}$ in G.

Satz 3.2 (A. Pruchnewski 2002) *Es gibt einen $\mathcal{O}(\Delta^2 2^\Delta n)$-Algorithmus, der für einen beliebig vorgegebenen Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine total $\mathfrak{k}$-dominierende Menge $D_{T\mathfrak{k}}$ in G mit $|D_{T\mathfrak{k}}| \leq f_{T\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$ konstruiert.*

Beweis.
Für das aktuelle $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ des Algorithmus und $i = 1, ..., n$ seien:

$$\begin{aligned}
Q_i &:= \sum_{\ell=0}^{k_i-1} \sum_{\substack{L \subseteq N(i) \\ |L|=\ell}} \prod_{j \in L} p_j \prod_{j \in N(i) \setminus L} (1 - p_j)\,, \\
R_i &:= \sum_{j \in N(i)} (1 - p_j) \sum_{\substack{L \subseteq N(j) \setminus \{i\} \\ |L|=k_j-1}} \prod_{k \in L} p_k \prod_{k \in N(j) \setminus (L \cup \{i\})} (1 - p_k)\,, \\
S_i &:= \sum_{j \in N(i)} \sum_{\substack{L \subseteq N(j) \setminus \{i\} \\ |L|=k_j-1}} \prod_{k \in L} p_k \prod_{k \in N(j) \setminus (L \cup \{i\})} (1 - p_k)\,.
\end{aligned}$$

Damit wird

$$f_{T\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) = \sum_{i\in V} p_i + (\Delta+1)\sum_{i\in V}(1-p_i)Q_i + \Delta\sum_{i\in V} p_iQ_i \tag{3.1}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial p_i} f_{T\mathfrak{k}}(p_1,\ldots,p_n) = 1 - Q_i - R_i - \Delta S_i\,.$$

Beachte, dass die Definitionen für Q_i und R_i mit denen auf Seite 18 übereinstimmen.

Algorithmus:

INPUT: $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$
OUTPUT: total $\mathfrak{k}$-dominierende Menge $D_{T\mathfrak{k}}$ mit $|D_{T\mathfrak{k}}| \leq f_{T\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$.
BEGIN

1. For $i = 1, ..., n$ do
   if $1 - Q_i - R_i - \Delta S_i \geq 0$ then $p_i := 0$
   else $p_i := 1$
2. *anzahl* $:= 0$
   For $i = 1, ..., n$ do
   if $Q_i = 1$ then
   for $j \in N(i)$ and $anzahl < k_i$ do
   $p_j := 1$
   $anzahl = anzahl + 1$
3. $D_{T\mathfrak{k}} := \{i \in V \mid p_i = 1\}$

END

Im Beweis zu Satz 2.2 wurde gezeigt, dass $Q_i = 1$ genau dann gilt, wenn i weniger als k_i Nachbarn in $D := \{i \in V \mid p_i = 1\}$ hat. In diesem Falle setzen wir für die fehlende Anzahl an Nachbarn $p_j = 1$, so dass jeder Knotenpunkt i nach diesem Schritt mindestens k_i Nachbarn in D hat. Dann wird D total $\mathfrak{k}$-dominierend. Die Anzahl hinzugenommener Knotenpunkte kann höchstens Δ sein. Damit erhöht sich in (3.1) $\sum_{i\in V} p_i$ um diese Anzahl, wohingegen $\sum_{i\in V} p_iQ_i$ oder $\sum_{i\in V}(1-p_i)Q_i$ sich um mindestens 1 verringert. Mit dem Faktor Δ bzw. $(\Delta + 1)$ ergibt sich insgesamt, dass $f_{T\mathfrak{k}}(\mathfrak{p})$ nach diesem Algorithmusschritt nicht gestiegen ist.

Da Q_i mit einem Aufwand von $\mathcal{O}(\Delta 2^\Delta)$ und R_i bzw. S_i mit einem Aufwand von $\mathcal{O}(\Delta^2 2^\Delta)$ berechenbar sind, ist leicht einzusehen, dass der Gesamtaufwand des Algorithmus $\mathcal{O}(\Delta^2 2^\Delta n)$ beträgt.

Wir setzen $D_{T\mathfrak{k}} := D$ und Satz 3.2 ist bewiesen. □

3.2 Das totale Dominanzproblem

Total dominierende Mengen sind dominierende Mengen, deren Elemente sich nicht selbst dominieren können.

Mit $\mathfrak{k} = \mathbb{1}$ lässt sich die totale Dominanz als Spezialfall der totalen $\mathfrak{k}$-Dominanz betrachten. Somit lassen sich die Resultate für die totale Vektordominanz aus Abschnitt 3.1 auf das totale Dominanzproblem anwenden.

Wir geben Zielfunktionen $f_{T\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ an, deren Optimum die totale Dominanzzahl γ_T ist. Für $\nu = 1$ gelingt es, einen polynomialen Algorithmus anzugeben, der zu einem gegebenen $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine total dominierende Menge ermittelt, deren Mächtigkeit die Schranke $f_{T1}(\mathfrak{p})$ nicht überschreitet.

Obgleich total dominierende Mengen den total $\mathbb{1}$-dominierenden Mengen entsprechen, ist die Zielfunktion $f_{T\mathbb{1}}$ zu grob für das totale Dominanzproblem. Es wird sich zeigen, dass an entsprechenden Stellen allzu grobe Abschätzungen vermieden werden können.

3.2.1 Eine stetige Formulierung

Wir definieren die Funktionen $f_{T\nu} : \mathbf{C}_n \to \mathbb{R}$ für $\nu = 1, 2, 3$ in der folgenden Weise.

$$
\begin{aligned}
f_{T1}(\mathfrak{p}) &= \sum_{i\in V} p_i + 2\sum_{i\in V}\prod_{j\in N(i)}(1-p_j) - \sum_{i\in V} p_i \prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\,,\\
f_{T2}(\mathfrak{p}) &= \sum_{i\in V} p_i + \sum_{i\in V}\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\\
&\quad + \sum_{i\in V}\Bigg((1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\\
&\quad \cdot\Bigg(1-\sum_{\ell=1}^{d_i}(-1)^{\ell+1}\sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\|L|=\ell}}\Big(\prod_{k\in(\bigcup_{j\in L} N(j))\setminus N[i]}(1-p_k)\Big)\Bigg)\Bigg)\,,\\
f_{T3}(\mathfrak{p}) &= \sum_{i\in V} p_i + \sum_{i\in V}\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{i\in V}(1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)\Big(1-\prod_{k\in N_2(i)}(1-p_k)\Big)\,.$$

Satz 3.3 (A. Pruchnewski 2001) *Sei $G=(V,E)$ ein Graph mit $V=\{1,\dots,n\}$ und $f_{T\nu}:\mathbf{C}_n\to\mathbb{R}$ ($\nu=1,2,3$) wie oben definiert. Dann gilt für die totale Dominanzzahl*

$$\gamma_T=\min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f_{T\nu}(\mathfrak{p})\,,\ \ \nu=1,2,3\,.$$

Beweis.
Mit der Wahrscheinlichkeit $P(i\in X)=p_i\in[0,1]$ wählen wir zufällig und unabhängig eine Teilmenge $X\subseteq V$. Sei $Y=\{i\in V\setminus X\mid N(i)\cap X=\emptyset\}$ in bewährter Weise die Menge aller Knotenpunkte aus $V\setminus X$, die keinen Nachbarn in X haben. Es ist leicht einzusehen, dass $X\cup Y$ zwar eine dominierende Menge aber noch keine total dominierende Menge ist. Dazu darf $G[X\cup Y]$ keine isolierten Knotenpunkte enthalten. Das ist äquivalent dazu, dass weder $G[X]$ noch $G[Y]$ isolierte Knotenpunkte enthalten dürfen.

Seien Z_X die Menge der isolierten Knotenpunkte in $G[X]$ und Z_Y die Menge der isolierten Knotenpunkte in $G[Y]$. Dann erhalten wir eine total dominierende Menge D_T in G, indem wir zu allen Knotenpunkten aus $X\cup Y$ je einen Nachbarn der Knotenpunkte aus $Z_X\cup Z_Y$ hinzunehmen. Wegen $\delta>0$ hat jeder Knotenpunkt in G wenigstens einen Nachbarn. Wegen $Z_X\cap Z_Y=\emptyset$ ist die Anzahl der hinzuzunehmenden Nachbarn höchstens

$$|Z_X\cup Z_Y|=|Z_X|+|Z_Y|\,.$$

Die Mächtigkeit einer daraus resultierenden, total dominierenden Menge lässt sich mit

$$|D_T|\le|X|+|Y|+|Z_X|+|Z_Y|$$

abschätzen. Wir betrachten den Erwartungswert dieser Schranke. Dabei sind $\boldsymbol{E}(|X|)$, $\boldsymbol{E}(|Y|)$ und $\boldsymbol{E}(|Z_Y|)$ (mit $Z_Y=S$) bereits im Beweis von Satz 2.3 berechnet worden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(|D_T|) &\le \boldsymbol{E}(|X|)+\boldsymbol{E}(|Y|)+\boldsymbol{E}(|Z_X|)+\boldsymbol{E}(|Z_Y|)\\
\boldsymbol{E}(|X|) &= \sum_{i\in V}p_i\\
\boldsymbol{E}(|Y|) &= \sum_{i\in V}(1-p_i)\prod_{j\in N(i)}(1-p_j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(|Z_X|) &= \sum_{i\in V} P(i \in Z_X) \\
&= \sum_{i\in V} P\Big((i \in X) \wedge (\bigwedge_{j\in N(i)} j \notin X)\Big) \\
&= \sum_{i\in V} p_i \prod_{j\in N(i)} (1-p_j) \\
\boldsymbol{E}(|Z_Y|) &= \sum_{i\in V} P(i \in Z_Y) \\
&= \sum_{i\in V} P\Big(i \in Y \wedge (\bigwedge_{j\in N(i)} N(j)\cap X \neq \emptyset)\Big) \\
&= \sum_{i\in V} \Bigg((1-p_i) \prod_{j\in N(i)} (1-p_j) \\
&\quad \cdot\Bigg(1 - \sum_{\ell=1}^{d_i} (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{L\subseteq N(i)\\ |L|=\ell}} \Big(\prod_{k\in(\bigcup_{j\in L} N(j))\setminus N[i]} (1-p_k)\Big)\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Damit folgt:

$$\gamma_T \leq \min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f_{T2}(\mathfrak{p})\,.$$

Weiterhin gilt

$$\boldsymbol{E}(|Z_Y|) \leq \sum_{i\in V}(1-p_i) \prod_{j\in N(i)} (1-p_j)\Big(1 - \prod_{k\in N_2(i)} (1-p_k)\Big)\,,$$

und es folgt

$$\gamma_T \leq \min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f_{T3}(\mathfrak{p})\,.$$

Mit der (groben) Abschätzung $|Z_y| \leq |Y|$ erhält man

$$\boldsymbol{E}(|D_T|) \leq \boldsymbol{E}(|X|) + 2\,\boldsymbol{E}(|Y|) + \boldsymbol{E}(|Z_X|)$$

und nach einer kleinen Umformung schließlich

$$\gamma_T \leq \min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f_{T1}(\mathfrak{p})\,.$$

Sei nun D_T^* eine minimum total dominierende Menge, d.h. $|D_T^*| = \gamma_T$. Und sei $\mathfrak{p}^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ mit

$$p_i^* = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in D_T^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Dann gilt

$$\sum_{i\in V} p_i^* = \gamma_T \text{ und } \prod_{j\in N(i)} (1-p_j^*) = 0 \text{ für alle } i \in V\,,$$

es folgt

$$\gamma_T = f_{T\nu}(\mathfrak{p}^*)\,, \quad \nu = 1,2,3$$

und Satz 3.3 ist bewiesen. □

Obgleich die Funktionen f_{T1}, f_{T2} und f_{T3} in ihrem Minimum übereinstimmen, weisen sie doch verschiedene Güte auf, was bei der näherungsweisen Lösung des totalen Dominanzproblems von Bedeutung sein kann.

Behauptung: Es gilt $f_{T1} \geq f_{T3} \geq f_{T2}$.
Beweis.
Es ist $f_{T1} \geq f_{T3}$, denn

$$f_{T1} - f_{T3} = \sum_{i\in V}(1-p_i) \prod_{j\in N(i)} (1-p_j) \prod_{k\in N_2(i)} (1-p_k) \geq 0$$

für alle $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$.

Offensichtlich gilt $f_{T3} \geq f_{T2}$, denn f_{T3} unterscheidet sich von f_{T2} nur durch das Einsetzen einer Abschätzung nach oben für $\boldsymbol{E}(|Z_Y|)$ (siehe Beweis von Satz 3.3). □

3.2.2 Ein Algorithmus für total dominierende Mengen

Wir geben einen polynomialen Algorithmus an, der zu einem beliebigen Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine total dominierende Menge bestimmt, deren Mächtigkeit den Wert $f_{T1}(\mathfrak{p})$ nicht übersteigt. Dabei nutzen wir wieder die Multilinearitätseigenschaft der Funktion aus. Die Vorgehensweise entspricht der Vorgehensweise in den anderen Abschnitten über Algorithmen.

Satz 3.4 (A. Pruchnewski 2001) *Es gibt einen $\mathcal{O}(\Delta^2 n)$-Algorithmus, der für einen beliebig vorgegebenen Vektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine total dominierende Menge D_T in G mit $|D_T| \leq f_{T1}(\mathfrak{p})$ konstruiert.*

Beweis.
Wir geben zunächst einen Algorithmus an.

Algorithmus für f_{T1}:

$$\begin{aligned}
Q_i &:= \prod_{j\in N(i)} (1-p_j) \\
R_i &:= \sum_{j\in N(i)} (1-p_j) \prod_{k\in N(j)\setminus\{i\}} (1-p_k) \\
S_i &:= \sum_{j\in N(i)} \prod_{k\in N(j)\setminus\{i\}} (1-p_k)
\end{aligned}$$

INPUT: $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$
OUTPUT: total dominierende Menge D_T mit $|D_T| \leq f_{T1}(\mathfrak{p})$

BEGIN

1. For $i = 1, ..., n$ do
   if $1 - Q_i - R_i - S_i \geq 0$ then $p_i := 0$
   else $p_i := 1$

2. For $i = 1, ..., n$ do
   if $Q_i = 1$ then
   $p_i := 1$
   $p_j := 1$ for exactly one $j \in N(i)$

3. $D_T := \{i \in V \mid p_i = 1\}$

END

Sei $f^*_{T1} = f_{T1}(\mathfrak{p})$ der Funktionswert von f_{T1} an der Stelle des Startvektors $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$. Nach dem 1. Schritt ist offensichtlich $\mathfrak{p} \in \{0,1\}^n$ ganzzahlig und $f_{T1}(\mathfrak{p}) \leq f^*_{T1}$. Wir können abkürzend

$$f_{T1}(\mathfrak{p}) = \sum_{i\in V} p_i + 2\sum_{i\in V} Q_i - \sum_{i\in V} p_i Q_i\,.$$

schreiben. Wie sich leicht überprüfen lässt, ist

$$\frac{\partial}{\partial p_i} f_{T1}(\mathfrak{p}) = 1 - Q_i - R_i - S_i\,,$$

und Q_i, R_i sowie S_i sind unabhängig von p_i. Man beachte, dass die Definitionen für Q_i und R_i denen auf Seite 29 entsprechen.

Im 2. Schritt wird $D := \{i \in V \mid p_i = 1\}$ so zu einer total dominierenden Menge korrigiert, dass $f_{T1}(\mathfrak{p})$ dabei nicht steigt. Wenn $Q_i = 1$, so ist $N(i) \cap$

$X = \emptyset$. Setzen wir nun im 2. Schritt in diesem Falle $p_i := 1$ und für genau ein beliebig gewähltes $j \in N(i)$ den Wert $p_j := 1$, so erhöht sich $\sum_{i \in V} p_i$ um genau 1, falls zuvor bereits $p_i = 1$ gewesen war, im anderen Fall um genau 2 und

$$2 \sum_{i \in V} \prod_{j \in N(i)} (1 - p_j) - \sum_{i \in V} p_i \prod_{j \in N(i)} (1 - p_j)$$

verringert sich entsprechend um mindestens 1 bzw. 2. Damit ist $D_T = D$ nach diesem Schritt eine total dominierende Menge, für die $|D_T| \leq f_{T1}^*$ gilt.

Wie man sich leicht überzeugt, beträgt der Aufwand des Algorithmus $\mathcal{O}(\Delta^2 n)$.
□

Für $\nu = 2, 3$ kann kein derartiger Algorithmus angegeben werden, da der 2. Algorithmusschritt, der $D := \{i \in V \mid p_i = 1\}$ zu einer total dominierenden Menge korrigiert, in diesen Fällen nicht garantieren kann, dass $f_{T2}(\mathfrak{p})$ bzw. $f_{T3}(\mathfrak{p})$ dabei nicht ansteigen. Die Funktionen f_{T2} und f_{T3} können jedoch bei der Suche nach besseren Startwerten für den Algorithmus genutzt werden.

3.2.3 Eine Schranke für die totale Dominanzzahl

Im Folgenden geben wir eine obere Schranken für die totale Dominanzzahl γ_T an, die durch Einschränkung des zulässigen Bereiches $\mathbf{C}_n$ in Satz 3.3 auf $\mathbf{C}_1 = [0, 1]$ gewonnen wird. Wir optimieren dazu mit $p_i = p \in [0, 1]$ für alle $i \in V$ über die Hauptdiagonale des Einheitswürfels $\mathbf{C}_n$.

Andererseit liefert natürlich jedes $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine obere Schranke $f_{T\nu}(\mathfrak{p})$ ($\nu = 1, 2, 3$) für γ_T.

Satz 3.5 (A. Pruchnewski 2001) *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$, der Minimalvalenz $\delta > 0$, der Maximalvalenz Δ und $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(p) = n(p + (1 - p)^{\delta} + (1 - p)^{\delta+1}(1 - (1 - p)^{\Delta(\Delta-1)})\,.$$

Dann gilt für die totale Dominanzzahl

$$\gamma_T \leq \min_{p \in [0,1]} f(p)\,.$$

Beweis.
Ausgehend von Satz 3.3 folgt

$$\gamma_T \leq \min_{p \in [0,1]} f_{T3}(p, \ldots, p) \text{ und damit}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_T &\leq \min_{p\in[0,1]} \sum_{i\in V} \Big(p + \prod_{j\in N(i)} (1-p) + (1-p) \prod_{j\in N(i)} (1-p)\Big(1 - \prod_{k\in N_2(i)} (1-p)\Big)\Big) \\
&\leq \min_{p\in[0,1]} \sum_{i\in V} \Big(p + (1-p)^{d_i} + (1-p)^{d_i+1}\Big(1 - (1-p)^{\sum_{j\in N(i)}(d_i-1)}\Big)\Big) \\
&\leq \min_{p\in[0,1]} n\Big(p + (1-p)^{\delta} + (1-p)^{\delta+1}\Big(1 - (1-p)^{\Delta(\Delta-1)}\Big)\Big) .
\end{aligned}$$

□

Das Minimum von f in $[0, 1]$ explizit anzugeben, ist im Allgemeinen nicht möglich, kann aber bei konkret gegebenen Werten δ und Δ numerisch berechnet werden.

P. C. B. Lam und B. Wei [34] behaupten, dass $\gamma_T(G) \leq \frac{1}{2}n$ für alle Graphen mit $\delta \geq 3$ gilt. Denken wir uns Graphen mit großem δ, beispielsweise reguläre Graphen mit $\delta \geq 6$, so ist zu sehen, dass unsere Schranke aus Satz 3.5 kleiner als $\frac{1}{2}n$ ist. Im Allgemeinen ist unsere Schranke jedoch nicht mit den bekannten Schranken (siehe auch Satz 1.7 und 1.8) vergleichbar.

Kapitel 4

Betrachtung von Dominanzproblemen in paaren Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *paar* oder *bipartit*, wenn eine Zerlegung der Knotenpunktmenge $V(G) = V_1 \cup V_2$ in disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 existiert, so dass die Endknoten jeder Kante aus $E(G)$ in verschiedenen Partitionsklassen liegen. Wir sagen kurz, der paare Graph G habe die Bipartition $\{V_1, V_2\}$.

Das Problem INDEPENDENT SET gehört für paare Graphen der Klasse P an, wohingegen VECTOR DOMINATING SET, DOMINATING SET, TOTAL VECTOR DOMINATING SET und TOTAL DOMINATING SET auch für paare Graphen NP-vollständig bleiben [8, 21, 31].

In den Sätzen 2.1, 2.3, 3.1 und 3.3 wurde über den gesamten Einheitswürfel C_n optimiert, um $\gamma_{\mathfrak{k}}(G)$, $\gamma(G)$, $\gamma_{T\mathfrak{k}}(G)$ bzw. $\gamma_T(G)$ zu bestimmen. Zur Ermittlung von Schranken schränkten wir u.a. den zulässigen Bereich auf C_1 ein und setzten $p_i = p \in [0, 1]$ für alle $i \in V$. In der Klasse der paaren Graphen optimieren wir nun über C_2, indem jede Partitionsklasse ihre eigene Wahrscheinlichkeit erhält. Dieser Ansatz liefert uns nach erfolgreicher Optimierung der Funktionen Schranken für $\gamma(G)$ in paaren Graphen, die gegenüber den allgemeinen Schranken für $\gamma(G)$ aus Abschnitt 2.2 eine wesentliche Verbesserung für paare Graphen darstellen.

Wir wählen die Klasse der paaren Graphen zur Demonstration der Herangehensweise zur Bestimmung oberer Schranken für die Dominanzzahl, da in paaren Graphen alle Knotenpunkte geklärte Nachbarschaftsverhältnisse haben. Diese Eigenschaft lässt sich gut mit der lokalen Charakterisierung dominierender Mengen in Einklang bringen. Ein Knotenpunkt hat seine Nachbarschaft komplett in der Partitionsklasse, der er selbst nicht angehört. Eine Verallgemeinerung dieses Ansatzes auf multipartite Graphen, das sind Graphen mit $\chi(G) > 2$, ist denkbar[1]. Dabei werden weitere Parameter in die entsprechenden Schranken einfließen.

Nennenswerte Erfolge bei der Behandlung der Dominanzproblematik erzielten wir vorrangig für die gewöhnliche Dominanz. Aus diesem Grunde stellen wir die Ergebnisse dazu an den Anfang des Kapitels. In den Fällen der Vektordominanz, totalen Dominanz und totalen Vektordominanz gewannen wir nur Teilergebnisse.

4.1 Dominanz in paaren Graphen

Da das Problem DOMINATING SET auch bei der Einschränkung auf paare Graphen NP-vollständig bleibt, bestimmen wir Schranken für $\gamma(G)$, die für paare Graphen gegenüber der Alon-Spencer-Schranke (Satz 1.1) und der Caro-Roditty-Schranke (Satz 1.2) wesentlich verbessert sind. Entsprechende Resultate zeigen die Sätze 4.1 und 4.2. Wird dieser Zugang leicht modifiziert, führt er uns im Abschnitt 4.3 zu oberen Schranken für $\gamma(G)$ beliebiger Graphen. Die entsprechenden Resultate sind auch in [27] veröffentlicht worden.

Wie in Abschnitt 2.2.1 gezeigt, ist $\gamma(G)$ mittels verschiedener stetiger Optimierungsprobleme über $\mathbf{C}_n$ berechenbar. Da diese Probleme im Allgemeinen nicht explizit lösbar sind, wird eine numerische Herangehensweise erforderlich sein.

Wir beschäftigen uns hier damit, den zulässigen Bereich $\mathbf{C}_n$ derart einzuschränken, dass ein explizit lösbares Optimierungsproblem entsteht und uns zu konkret angebbaren oberen Schranken für $\gamma(G)$ führt. Was im Nachfolgenden anhand der Funktion f_1 aus Abschnitt 2.2.1 durchgeführt wird, soll Möglichkeiten für ähnliches Herangehen im Falle von f_2, f_3 und f_4 aufzeigen.

Sei G ein paarer Graph mit der Bipartition $\{V_1, V_2\}$, $|V_1| = n_1$ und $|V_2| = n_2$, und seien $\delta_1 = \min\{d_i \mid i \in V_1\}$ und $\delta_2 = \min\{d_i \mid i \in V_2\}$ die Minimalvalenzen in V_1 bzw. V_2. Wir vergeben zwei verschiedene Wahrscheinlichkeiten.

[1] Mit $\chi(G)$ wird die *Färbungszahl* eines Graphen G bezeichnet, das ist die minimale Anzahl an Farben, die man zum Färben aller Knotenpunkte braucht, so dass benachbarte Knotenpunkte verschiedene Farben haben.

Für $i \in V$ setzen wir

$$p_i = \begin{cases} q_1\,, & \text{falls } i \in V_1 \\ q_2\,, & \text{falls } i \in V_2 \end{cases}$$

mit $q_1, q_2 \in [0,1]$. Eingesetzt in die Funktion f_1 aus Satz 2.3 ergibt sich

$$\gamma(G) \le \min_{(q_1,q_2)\in\mathbf{C}_2} \left(n_1 q_1 + n_2 q_2 + \sum_{i\in V_1} (1-q_1)(1-q_2)^{d_i} + \sum_{i\in V_2} (1-q_2)(1-q_1)^{d_i} \right)$$

und damit

$$\gamma(G) \le \min_{(q_1,q_2)\in\mathbf{C}_2} g(q_1,q_2)\,,$$

wobei

$$g(q_1,q_2) = n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_1(1-q_1)(1-q_2)^{\delta_1} + n_2(1-q_2)(1-q_1)^{\delta_2}\,.$$

Bei der Optimierung von $g(q_1,q_2)$ auf dem Rand des $\mathbf{C}_2$, d.h. $q_1 \in \{0,1\}$ oder $q_2 \in \{0,1\}$, erhalten wir die triviale Schranke

$$\gamma(G) \le \min(n_1,n_2)\,.$$

Um $g(q_1,q_2)$ im Inneren von $\mathbf{C}_2$ zu optimieren, betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} g(q_1,q_2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_2} g(q_1,q_2) &= 0\,, \end{aligned}$$

welches jedoch schwer zu lösen ist. Offensichtlich gilt die Abschätzung

$$g(q_1,q_2) \le h_1(q_1,q_2) \text{ für } q_1,q_2 \in [0,1]$$

mit

$$h_1(q_1,q_2) = n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_1 e^{-q_1-\delta_1 q_2} + n_2 e^{-q_2-\delta_2 q_1}\,.$$

Das System

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} h_1(q_1,q_2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_2} h_1(q_1,q_2) &= 0 \end{aligned}$$

lässt sich mit Hilfe der Substitution

$$\begin{aligned} u &= e^{-q_1-\delta_1 q_2} \\ v &= e^{-q_2-\delta_2 q_1} \end{aligned}$$

nun leicht lösen. Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} n_1 u + \delta_2 n_2 v &= n_1 \\ \delta_1 n_1 u + n_2 v &= n_2\,. \end{aligned}$$

Im Falle $\delta_1\delta_2 > 1$ lässt sich die Lösung explizit angeben:

$$u = \frac{\delta_2 n_2 - n_1}{n_1(\delta_1\delta_2 - 1)}\ ,\ v = \frac{\delta_1 n_1 - n_2}{n_2(\delta_1\delta_2 - 1)}\,.$$

Im Falle $\delta_1\delta_2 = 1$ und damit $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ist die Funktion g multilinear und nimmt daher ihr Minimum in einer Ecke des $\mathbf{C}_2$ an. Wir erhalten in diesem Fall keine bessere Schranke als $\gamma(G) \leq \min(n_1, n_2)$.

Für die weiteren Betrachtungen wird $\delta_1\delta_2 > 1$ vorausgesetzt. Um die Rücksubstitution ausführen zu können, muss zusätzlich $u, v > 0$ gefordert werden.

Wir nennen einen paaren Graphen *passend*, falls $\delta_1\delta_2 > 1$, $\delta_1 n_1 > n_2$ und $\delta_2 n_2 > n_1$. Seien im Weiteren passende Graphen vorausgesetzt.

Betrachten wir die Hesse-Matrix von h_1, so erkennen wir, dass mit allen genannten Voraussetzungen

$$q_1 = \frac{\ln u - \delta_1 \ln v}{\delta_1\delta_2 - 1}\ ,\ q_2 = \frac{\ln v - \delta_2 \ln u}{\delta_1\delta_2 - 1}$$

eine Minimalstelle von h_1 ist. Diese Minimalstelle setzen wir in die Funktion g ein und erhalten eine obere Schranke für $\gamma(G)$.

Mit allen vorangegangenen Bemerkungen folgt der nächste Satz.

Satz 4.1 (J. Harant, A. Pruchnewski [27]) *Sei G ein passender paarer Graph mit*

$$0 \leq q_1 = \frac{\ln u - \delta_1 \ln v}{\delta_1\delta_2 - 1} \leq 1 \text{ und } 0 \leq q_2 = \frac{\ln v - \delta_2 \ln u}{\delta_1\delta_2 - 1} \leq 1\,,$$

wobei

$$u = \frac{\delta_2 n_2 - n_1}{n_1(\delta_1\delta_2 - 1)} \text{ und } v = \frac{\delta_1 n_1 - n_2}{n_2(\delta_1\delta_2 - 1)}\,.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\gamma(G) &\leq n_1q_1 + n_2q_2 + \sum_{i\in V_1}(1-q_1)(1-q_2)^{d_i} + \sum_{i\in V_2}(1-q_2)(1-q_1)^{d_i} \\ &\leq g(q_1,q_2) \leq h_1(q_1,q_2) \leq \min_{q\in[0,1]} h_1(q,q) \leq \frac{n(1+\ln(\delta+1))}{\delta+1}\end{aligned}$$

sowie

$$\gamma(G) \leq g(q_1,q_2) \leq \min_{q\in[0,1]} g(q,q) \leq n\Big(1-\delta\Big(\frac{1}{\delta+1}\Big)^{1+\frac{1}{\delta}}\Big).$$

Untergewissen Voraussetzungen sind folglich Verbesserungen der Alon-Spencer-Schranke (Satz 1.1) und der Caro-Wei-Schranke (Satz 1.2) gegeben.

An folgendem Beispiel zeigen wir, dass das Verhältnis von $h_1(q_1,q_2)$ (siehe Satz 4.1) zur Alon-Spencer-Schranke (Satz 1.1), also der Quotient

$$\frac{h_1(q_1,q_2)(\delta+1)}{n(1+\ln(\delta+1))}$$

beliebig klein werden kann.

Beispiel:
Für eine große positive ganze Zahl k sei K_{k,k^2} ein vollständiger paarer Graph. Es ist leicht einzusehen, dass für ausreichend große k der Graph K_{k,k^2} passend ist. Es gilt $\gamma(K_{k,k^2}) = 2$. Die triviale Schranke ergibt $\gamma(K_{k,k^2}) \leq \min(k,k^2) = k$. Die Alon-Spencer-Schranke (Satz 1.1) liefert

$$\gamma(K_{k,k^2}) \leq \frac{n(1+\ln(\delta+1))}{\delta+1} = k(1+\ln(k+1)).$$

Behauptung: Für große k gilt $q_1,q_2 \in [0,1]$ und $h_1(q_1,q_2) < 3\ln(k+1)+2$.

Beweis.
Sei $k > 0$.

$$\begin{aligned}h_1(q_1,q_2) &= n_1q_1 + n_2q_2 + n_1e^{-q_1-\delta_1q_2} + n_2e^{-q_2-\delta_2q_1} \\ &= \underbrace{n_1q_1}_{a} + \underbrace{n_2q_2}_{b} + \underbrace{n_1u}_{c} + \underbrace{n_2v}_{d} \\ &\quad \text{(siehe obige Minimumberechnung)} \\ u &= \frac{\delta_2n_2-n_1}{n_1(\delta_1\delta_2-1)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k^3-k}{k(k^3-1)} = \frac{k^2-1}{k^3-1} = \frac{k+1}{k^2+k+1} \\
v &= \frac{\delta_1 n_1 - n_2}{n_2(\delta_1\delta_2-1)} \\
&= \frac{k^3-k^2}{k^2(k^3-1)} = \frac{k-1}{k^3-1} = \frac{1}{k^2+k+1} \\
q_1 &= \frac{\ln u - \delta_1 \ln v}{\delta_1\delta_2 - 1} \\
&= \frac{\ln(k+1) + (k^2-1)\ln(k^2+k+1)}{k^3-1} \\
q_2 &= \frac{\ln v - \delta_2 \ln u}{\delta_1\delta_2 - 1} \\
&= \frac{-k\ln(k+1) + (k-1)\ln(k^2+k+1)}{k^3-1}\,.
\end{aligned}
$$

Damit gilt $q_1, q_2 \in [0,1]$ für große k.

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{k}{k^3}(\ln(k+1) + (k^2-1)\ln\underbrace{(k^2+k+1)}_{<(k+1)^2}) \\
&< \frac{2k^3-k}{k^3-1}\ln(k+1) \\
&< 2\ln(k+1) \\
b &= \frac{k^2}{k^3-1}(-k\ln(k+1) + (k-1)\ln\underbrace{(k^2+k+1)}_{<(k+1)^2}) \\
&< \frac{k^3-2k^2}{k^3-1}\ln(k+1) \\
&< \ln(k+1) \\
c &= \frac{k^3-k}{k^3-1} \;<\; 1 \\
d &= \frac{k^3-k^2}{k^3-1} \;<\; 1
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$h_1(q_1,q_2) \;=\; a+b+c+d \;<\; 3\ln(k+1)+2\,. \qquad \square$$

Wir betrachten nochmals $g(q_1,q_2)$ und schätzen nun auf andere Weise nach oben ab. Es gilt $g(q_1,q_2) \le h_2(q_1,q_2)$ für $q_1, q_2 \in [0,1]$, wobei

$$h_2(q_1,q_2) = n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_1(1-q_2)^{\delta_1} + n_2(1-q_1)^{\delta_2}\,.$$

Wir finden als Minimalstelle von h_2:

$$q_1 = 1 - (\frac{n_1}{\delta_2 n_2})^{\frac{1}{\delta_2 - 1}} \;,\; q_2 = 1 - (\frac{n_2}{\delta_1 n_1})^{\frac{1}{\delta_1 - 1}}$$

Es gilt $q_1, q_2 \in [0,1]$ für passende paare Graphen. Im Falle $\delta_1 n_1 = n_2$ oder $\delta_2 n_2 = n_1$ erhalten wir die triviale Schranke $\gamma(G) \leq \min(n_1, n_2)$. Die Hessematrix von h_2 ist für alle $q_1, q_2 \in [0,1]$ positiv definit. Es liegt demzufolge ein lokales Minimum vor. Diese Minimalstelle von h_2 setzen wir in $g(q_1, q_2)$ ein und erhalten eine weitere obere Schranke für $\gamma(G)$.

Satz 4.2 (T. Gerlach [22]) *Sei G ein passender paarer Graph mit*

$$q_1 = 1 - (\frac{n_1}{\delta_2 n_2})^{\frac{1}{\delta_2 - 1}} \text{ und } q_2 = 1 - (\frac{n_2}{\delta_1 n_1})^{\frac{1}{\delta_1 - 1}} \,.$$

Dann gilt:

$$\gamma(G) \leq g(q_1, q_2) \leq h_2(q_1, q_2)\,.$$

Bemerkung: Die Schranken aus den Sätzen 4.1 und 4.2 sind im Allgemeinen nicht vergleichbar (siehe auch [22]).

4.2 Anmerkungen bezüglich anderer Dominanzkonzepte

Vektordominanz in paaren Graphen

Das Problem, eine gute Schranke für die Vektordominanzzahl zu finden, vereinfacht sich leider nicht wesentlich bei der Einschränkung auf paare Graphen. Wir werden nachfolgend lediglich andeuten, wie man unter Ausnutzung einiger analytischer Hilfmittel zu Teilergebnissen kommen kann.

Der Fall $\mathfrak{k} = \mathfrak{1}$ wurde in Abschnitt 4.1 ausführlich behandelt, der Fall $\mathfrak{k} = \mathfrak{d}$ ist für paare Graphen polynomial. Da V_1 und V_2 jeweils $\mathfrak{k}$-dominierend sind, ergibt sich als triviale Schranke

$$\gamma_{\mathfrak{k}} \leq \min(n_1, n_2)\,.$$

Sei G ein paarer Graph mit der Bipartition $\{V_1, V_2\}$, und sei $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$. Für $i \in V$ setzen wir

$$p_i = \begin{cases} q_1\,, & \text{falls } i \in V_1 \\ q_2\,, & \text{falls } i \in V_2 \end{cases} \,,$$

wobei $q_1, q_2 \in [0,1]$. Eingesetzt in die Funktion $f_{\mathfrak{k}}$ aus Satz 2.1 ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) &= n_1 q_1 + n_2 q_2 + \sum_{i \in V_1} (1-q_1) \sum_{\ell=0}^{k_i-1} \binom{d_i}{\ell} q_2^{\ell} (1-q_2)^{d_i-\ell} \\ &\quad + \sum_{i \in V_2} (1-q_2) \sum_{\ell=0}^{k_i-1} \binom{d_i}{\ell} q_1^{\ell} (1-q_1)^{d_i-\ell} . \end{aligned}$$

Es gilt die Beziehung [33]

$$\sum_{\ell=k}^{d} \binom{d}{\ell} q^{\ell} (1-q)^{d-\ell} = d \binom{d-1}{k-1} \int_0^q t^{k-1} (1-t)^{d-k} dt .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) &= n_1 q_1 + n_2 q_2 \\ &+ \sum_{i \in V_1} (1-q_1) \Big(1 - d_i \binom{d_i-1}{k_i-1} \int_0^{q_2} t^{k_i-1} (1-t)^{d_i-k_i} dt \Big) \\ &+ \sum_{i \in V_2} (1-q_2) \Big(1 - d_i \binom{d_i-1}{k_i-1} \int_0^{q_1} t^{k_i-1} (1-t)^{d_i-k_i} dt \Big) \end{aligned}$$

Das Minimum der Funktion $f_{\mathfrak{k}}$ ist auch in dieser Form nicht explizit angebbar, so dass der Einsatz analytischer und numerischer Verfahren angebracht ist. Unter Ausnutzung der groben Abschätzung $1 - t \geq 1 - q$ und damit

$$\int_0^q t^{k-1} (1-t)^{d-k} dt \geq (1-q)^{d-k} \frac{1}{k} q^k$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}) &\leq n_1 q_1 + n_2 q_2 \\ &+ \sum_{i \in V_1} (1-q_1) \Big(1 - d_i \binom{d_i-1}{k_i-1} (1-q_2)^{d_i-k_i} \frac{1}{k_i} q_2^{k_1} \Big) \\ &+ \sum_{i \in V_2} (1-q_2) \Big(1 - d_i \binom{d_i-1}{k_i-1} (1-q_1)^{d_i-k_i} \frac{1}{k_i} q_1^{k_2} \Big) \\ &= n_1 + n_2 - (1-q_1) \sum_{i \in V_1} \binom{d_i}{k_i} (1-q_2)^{d_i-k_i} q_2^{k_i} \\ &\quad -(1-q_2) \sum_{i \in V_2} \binom{d_i}{k_i} (1-q_1)^{d_i-k_i} q_1^{k_i} . \end{aligned}$$

Benutzen wir die Beziehung „arithmetisches Mittel $\geq$ geometrisches Mittel", so können wir die folgenden weiteren Abschätzungen vornehmen

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in V_1}\binom{d_i}{k_i}(1-q_2)^{d_i-k_i}q_2^{k_i} &\geq n_1\sqrt[n_1]{\prod_{i\in V_1}\binom{d_i}{k_i}\cdot(1-q_2)^{\sum_{i\in V_1}(d_i-k_i)}q_2^{\sum_{i\in V_1}k_i}}\\
&= n_1\sqrt[n_1]{\prod_{i\in V_1}\binom{d_i}{k_i}}\cdot(1-q_2)^{\frac{\sum_{i\in V}d_i-\sum_{i\in V}k_i}{n_1}}q_2^{\frac{\sum_{i\in V}k_i}{n_1}}\\
&= c_1(1-q_2)^{\frac{m}{n_1}-b_1}q_2^{b_1}\,,
\end{aligned}$$

wobei

$$c_1 = n_1\sqrt[n_1]{\prod_{i\in V_1}\binom{d_i}{k_i}} \text{ und } b_1 = \frac{\sum_{i\in V}k_i}{n_1}$$

nur vom Graphen abhängige Konstanten sind. Analog ergibt sich

$$\sum_{i\in V_2}\binom{d_i}{k_i}(1-q_1)^{d_i-k_i}q_1^{k_i} \geq c_2(1-q_1)^{\frac{m}{n_2}-b_2}q_1^{b_2}\,,$$

wobei

$$c_2 = n_2\sqrt[n_2]{\prod_{i\in V_2}\binom{d_i}{k_i}} \text{ und } b_2 = \frac{\sum_{i\in V}k_i}{n_2}\,.$$

Zusammengefasst gilt folglich

$$\gamma_{\mathfrak{k}} \leq \min_{(q_1,q_2)\in\mathbf{C}_2} n-(1-q_1)c_1(1-q_2)^{\frac{m}{n_1}-b_1}q_2^{b_1}-(1-q_2)c_2(1-q_1)^{\frac{m}{n_2}-b_2}q_1^{b_2}\,.$$

Ob und für welche paaren Graphen diese Schranke besser ist als $\min(n_1,n_2)$, bleibt offen.

Totale Vektordominanz in paaren Graphen

Für die Untersuchung der totalen Vektordominanz in paaren Graphen lassen sich ähnliche Abschätzungsmethoden wie in Abschnitt 4.2 über Vektordominanz in paaren Graphen verwenden. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned}
\gamma_{T\mathfrak{k}} \leq \min_{(q_1,q_2)\in\mathbf{C}_2} & n_1q_1+n_2q_2+(\Delta+1-q_1)\sum_{i\in V_1}\left(1-c_1(1-q_2)^{\frac{m}{n_1}-b_1}q_2^{b_1}\right)\\
&+(\Delta+1-q_2)\sum_{i\in V_2}\left(1-c_2(1-q_1)^{\frac{m}{n_2}-b_2}q_1^{b_2}\right),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
c_1 &= n_1 \sqrt[n_1]{\prod_{i\in V_1} \binom{d_i}{k_i}}\,,\\
b_1 &= \frac{\sum_{i\in V} k_i}{n_1}\,,\\
c_2 &= n_2 \sqrt[n_2]{\prod_{i\in V_2} \binom{d_i}{k_i}} \text{ und}\\
b_2 &= \frac{\sum_{i\in V} k_i}{n_2}\,.
\end{aligned}$$

Ob und für welche paaren Graphen diese Schranke geeignete Werte annimmt, bleibt jedoch offen.

Totale Dominanz in paaren Graphen

Wir geben eine Folgerung von Satz 3.3 mit $\nu = 3$ für paare Graphen an.

Satz 4.3 (Folgerung aus Satz 3.3) *Der paare Graph G habe die Bipartition $\{V_1, V_2\}$, die Minimalvalenzen δ_1, $\delta_2 > 0$, sowie die Maximalvalenzen Δ_1, Δ_2. Und sei $f : \mathbf{C}_2 \to \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned}
f(q_1, q_2) &= n_1q_1 + n_2q_2 + n_1(1-q_2)^{\delta_1} + n_2(1-q_1)^{\delta_2}\\
&\quad + n_1(1-q_1)(1-q_2)^{\delta_1}(1-(1-q_1)^{\Delta_1(\Delta_2-1)})\\
&\quad + n_1(1-q_2)(1-q_1)^{\delta_2}(1-(1-q_2)^{\Delta_2(\Delta_1-1)})\,.
\end{aligned}$$

Dann gilt für die totale Dominanzzahl

$$\gamma_T \le \min_{(q_1,q_2)\in\mathbf{C}_2} f(q_1, q_2)\,.$$

Ob und für welche paaren Graphen diese Schranke besser ist als $\frac{n}{2}$ für $\delta \ge 3$ bzw. die Schranken aus den Sätzen 1.7 und 1.8, bleibt hier offen.

4.3 Schranken mittels verallgemeinerter Bipartitionen

Das im Abschnitt 4.1 eingeführte Prinzip zur Erstellung oberer Schranken für $\gamma(G)$ für paare Graphen kann auch für beliebige Knotenmengenzerlegungen eines nicht notwendig paaren Graphen genutzt werden. Dazu macht sich jedoch die Einführung zusätzlicher Parameter notwendig.

Sei G ein Graph mit der Zerlegung $V(G) = V_1 \cup V_2$ in disjunkte Mengen $V_1 \neq \emptyset$ und $V_2 \neq \emptyset$. Für $i \in V_j$ $(j = 1, 2)$ seien d''_i die Anzahl der Nachbarn in der Menge, in der i liegt, und d'_i die Anzahl der Nachbarn in der Menge, in der i nicht liegt. Sei $n_j = |V_j|$, $\delta'_j = \min\{d'_i | i \in V_j\}$ und $\delta''_j = \min\{d''_i | i \in V_j\}$ für $j = 1, 2$.

Wir nennen eine Zerlegung $V(G) = V_1 \cup V_2$ *passend* (siehe auch Seite 58), falls

$\delta'_1\delta'_2 > (\delta''_1 + 1)(\delta''_2 + 1)$ und $\delta'_1 n_1 > (\delta''_1 + 1)n_2$ und $\delta'_2 n_2 > (\delta''_2 + 1)n_1$ oder

$\delta'_1\delta'_2 < (\delta''_1 + 1)(\delta''_2 + 1)$ und $\delta'_1 n_1 < (\delta''_1 + 1)n_2$ und $\delta'_2 n_2 < (\delta''_2 + 1)n_1$.

Mit leichten Abwandlungen des Beweises von Satz 4.1 lässt sich die Richtigkeit der nächsten Aussage zeigen.

Satz 4.4 (J. Harant und A. Pruchnewski [27]) *Sei G ein Graph mit einer passenden Zerlegung von $V(G)$ und gelte*

$$0 \leq p_1 = \frac{(\delta''_1 + 1)\ln u - \delta'_1 \ln v}{\delta'_1\delta'_2 - (\delta''_1 + 1)(\delta''_2 + 1)} \leq 1 \ , \ 0 \leq p_2 = \frac{(\delta''_2 + 1)\ln v - \delta'_2 \ln u}{\delta'_1\delta'_2 - (\delta''_1 + 1)(\delta''_2 + 1)} \leq 1 \, ,$$

wobei

$$u = \frac{\delta'_2 n_2 - (\delta''_2 + 1)n_1}{n_1(\delta'_1\delta'_2 - (\delta''_1 + 1)(\delta''_2 + 1))} \ \text{und} \ v = \frac{\delta'_1 n_1 - (\delta''_1 + 1)n_2}{n_2(\delta'_1\delta'_2 - (\delta''_1 + 1)(\delta''_2 + 1))} \, .$$

Dann gilt:

$$\gamma(G) \leq n_1(p_1 + (1 - p_1)^{\delta''_1+1}(1 - p_2)^{\delta'_1}) + n_2(p_2 + (1 - p_2)^{\delta''_2+1}(1 - p_1)^{\delta'_2}).$$

Mit Satz 4.4 ist es möglich, weitere Parameter von G in Schranken für $\gamma(G)$ einzubringen, indem spezielle Knotenmengenzerlegungen betrachtet werden, hier einige Beispiele:

1. Sei $V_1 = I$ eine maximum unabhängige Menge. Dann ist $n_1 = \alpha(G)$, $n_2 = n - \alpha(G)$, $\delta''_1 = 0$, wobei $\alpha(G) = |I|$ die Unabhängigkeitszahl von G ist.

2. Sei $V_1 = T$ eine maximum Clique[2]. Dann ist $n_1 = w(G)$, $n_2 = n - w(G)$, $\delta''_1 = w(G) - 1$, wobei $w(G) = |V(T)|$ die Cliquenzahl[3] von G ist.

[2] ein Untergraph mit paarweise benachbarten Knotenpunkten

[3] größte Mächtigkeit einer Clique in G

3. Sei $V_1 = S$ ein kürzester Kreis von G. Dann ist $n_1 = g(G)$, $n_2 = n - g(G)$, $\delta_1'' = 2$, wobei $g(G) = |V(S)|$ die Taillenweite[4] von G ist.

4.4 Weitere Bemerkungen

1. Es ist eine Erweiterung der in diesem Kapitel für paare Graphen bzw. bipartite Graphen verwendeten Verfahrensweisen auf k-partite Graphen, das sind Graphen mit $\chi(G) = k$, denkbar. Dabei werden dann Parameter, die die Anzahlen der Nachbarn eines Knotenpunktes in den verschiedenen Partitionsklassen bezeichnen, eine Rolle spielen. Diese Herangehensweise lässt sich dann auch auf allgemeine k-Partitionen ausdehnen, wobei hier zusätzlich die Anzahl der Nachbarn eines Knotenpunktes in der eigenen Partitionsklasse eingeht, in Analogie zum Vorgehen beim Übergang von Bipartitionen zu verallgemeinerten Bipartitionen in Abschnitt 4.3.

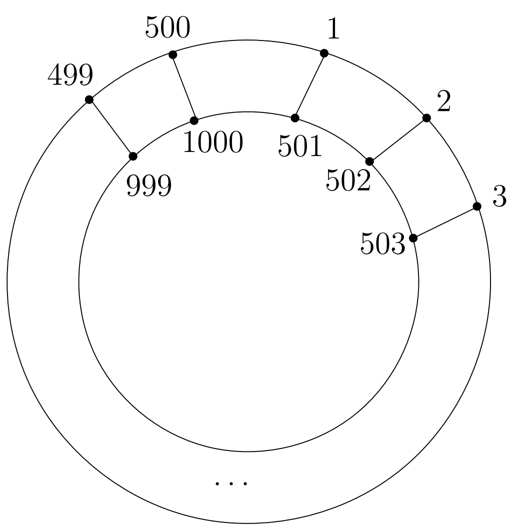
2. Zum algorithmischen Aspekt im Falle paarer Graphen sei bemerkt, dass die entwickelten Schranken lediglich dazu dienen sollen, dem tatsächlichen Dominanzzahlwert unter der Berücksichtigung der Eigenschaft der Paarheit näher zu rücken, als es mit den Ergebnissen aus den Kapiteln 2 und 3 möglich ist. Ein solcher gewonnener Wert lässt sich als guter Startwert für die Algorithmen in den entsprechenden Abschnitten von Kapitel 2 und 3 verwenden.

[4] Länge eines kürzesten Kreises in G

Eine Beispielrechnung

In der Arbeit wird die rechentechnische Umsetzung der entwickelten Algorithmen nicht betrachtet. Anhand eines einfachen Beispielgraphen G mit 1000 Knotenpunkten und $\gamma(G) = 250$ sei die Wirkungsweise des Algorithmus aus Satz 2.5 gezeigt. Sei G ein Leitergraph, dessen Knotenpunkte wie in der Abbildung ersichtlich nummeriert sind.

Ein Leitergraph



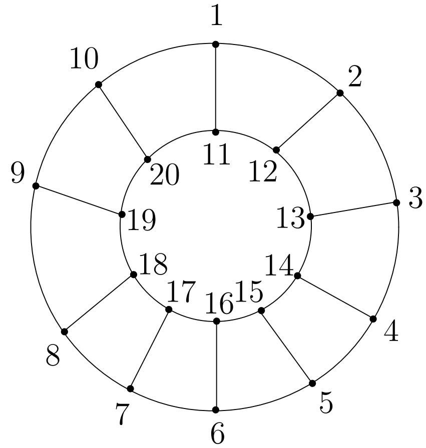
Ein Zufallsvektor $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_{1000}$ wurde als Startwert in den Algorithmus gegeben, um eine dominierende Menge mit $|D| \leq f_1(p_1, \ldots, p_{1000})$ zu erhalten. Im Folgenden sind einige Zahlentripel angegeben, sie beinhalten $f_1(\mathfrak{p})$ nach der Eingabe des Startwertes, nach dem 1. Algorithmusschritt (Ganzzahligmachen) sowie $|D|$ am Ende des Algorithmus:

$$\begin{array}{llll}
(563,350,350)\,, & (565,353,353)\,, & (569,353,353)\,, & (567,361,361)\,,\\
(557,343,343)\,, & (569,350,350)\,, & (564,349,349)\,, & (562,337,337)\,,\\
(568,352,352)\,, & (564,339,339)\,, & (569,357,357)\,, & (559,339,339)\,,\\
(567,356,356)\,, & (561,349,349)\,, & (570,359,359)\,, & (556,350,350)\,,\\
(554,344,344)\,, & (558,341,341)\,, & (569,345,345)\,, & (564,351,351)\,,\\
(572,356,356)\,, & (557,336,336)\,, & (562,339,339)\,, & (560,356,356)\,,\\
(562,352,352)\,, & (555,331,331)\,, & (559,337,337)\,, & (558,337,337)\,,\\
(566,342,342)\,, & (567,350,350)\,, & (576,358,357)\,, & (559,337,337)\,,\\
(566,341,341)\,, & (562,347,347)\,, & (550,332,332)\,, & (554,343,343)\,,\\
(561,344,343)\,, & (560,344,344)\,, & (561,339,339)\,, & (556,344,343)\,,\\
(561,349,349)\,, & (555,338,338)\,, & (561,346,346)\,, & (564,338,338)\,,\\
(562,346,346)\,, & (566,359,359)\,, & (564,344,344)\,, & (558,339,339)\,,\\
(558,339,339)\,, & (560,346,346)\,, & (564,346,345)\,, & (558,337,337)\,,\\
(565,340,340)\,, & (548,332,332)\,, & (569,350,350)\,, & (563,340,340)\,,\\
(561,338,338)\,, & (563,347,347)\,, & (563,345,345)\,, & (569,347,346)\,,\\
(571,355,355)\,, & (569,342,342)\,, & (569,335,335)\,, & (552,341,341)\,,\\
(563,345,345)\,, & (559,348,347)\,, & (562,342,342)\,, & (561,349,349)\,,\\
(571,353,353)\,, & (562,348,347)\,, & (571,357,357)\,, & (559,349,349)\,,\\
(554,344,344)\,, & (566,356,356)\,, & (570,340,340)\,, & (563,345,345)\,,\\
(557,335,335)\,, & (555,338,338)\,, & (563,348,348)\,, & (571,350,350)\,.
\end{array}$$

Die Heuristik $p_i = \left(1 - \frac{1}{d_i+1}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ liefert $|D| = 334$.

Zu beobachten ist, dass in allen Versuchen ähnliche Mächtigkeiten für die resultierende Dominanzmenge erzielt wurden. Das folgende Beispiel zeigt, dass dabei ganz unterschiedliche Mengen erhalten werden können. Zugrunde liegt ein Leitergraph mit 10 Sprossen.

Noch ein Leitergraph



Nachfolgend sind dominierende Mengen aufgelistet, die der Algorithmus bei zufälligen Startwerten $(p_1, \ldots, p_{20}) \in \mathbf{C}_{20}$ ausgab:

$$\begin{gathered}
\{1,3,8,13,15,16,19\},\\
\{1,4,13,16,17,18,19\},\\
\{1,4,8,13,16,19\},\\
\{1,8,13,14,15,16,20\},\\
\{2,5,8,14,16,19,20\},\\
\{2,5,9,12,15,17,20\},\\
\{2,6,9,14,18,20\},\\
\{3,10,12,15,16,17,18\},\\
\{3,4,9,11,16,17\},\\
\{3,5,10,11,15,17,18\},\\
\{3,6,10,11,13,16,18\},\\
\{3,6,9,11,15,18\},\\
\{3,8,10,12,15,16,19\},\\
\{4,10,12,16,17,18\},\\
\{4,7,10,12,15,19\},\\
\{4,8,10,12,16,19\},\\
\{4,9,11,12,16,17,18\},\\
\{5,10,12,13,17,18\},\\
\{5,8,10,12,13,16,19\},\\
\{5,8,11,12,13,17,20\},\\
\{5,9,11,12,13,17\},\\
\{6,10,12,13,14,18\},\\
\{6,9,11,12,13,14,17\},\\
\{6,9,11,12,13,14,18\},\\
\{10,12,13,14,15,16,17,18\}.
\end{gathered}$$

Nachwort

In der Literatur, z.B. in *The Probabilistic Method* von N. Alon und J. H. Spencer [2], werden obere Schranken für die Dominanzzahl $\gamma(G)$ in Abhängigkeit von der Knotenpunktanzahl n und der Minimalvalenz δ des Graphen bewiesen. Das Hauptanliegen der vorliegenden Arbeit bestand darin, auf diesen Beweisen aufbauend, sowohl neue Schranken als auch Algorithmen für die Dominanzzahl und einige ihrer Modifikationen zu finden.

Die in [2] beschriebene Idee, nach der eine zufällige Menge X zu einer dominierenden Menge ergänzt und über die Berechnung von Erwartungswerten eine obere Schranke für $\gamma(G)$ gefunden wird, erweiterten wir dahingehend, dass wir jedem Knotenpunkt i seine eigene Wahrscheinlichkeit p_i zuordneten, Element von X zu sein.

Damit gelang es, stetige Optimierungsprobleme

$$\min_{\mathfrak{p}\in\mathbf{C}_n} f(\mathfrak{p})$$

für die Dominanzzahlen γ, $\gamma_{\mathfrak{k}}$, γ_T bzw. $\gamma_{T\mathfrak{k}}$ sowie die Überdeckungszahl β (und damit auch für die Unabhängigkeitszahl α) aufzustellen. Die Zielfunktionen f dieser stetigen Optimierungsprobleme sind multilinear und nehmen ihre Extrema auf dem Rand des zulässigen Bereiches $\mathbf{C}_n = [0,1]^n$ an. Unter den Extremalstellen gibt es eine Ecke des $\mathbf{C}_n$, die mit einer dominierenden Menge des Graphen korrespondiert.

Wenn es auch nicht gelingen kann, diese Optimierungsprobleme polynomial zu lösen, so bieten sie doch einen guten Ausgangspunkt, um Schranken für die jeweiligen Graphenparameter zu finden. Für jedes $\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{C}_n$ ist $f(\mathfrak{p})$ eine obere Schranke für die entsprechende Dominanzzahl. Alle in der Arbeit angegebenen Schranken sind als ganzzahlig zu verstehen und entsprechend zu runden. In der Schrankenberechnung können stetige Näherungsmethoden eingesetzt werden.

Wir stellten realisierende Algorithmen vor, die für ein gegebenes $\mathfrak{p} \in \mathbf{C}_n$ eine Menge $D \subseteq V$ mit $|D| \leq f(\mathfrak{p})$ berechnen, die im entsprechenden Sinne dominierend ist. Die Algorithmen sind polynomial für die Dominanz und die totale Dominanz, im Falle beschränkter Maximalvalenz Δ auch für die $\mathfrak{k}$-Dominanz und die totale $\mathfrak{k}$-Dominanz. Dabei wurde in der gesamten Arbeit von einer beliebigen aber festen Knotennummerierung ausgegangen. Zu untersuchen, in welcher Weise unserer Methode geschickte Nummerierungen entgegenkämen, war nicht Gegenstand der Arbeit.

Um das Lösen der stetigen Optimierungsprobleme zu erleichtern, schränkten wir den zulässigen Bereich $\mathbf{C}_n$ ein. Eine geeignete Einschränkung auf $\mathbf{C}_2$ lieferte für paare Graphen explizit berechenbare Schranken in Abhängigkeit von den Minimalvalenzen in den Partitionsklassen. Diese Schranken sind gegenüber den aus der Literatur bekannten Schranken verbessert. Für nicht notwendig paare Graphen definierten wir verallgemeinerte Bipartitionen. Diese Herangehensweise ermöglichte ebenfalls die Berechnung verbesserter Schranken und zudem die Berücksichtigung weiterer Graphenparameter.

Für alle untersuchten Konzepte stimmen die Optimalpunkte der diskreten Optimierungsprobleme mit denen der entsprechenden stetigen Optimierungsprobleme überein. Das entspricht dem Hauptanliegen dieser Arbeit. Wenn es machbar war, versuchten wir, die Zielfunktion so gut wie möglich zu wählen. Abschätzungen (mitunter recht grobe) wurden nur dann verwendet, wenn der Erhalt der Optimalpunkte gesichert werden konnte.

Diese Arbeit kann nur als Versuch gewertet werde, Strategien aufzuzeigen, um Schranken für die Dominanzzahl und einige ihrer Modifikationen zu entwickeln, realisierende Algorithmen zu diskutieren und für paare Graphen Schranken explizit zu berechnen. Eine Erweiterung der verwendeten Verfahrensweise auf multipartite Graphen und verallgemeinerte Multipartitionen wird möglich sein.

In unserer Arbeit wurden nur einige Dominanzkonzepte untersucht. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Methode fruchtet aber jeweils dort, wo die zu untersuchenden Knotenpunkt- oder Kantenmengen im Graphen lokal, d.h. über Nachbarschaftsbeziehungen, charakterisiert werden können, so z.B. bei Färbungen in Graphen und Hypergraphen.

Neu in dieser Arbeit (und veröffentlicht in [27], [28] sowie [38]) sind die Überführung des diskreten Dominanzproblems in ein stetiges Optimierungsproblem über $\mathbf{C}_n$, die Entwicklung realisierender Algorithmen sowie verbesserte Schranken für die Dominanzzahl. Die rechentechnische Umsetzung der Algorithmen war hingegen nicht Gegenstand der Arbeit. Mit einem Beispiel am Ende der Arbeit wurde die Praktikabilität eines Algorithmus für dominierende Mengen angedeutet.

Maple - Quellcode der Beispielrechnung

```
#Definiert wird ein Leitergraph mit $l$ Sprossen:
restart:
l:=10: #Anzahl der Sprossen -> Anzahl der Knotenpunkte = 2*n
n:=2*l:
m:=3*n:
NF:=array(1..m):
INF:=array(1..n+1):

#Die Indexliste INF:
for k from 1 to n+1 do
  INF[k]:=(k-1)*3+1 od:}

#Die Nachfolgerliste NF:
NF[1]:=l: NF[2]:=l+1: NF[3]:=2:
for i from 1 to l-2 do
  NF[3*i+1]:=i:
  NF[3*i+2]:=l+i+1:
  NF[3*i+3]:=i+2 od:
NF[3*(l-1)+1]:=l-1:
NF[3*(l-1)+2]:=2*l:
NF[3*l]:=1:
NF[3*l+1]:=2*l:
NF[3*l+2]:=1:
NF[3*l+3]:=l+2:
for i from l+1 to 2*l-2 do
  NF[3*i+1]:=i:
  NF[3*i+2]:=i-l+1:
  NF[3*i+3]:=i+2 od:
NF[6*l-2]:=2*l-1: NF[6*l-1]:=l: NF[6*l]:=l+1:

#Prozeduren des Algorithmus
schranke:=proc(n,NF,INF,p)
  local i,j,summe,produkt:
  summe:=0:
  for i from 1 to n do
    produkt:=1-p[i]:
    if INF[i] < INF[i+1] then
      for j from INF[i] to INF[i+1]-1 do
```

```
        produkt:=produkt*(1-p[NF[j]]) od:
      summe:=summe+p[i]+produkt
    fi
  od:
  summe
end:
A:=proc(n,NF,INF,p)
  local AA,k,m:
  AA:=array(1..n):
  for k from 1 to n do
    AA[k]:=1:
    if INF[k]<INF[k+1] then
      for m from INF[k] to INF[k+1]-1 do
        AA[k]:=AA[k]*(1-p[NF[m]])
      od
    else AA[k]:=0 fi
  od:
  AA
end:
B:=proc(n,NF,INF,p)
  local BB,k,i,m,produkt:
  BB:=array(1..n):
  for k from 1 to n do
    BB[k]:=0:
    if INF[k]<INF[k+1] then
      for i from INF[k] to INF[k+1]-1 do
        produkt:=1-p[NF[i]]:
        if INF[NF[i]]<INF[NF[i]+1] then
          for m from INF[NF[i]] to INF[NF[i]+1]-1 do
            if NF[m]<>k then
              produkt:=produkt*(1-p[NF[m]])
            fi
          od
        fi:
        BB[k]:=BB[k]+produkt
      od
    fi
  od:
  BB
end:
```

```
zeit:=10: #Anzahl der Algorithmusdurchlaeufe
Schranke:=array(1..zeit,1..3):
for z from 1 to zeit do
 p:=array(1..n): #Ein Zufallsvektor
 for i from 1 to n do
  p[i]:=evalf(rand()/10^12) od:
#1.Zwischenergebnis: Funktionswert an der Stelle des
#                    Startwertes
 Schranke[z,1]:=floor(schranke(n,NF,INF,p)):

#1.Algorithmusschritt: liefert ganzzahliges p[k] aus {0,1}
 for k from 1 to n do
  if 1-A(n,NF,INF,p)[k]-B(n,NF,INF,p)[k]>=0 then p[k]:=0
                    else p[k]:=1
  fi
 od:
#2.Zwischenergebnis: Funktionswert an der Stelle von
#                    p nach dem 1.Schritt
 Schranke[z,2]:=schranke(n,NF,INF,p):

#2.Algorithmusschritt: korrigiert die Menge aller
#                    p[k]=1 zu einer dominierenden Menge
 for k from 1 to n do
  if A(n,NF,INF,p)[k]=1 then p[k]:=1 fi
 od:
 Schranke[z,3]:=schranke(n,NF,INF,p):
 Domi:={}:
 for k from 1 to n do
  if p[k]=1 then Domi:=Domi union {k} fi
 od:

#3.Algorithmusschritt: gibt dominierende Menge aus
 print(Domi);
od:
# Ausgabe der Zwischenergebnisse
print(Schranke);
```

Literaturverzeichnis

[1] J. Abello, S. Butenko, P. M. Pardalos, M. G. C. Resende, Finding independent sets in a graph using continuous multivariable polynomial formulations, *J. Global Optim.* 21 (2001), 111-137.

[2] N. Alon, J. H. Spencer, P. Erdös, *The Probabilistic Method*, Wiley, 1992.

[3] T. J. Bean, M. A. Henning, H. C. Swart, On the integrity of distance domination in graphs, *Australas. J. Combin.* 10 (1994), 29-43.

[4] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, 1995.

[5] Y. Caro, New results on the independence number, *Technical Report*, Tel-Aviv University, 1979.

[6] Y. Caro, Y. Roditty, On the vertex-independence number and star decomposition of graphs, *Ars Combin.* 20 (1985), 167-180.

[7] Y. Caro, Z. Tuza, Improved lower bounds on k-independence, *J. Graph Theory* 15, no. 1 (1991), 99-107.

[8] G. J. Chang, G. L. Nemhauser, The k-domination and k-stability problems in sun-free chordal graphs, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 5 (1984), 332-345.

[9] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs, *Networks* 10 (1980), 211-219.

[10] E. J. Cockayne, B. Gamble, B. Shepherd, An upper bound for the k-domination number of a graph, *J. Graph Theory* 9 (1985), 533-534.

[11] W. McCuaig, B. Shepherd, Domination in graphs with minimum degree two, *J. Graph Theory* 13 (1989), 749-762.

[12] R. Diestel, *Graphentheorie*, Springer, 1996.

[13] J. Edmonds, R. M. Karp, Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems, *J. ACM* 19, no. 2 (1972), 248-264.

[14] O. Favaron, k-domination and k-dependence in graphs, *Ars Combin.* 25C (1988), 156-167.

[15] O. Favaron, On a conjecture of Fink and Jacobson concerning k-domination and k-dependence, *J. Combin. Theory Ser. B* 39 (1985), 101-102.

[16] O. Favaron, M. A. Hennig, C. M. Mynhardt, J. Puech, Total domination in graphs with minimum degree three, *J. Graph Theory* 34 (2000), 9-19.

[17] J. F. Fink, M. S. Jacobson, n-domination in graphs, *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science: Proceedings of the 5th International Conference, Kalamazoo 1984*, Wiley, NewYork (1985), 283-300.

[18] J. F. Fink, M. S. Jacobson, On n-domination, n-dependence and forbidden subgraphs. *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Proccedings of the 5th international conference, Kalamazoo 1984*, Wiley, New York (1985), 301-311.

[19] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, 1962.

[20] T. Gallai, Über extreme Punkt- und Kantenmengen, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, Eötvös Sect. Math. 2 (1959), 133-138.

[21] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.

[22] T. Gerlach, Verallgemeinerter Dominanzbegriff in paaren Graphen, *Diplomarbeit*, TU Ilmenau, 2000.

[23] F. Göring, J. Harant, On Domination in Graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* (2003), eingereicht.

[24] R. Hafner, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Springer, 1989.

[25] J. Harant, A lower bound on the independence number of a graph, *Discrete Math.* 188 (1998), 339-243.

[26] J. Harant, Some news about the independence number of a graph, *Discuss. Math. Graph Theory* 20, no. 1 (2000), 71-80.

[27] J. Harant, A. Pruchnewski, A note on the Domination Number of a Bipartite Graph, *Annals of Combinatorics* 2 (2001), 175-178.

[28] J. Harant, A. Pruchnewski, M. Voigt, On dominating sets and independent sets of graphs, *Combinatorics, Probability and Computing* 8 (1999), 547-553.

[29] J. Harant, Z. Ryjáček, I. Schiermeyer, Forbidden subgraphs implying the MIN-algorithm gives a maximum independent set, *Discrete Math.* 256 (2002), 193-201.

[30] J. Harant, I. Schiermeyer, On the independence number of a graph in terms of order and size, *Discrete Math.* 232 (2001), 131-138.

[31] T. W. Haynes, T. W. Hedetniemi, P. J. Slater, *Domination in Graphs, Advanced Topics*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1998.

[32] T. W. Haynes, T. W. Hedetniemi, P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1998.

[33] W. R. Heilmann, *Grundbegriffe der Risikotheorie*, VVW Karlsruhe, 1987.

[34] P. C. B. Lam, B. Wei, On the total domination number of graphs (2003), eingereicht.

[35] T. S. Motzkin, E. G. Straus, Maxima for Graphs and a new proof of a theorem of Turán, *Canad. J. Math.* 17 (1965), 533-540.

[36] O. Murphy, Lower bounds on the stability number of graphs computed in terms of degrees, *Discrete Math.* 90 (1991), 207-211.

[37] O. Ore, *Theory of Graphs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[38] A. Pruchnewski, On the domination number of a graph, *Discrete Math.* 251 (2002), 129-136.

[39] B. Reed, Paths, stars and the number three, *Combinatorics, Probability and Computing* 5 (1996), 277-295.

[40] C. Stracke, L. Volkmann, A new domination conception, *J. Graph Theory* 17 (1993), 315-323.

[41] L. Volkmann, *Fundamente der Graphentheorie*, Springer, 1996.

[42] V. K. Wei, A lower bound on the stability number of a simple graph, *Bell Laboratories Technical Memorandum* 81-11217-9 (1981), Murray Hill, NJ.

[43] S. Zhou, Inequalities involving independence domination, f-domination, connected and total f-domination numbers. *Czechoslovak Math. J.* 50 (2000), 321-330.