

Wegesysteme

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Dr. rer. nat.

eingereicht bei der
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Ilmenau

vorgelegt von
Frank Göring
Institut für Mathematik
Technische Universität Ilmenau
D-98684 Ilmenau

eingereicht am 10.7.2002
verteidigt am 11.12.2002

Gutachter:
Prof. R. Diestel (Universität Hamburg)
Prof. J. Harant (TU Ilmenau)
Prof. W. Mader (Universität Hannover)

Zusammenfassung

Wegesysteme werden als Graphen abstrahiert, sodaß als natürliche Enthaltenseinsrelation von Graphen die topologische Minorenrelation betrachtet wird.

Durch das Fixieren bestimmter Knotenpunkte des topologischen Minors im großen Graphen wird diese Ordnungsrelation spezialisiert, sodaß Existenzsätze über Wegesysteme eine einfache Formulierung bekommen. Zu Mengers Theorem über die Existenz eines bestimmten Wegesystems werden drei kurze und neue Beweise gegeben. Einer dieser Beweise liefert sowohl eine neue Version des Theorems, die die Vorschreibbarkeit der Start- und Endknoten eines nicht maximalen Wegesystems für ein maximales Wegesystem beinhaltet, als auch einen leicht implementierbaren linearen Algorithmus zum Auffinden dieses Wegesystems. Es wird gezeigt, daß diese Version bekannte Theoreme der Transversaltheorie wie Halls Heiratssatz und das Theorem über gemeinsame Transversalen von Ford und Fulkerson als Spezialfälle hat. Auch für Maders Theorem über die Zahl unabhängiger H -Wege wird die Vorschreibbarkeit der Startknoten gezeigt. Die neue Version von Mengers Theorem wird darüber hinaus verwendet, um ein Verfahren zu begründen, mit welchem untersucht werden kann, ob aus gewissen Zusammenhangsvoraussetzungen (evtl. kombiniert mit einem gegebenen Wegesystem) in einem Graphen die Existenz eines gesuchten Wegesystems folgt. Das Verfahren ist konstruktiv. Entweder findet es ein Gegenbeispiel, also einen Graphen mit den gegebenen Voraussetzungen, der das gesuchte Wegesystem nicht enthält, oder es liefert einen Algorithmus, welcher linear in der Zahl der Knoten und Kanten des gegebenen Graphen das gesuchte Wegesystem findet. Genauer wird bei Eingabe eines beliebigen Graphen entweder ein Trenner gefunden, der beweist, daß die Zusammenhangsvoraussetzung nicht gegeben ist, oder das gesuchte Wegesystem selbst wird konstruiert. An Beispielen wird die Funktionsweise des Verfahren demonstriert: Es werden zwei Existenzsätze über Kreise durch vorgeschriebene Knoten eines gegebenen Graphen damit hergeleitet.

Abstract

Path systems are understood to be Graphs. Thus we consider topological minorship as a natural relation of containment for graphs.

By fixing special vertices of a topological minor in the containing graph we specialise this relation to get a short way to formulate theorems about the existence of path systems. Three new and short proofs of Menger's theorem about the existence of a special path system are given. One of these proofs gives both a new version of this theorem including prescribability of initial and terminal vertices of a non-maximal path system for a maximal path system and an easy implementable linear Algorithm for finding the desired path system. It is shown that this theorem contains wellknown theorems of transversal theory (like Hall's marriage theorem and Ford and Fulkerson's theorem about common transversals) as special cases. The prescribability of startvertices even will be shown for Mader's theorem. Moreover the new version of Menger's theorem is used to give a procedure which investigates the following question: Do some connectivity conditions (possibly combined with a given path system) force the existence of a desired path system in a graph? The procedure is constructively. Either it finds a counterexample, that is, a graph satisfying the given assumptions but not containing the desired path system, or it gives an algorithm with a linear running time in the number of vertices and edges of the input graph which constructs the desired path system. More precisely the algorithm either finds a separator showing that the input graph doesn't satisfy the connectivity condition or the desired path system will be constructed. Two examples demonstrate how this procedure works: Two Theorems about the existence of cycles in a given graph containing prescribed vertices will be deduced.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Grundlagen	2
1.2.1	Von Zahlen und Tupeln	3
1.2.2	Von Richtungen, Knoten und Kanten	5
1.2.3	Von Mengen und Graphen	6
1.2.4	Von Zusammenhang, Trennern und speziellen Mengen	9
1.2.5	Von Wegesystemen	14
1.2.6	Operationen und Eigenschaften für endliche Wegesysteme	15
1.2.7	Begriffe der Transversaltheorie	17
1.2.8	Verfahren und Algorithmen	18
2	Wegesysteme und Trenner	21
2.1	Mengers Theorem	21
2.2	Mengersätze und Transversalen	24
2.2.1	Spezialfälle ohne Kanten	26
2.2.2	Spezialfälle mit Kanten	28
2.3	Vorschreibbarkeit in Maders Theorem	31
3	Einbettungsbereiche	38
3.1	Relationen und Vereinigung	38
3.2	Durchschnitt	42
3.3	Praktische Anwendung	50
4	Beispiele	52
4.1	Kurze Kreise durch vorgeschriebene Knoten	52
4.1.1	Problemstellung und Resultate	52
4.1.2	Beweise	55
4.2	Kreissysteme erzwingen weitere Kreise	73
A	Notation	85
A.1	Funktionen und Operationen	86
A.1.1	Tupel	86

A.1.2 Mengen und Graphen	86
A.1.3 Wegesysteme	87
A.2 Begriffe	88
B Thesen	94
C Veröffentlichungen des Autors	99
D Danksagung	100

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Wegesysteme begegnen uns regelmäßig - ob als Straßen- oder Wanderkarten, Leiterbahnen elektrischer Schaltungen oder auch als Organisationsstrukturen von Firmen und Behörden (Dienstweg). Als Modell für Wegesysteme eignen sich Graphen - interessante Stellen sowie Verzweigungen bilden die Knoten, Verbindungen dazwischen bilden die Kanten. Auch in einem schon gegebenen Graphen G lassen sich Wegesysteme definieren, welche man sofort in einem neuen Graphen H modellieren kann. Der Graph H ist in gewissem Sinne in G enthalten - er ist ein *topologischer Minor* von G . Bilden in G die 'interessanten Stellen' eine Menge S und sind in H auch noch ausgezeichnet, so ist H eine Vergrößerung des Modells G unter Beibehaltung von S . So ist in einem Autoatlas die Autobahnkarte eine entsprechende Vergrößerung der normalen Straßenkarten unter Beibehaltung wichtiger Orte (Autobahnabfahrten, große Städte...). H ist also unter Beibehaltung der Knoten aus S in G enthalten - eine leichte Verschärfung des topologischen Minorbegriffs, die uns aber sogar im Alltag begegnet. Wir werden H als S -Wegesystem oder auch S -Minor von G bezeichnen. Mengers Theorem betrachtet nun in seiner Zweipunktversion eine zweielementige Menge S und besagt, daß ein Graph, in dem S nicht durch Löschung von c anderen Knoten oder Kanten getrennt werden kann, durch eine S verbindende c -fach-Kante vergrößert wird. Dieses Theorem ist somit ein guter Einstieg in die Theorie der S -Minoren. Obwohl es schon viele Beweise zu Mengers Theorem gibt, werden wir hier drei neue, besonders kurze Beweise angeben - allerdings für die Mengenversion von Mengers Theorem. In dieser Version geht es um die Maximalzahl isolierter Kanten zwischen einer Menge A und einer B welche einen $A \cup B$ -Minor eines vorgegebenen Graphen formen. Wir interessieren uns speziell für die Vorschreibbarkeit der verwendeten Knoten eines nicht maximalen $A \cup B$ -Minors für einen $A \cup B$ -Minor - wir wollen ja eine Knotenmenge S festhalten. Das führte uns insbesondere zu dem algorithmisch am besten verwertbaren der drei Beweise. Transversaltheorie spielt

sich auf kantenlosen Graphen ab - gesucht sind zu Mengen eines Mengensystems bestimmte Elemente, die in diesem Modell betrachtet, gewisse Untergraphen - also auch S -Minoren in unserem Sinne sind: Untergraphen sind S -Minoren für beliebige Mengen S . Wir werden daher einige grundlegende Theoreme der Transversaltheorie als kantenlose Spezialfälle von Mengers Theorem identifizieren. Ein weiterer tiefliegender Satz beschäftigt sich (in der Mengenversion) mit der maximalen Zahl unabhängiger Kanten zwischen Knoten unterschiedlicher Teilmengen eines Mengensystems \mathcal{H} auf der Knotenmenge eines vorgegebenen Graphen G , welche H -Minoren von G formen - der Satz von Mader. Dabei war bisher offen, ob die Knoten eines nicht maximalen solchen H -Minors auch als Startknoten eines maximalen H -Minors taugen. Genau das ist aber wichtig, wenn man S -Minoren betrachtet - wir wollen ja die Knoten von S wiederfinden! Dieses Problem wird mit Hilfe der Vorschreibversion von Mengers Theorem positiv beantwortet. In Mengers Theorem wird - wie bereits bemerkt - gezeigt, daß ein Graph der bezüglich einer Zweiermenge S c -fach zusammenhängend ist, stets einen kleinen c -fach zusammenhängenden S -Minor besitzt: Eine c -fach-Kante.

Es drängt sich die Frage auf, in wie weit man ein entsprechendes Ergebnis auch für größere Knotenmengen erhalten kann. Die Frage ist so interessant, da man bei einer gewissen Art von Vermutungen Gegenbeispiele nur noch in der Klasse der kleinen aber unvermeidbaren S -Minoren suchen muß - gibt es dort keine, gibt es gar keine. Deswegen ist nicht nur die Existenz und Endlichkeit dieser Klasse von Interesse, sondern insbesondere, wie man sie sich verschaffen kann. Dies wird im letzten Teil dieser Arbeit gezeigt - und an zwei Beispielproblemen demonstriert.

1.2 Grundlagen

Wir werden in der vorliegenden Arbeit die Begriffe so bilden, daß Graphen (sowohl gerichtet wie ungerichtet, auch Multigraphen), Spezialfälle eines übergeordneten Begriffes sind.

Üblicherweise (vgl. [2]) wird in Graphen gefordert, daß Knoten- und Kantenmenge disjunkt sind. Das führt dazu, daß man bei Manipulationen an Graphen aufpassen muß, daß sie erlaubt sind, daß also „hinten wieder ein Graph rauskommt“. Allgemein wird dies erledigt, in dem man Kanten und Knoten aus disjunkten „Urmengen“ wählt. Beispielsweise bei der Bildung von Blockgraphen zu gegebenen Graphen führt dieses Vorgehen meist dazu, daß man die Urmengen wechselt. Dieses Wechseln bedingt aber genaugenommen, daß man sich bei Graphenoperationen nun doch wieder klarmachen müßte, ob man sie ausführen kann - die beteiligten Graphen also gleichen Typs sind, aus den gleichen Urmengen „gebastelt“ wurden.

Wir wollen daher das Wechseln der Urmengen in der gesamten Arbeit vermeiden, indem wir die Urmengen genauer fassen, aber so allgemein lassen, daß alle von uns verwendeten Operationen zum Bilden von Graphen innerhalb dieser

Urmengen funktionieren. Wechseln wir aber nie die Urmengen, ist es auch nicht mehr nötig, Knoten und Kanten eines Graphen „getrennt aufzubewahren“; wir erhalten die Knotenmenge und die Kantenmenge eines Graphen ja als Schnitt mit der zugehörigen Urmenge geliefert. Daher werden wir Graphen (ob gerichtet oder ungerichtet) als spezielle Mengen auffassen. Das vereinfacht in manchen Passagen die Bezeichnungsweise; für Mengen definierte Relationen und Operationen müssen wir nicht noch einmal für Graphen definieren.

Den Begriff der Kante wollen wir für ungerichtete Graphen reservieren; da ein solcher aber einen gerichteten Graphen (mit Bögen) enthalten können soll, fassen wir eine Kante als Menge ihrer möglichen Richtungen auf. Ein Bogen ist dann eine Richtung. Wir werden den Begriff des Bogens daher ganz unterdrücken und Graphen allgemein als Menge ihrer Knoten und Richtungen auffassen. Alle anderen Begriffe leiten wir von dieser Menge ab, sodaß bei dieser speziellen Begriffsbildung nur klar sein muß, was eine Richtung und was ein Knoten ist und das es nichts gibt, was beides ist.

Wir haben uns bei den Definitionen ansonsten an die bewährten Begriffe der Graphentheorie gehalten. Eine Ausnahme bildet noch der Begriff des Isomorphismus, der als ein spezielles Mengensystem und nicht etwa als eine Bijektion erklärt wird. Das ist zwar etwas umständlicher, paßt aber besser zum hiesigen Kontext. Die aus ihm abgeleiteten Begriffe behalten dabei ihre gewohnte Bedeutung.

Mit einer Zusammenfassung der Begriffsbildungen (in Anhang A), die wir auch als lose Kopie beilegen, hoffen wir, formale Hürden, die dem Verständnis der späteren Kapitel im Weg stehen könnten, ebenso zu mindern, wie das Problem, daß wir doch einige zusätzliche Definitionen getroffen haben, die möglicherweise auch einer gewissen Gewöhnung bedürfen.

1.2.1 Von Zahlen und Tupeln

Wir verwenden grundlegende Begriffe der Mengenlehre (außer dem der Komplementärmenge) sowie der Zahlentheorie wie allgemein üblich. In dieser Arbeit bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null als \mathbb{N}_0 .

Sei I eine Menge. Unter einem I -Tupel a verstehen wir eine spezielle Abbildung, die jedem $i \in I$ ein a_i (woher auch immer) zuordnet. Dabei bezeichnen wir I als *Indexmenge*. Für $i \in I$ nennen wir a_i die *ite* Komponente des I -Tupels. Ein $\{1, 2, \text{lustigs}\}$ -Tupel hat also tatsächlich eine lustigste Komponente, was zwar ungewöhnlich ist und in dieser Arbeit nicht weiter verwertet wird, aber vielleicht diese Vereinbarung gut illustriert. Wir werden zur Unterscheidung gleichartiger Tupel manchmal auch nur Indizes verwenden. Entsprechend wird für ein $\{1, 2, 6\}$ -Tupel h_t - welches keine dritte aber eine sechste Komponente hat - ebendiese Komponente mit $(h_t)_6$ oder kürzer mit $h_{t,6}$ bezeichnet. Im Unterschied dazu steht das $\{1, 2, t_6\}$ -Tupel h , dessen t_6 te Komponente einfach mit h_{t_6} bezeichnet würde. Wir versuchen aber, für die Elemente einer Indexmenge eines Tupels möglichst selten indizierte Variablen zu verwenden, um die Schriftgröße - und damit auch

die Lesbarkeit - nicht allzu gering zu halten und Verwechslungen vorzubeugen.

Ist speziell I die Menge aller natürlichen Zahlen größer Null, die nicht größer als eine vorgegebene natürliche Zahl n sind, so nennen wir in Übereinstimmung mit der üblichen Sprechweise ein I -Tupel a auch n -Tupel und speziell bei $n = 2$ Paar bzw. bei $n = 3$ Tripel. Ein n -Tupel a wird auch notiert als (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Innerhalb dieser Arbeit sind die Komponenten eines I -Tupels (für beliebige Indexmenge I) entweder alle Mengen - wir sprechen dann auch von einem *Mengensystem über I* und nehmen als Variable einen Großbuchstaben - oder alle reelle Zahlen.¹ Für jedes beliebige Mengensystem A über I setzen wir für beliebiges $J \subseteq I$:

$$A(J) = \bigcup_{j \in J} A_j$$

Ist a ein I -Tupel reeller Zahlen, so setzen wir für beliebiges $J \subseteq I$ mit $|J| \in \mathbb{N}_0$:

$$a(J) = \sum_{j \in J} a_j$$

Ein Mengensystem B über einer Indexmenge Y heißt *Umkehrung* eines Mengensystems A über einer Indexmenge X (formal: $B = A^{-1}$), falls $A(X) = Y$ und $B(Y) = X$ gilt und für jedes $y \in Y$ gilt $B_y = \{x \in X | y \in A_x\}$.

Lemma 1 (Göring) *Ist keine Komponente eines Mengensystems A leer, so besitzt A eine Umkehrung A^{-1} und es gilt $A^{-1^{-1}} = A$.*

Für alle x aus der Indexmenge von A folgt $x \in A^{-1}(A_x)$.

Beweis. Sei X die Indexmenge von A und B das Mengensystem mit $B_y = \{x \in X | y \in A_x\}$ für alle y der Indexmenge $A(X)$. Wir zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen $B^{-1} = A$ gilt, woraus der Satz folgt. Da keine Komponente von A leer ist, gilt $\bigcup_{y \in A(X)} B_y = X$, also $B(A(X)) = X$. Desweiteren sei C das

Mengensystem mit Indexmenge X mit $C_x = \{y \in A(X) | x \in B_y\}$ gesetzt. Es genügt nun für die erste Aussage zu zeigen, daß $C = A$ gilt, da insbesondere $X = B(A(X))$ folgt. Es folgt:

$$\begin{aligned} C_x &= \{y \in A(X) | x \in \{z \in X | y \in A_z\}\} \\ &= \{y \in A(X) | x \in X \text{ und } y \in A_x\} \\ &= \{y \in A(X) | y \in A_x\} \\ &= \{y \in A_x\} \\ &= A_x \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis der ersten Aussage erbracht.

Da $B(A_x)$ offenbar alle Elemente x' von X enthält, die $A_{x'} \cap A_x \neq \emptyset$ erfüllen, und $A_x \neq \emptyset$ gilt, folgt die zweite Aussage. \square

¹Dann sprechen wir allerdings nicht von einem Zahlensystem.

Ist i Element der Indexmenge eines Mengensystems A , so heißt i *Fixpunkt* von A , sofern $A_i = \{i\}$ gilt. Ein Mengensystem A über einer Indexmenge I heißt *S-treu* zu einer Menge S , falls für alle Teilmengen $I' \subseteq I$ gilt $A(I') \cap S = A(I' \cap S) = I' \cap S$. Mit anderen Worten: A ist *S-treu*, wenn $I \cap S = A(I) \cap S$ gilt und $I \cap S$ nur Fixpunkte von A enthält. Offenbar ist A^{-1} genau dann *S-treu*, wenn A auch *S-treu* ist.

Zum Schluß möchten wir noch ein paar spezielle Mengen definieren. Sind i, j ganze Zahlen, so sei

\mathbb{G}_i^j die Menge aller ganzen Zahlen z mit $i \leq z \leq j$,

\mathbb{G}_i die Menge aller ganzen Zahlen z mit $z \geq i$,

\mathbb{G}^j die Menge aller ganzen Zahlen z mit $z \leq j$ und

\mathbb{G} die Menge aller ganzen Zahlen. Die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich der Null) ergibt sich in dieser Bezeichnungsweise als $\mathbb{N}_0 = \mathbb{G}_0$. Auf ein spezielles Symbol für natürliche Zahlen verzichten wir.

1.2.2 Von Richtungen, Knoten und Kanten

Da eine Richtung im gerichteten Graphen als Bogen auffaßbar sein soll, hat sie einen Start und ein Ende. Um zwei Richtungen mit gleichem Start und Ende unterscheiden zu können, bedarf es eines dritten Merkmals (eines Namens). Somit sollte eine Richtung ein Tripel sein. Einen Algorithmus können (und werden) wir dann auch als Richtung auffassen: der Start ist die Eingabe, das Ende ist die Ausgabe und das dritte Merkmal ist seine Schrittfolge!

Knoten hingegen sollen lediglich unterscheidbar sein, benötigen also nur ein Merkmal. Allerdings sollten Knoten keine Richtungen sein. Entsprechend definieren wir:

Ein *Knoten* ist alles was kein Tripel ist.

Eine *Richtung* ist ein Tripel, dessen erste und letzte Komponente Knoten sind.

Die Richtung r heißt Richtung *von* r_1 *nach* r_3

Für Richtungen r setzen wir:

$$\bar{r} = (r_3, r_2, r_1)$$

Die Richtung \bar{r} sei als *Gegenrichtung* von r bezeichnet.

Somit ist die Gegenrichtung der Gegenrichtung einer Richtung wieder die ursprüngliche Richtung.

Kanten sollen in einer Menge ein oder zwei Richtungen haben können und aus der Menge verschwinden, wenn man ihre Richtungen in der Menge löscht. Dieses Verhalten wird durch folgende Definitionen erzwungen:

Eine *Kante* ist eine Menge e zu der es eine Richtung r gibt mit

$$e = \{r, \bar{r}\}$$

Eine Kante heißt *Kante einer Menge* sofern sie zu der Menge nicht disjunkt ist.

Eine Kante heißt *Schlinge*, sofern sie einelementig ist.

Eine Richtung r und ein Knoten v heißen *inzident*, wenn $v \in \{r_1, r_3\}$ gilt. Eine Kante e und ein Knoten v heißen *inzident*, wenn die Elemente von e inzident zu v sind.

1.2.3 Von Mengen und Graphen

Die *Knotenmenge* $V(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Elemente von M , die Knoten sind,

die *Richtungsmenge* $R(M)$ ist die Menge aller Elemente von M , die Richtungen von M sind, und

die *Kantenmenge* $E(M)$ ist die Menge aller Kanten der Menge M .

Das bedeutet, daß $V(M)$ und $R(M)$ Teilmengen von M sind, $E(M)$ jedoch nicht unbedingt (vgl. Definition von „Kante einer Menge“). Allgemein können Mengen M Elemente haben, die weder Knoten noch Kanten sind. Diese Elemente stören bei der folgenden Begriffsbildung nicht, sodaß es keinen Sinn machen würde, erfänden wir zusätzlich einen Begriff für Mengen M mit $M = V(M) \cup R(M)$, und gebräuchten ihn anschließend ständig. Wenn diese Elemente bei der Vorstellung stören, der kann sie im weiteren getrost als nicht existent betrachten. Im wesentlichen verhalten sich diese Elemente wie Knoten, zu denen keine inzidente Kante existiert.

Wir definieren für beliebige Mengen M :

$$\begin{aligned} \text{Start}(M) &= \{r_1 \notin M \mid r \in R(M)\} \\ \text{Ende}(M) &= \{r_3 \notin M \mid r \in R(M)\} \\ \text{Enden}(M) &= \text{Start}(M) \cup \text{Ende}(M) \\ \overline{M} &= (M \setminus R(M)) \cup \{\bar{r} \mid r \in R(M)\} \end{aligned}$$

Eine Menge M sei ein *Graph*, sofern $\text{Enden}(M)$ leer ist und $M = V(M) \cup R(M)$ gilt,

und *Untergraph* einer Menge M' , wenn M Graph ist und $M \subseteq M'$ gilt.

Eine Menge heißt *ungerichtet*, wenn sie ihre Kanten als Teilmengen enthält, und *gerichtet*, wenn sie von jeder ihrer Kanten genau eine Richtung als Element enthält.

Somit sind insbesondere gerichtete und ungerichtete Graphen erklärt. Ist V eine Menge von Knoten und E eine Menge von Kanten, so bezeichnen wir mit *Graph* (V, E) den ungerichteten Graphen mit Knotenmenge V und Kantenmenge E .

Graphen sind in einem gewissen Sinne „vollständig“, bzw. „ganz“: Sie enthalten alle Endknoten ihrer Richtungen bzw. Kanten als Elemente. Das motiviert die Operationen, die wir nun für Mengen M definieren. Die ersten beiden Funktionen sind der Zahlentheorie entlehnt - der Zusammenhang ist dabei enger, als man im ersten Moment meinen möchte. Das wird aber erst offenbar, wenn wir

die Wege definiert haben.

$$\begin{aligned} \lceil M \rceil &= M \cup \text{Enden}(M) \\ \lfloor M \rfloor &= M \setminus \{r \in R(M) \mid \{r_1, r_3\} \not\subseteq V(M)\} \\ \overline{M} &= M \cup \overline{M} \end{aligned}$$

Die letzte Funktion fügt für jede in M enthaltenen Richtung ihre Gegenrichtung hinzu. Würde man diese Operation als „Aufrunden“ auf die nächste ungerichtete Menge bezeichnen, so wäre das entsprechende „Abrunden“ die Entfernung aller Richtungen von M deren Gegenrichtung in M fehlt. Wir definieren dafür keine Extrabezeichnung, da wir diese Operation durch $M \cap \overline{M}$ ausdrücken können und nicht so oft benötigen.

Nun noch ein Lemma zum Verhalten der eben definierten Operationen:

Lemma 2 (Göring) *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \text{Enden}(\lceil M \rceil) &= \text{Enden}(\lfloor M \rfloor) = \emptyset \\ \lceil \lceil M \rceil \rceil &= \lceil \lceil M \rceil \rceil = \lceil M \rceil \\ \lfloor \lfloor M \rfloor \rfloor &= \lfloor \lfloor M \rfloor \rfloor = \lfloor M \rfloor \\ \lceil \lfloor M \rfloor \rceil &= \lfloor M \rfloor \\ \lfloor \lceil M \rceil \rfloor &= \lceil M \rceil \\ \lfloor \lfloor M \rfloor \rfloor &= \lfloor \lfloor M \rfloor \rfloor \end{aligned}$$

Beweis. Das liegt daran, daß $\lfloor \cdot \rfloor$ ungerichtete Mengen unverändert läßt, als Ergebnis aber stets eine ungerichtete Menge von Knoten und Kanten liefert; und $\lceil \cdot \rceil$ bzw. $\lceil \cdot \rceil$ aus ihrer Definition folgernd als Ergebnis Mengen M mit $\text{Enden}(M) = \emptyset$ liefern, derartige Graphen aber nicht verändern. \square

Kommen wir nun zu Beziehungen von zwei Mengen M und M' . Wenn wir M' von M im „graphentheoretischen Sinn“ abziehen, möchten wir einen möglichst großen Graphen erhalten, der in M enthalten, aber disjunkt zu M' ist. Also definieren wir:

$$M - M' = \lfloor M \setminus M' \rfloor$$

Der *Rand* $\partial_M M'$ von M' bzgl. M soll gerade alle Knoten von M enthalten, die sowohl zu Richtungen aus M' wie Richtungen aus $M \setminus M'$ gehören. Wir definieren entsprechend:

$$\begin{aligned} \partial_M M' &= M \cap \lceil M' \rceil \cap \lfloor M \setminus M' \rfloor \\ \text{val}_M^+(M') &= |\{r \in R(M \setminus M') \mid \text{Start}(\{r\}) \subseteq M'\}| \\ \text{val}_M^-(M') &= |\{r \in R(M \setminus M') \mid \text{Ende}(\{r\}) \subseteq M'\}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{val}_M(M') &= |\{e \in E(M \setminus M') \mid \text{Enden}(\{e\}) \cap M' \neq \emptyset\}| + \\
&\quad |\{e \in E(M \setminus M') \mid \text{Enden}(\{e\}) \subseteq M'\}| \\
N_M^+(M') &= \bigcup_{\substack{(a,b,e) \in R(M) \\ a \in V(M')}} c \\
N_M^-(M') &= \bigcup_{\substack{(a,b,e) \in R(M) \\ c \in V(M')}} a \\
N_M(M') &= N_M^+(M') \cup N_M^-(M')
\end{aligned}$$

Diese Funktionen auf gerichtete bzw. ungerichtete Graphen angewandt entsprechen inhaltlich den in der Literatur üblichen. Man beachte allerdings, daß sie hier für Mengen definiert sind, nicht etwa für Knoten, wie sonst üblich. Die Valenzen eines Knotens v erhält man als $\text{val}_M(\{v\})$, $\text{val}_M^+(\{v\})$ und $\text{val}_M^-(\{v\})$.

Sind v und v' Knoten und M eine Menge, die weder v' noch eine zu v' inzidente Richtung enthält, so entstehe die Menge M' durch *Umbenennen von v in v'* aus der Menge M , wenn $M' = \{f(x) \mid x \in M\}$ gilt, wobei $f(x) = x$ für alle x gilt, die weder mit v inzident noch gleich v sind. Weiterhin sei $f(v) = v'$ und für alle Richtungen $r \in R(M)$ sei $f(r) = (f(r_1), r_2, f(r_3))$ gesetzt.

Für den Rand schließen wir noch folgende Lemmata an:

Lemma 3 (Göring) *Sind X, Y und Z Mengen mit $X \subseteq Y$, so gilt $\partial_X Z \subseteq \partial_Y Z$. Gilt außerdem $Y \cap Z = X$, so folgt $\partial_Z X \subseteq \partial_Z Y$.*

Beweis. Zur ersten Beziehung:

$$\partial_X Z = X \cap [Z] \cap [X \setminus Z] \subseteq Y \cap [Z] \cap [Y \setminus Z] = \partial_Y Z$$

Zur zweiten Beziehung:

$$\begin{aligned}
\partial_Z X &= Z \cap [X] \cap [Z \setminus X] \\
&\subseteq Z \cap [Y] \cap [Z \setminus X] \\
&= Z \cap [Y] \cap [Z \setminus (Y \cap Z)] \\
&= Z \cap [Y] \cap [Z \setminus Y] = \partial_Z Y
\end{aligned}$$

□

Lemma 4 (Göring) *Sind X und Y Graphen und $P \subseteq \partial_X Y$, so gilt $\partial_{X-P}(Y - P) \subseteq \partial_X Y \setminus P$. Sind X und Y disjunkte Graphen, so gilt $\partial_{X \cup Y} X = \emptyset$.*

Beweis. Die erste Beziehung sieht man sofort aus der Definition von ∂ . Die zweite Beziehung ergibt sich auch leicht durch folgende Herleitung

$$\partial_{X \cup Y} X \subseteq [X] \cap [Y] = X \cap Y = \emptyset$$

□

1.2.4 Von Zusammenhang, Trennern und speziellen Mengen

Eine Menge M heißt *zusammenhängend*, sofern für jede ungerichtete Menge M' mit $\partial_M M' = \emptyset$ gilt $M' \cap M \in \{\emptyset, M\}$. Die Forderung, daß M' ungerichtet sein soll, rührt daher, daß jede Richtung mit ihrer Gegenrichtung zusammenhängen sollte - da sie ja gemeinsam eine Kante bilden, die in der Graphentheorie ja als zusammenhängend gilt. Für ungerichtete Graphen entspricht diese Definition der üblichen Einführung des Zusammenhangs über Trennbarkeit, da man sich dann offenbar bei M' auf ungerichtete Untergraphen zurückziehen kann. Ist M ein anderer Graph, so ist M offenbar genau dann zusammenhängend, wenn $[M]$ zusammenhängend ist - das entspricht insbesondere dem in der heutigen Literatur üblichen Standard für schwachen Zusammenhang von Digraphen. Besonders reizvoll an dieser Variante der Einführung ist, daß sie topologisch motiviert ist. Das folgende Lemma werden wir häufig verwenden, ohne es explizit zu erwähnen, da es anschaulich klar ist und üblicherweise ohne Beweis vorausgesetzt wird. Grob gesprochen bedeutet es, daß eine Menge über ihren Rand mit ihrer Umgebung zusammenhängt.

Lemma 5 (Göring) *Sind M und M' zusammenhängende Mengen und $\partial_M M'$ ist nicht leer, so ist $M \cup M'$ eine zusammenhängende Menge.*

Beweis. Sei $X = M \cup M'$ und X' eine ungerichtete Menge mit $\partial_X X' = \emptyset$. Wir zeigen nun, daß $X' \cap X \in \{\emptyset, X\}$ gilt. Klar ist wegen Lemma 3, daß

$$\partial_M X' \cup \partial_{M'} X' \subseteq \partial_X X' = \emptyset$$

gilt und somit $X' \cap M \in \{\emptyset, M\}$ und $X' \cap M' \in \{\emptyset, M'\}$ folgt.

Falls $X' \cap M' = M'$ gilt, kann nicht $X' \cap M = \emptyset$ folgen, da wegen $X' \cap X = M'$ die Beziehung

$$\emptyset \neq \partial_M M' \subseteq \partial_X M' \subseteq \partial_X X'$$

in Widerspruch zu $\partial_X X' = \emptyset$ steht.

Somit ist dann $X' \cap M = M$ und $X' \cap X = X$, was diesen Fall abschließt. Andernfalls ist $X' \cap M' = \emptyset$. Angenommen es würde $X' \cap M = M$ gelten. Dann wäre $M' = X \setminus M$. Nun würde folgen:

$$\emptyset \neq \partial_M M' \subseteq \partial_X M' = \partial_X (X \setminus M') = \partial_X M \subseteq \partial_X X'$$

wobei die letzte Beziehung wieder mit Lemma 3 folgt. Das stünde aber im Widerspruch zu $\partial_X X' = \emptyset$.

Also muß dann auch $X' \cap M = \emptyset$ gelten. Es folgt $X' \cap X = \emptyset$ und der Beweis ist fertig. \square

Die Eigenschaft einer Menge, zusammenhängend zu sein, entspricht in gewisser Weise dem Vollständigkeitsaxiom im Peano-Axiomensystem der natürlichen

Zahlen. Daher ist es sinnvoll, das Prinzip der vollständigen Induktion gleich für zusammenhängende Mengen zu beweisen. Dadurch ist man nicht mehr auf das Herstellen einer Abbildung in die natürlichen Zahlen angewiesen.

Theorem 6 (Göring) Sei M eine zusammenhängende Menge. $H(m)$ sei eine für Knoten von M definierte Aussage. $S(m, m')$ sei die Aussage: „Aus $H(m)$ folgt $H(m')$.“ Gibt es nun ein Element m_0 von M für das $H(m_0)$ gilt und $S(m, m')$ trifft für alle in M benachbarten Knoten m und m' zu, so gilt $H(m)$ für alle $m \in V(M)$.

Beweis. Sei M' die Menge aller Knoten m von M , für die $H(m)$ gilt, und aller Richtungen von M für deren Start- und Endknoten a und b die Aussagen „ $H(a)$ oder $a \notin M'$ “ und „ $H(b)$ oder $b \notin M'$ “ gelten.

Dann gilt $\partial_M M' = \emptyset$, da anderenfalls M' einen Knoten m' besäße, der Endknoten einer Kante e von $M \setminus M'$ ist. Dann enthielte aber $\text{Enden}(e) \setminus M'$ einen zu M gehörigen Knoten m , für den $H(m)$ nicht gilt. Dieser Knoten wäre aber in M benachbart zu m' womit $S(m', m)$ folgen würde. Also würde $H(m)$ gelten - ein Widerspruch.

Da M zusammenhängend ist, folgt aus $\partial_M M' = \emptyset$ auch $M' \in \{\emptyset, M\}$. Da $H(m_0)$ gilt, gilt $m_0 \in M'$ woraus $M' \neq \emptyset$ und endlich $M' = M$ folgt.

Somit gilt (nach Konstruktion von M') $H(m)$ für jeden Knoten $m \in M$. \square

Eine Menge M' heißt *Komponente* einer Menge M , wenn sie zusammenhängend und nicht leer ist und $\partial_M M' = \emptyset$ gilt. Auch dieser Begriff entspricht dem üblichen Standard der Graphentheorie. Die Menge aller Komponenten von M sei mit $\mathcal{C}(M)$ bezeichnet.

An dieser Stelle sind wir in der Lage, die Menge der *Gespinnste* eines Graphen G an einen Graphen $H \subseteq G$ formal zu bestimmen als

$$\text{Gesp}_H(G) = \{[M] \mid M \in \mathcal{C}(G \setminus H)\}$$

Für gerichtete Graphen gibt es (beispielsweise in der Theorie der Markow-Ketten verwendet) noch den Begriff der anziehenden Knotenmenge, den wir in dieser Arbeit auch (etwas verallgemeinert) verwenden wollen insbesondere um Trenner zu definieren. Eine Menge M' heißt *anziehend* in einer Menge M , wenn $\partial_M M' \subseteq M'$ und $\text{val}_M^+(M') = 0$. Die Bedingung $\partial_M M' \subseteq M'$ bedeutet üblicherweise, daß M' eine in M abgeschlossene Menge ist, ein Begriff, den wir allerdings nur erwähnen - nicht jedoch wirklich definieren wollen, da er in dieser Arbeit nicht benötigt wird. Wir implizieren diese Abgeschlossenheit mit dem Begriff der Anziehung, da beide Eigenschaften hier nie getrennt auftreten werden. In anderen Arbeiten, die sich einer ähnlichen Begriffswelt bedienen, kann es allerdings durchaus angeraten sein, diese Begriffe zu trennen.

Eine Menge M von Knoten heißt *unabhängig in einer Menge M'* , wenn $M = [M \cup R(M')]$ gilt.

Sind A und B Mengen, so ist eine Menge T ein AB -Trenner einer Menge M , wenn $M' = M \setminus T$ eine anziehende Menge enthält, die $A \cap M'$ überdeckt und zu $B \cap M'$ disjunkt ist.

Ist A eine Menge, so ist eine Menge T ein A -Trenner von M , wenn $M \setminus T$ keine Komponente enthält, die mehr als ein Element mit A gemeinsam hat. Ist \mathcal{A} ein Mengensystem, so ist eine Menge T ein \mathcal{A} -Trenner von M , wenn $M \setminus T$ keine Komponente enthält, die mit mehr als einer Komponenten von \mathcal{A} ein Element gemeinsam hat.

Nachdem wir Trenner definiert haben, wollen wir nun „minimale“ Graphen definieren, die etwas verbinden - Wege. Sind A und B Mengen, so ist ein AB -Weg eine Menge W derart, daß für alle Teilmengen W' von W folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

Die leere Menge ist kein AB -Trenner von W' .

Es gilt $W' = W$.

Gibt es Knotenmengen A und B derart, daß eine Menge W ein AB -Weg ist, so nennen wir W einen *abgeschlossenen Weg*, die Elemente von $W \cap A$ *erste Knoten* von W , die Elemente von $W \cap B$ *letzte Knoten* von W , und die Menge aller Elemente von W außer den ersten und den letzten Knoten *Inneres von W* . Zu einem Mengensystem S nennen wir eine Menge W dann S -Weg, wenn W die einzige Teilmenge von S ist, zu der zwei Komponenten A und B von S derart existieren, daß sie ein AB -Weg ist.

In Lemma 7 werden wir sehen, daß ein abgeschlossener Weg tatsächlich genau einen ersten und genau einen letzten Knoten hat.

Ein Knoten v heißt *linear* in einer Menge M , wenn $\text{val}_M(v) = 2$ und $\text{val}_M^-(v) = \text{val}_M^+(v)$ gilt. Eine zusammenhängende Menge M heißt *linear*, wenn jeder ihrer Knoten linear ist. Eine lineare Menge heißt

- *endlicher offener Weg*, falls $|\text{Start}(M)| = |\text{Ende}(M)| = 1$ gilt,
- *Kreis*, falls M einen Knoten v derart enthält, daß $M \setminus v$ ein endlicher offener Weg ist,
- *linksunendlicher offener Weg*, falls $\text{Start}(M) = \emptyset$ und $|\text{Ende}(M)| = 1$ gilt,
- *rechtsunendlicher offener Weg*, falls $|\text{Start}(M)| = 1$ und $\text{Ende}(M) = \emptyset$ gilt,
- *beidseitig unendlicher Weg*, falls $\text{Start}(M) = \text{Ende}(M) = \emptyset \neq V(M)$ gilt.

Eigenschaften allgemeiner Mengen werden für die hier definierten speziellen Mengen gleichermaßen verwendet. Entsprechend ist z.B. ein gerichteter Kreis ein Kreis, der eine gerichtete lineare Menge ist.

Was hat nun der abgeschlossene Weg mit dem offenen Weg zu tun? Das soll das folgende Lemma klären

Lemma 7 (Göring) *Sind A und B Knotenmengen und W ein AB -Weg, so gilt:*

- W ist zusammenhängend.
- $W \setminus \{A \cup B\}$ ist entweder die leere Menge oder ein gerichteter endlicher offener Weg.
- $|W \cap A| = |W \cap B| = 1$
- Es gilt entweder $\lceil W \setminus \{A \cup B\} \rceil = W$ oder W ist einelementig.

Beweis. Sei M die Menge aller Knoten v von W , die in A liegen oder für die $W \setminus (A \cap B)$ einen offenen Weg W_v mit $\text{Start}(W_v) \subseteq A \cap W$ und $\text{Ende}(W_v) = \{v\}$ enthält, sowie aller Richtungen r von W , deren Anfang ein solcher Knoten ist und deren Ende nicht in W liegt oder auch ein solcher Knoten ist.

Die Menge M ist anziehend in W . Sonst würde es einen Knoten v in M und eine Richtung $r \in W \setminus M$ geben. Folglich wäre $v' = \text{Ende}(r)$ auch ein Element von $W \setminus M$. Dann wäre $W'_v = W_v \cap \{v, r\}$ allerdings ein offener Weg mit $\text{Start}(W'_v) = \text{Start}(W_v) \subseteq A \cap W$ und $\text{Ende}(W'_v) = \{v'\}$, woraus im Widerspruch zu $v' \in W \setminus M$ auch $v' \in M$ folgen würde.

Da die leere Menge kein AB -Trenner von W ist, muß M auch einen Knoten b aus B enthalten. Gehört b zu A , folgt sofort $W = \{b\}$. Ansonsten enthält W den entsprechenden offenen Weg W_b und es gilt sogar $\lceil W_b \rceil \subseteq W$. Da aber die leere Menge offenbar kein AB -Trenner von $\lceil W_b \rceil$ ist, folgt endlich $W = \lceil W_b \rceil$, woraus die Aussagen des Lemmas folgen. \square

Wir wollen an dieser Stelle kurz unterbrechen, um den Zusammenhang zwischen den von uns definierten Mengenfunktionen $\lceil \cdot \rceil$ und $\lfloor \cdot \rfloor$ und den entsprechenden Funktionen für reelle Zahlen aufzuzeigen.

Der rechtsunendliche offene Weg N ist - sofern man seine Richtungen als Nachfolgerbildung und seinen Anfangsknoten als Null auffaßt - gerade so definiert wie die natürlichen Zahlen im Peano-Axiomensystem: Der erste Knoten (Nachfolger des nichtenthaltenen Startknotens) wird die Eins, welche in diesem Weg keinen Vorgänger hat, die Valenzen liefern ansonsten wegen $\text{Start}(N) = \{0\}$ und $\text{Ende}(N) = \emptyset$ die Eindeutigkeit von Vorgänger- und Nachfolgerbildung, der Zusammenhang entspricht dem Vollständigkeitsaxiom. Somit gilt $V(\lceil N \rceil) = \mathbb{N}_0$. Konstruiert man nun auf dem üblichen Weg erst gebrochene Zahlen und dann über den Cantorsche Schnitt positive reelle Zahlen, in die man die natürlichen Zahlen dann einbettet, so entspricht jede natürliche Zahl dem offenen Weg aus \mathbb{N}_0 bis zu ihr, vereinigt mit ihr selbst. Die Menge der reellen Zahlen zwischen zwei natürlichen Zahlen n und $n+1$ entspricht dann wieder der sie verbindenden Richtung. Das ist aber genau die Menge aller reellen Zahlen r mit $\lceil r \rceil = n+1$ und $\lfloor r \rfloor = n$. Die Bestimmung von $\lceil r \rceil$ bzw. $\lfloor r \rfloor$ funktioniert also für alle reelle Zahlen einschließlich der natürlichen Zahlen durch Anwendung der Funktionen

[.] bzw. [.] auf die sie möglichst genau darstellenden Teilgraphen von \mathbb{G} . Daher kann man die hier definierten Funktionen [.] und [.] wohl als Erweiterung der entsprechenden Funktionen für reelle Zahlen auffassen!

In dieser Arbeit setzen wir zwar die natürlichen Zahlen als bekannt voraus, möchten aber darauf hinweisen, daß die Menge \mathbb{N}_0 durchaus auf die zu Beginn des vorigen Absatzes geschilderte Weise als Knotenmenge einer speziellen Menge eingeführt werden könnte.

Für den Satz von Mader benötigen wir noch eine Funktion, die wir als Schranke für die „Durchlässigkeit“ einer Menge für Wege in einer anderen Menge bezeichnet werden kann. Wir setzen:

$$\mathbb{M}_M(M') = |V(M')| + \sum_{C \in \mathcal{C}(\lceil R(M') \rceil)} \left\lfloor \frac{1}{2} |\partial_{M-V(M')} C| \right\rfloor$$

Die Überlegung, die zu dieser Funktion führt, geht wie folgt:

Ein Weg W von M , dessen Enden außerhalb $\lceil M' \rceil$ liegen, sofern er nicht disjunkt zu M' ist, aber keine Knoten von M' enthält, hat zwangsläufig Kanten mit M' , also auch mit einer Komponente C von $\lceil R(M') \rceil$. Es gilt im weiteren $2 \leq |\partial_W C|$ und $\partial_W C \subseteq \partial_{M-V(M')} C$. Jeder Weg von M , der M' passiert, „verbraucht“ dabei also wenigstens einen Knoten von M' oder zwei Knoten von $\partial_{M-V(M')} C$ einer Komponente C von $\lceil R(M') \rceil$. Somit können höchstens $\mathbb{M}_M(M')$ disjunkte Wege von M die Menge M' passieren (also nicht zu M disjunkt sein, aber außerhalb von $\lceil M' \rceil$ beginnen und enden).

Für die Theoreme 27 und 28 müssen wir diese Funktion noch ein wenig modifizieren, da hier Knoten eines gegebenen Mengensystems S als Randknoten aufgefaßt werden müssen. Dazu definieren wir

$$\partial_{G,S} H = \partial_G H \cup (V(H) \cap S(I))$$

wobei G ein Graph, S ein System von Teilmengen der Knotenmenge von G mit zugehöriger Indexmenge I und H ein Untergraph von G sei. In einem Graphen G sei für alle $T \subseteq G$ sowie für alle I -Tupel S von Teilmengen von $V(G)$ die Funktion

$$\mathbb{M}_G(S, T) = |V(T)| + \sum_{C \in \mathcal{C}(\lceil R(T) \rceil)} \left\lfloor \frac{1}{2} |\partial_{G-V(T),S} C| \right\rfloor$$

definiert. Dabei bezeichnen wir die Elemente aus $\mathcal{C}(\lceil R(T) \rceil)$, für die $|\partial_{G-V(T),S} C|$ ungerade ist, als *ungerade Komponenten* (von T in bzgl. S in T).

Ein Graph, der aus zwei Knoten a und b sowie $c \in \mathbb{N}_0$ verschiedenen Richtungen von a nach b besteht, heißt *c-fache ab-Verbindung*. Ein Graph G der für Knotenmengen A und B die Bedingungen

$$\text{Start}(R(G)) \in A \setminus B \tag{1.1}$$

$$\text{Ende}(R(G)) \in B \setminus A \tag{1.2}$$

erfüllt, heißt *AB-partit*. Ein Graph G der für ein Mengensystem S mit Indexmenge I die Bedingungen

$$\text{Enden}(R(G)) \in S(I) \setminus \{v \in S(I) \mid |S_v^{-1}| > 1\} \quad (1.3)$$

$$\forall r \in R(G) \quad : \quad |S^{-1}(\{r_1, r_3\})| = 2 \quad (1.4)$$

erfüllt, heißt *S-partit*. Sind A und B bzw. die Komponenten von S disjunkt, ergibt sich die in der Literatur übliche Bedeutung der Begriffe *S-partit* bzw. *AB-partit*.

Weitere spezielle Graphen definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{n,m} &= \mathbb{G}_1^{n+m} \cup \{(i, \emptyset, j) \mid i \in \mathbb{G}_1^n \text{ und } j \in \mathbb{G}_{n+1}^{m}\} \\ \mathbb{K}_{A,B} &= A \cup B \cup \{(a, \emptyset, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \setminus \{a\}\} \\ \mathbb{K}_n &= \mathbb{G}_1^n \cup \{(i, \emptyset, j) \mid i, j \in \mathbb{G}_1^n \text{ und } j \neq i\} \\ \mathbb{K}_A &= A \cup \{(a, \emptyset, b) \mid a, b \in A \text{ und } a \neq b\} \end{aligned}$$

1.2.5 Von Wegesystemen

Ist R eine Menge von Richtungen und M eine Menge von Knoten und Richtungen, so sei $M \div R$ die Klasse aller Mengensysteme f mit Indexmenge M , für die $f_x = f_y$ genau dann gilt, wenn x und y der gleichen Komponente von $\llbracket R \rrbracket$ angehören, und aus f_x inzident f_y auch x inzident zu y folgt.

Zu einer Menge X von Knoten und Kanten sei ein X -Tupel f gegeben. Dann heißt f *Wegesystem auf X* , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle $r \in R(X)$ ist f_r ein offener Weg.
- Für alle $v \in V(X)$ ist f_v einelementig und enthält einen Knoten.
- Für alle $x, y \in X$ sind f_x und f_y disjunkt, falls $\llbracket \{x\} \rrbracket \neq \llbracket \{y\} \rrbracket$ gilt.
- Für alle $r \in R(X \cap \overline{X})$ gilt $f_{\overline{r}} = \overline{f_r}$.
- Für alle $r \in R(X)$ und alle $v \in V(X)$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Start}(f_r) \in f_v & \text{ ist äquivalent zu } r_1 = v \\ \text{Ende}(f_r) \in f_v & \text{ ist äquivalent zu } r_3 = v \end{aligned}$$

Das *Bild* dieses Wegesystems f sei mit $\text{Bild}(f) = f(X)$ gegeben, die Indexmenge durch $\text{Graph}(f) = X$.

Ein Wegesystem mit heißt *Isomorphismus*, wenn seine Umkehrung ein Wegesystem ist. Die Umkehrung eines Isomorphismus ist dann offenbar auch wieder ein Isomorphismus.

Ein Wegesystem W mit Indexmenge M heißt *A-Wegesystem*, wenn für jedes $r \in R(M)$ der Graph $W(\llbracket \{r\} \rrbracket)$ ein *A-Weg* ist.

Eine Menge M heißt *S-treu einbettbar* in eine Menge M' (kurz $M \preceq_S M'$), wenn es ein S -treues Wegesystem auf M gibt, dessen Bild Teilmenge von M' ist. Die Menge M heißt dann auch kurz *S-Minor* von M' . Noch eine Bemerkung zur S -Treue: Ist ein Wegesystem S -treu, so ist es auf Grund seiner Definition offenbar auch $[[S]]$ -treu. Wir werden daher S in diesem Zusammenhang stets als ungerichteten Graphen voraussetzen.

Sei c eine natürliche Zahl, so heißen zwei Knoten a und b in einer Menge M c -fach zusammenhängend von a nach b , wenn gilt:

$$\{a, b\} \cup \{(a, i, b) \mid i \in \mathbb{G}_1^c\} \preceq_{\{a,b\}} M$$

Ein *Einbettungsbereich* sei eine Menge \mathcal{Z} von Graphen derart, daß es eine Menge \mathcal{R} von Graphen, sowie einen ungerichteten Graphen S derart gibt, daß \mathcal{Z} die Menge aller Graphen ist, in die wenigstens ein Element aus \mathcal{R} S -treu einbettbar ist. Dabei heißen die Graphen aus \mathcal{R} *Repräsentanten* von \mathcal{Z} , der Graph S *Lokalität* von \mathcal{Z} und (\mathcal{R}, S) ein *Erzeugendensystem* zu \mathcal{Z} . Wir setzen entsprechend $\text{ein}(\mathcal{R}, S) = \mathcal{Z}$. Die Menge aller ungerichteten Graphen eines Einbettungsbereiches heißt *ungerichteter Einbettungsbereich*. Der Einbettungsbereich einer c -fachen ab -Verbindung heißt (a, c, b) -*Mengerbereich*.

Wir nennen (\mathcal{R}, S) *endlich*, falls S eine endliche Menge und \mathcal{R} eine endliche Menge endlicher Graphen ist. Einbettungsbereiche sind zum Beispiel:

- $\text{ein}(\{\mathbb{K}_{3,3}, \mathbb{K}_5\}, \emptyset)$ (die Menge aller nicht planaren Graphen),
- die Menge aller in einen gegebenen Graphen nicht einbettbaren Graphen,
- die Menge aller Graphen, in denen die Knoten a und b c -fach zusammenhängend sind,
- die Menge aller Graphen, die c disjunkte H -Wege enthalten (vgl. [13]),
- $\text{ein}(\{\{a, b, c, d, (a, 1, b), (c, 2, d)\}, \{a, b, c, d\}\}, \{a, b, c, d\})$ (die Menge aller Graphen, die einen ab -Weg und einen dazu disjunkten cd -Weg enthalten, vgl. [21]).
- die Menge aller Graphen, die einen Kreis durch eine vorgeschriebene Menge von Knoten und Kanten enthalten (vgl. [3, 12, 8, 9])

1.2.6 Operationen und Eigenschaften für endliche Wegesysteme

Für Wegesysteme definieren wir im folgenden alle Eigenschaften so, daß sie sich auf die Indexmengen vererben, und alle Operationen (deren Ergebnis Mengen sind) so, daß sie sich auf die Bilder vererben. Dabei versuchen wir eine möglichst große Analogie zwischen Graphen und Wegesystemen aufrecht zu erhalten und bei Operationen möglichst kleine Indexmengen zu bekommen. Ziel ist es dabei,

aus gegebenen Wegesystemen gesuchte Wegesysteme zu konstruieren. Insbesondere fassen wir in diesem Kontext Graphen als Wegesysteme auf: Ist G ein Graph, so setzen wir $G_m = \{m\}$ für $m \in G$. Die im folgenden auf Wegesysteme verallgemeinerten Beziehungen und Operationen sollen für als Wegesysteme aufgefaßte Graphen die gleichen Ergebnisse haben, die man erzielen würde, wenn man sie auf die Graphen selbst anwendet und das Ergebnis als Wegesystem auffaßt.

Seien A und B Wegesysteme.

$A \subseteq B$ Die Indexmenge von A ist in jener von B enthalten und für jedes ihrer Elemente a gilt $A_a = B_a$.

$A \preceq B$ Die Indexmenge von B enthält das Bild von A .

Für Graphen fallen somit $A \preceq B$ und $A \subseteq B$ in ihrer Bedeutung zusammen.

$B \circ A$ ist nur definiert, falls $A \preceq B$ gilt, und zwar als das Wegesystem C mit der gleichen Indexmenge wie A , das $C_c = B(A_c)$ für alle zu dieser Indexmenge gehörigen Elemente c erfüllt.

Für Graphen gilt $B \circ A = B$, falls es definiert ist.

$A \cup B$ ist ein Wegesystem C mit folgenden Eigenschaften:

Das Bild von C ist die Vereinigung der Bilder von A und B .

Alle Fixpunkte von A und von B sind Fixpunkte von C .

Darüberhinaus hat C keinen Fixpunkt.

Es gibt Wegesysteme A' und B' mit $C \circ A' = A$ und $C \circ B' = B$.

Für jeden Knoten c seiner Indexmenge, für den C_c linear ist, gibt es einen Knoten a mit $A_a = C_c$ oder einen Knoten b mit $B_b = C_c$.

Bemerkung: Die Definitionen für $A \cup B$ ist nicht eindeutig und daher noch nicht vollständig. Jedoch ist die Menge aller Wegesysteme, die jeweils die geforderten Bedingungen erfüllt, nie die leere Menge. Gemäß dem Auswahlaxiom gibt es also eine Funktion, die aus jeder der Mengen, die zu gegebenem A und B jeweils die möglichen Kandidaten für $A \cup B$ enthalten, ein Element auswählt welches wir dann mit $A \cup B$ bezeichnen.

Gewiß muß man für die Existenz einer solchen Auswahlfunktion nicht das Auswahlaxiom strapazieren, sondern kann eine solche auch (für endliche Wegesysteme) konstruieren. Die konkreten Eigenschaften einer derartigen Auswahlfunktion interessieren uns in dieser Arbeit allerdings nicht, sodaß uns deren blanke Existenz genügt. Wir werden für unsere Zwecke nur auf die hier angegebenen Eigenschaften zurückgreifen.

$kurz(A)$ ist ein Wegesystem C , für das die folgenden drei Bedingungen gelten:

Das Bild von C ist das Bild von A .

Die Indexmenge von C hat keine linearen Knoten.

Ein Knoten der Indexmenge von C ist genau dann Fixpunkt von C , wenn er Fixpunkt von a ist.

Die Bemerkung zu $A \cup B$ ist hier entsprechend zu beachten.

$A \cap B$ ist das Wegesystem C mit $C \subseteq A \cup B$, dessen Bild der Durchschnitt der Bilder von A und B ist.

$A|_X$ ist für das in der Indexmenge von A enthaltene X das Wegesystem C mit Indexmenge X und $C_x = A_x$ für alle $x \in X$ (lies: „ A eingeschränkt auf X “).

In (insbesondere rechen-technischen) Anwendungen wird man natürlich die Definitionen durch Festlegen einer geeigneten Auswahlfunktion vervollständigen. Dabei bleiben durch die „offene“ Definition noch Gestaltungsfreiräume, um praktische Algorithmen so effizient wie möglich zu gestalten. Das muß - und wird - jedoch nicht Gegenstand dieser theoretischen Abhandlung sein.

Ein Knoten v heißt *innerer Knoten* eines Wegesystems W , wenn es eine Richtung r in der Indexmenge von W derart gibt, daß $v \in W_r$ gilt. Insbesondere ist v dann innerer Knoten der Richtung r im Wegesystem W .

Ein Wegesystem W heißt *Mengersystem der Größe c von a nach b* (kurz (a, c, b) -Mengersystem), wenn a und b verschiedene Knoten und c eine natürliche Zahl ist, W $\{a, b\}$ -treu ist und die Indexmenge von W nur a und b sowie c Richtungen von a nach b enthält.

Besitzt ein Graph G zu zwei Mengen A und B einen AB -Weg P mit erstem Knoten a und letztem Knoten b , so bezeichnen wir das $\{a, b\}$ -treue Wegesystem mit Indexmenge $\{a, b, (a, \emptyset, b)\}$ und Bild P als *AB -Systemweg*.

1.2.7 Begriffe der Transversaltheorie

Da bei unseren Überlegungen zu Maders Theorem verallgemeinerte Transversalen eine Rolle spielen, wollen wir in dieser Arbeit auch den Zusammenhang zwischen von uns aus Mengers Theorem abgeleiteten Sätzen und der Transversaltheorie nicht verheimlichen. Allerdings werden wir dabei nicht allzu tief in die Transversaltheorie einsteigen, da dies nicht das Hauptthema der Arbeit ist. Allerdings benötigen wir noch ein paar Begriffe, die wir aus [23] entnommen haben, hier aber nochmals kurz in unserer Bezeichnungsweise einführen wollen.

Sind ein Mengensystem A sowie ein Tupel natürlicher Zahlen a mit gleicher Indexmenge I gegeben, so nennen wir ein Mengensystem X auf der gleichen Indexmenge ein *partielles a -Repräsentantensystem* von A , falls die Komponenten von X disjunkt sind und für alle $i \in I$ sowohl $|X_i| \leq a_i$ als auch $X_i \subseteq A_i$ gilt. $X(I)$ heißt dann partielle a -Transversale von A . Gilt $|X(I)| = a(I)$ so ist $X(I)$ eine a -Transversale und X ein a -Repräsentantensystem. Gilt $a_i = 1$ für alle $i \in I$, so kann das a als Attribut für Transversalen und Repräsentantensysteme entfallen:

- Eine partielle a -Transversale heißt dann partielle Transversale.
- Eine a -Transversale heißt dann Transversale.
- Ein partielles a -Repräsentantensystem heißt dann kurz partielles Repräsentantensystem
- Ein a -Repräsentantensystem heißt dann kurz Repräsentantensystem

Die Bezeichnungen entsprechen hier nicht dem Prinzip, welches wir in den vorigen Abschnitten verfolgt haben - das Weglassen eines Attributes entspricht hier einer Spezialisierung des Begriffes - in den anderen Abschnitten entspricht dies - wie im Umgangssprachgebrauch üblich - einer Verallgemeinerung: Ein grünes Blatt ist ein spezielles Blatt, ein Geburtstag ist ein besonderer Tag. Wir haben uns aber auf diese Begriffsbildung eingelassen, da sie sich in der Literatur durchgesetzt hat.

1.2.8 Verfahren und Algorithmen

In dieser Arbeit werden verschiedene Verfahren zur Erzeugung von Wegen und Wegesystemen in Graphen sowie deren Rechenaufwand besprochen. Wir werden Verfahren ähnlich wie Graphen modellieren, wobei sich unsere Vorüberlegung zur Struktur von Richtungen und Knoten auszahlt. Ein *Verfahren* ist eine Menge \mathcal{A} . Dabei sei $[\mathcal{A}]$ ein Graph,

- dessen Knoten Fallunterscheidungen anhand der Werte gegebener Variablen darstellen, welche der von ihnen ausgehenden Richtungen als nächstes beschriftet werden,
- dessen Richtungen als zweite Komponente eine Folge von Wertzuweisungen für Variablen darstellen,
- der einen Knoten besitzt, in welchem keine Richtung endet (*Startknoten*) und
- der einen Knoten besitzt, in welchem keine Richtung beginnt (*Endknoten*).

$\mathcal{A} \setminus [\mathcal{A}]$ besteht aus zwei Richtungen, von denen eine (die *Startrichtung*) im Startknoten endet und deren zweite Komponente Namenszuweisungen für Komponenten eines Eingabetupels P enthält. Die zweite Richtung (*Endrichtung*) beginnt im Endknoten.

Das Durchführen des Verfahrens \mathcal{A} mit gegebenem Tupel P (*Eingabetupel*) erfolgt so, daß (in der Startrichtung beginnend und in der Endrichtung endend) in jedem Knoten auf die sich aus der Fallunterscheidung ergebende Richtung übergegangen wird und in jeder Richtung die in ihrer zweiten Komponente gegebene Folge von Wertzuweisungen abgearbeitet wird, wonach zum Endknoten dieser

Richtung übergegangen wird und liefert (sofern es in endlicher Zeit ausführbar ist) die geänderten Komponenten des Eingabetupels.

Ein Verfahren stellt wieder eine Wertzuweisung für diese Komponenten dar. Daher darf eine Richtung eines Verfahren \mathcal{A} sehr wohl in der zweiten Komponente „ $\mathcal{A}(P)$ “ enthalten. Ist dies der Fall, so heißt \mathcal{A} rekursiv. Ist \mathcal{A} ein Verfahren und P ein Tupel, so ist die *Rekursionstiefe von $\mathcal{A}(P)$* ein wie folgt definierter Wert N : Wird das Verfahren $\mathcal{A}(P)$ gestartet, so läuft es zunächst mit Rekursionstiefe Null. Startet sich das Verfahren in der Rekursionstiefe n aufgrund der Zuweisung $\mathcal{A}(P')$ in einer seiner Richtungen selbst, so läuft das nun gestartete Verfahren mit Rekursionstiefe $n + 1$. N ist nun die maximal erreichte Rekursionstiefe im Verlauf des Verfahrens, sofern eine solche existiert, anderenfalls ist N unendlich.

In dieser Arbeit werden wir nur Verfahren vorstellen, die keine gerichteten Kreise enthalten (schleifenfrei). Für ein solches Verfahren \mathcal{A} wird $\mathcal{A}(P)$ für ein Tupel P als *Algorithmus* bezeichnet, sofern $\mathcal{A}(P)$ ausführbar ist und nur eine endliche Rekursionstiefe erreicht.

Der *Aufwand* eines Algorithmus $\mathcal{A}(P)$ für ein Tupel P ist die Anzahl der Elementarschritte, die bei Abarbeitung von $\mathcal{A}(P)$ durchgeführt werden. In unseren Algorithmen ist die erste Komponente des Eingabetupels stets ein Graph G und wir interessieren uns für den Aufwand des Verfahrens in Abhängigkeit von $|G|$. Daher dürfen wir folgende Schritte als Elementarschritte auffassen:

- Test zweier Elemente von G auf Gleichheit,
- Test eines Elementes von G auf Enthaltensein in einer schon ermittelten Menge,
- Finden einer in einem Knoten von G beginnenden Richtung,
- Wählen eines Elements einer schon ermittelten Teilmenge von G ,
- einer Variable ein Element von G als Wert zuweisen,
- zu einer Menge ein Element von G hinzufügen oder es aus ihr entfernen.

Beim Aufschreiben eines Verfahrens \mathcal{A} numerieren wir die Elemente von \mathcal{A} durch - wobei die Startkante die kleinste und die Endkante die größte Nummer enthält - und notieren hinter ihrer Nummer nur die auszuführenden Schritte und falls nicht zum Element mit der nächsthöheren Nummer übergegangen werden soll, die Nummer des Elementes, zu dem übergegangen wird.

Nun noch eine hinreichende Bedingung für die Linearität des Aufwandes eines solchen Verfahrens:

Theorem 8 (Göring) *Sei \mathcal{P} eine Menge von Tupeln, f eine Funktion, die \mathcal{P} in die Menge \mathbb{G}_1 abbildet und \mathcal{A} ein Verfahren mit folgenden Eigenschaften:*

1. \mathcal{A} enthält keine Schleifen.

2. Die Kanten von \mathcal{A} enthalten in ihrer zweiten Komponente nur Aufrufe von \mathcal{A} oder mit konstant vielen Elementarschritten ausführbare Wertzuweisungen.
3. Für jedes $P \in \mathcal{P}$ und jeden Weg in $\mathcal{A}(P)$ vom Startknoten zum Endknoten ist $\sum f(P') < f(P)$, wobei P' alle Argumente von in Richtungen von \mathcal{A} auftretenden Wertzuweisungen mittels \mathcal{A} durchläuft. Insbesondere treten nur Selbstaufrufe $\mathcal{A}(P')$ mit Argument in \mathcal{P} auf.

Dann gibt es eine natürliche Zahl c für die gilt: Für jedes $P \in \mathcal{P}$ ist $\mathcal{A}(P)$ ein Algorithmus mit Aufwand kleiner $cf(P)$.

Beweis. Die Eigenschaft des Verfahrens, für $P \in \mathcal{P}$ ein Algorithmus zu sein folgt daraus, daß wegen Eigenschaft 3 die Rekursionstiefe durch $f(P)$ nach oben beschränkt ist, und wegen 1 bzw. 2 das Verfahren folglich nur endlich viele Elementarschritte abarbeiten muß.

Sei c die maximale Anzahl von nicht rekursiven Wertzuweisungen, die auf einem Weg von der Startrichtung zur Endrichtung in den zweiten Komponenten der Richtungen des Weges auftauchen. Wir induzieren über $f(P)$, wobei für $f(P) = 1$ die Behauptung des Satzes mit der Wahl von c folgt. Mit $g(P)$ bezeichnen wir den Aufwand des Verfahrens. Es folgt

$$g(P) \leq c + \sum g(P') \leq c + \sum cf(P') = c(1 + \sum f(P'))$$

wobei die Summe jeweils über alle P' zu nehmen ist, die als Argumente in Selbstaufrufen des Verfahrens (bei Rekursionstiefe Null) auftreten. Mit Eigenschaft 3 von \mathcal{A} folgt somit $g(P) \leq cf(P)$. \square

Kapitel 2

Wegesysteme und Trenner

2.1 Mengers Theorem

Im folgenden werden wir drei neue Beweise des Satzes von Menger angeben, wobei der erste den Satz für endliche ungerichtete Graphen beweist. Der zweite Beweis funktioniert für alle endlichen Graphen. Der dritte Beweis des Satzes funktioniert für alle Graphen und deckt insbesondere den Fall unendlicher Graphen ab. Darüberhinaus liefert er einen Algorithmus zum Auffinden maximal vieler disjunkter Wege. Die ersten beiden Beweise stammen vom Autor (vgl. [6] und [7]), der dritte ist eine gemeinsame Arbeit mit J. Harant und T. Böhme (vgl. [1]).

Wir wollen hier eine kurze Vorüberlegung darüber anstellen, wie man den Satz von Menger induktiv beweisen kann. Der Vorteil des induktiven Vorgehens besteht in der Möglichkeit, für den Induktionsbeweis die Induktionsvoraussetzung zu Hilfe zu nehmen. Diese ist umso stärker je kleiner wir den Induktionsschritt halten. Nutzen wir die Induktionsvoraussetzung bei einem Graphen, der aus dem aktuellen durch Löschen eines Knotens hervorgeht, so haben wir einen großen Schritt gemacht, da uns dabei sämtliche mit dem Knoten inzidenten Kanten abhandeln kommen, wir also nur Informationen über einen erheblich kleineren Graphen verwenden, als möglich wäre. Welche Varianten gibt es aber, sich von nur einer Kante zu trennen? Man kann sie kontrahieren oder löschen.

Bei der Kantenkontraktion geht aber leider die Information über ihre Richtung völlig verloren, sodaß diese Operation nur in einen Beweis für ungerichtete Graphen paßt:

Theorem 9 (Menger) *Sei G ein endlicher ungerichteter Graph, $A, B \subseteq V(G)$, $c \in \mathbb{N}_0$ und kein AB -Trenner hat weniger als c Elemente. Dann hat G einen Untergraphen aus c disjunkten AB -Wegen.*

Beweis. Induktion nach $|E(G)|$. Falls G keine Kanten hat, so ist $A \cap B$ sowohl kleinster AB -Trenner und bildet gleichzeitig einen Graphen aus c disjunkten AB -Wegen. Daher können wir davon ausgehen, daß G eine Kante e zwischen x und y

besitzt. Sei $f \in G \div \{e\}$. Wir setzen $A' = f(A)$ und $B' = f(B)$ und $G' = f(G)$. Besitzt G' keinen $A'B'$ -Trenner mit weniger als c Knoten, so hat nach Induktionsvoraussetzung G' einen Untergraphen W' aus c disjunkten $A'B'$ -Wegen. $f^{-1}(W')$ ist in G enthalten und hat c Komponenten die jeweils einen Knoten aus A und B enthalten - die Behauptung folgt.

Besitzt G' also einen $A'B'$ -Trenner T' mit weniger als c Knoten. Dann ist $T = f^{-1}(T') \setminus e$ ein AB -Trenner von G mit mehr Elementen als T' . Es folgt $f(e) \in T'$ bzw. $x, y \in T$ und $|T| = c$. Da die Kante e in keinem AT -Weg und in keinem TB -Weg auftritt, ist aber sowohl jeder AT -Trenner als auch jeder TB -Trenner von $G - e$ ein AB -Trenner von G , besitzt also mindestens c Knoten. Somit hat G einen Untergraphen P aus c disjunkten AT -Wegen und einen Untergraphen Q aus c disjunkten TB -Wegen. Da T ein AB -Trenner ist, es also keinen T vermeidenden AB -Weg gibt, können Wege aus P und Q sich nur in T überschneiden und man kann somit P und Q zu einem Graphen aus c disjunkten AB -Wegen zusammensetzen. \square

Da man sich beim Löschen einer Kante ihre Richtung merken kann (Anfangs- und Endknoten sind ja noch da), verliert man bei einem Beweis der allein auf dem Löschen einer Kante beruht, sicher am wenigsten Information (möglichst kleiner Induktionsschritt), wenn man nur jeweils eine Richtung löscht. Ein solcher kleiner Induktionsschritt geht zwangsläufig in der literaturüblichen Notation nur für gerichtete Graphen, da er für eine ungerichtete Kante mit dem Verbieten einer möglichen Richtung, also dem Ausrichten der Kante in die andere Richtung gleichkommt. Eine solche Operation führt aber aus der Klasse der ungerichteten Graphen hinaus.

Das läßt sich nur in der größeren Klasse der Graphen (in der Literatur werden analoge Strukturen auch als „gemischte Multigraphen“ bezeichnet, verhindern. Daher funktioniert der folgende Beweis hier für alle Graphen mit endlich vielen Richtungen (endlich vielen Kanten).

Theorem 10 (Menger) *Sei G ein endlicher Graph, $A, B \subseteq V(G)$, $c \in \mathbb{N}_0$ und kein AB -Trenner hat weniger als c Elemente. Dann hat G einen Untergraphen aus c disjunkten AB -Wegen.*

Beweis. Induktion nach $|R(G)|$. Falls G keine Richtung hat, so ist $A \cap B$ sowohl kleinster AB -Trenner als auch ein Graph aus c disjunkten AB -Wegen. Daher können wir davon ausgehen, daß G eine Richtung r von x nach y besitzt. Sei $G' = G - \{r\}$. Da jeder Untergraph von G' auch einer von G ist, können wir davon ausgehen, daß G' keinen solchen Untergraphen besitzt, laut Induktionsvoraussetzung aber einen AB -Trenner T mit weniger als c Knoten. Dann ist sowohl $R = T \cup \{x\}$ als auch $S = T \cup \{y\}$ ein AB -Trenner von G , es folgt $c \leq |R| \leq |T + 1| \leq c$ und somit $|R| = c$ und analog $|S| = c$. Da r aufgrund seiner Richtung weder in einem AR -Weg noch in einem SB -Weg vorkommen kann, ist jeder AR -Trenner und jeder SB -Trenner von G' ein AB -Trenner von

G . Somit hat G' sowohl einen Untergraphen P aus c disjunkten AR -Wegen als auch einen Untergraphen Q aus c disjunkten SB -Wegen. Da G' aber keine T vermeidenden Wege besitzt, überschneiden sich Wege aus P und Q höchstens in T . Somit können wir P , Q und e zu einem Untergraphen von G aus c disjunkten AB -Wegen zusammensetzen. \square

Die beiden bisher gezeigten Beweise sind zwar kurz und prägnant, weisen aber zumindest zwei Mängel auf: Setzt man sie in Algorithmen um, so wird deren Komplexität exponentiell in der Zahl der Kanten sein, da für jeden Rekursionsschritt für die jeweils ausgewählte Kante potentiell zwei Möglichkeiten¹ überprüft werden müssen. Das kann man zwar eventuell durch geschickte Auswahl der jeweiligen Reduktionskante häufig vermeiden - die Beweise selber liefern aber leider kein solches Auswahlkriterium mit. Weiterhin „ersäuft“ die Induktion an unendlichen Kantenmengen, die bei unendlichen Graphen aber in der Regel auftreten.

Umso überraschender ist der dritte Beweis. Einerseits wird ein Algorithmus zum Auffinden des Wegesystems bewiesen, andererseits funktioniert dieser Algorithmus auch für unendliche Graphen und Digraphen! Das liegt aber daran, daß er sich eines „Orakels“ bedient, welches ihm auch im unendlichen Graphen einen existierenden Weg zwischen zwei Knotenmengen auffindet. Ein solches „Orakel“ ist unter Umständen herstellbar, etwa wenn eine Gödelisierung der Kantenmenge des Eingangsgraphen existiert und bekannt ist - jede Kante also eine eigene Nummer hat und ein Algorithmus bekannt ist, wie man aus dieser Nummer die Kante sowie ihren Start- und Endknoten ermittelt. Diese Überlegungen werden wir aber nicht weiterverfolgen, da wir uns mehr auf endliche Graphen konzentrieren wollen.

Theorem 11 (Böhme, Göring, Harant, [1]) *Sei G ein Graph, A und B seien Knotenmengen des Graphen und U sei ein Untergraph von G bestehend aus endlich vielen disjunkter AB -Wege von G . Für das folgende Verfahren $menger(G, A, B, U, W)$ ein Algorithmus, nach dessen Durchführung W ein Untergraph von G aus disjunkten AB -Wegen ist, welcher $(A \cup B) \cap U \subset (A \cup B) \cap W$ erfüllt, sofern es keinen AB -Trenner gibt, der genauso viele Elemente hat, wie U Komponenten.*

1. Seien G, A, B, U, W die ersten fünf Komponenten des Eingabetupels.
2. Falls es in $G - U$ keinen AB -Weg P gibt gehe zu 4.
3. Setze $W^* = menger(G, A, B, U) = U \cup P$ und gehe zu 8.
4. Sei P ein $A, V(U)$ -Weg in $G - (A \cap V(U))$,
a ein (das) Element von $V(P \cap U)$,

¹Im ersten Beweis sind das die Graphen $G : \{e\}$ und $G - e$ je auf eine Untergraphen, im zweiten der Graph $G - \{r\}$ auf einen Untergraphen bzw. auf zwei Untergraphen.

Q die a enthaltende Komponente von U
 R ein (der) Aa -Weg in Q und
führe $menger(G, A \cup V(P \cup R), B, U - (R - a), W)$ aus.

5. Falls $W - a$ nicht disjunkt zu $P \cup R$ ist, gehe zu 7,

6. Setze $W^* = W \cup R$ und gehe zu 8.

7. Sei b ein (das) Element von $V(W - a) \cap (P \cup R)$,
 S ein (der) ab -Weg von $P \cup R$
und $W^* = W \cup (R \cup P - (S - \{a, b\}))$.

8. Setze $W = W^*$.

Beweis: Induktion über die Rekursionstiefe². Diese ist nach oben durch $|E(U)|$ beschränkt, da aus der Wahl von R folgt: $|E(U - (R - a))| < |E(U)|$. Aus der Trennervoraussetzung folgt die Existenz eines $A, B \cup V(U)$ -Weges in $G - (A \cap V(U))$ und mithin jedenfalls die Existenz von P . Die genannten Eigenschaften der Funktion $menger$ sind triviale Folgerungen aus der Konstruktion. \square

Dieser Satz, den wir im weiteren als „Vorschreibversion“³ von Mengers Theorem“ bezeichnen wollen, liefert durch c -faches Anwenden des Algorithmus sogar die weitreichendste bekannte Version des Satzes von Menger (die unabhängig vom Auswahlaxiom ist) - die Version für endliche Wegesysteme in unendlichen Graphen:

Korollar 12 (Menger, [15], 1927) *Seien G ein Graph⁴, c eine natürliche Zahl und A und B solche Teilmengen von $V(G)$, daß es keinen AB -Trenner mit weniger als c Knoten in G gibt. Dann gibt es ein Menge aus c disjunkten AB -Wegen in G .*

2.2 Mengersätze und Transversalen

Der Satz von Menger sagt in den bisher bewiesenen Versionen etwas über die Anzahl disjunkter AB -Wege in einem nicht notwendig AB -partiten Graphen aus. Lediglich in seiner Vorschreibversion können wir mit den Wegen „zielen“: Wir

²Dabei verstehen wir unter der Rekursionstiefe die Eingabenabhängige maximale Anzahl ineinandergeschachtelter Selbstaufrufe des jeweiligen Algorithmus. Diese sollte stets endlich sein - und ist es hier wie wir zeigen auch, da ansonsten der Algorithmus nicht abbricht.

³Es können die Start und Endknoten eines gegebenen Wegesystems für ein maximales Wegesystem vorgeschrieben werden, nicht aber das gegebene Wegesystem selbst. Der Verlauf der Wege kann „flattern“, die Paarung der Startknoten mit den Endknoten durcheinanderkommen - aber Startknoten bleiben Startknoten; Endknoten bleiben Endknoten.

⁴endlich oder unendlich, gerichtet, ungerichtet oder gemischt

können zumindest garantieren, die Start- und Endknoten eines nicht maximalen Wegesystems in einem vergrößerten Wegesystem wiederzufinden. Bei vielen Anwendungen von Mengers Theorem kommt es aber genau auf die Möglichkeit des Ziels an, man möchte eine sich ergebende Fallunterscheidung klein halten oder gar vermeiden. Durch Anwendung von Mengers Theorem (Korollar 12) auf verschiedene Ersatzgraphen werden wir eine Vielfalt von „Mengersätzen“ über die Existenz spezieller Wegesysteme beweisen. Diese Wegesysteme können durch Anwendung des Algorithmus aus Satz 11 auf den Ersatzgraphen stets in polynomialer Zeit gewonnen werden.

In diesem Abschnitt geht es nun darum, in wie weit wir die Startknoten und Endknoten der Wege eines AB -Wegesystems vorschreiben können. Zu diesem Zweck verwenden wir eine Technik, die beispielsweise W.Mader in [13] erfolgreich angewendet hat.

Das folgende Theorem 13 fällt dabei recht kompliziert aus, läßt sich aber durch einfaches Einsetzen von speziellen Mengen, Graphen und Zahlen in verschiedene Spezialfälle umwandeln. Dieser Vielfalt ist der Abschnitt 2.2.1 gewidmet.

Theorem 13 (Göring) *In einem endlichen Graphen G seien ein Mengensystem A und ein Tupel a natürlicher Zahlen jeweils mit Indexmenge I sowie ein Mengensystem B und ein Tupel b natürlicher Zahlen jeweils mit Indexmenge J gegeben. Die maximale Anzahl disjunkter Wege von G deren erste Knoten eine partielle a -Transversale von A und deren letzte Knoten eine partielle b -Transversale von B bilden, ist*

$$\min_{K \subseteq I, L \subseteq J} t(K, L) + a(I \setminus K) + b(J \setminus L)$$

wobei $t(K, L)$ die minimale Größe eines $A(K)B(L)$ -Trenners von G ist.

Beweis. Seien A' und B' ein I - und ein J -Tupel disjunkter und zueinander disjunkter sowie zu $V(G)$ disjunkter Knotenmengen mit $|A'_i| = a_i$ und $|B'_i| = b_i$. Wir setzen

$$G' = G \cup A'(I) \cup B'(J) \cup \bigcup_{i \in I, a' \in A'_i, a \in A_i} (a', \emptyset, a) \cup \bigcup_{i \in J, b' \in B'_i, b \in B_i} (b, \emptyset, b').$$

und wenden Korollar 12 auf G' an, um ein maximales System S von $A'(I)B'(J)$ -Wegen zu bestimmen. $S \cap G$ hat genauso viele Komponenten und ist dann offenbar ein Untergraph von G gemäß dem zu beweisenden Theorem. Bestimmen wir nun also die Zahl der Komponenten von S . Sie ist gleich der minimalen Anzahl von Knoten, die ein $A'(I)B'(J)$ -Trenner von G' enthält. Dabei brauchen wir nur die $A'(I)B'(J)$ -Trenner von G' zu berücksichtigen, für die keine echte Teilmenge auch schon $A'(I)B'(J)$ -Trenner ist. Ein solcher Trenner T' ist für jeden Index i jedoch entweder disjunkt zu A'_i bzw. B'_i oder enthält A'_i bzw. B'_i ganz. Damit ist $T = T' \setminus (A'(I) \cup B'(J))$ offenbar ein $A(K)B(L)$ -Trenner in G , wobei $K = \{i \in$

$I|T' \cap A_i = \emptyset\}$ und $L = \{i \in J | T' \cap B_i\} = \emptyset$ gilt und $|T' \cap (A'(I) \cup B'(J))| = a(I \setminus K) + b(J \setminus L)$ ist.

Umgekehrt ist zu jedem $A(K)B(L)$ -Trenner T von G die Menge $T' = T \cup A'(I \setminus K) \cup B'(J \setminus L)$ offenbar ein $A'(I)B'(J)$ -Trenner von G' .

Da beide Male $|T'| = |T| + a(I \setminus K) + b(J \setminus L)$ folgt, ergibt sich das Theorem 13 als Folgerung aus dem Satz von Menger. \square

Theorem 13 hat eine Eigenheit, die man bei seiner Anwendung nicht außer Acht lassen sollte: Die darin vorkommenden Wege sind leider im allgemeinen keine $A(I)B(J)$ -Wege. Im Falle $I = J = \{1\}$ und $a_1 = b_1 = |V(G)|$ erhalten wir aus ihm jedoch sofort den Satz von Menger (Korollar 12) zurück! Wenden wir uns nun den Spezialfällen von Theorem 13 zu!

2.2.1 Spezialfälle ohne Kanten

Die Überschrift mag überraschen, aber sicher gilt Theorem 13 auch für Graphen ohne Kanten (also auch ohne Richtungen). Im Gegensatz zum Satz von Menger ist Theorem 13 hier allerdings nicht mehr trivial! Die Menge der Wege in Theorem 13 bildet dann selbst eine partielle a -Transversale von A und eine partielle b -Transversale von B . Daher sind manche Sätze der Transversaltheorie kantenlose Spezialfälle von Theorem 13.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gehen wir in diesem Abschnitt davon aus, daß alle Elemente aller auftretenden Mengen Knoten sind - auf die Struktur der Elemente wird in den behandelten Sätzen gar nicht zugegriffen.

Theorem 14 (Hall, vgl. [23], 1935) *Ist A ein Mengensystem mit endlicher Indexmenge I , so hat A genau dann eine Transversale, wenn für alle $I' \subseteq I$ gilt:*

$$|A(I')| \geq |I'|$$

Beweis. Setze $G = A(I)$, $a_i = 1$ für alle $i \in I$, $J = \{1\}$, $B_1 = G$ und $b_1 = |I|$. Für alle $K \subseteq I$ und $L \subseteq J$ sind $A(K)B(L)$ -Trenner alle Mengen, die $A(K) \cap B(L)$ enthalten. Anwendung des Theorems 13 liefert die Größe einer maximalen partiellen Transversale von A . Man braucht nur noch zu fordern, daß diese gleich $|I|$ ist. Für $L = \emptyset$ ergibt sich dann $|A(K)| \geq 0$ und für $L = \{1\}$ ergibt sich $|A(K)| \geq |K|$. \square

Theorem 15 (Ford, Fulkerson, [5], 1958) *Zwei Mengensysteme A und B mit gleicher Indexmenge I haben eine gemeinsame Transversale genau dann, wenn*

$$|A(K) \cap B(L)| \geq |K| + |L| - |I|$$

für alle $K, L \subseteq I$ gilt.

Beweis. Setze $G = A(I) \cup B(I)$, $J = I$ und $a_i = b_i = 1$ für alle $i \in I$. Die Forderung, das Minimum aus Theorem 13 möge mindestens $|I|$ sein, liefert den Satz. \square

Auf ähnliche Weise wie wir hier hat Perfect (vgl. [18]) folgenden Spezialfall bewiesen:

Theorem 16 (Perfect, [18], 1968) *Zwei Mengensysteme A und B mit endlichen Indexmengen I und J haben eine gemeinsame partielle Transversale der Größe p genau dann, wenn für alle $K \subseteq I$ und alle $L \subseteq J$ gilt:*

$$|A(K) \cap B(L)| \geq |K| + |L| - |I| - |J| + p$$

Beweis. Setze $G = A(I) \cup B(J)$ und $a_i = b_j = 1$ für alle $i \in I$ und alle $j \in J$. Die Forderung, das Minimum aus Theorem 13 möge mindestens p sein, liefert den Satz. \square

In [23] wird als Verallgemeinerung folgender Satz bewiesen:

Theorem 17 ([23]) *Zwei Mengensysteme A und B sowie zwei Tupel a und b natürlicher Zahlen mögen die gleiche endliche Indexmenge I besitzen und es sei $a(I) = b(I) = p$. Es gilt:*

A besitzt genau dann eine a -Transversale, die gleichzeitig b -Transversale von B ist, wenn für alle $K, L \subseteq I$ gilt:

$$|A(K) \cap B(L)| \geq a(K) + b(L) - p$$

Beweis. Setze $G = A(I) \cup B(I)$ und $J = I$. Die Forderung, das Minimum aus Theorem 13 möge mindestens p sein, liefert den Satz. \square

Die allgemeinste Folgerung aus Theorem 13 gibt das folgende Theorem wieder:

Theorem 18 *Gegeben seien ein Mengensystem A und ein Tupel a natürlicher Zahlen jeweils mit Indexmenge I sowie ein Mengensystem B und ein Tupel b natürlicher Zahlen jeweils mit Indexmenge J . Es gilt:*

A besitzt genau dann eine partielle a -Transversale der Größe p , die gleichzeitig partielle b -Transversale von B ist, wenn für alle $K \subseteq I$ und alle $L \subseteq J$ gilt:

$$|A(K) \cap B(L)| \geq a(K) + b(L) - a(I) - b(J) + p$$

Beweis. Setze $G = A(I) \cup B(J)$. Die Forderung, das Minimum aus Theorem 13 möge mindestens p sein, liefert den Satz. \square

2.2.2 Spezialfälle mit Kanten

Theorem 19 (Göring) *In einem endlichen Graphen G seien ein Mengensystem B und ein Tupel b mit Indexmenge J sowie eine Menge A und ein Untergraph U von G bestehend aus disjunkten Wegen derart gegeben, daß ihre ersten Knoten in A liegen und ihre letzten Knoten eine partielle b -Transversale von B bilden.*

Die maximale Anzahl disjunkter Wege von G deren erste Knoten in A liegen und die ersten Knoten der Komponenten von U enthalten und deren letzte Knoten eine partielle b -Transversale von B bilden, ist

$$\min_{L \subseteq J} t(L) + b(J \setminus L)$$

wobei $t(L)$ die minimale Größe eines $AB(L)$ -Trenners von G ist.

Beweis. Sei A' das Paar $(A \cap U, A \setminus U)$ und $I = \{1, 2\}$ die Indexmenge von A' . Wir setzen $a_1 = |A_1|$ und $a_2 = |A_2|$. Um Theorem 13 abschließend anwenden zu können, genügt es zu zeigen, daß für alle $K \subseteq I$ und alle $A'(K)B(L)$ -Trenner T gilt:

$$|T| + a(I \setminus K) + b(J \setminus L) \geq \min_{L' \subseteq J} t(L') + b(J \setminus L')$$

Für $K = I$ ist diese Aussage trivial, da die linke Seite ein Element der Menge ist, über die auf der rechten Seite minimiert wird.

Für $K = \emptyset$ gilt die Aussage ebenfalls, da $a(I) = |A|$ und $|T| \geq 0$ gilt, A aber für beliebiges $L' \setminus J$ ein $A(J \setminus L')$ -Trenner ist. Damit läßt sich die linke Seite nach unten gegen ein Element der Menge abschätzen, über die auf der rechten Seite minimiert wird.

Für $K = \{1\}$ folgt aus der Existenz von U sofort $|T| \geq a(1)$, sodaß mit $|T| + a(2) \geq a(I) = |A|$ die Argumentation wie im vorangegangenen Fall fortführbar ist.

Da im Falle $K = \{2\}$ die Menge $T \cup A_1$ offenbar ein AL -Trenner von G ist, und $|T \cup A_1| \leq |T| + a_1$ gilt, zieht dieses Argument auch hier.

Anwendung von Theorem 13 schließt den Beweis ab, da umgekehrt das Minimum in Theorem 19 über eine Teilmenge der Menge gebildet wird, über die in Anwendung des Theorems 13 minimiert wird, also nicht größer - aber nach den gemachten Untersuchungen auch nicht kleiner - sein kann! \square

Theorem 20 (Göring) *Sei G ein Graph, I und J seien disjunkte Teilmengen von $V(G)$ und z sei ein $I \cup J$ -Tupel natürlicher Zahlen. Darüberhinaus sei c eine natürliche Zahl. Dann gilt:*

Es gibt genau dann ein Wegesystem W aus c Wegen mit den Eigenschaften:

- Die Indexmenge H von W ist IJ -partit.

- W ist $I \cup J$ -treu.
- Für alle $v \in I \cup J$ gilt $\text{val}_H(v) = z_v$.

wenn für alle zu $K \cup L$ disjunkten KL -Trenner T von G mit $K \subseteq I$ und $L \subseteq J$ gilt:

$$|T \setminus (I \cup J)| + z(I) + z(J) - z(K) - z(L) \geq c$$

Beweis. Wir wenden das Theorem 13 auf $G' = f(G) - (I \cup J)$ an, wobei f ein Wegesystem mit Indexmenge G sei, in dem alle Elemente x von G bis auf Richtungen zwischen I und J Fixpunkte sind und in dem für Richtungen r von I nach J f_r ein offener Weg mit einem Knoten sei. $f(G)$ entsteht also durch Unterteilen aller Kanten zwischen I und J . Dabei setzen wir $A_i = N_{f(G)}(i)$ und $a_i = z_i$ für $i \in I$ sowie $B_j = N_{f(G)}(j)$ und $b_j = z_j$ für $j \in J$. Ist ein zu $K \subseteq I$ und $L \subseteq J$ disjunkter KL -Trenner T von G gegeben, so ist $T' = f(T) - (I \cup J)$ ein $A(K)B(L)$ -Trenner in G' mit $|T'| \leq |T \setminus (I \cup J)|$. Umgekehrt ist zu jedem $A(K)B(L)$ -Trenner T' in G' die Menge $T = f^{-1}(T') \cup (I \setminus K) \cup (J \setminus L)$ ein zu $K \cup L$ disjunkter KL -Trenner.

Ein Untergraph W' in G' gemäß Theorem 13 kann leicht in ein Wegesystem entsprechend Theorem 20 umgewandelt werden und umgekehrt. Damit sind Theorem 20 und Theorem 13 äquivalent. \square

Theorem 20 besitzt einige oft verwendbare Spezialfälle, die wir hier herausstellen wollen.

Ist $z_v = 1$ für alle $v \in I \cup J$, so erhalten wir offenbar die Version von Theorem 12 des Satzes von Menger; ist $|I| = |J| = 1$ und $z_I = z_J = c$, so ergibt sich seine Zweipunktversion (vgl. [15]):

Theorem 21 (Menger, 1927) *Ein Graph G enthält genau dann ein (a, c, b) -Mengersystem, wenn es keinen zu $\{a, b\}$ disjunkten ab -Trenner mit weniger als c Elementen besitzt.*

Ist $z_v = 1$ für alle $v \in B$ und gilt $A = \{a\}$, sowie $z_a = c$, so ergibt sich folgende „Pinselversion“⁵ des Satzes von Menger:

Theorem 22 (Dirac) *In einem Graphen G gibt es zu einem Knoten a , einer Menge $B \subseteq V(G - \{a\})$ und einer natürlichen Zahl c genau dann ein System von sich nur in a überschneidenden aB -Wegen, wenn es in G keinen a nicht enthaltenden aB -Trenner mit weniger als c Elementen gibt.*

Im nächsten Satz geht es darum, die Knotenmenge eines AB -partiten Minors W einschließlich ihrer Valenzen in Anlehnung an einen bekannten AB -partiten Minor U möglichst genau vorherzusagen und sich dabei eventuell noch Wahlmöglichkeiten offen zu lassen. Der Beweis ist eine Anwendung des Theorems 20.

⁵Der Pinselstiel ist dabei a - die Haare, die den Pinsel bilden, sind die Wege des Wegesystems.

Theorem 23 (Göring) Sei G ein Graph, A und B disjunkte Teilmengen von $V(G)$ so, daß zu keinem $a \in A$ und keinem $b \in B$ ein a und b vermeidender $\{a\}\{b\}$ -Trenner mit weniger als c Knoten existiert. Weiterhin sei U ein Wegesystem dessen Indexmenge AB -partit ist und höchstens c Kanten hat und dessen Bild in G liegt. Darüber hinaus seien z ein Tupel natürlicher Zahlen und C_A und C_B je eine Menge mit

- $z(A) = z(B) = c$,
- falls $|A \setminus V(U)| \leq c - |E(U)|$ gilt $z_v \geq \max(\text{val}_U^+(v), 1)$ und $C_A = \emptyset$,
ansonsten gilt $C_A = A \setminus V(U)$ und $z_v \leq \max(\text{val}_U^+(v), 1)$ für alle $v \in A$
- falls $|B \setminus V(U)| \leq c - |E(U)|$ gilt $z_v \geq \max(\text{val}_U^-(v), 1)$ und $C_B = \emptyset$,
ansonsten gilt $C_B = B \setminus V(U)$ und $z_v \leq \max(\text{val}_U^-(v), 1)$ für alle $v \in B$.

Dann hat G einen festen AB -partiten Minor W mit

- $\text{val}_W(v) = z_v$ für alle $v \in A \cup B \setminus (C_A \cup C_B)$ und
- $\text{val}_W(v) \leq 1$ für alle $v \in C_A \cup C_B$.

Beweis. Im Falle $|E(U)| = c$ ist nichts zu beweisen. Setzen wir also im weiteren $|E(U)| < c$ voraus. Wir konstruieren den Graphen G' aus G indem wir zu G zwei neue Knoten a und b hinzunehmen, a mit allen Knoten aus C_A sowie alle Knoten von C_B mit b verbinden, und a bzw. b wieder löschen, falls sie so keine Nachbarn bekommen. Nun setzen wir $z_a = z_{C_A}$ und $z_b = z_{C_B}$, sowie $A' = ((A \setminus C_A) \cup \{a\}) \cap V(G')$ und $B' = ((B \setminus C_B) \cup \{b\}) \cap V(G')$. Es genügt offenbar zu zeigen, daß G' einen $A'B'$ -partiten Minor W' besitzt, in dem $\text{val}_{W'}(v) = z_v$ für alle $v \in A' \cup B'$ gilt. Nach Theorem 20 bleibt zu zeigen, daß für jeden K und L vermeidenden KL -Trenner T von G' gilt

$$|T \setminus (A' \cup B')| + z_{A'} + z_{B'} - z(K) - z(L) \geq c,$$

wobei K sämtliche Teilmengen von A' und L unabhängig davon sämtliche Teilmengen von B' durchläuft.

Es gilt nach Konstruktion $z_v \geq 1$ für alle $v \in A' \cup B'$. Daher folgt

$$z(A' \setminus K) \geq |A' \setminus K|$$

sowie

$$z(B' \setminus L) \geq |B' \setminus L|$$

Nach Subtraktion von $|A' \setminus K|$, Addition von $z(K)$ und Verwendung von

$$z(A' \setminus K) + z(K) = z(A') = c$$

erhält man

$$c - |A' \setminus K| \geq z(K)$$

sowie analog

$$c - |B' \setminus L| \geq z(L).$$

Addieren wir die letzten zwei Ungleichungen, subtrahieren $z(K)$ und $z(L)$ und addieren c , erhalten wir

$$c - |A' \setminus K| - |B' \setminus L| + 2c - z(K) - z(L) \geq c.$$

Nun gilt

$$|T \setminus (A' \cup B')| \geq |T| - |A' \cap T| - |B' \cap T| \geq c - |A' \setminus K| - |B' \setminus L|$$

sodaß sich mit $z(A') + z(B') = 2c$ die gesuchte Beziehung ergibt. \square

Wählen wir in Theorem 23 die Menge A einelementig, so erhalten wir

Korollar 24 (Göring) *Sei G ein Graph, a ein Knoten von G und B eine a nicht enthaltende Teilmenge von $V(G)$ derart, daß es für kein $b \in B$ einen a und b vermeidenden $\{a\}\{b\}$ -Trenner mit weniger als c Knoten gibt. Desweiteren sei ein $\{a\} \cup B$ -treues Wegesystem mit $\{a\}B$ -partiter Indexmenge U gegeben, wobei U genau $c - 1$ Kanten hat. Dann gibt es ein $\{a\} \cup B$ -treues Wegesystem mit $\{a\}B$ -partiter Indexmenge U' , wobei U' genau c Kanten hat und U enthält. Falls $B \subseteq U$ können wir den Knoten b mit $\{b\} = (U' \setminus U) \cap B$ beliebig in B vorschreiben, andernfalls können wir zumindest noch fordern, daß $B \cap (U' \setminus U)$ nicht leer ist.*

Leicht ergibt sich daraus auch folgendes Theorem:

Theorem 25 (Göring) *Seien G und S Graphen und U ein S -treues Wegesystem in G mit Indexmenge I , für welches $S \subseteq I$ gilt. Desweiteren sei $v \in V(I \cap S)$ ein Knoten derart, daß es in G keinen v vermeidenden $\{v\}U(I - v)$ -Trenner mit weniger als c Elementen gibt. Dann gibt es in G ein S -treues Wegesystem U' mit Indexmenge I' derart, daß $\text{val}_{I'}(v) = c$ gilt und I' aus I durch (eventuelles) Unterteilen von Kanten e von I durch Knoten v_e und Einfügen je einer zusätzlichen v und v_e verbindenden Kante, sowie Einfügen von geeignet vielen v mit verschiedenen anderen Knoten aus I , die nicht Nachbarknoten von v sind, verbindenden Kanten entsteht.*

2.3 Vorschreibbarkeit in Maders Theorem

Ist I eine (mindestens zweielementige) Indexmenge, so sei für das I -Tupel S von Knotenmengen zu je zwei unterschiedlichen Elementen i und j jeder $S_i S_j$ -Weg als S -Weg bezeichnet. Entsprechend nennen wir eine Menge von Knoten und Kanten von G , die für beliebige unterschiedliche i und j aus I ein $S_i S_j$ -Trenner ist, auch S -Trenner.

Theorem 26 (Mader, [13], 1978) Sei G ein endlicher ungerichteter Graph und $H \subseteq V(G)$ eine in G unabhängige Knotenmenge. Dann ist die Maximalzahl von im Inneren disjunkten H -Wegen gleich dem Minimum von $\mathbb{M}_G(T)$, wobei T alle H -Trenner von G durchläuft.

Theorem 26 ist offenbar eine Erweiterung der Zweipunktversion Theorem 21. In [20] wird ein schöner und kurzer Beweis des folgenden Theorems gegeben, welches, wie man leicht sieht⁶, äquivalent Theorem 26 ist.

Theorem 27 (A.Schrijver, [20] 2001) Sei G ein endlicher ungerichteter Graph und S ein I -Tupel von Teilmengen von $V(G)$, wobei I eine endliche Indexmenge ist. Dann ist die Maximalzahl von disjunkten S -Wegen gleich dem Minimum über $\mathbb{M}_G(S, T)$, wobei T alle S -Trenner von G durchläuft.

Manchmal kennen wir aber ein System disjunkter S -Wege, welches nicht die größtmögliche Zahl an Komponenten aufweist, wollen aber daraus möglichst Informationen über ein solches „maximales“ System ableiten. Hier kann uns das folgende Theorem helfen:

Theorem 28 (Göring) Sei G ein endlicher ungerichteter Graph, S ein System von Teilmengen von $V(G)$ mit endlicher Indexmenge I , U ein Untergraph von G bestehend aus k disjunkten S -Wegen und m das Minimum über $\mathbb{M}_G(S, T)$, wobei T alle S -Trenner von G durchläuft.

Dann hat G einen Untergraphen W bestehend aus m disjunkten S -Wegen derart, daß $S(I) \cap U \subseteq S(I) \cap W$ gilt.

Beweis. In der Beweisidee folgen wir im Wesentlichen dem Beweis von W. Mader in [13]. Wir haben hier vier Teilschritte abzuarbeiten:

1. Diskussion des Graphen G .
2. Auswahl eines geeigneten (extremalen) S -Trenners T .
3. Nachweis der Existenz des Teils von W , der außerhalb des Trenners liegt.⁷
4. Nachweis der Existenz des Teils von W , der sich mit T überschneidet.

Vorab vereinbaren wir allerdings, daß wir für Teilmengen M von G mit dem Rand von M (kurz ∂M) die folgende Menge meinen:

$$\partial M = \partial_{G-V(M)}[R(M)] \cup (S(I) \cap [R(M)])$$

⁶Dabei geht H in die Indexmenge I über, wobei $S_i = N_G(i)$ gesetzt wird, und H wird aus G gelöscht, bzw. umgekehrt.

⁷Hier ergibt sich die Vorschreibbarkeit der Startknoten der Wege des Wegesystems U für das Wegesystem W .

Für Teilmengen M' von M sei

$$\partial^M M' = \partial_{G-V(M)}[R(M')] \cup (S(I) \cap [R(M')])$$

gesetzt.

Schritt 1: Da für einen Graphen mit höchstens einem Knoten das Theorem trivial ist (man wähle als Trenner z.B. die leere Menge), genügt es, das Theorem 28 nur für Graphen G mit der Eigenschaft, daß es für alle Graphen mit weniger Knoten anstelle von G zutrifft, zu beweisen, der Rest folgt mit vollständiger Induktion. Weiterhin setzen wir $k < m$ voraus, da der Satz ansonsten ebenfalls trivial ist. Damit und da $E(G) \cup \{s \in S(I) | \exists i \neq j \in I : s \in S_i \cap S_j\}$ ein S -Trenner T' von G mit $\mathbb{M}_G(S, T') \leq \frac{1}{2}|S|$ ist, enthält $S(I)$ mindestens einen Knoten, der nicht in U vorkommt.

Angenommen, es gibt einen Knoten v von G in zwei Komponenten von S . Da für $G' = G - \{v\}$ das Theorem 28 gilt und für jeden S -Trenner T von G' gilt $\mathbb{M}_{G'}(S, T) = \mathbb{M}_G(S, T \cup \{v\}) - 1$, wobei $T \cup \{v\}$ ja dann ein S -Trenner von G ist, gibt es in G' ein $m - 1$ -Tupel disjunkter S -Wege welches durch Hinzufügen von $\{v\}$ als m te Komponente zu dem gesuchten m -Tupel W wird - der Satz gilt dann auch für G . Also gehen wir im weiteren davon aus, daß die Komponenten von S paarweise disjunkt sind.

Schritt 2: Sei T unter allen S -Trennern T' mit minimalem Wert von $\mathbb{M}_G(S, T')$ und davon unter all jenen mit maximal vielen Knoten derart gewählt, daß $|R(T)|$ möglichst klein ist. Enthält T keinen Knoten, so gilt für beliebiges $v \in S(I) \setminus U$ und jeden S -Trenner T' des Graphen $G - \{v\}$

$$\mathbb{M}_{G-\{v\}}(S, T') = \mathbb{M}_G(S, T' \cup \{v\}) - 1 \geq m$$

da $T' \cup \{v\}$ ein S -Trenner von G mit einem Knoten ist. Dann gibt es W aber schon in $G - \{v\}$ und der Beweis ist erbracht. Wir gehen im weiteren davon aus, daß T mindestens einen Knoten enthält.

Durch die Auswahl von T ist auch abgesichert, daß $\partial_{G-V(T)}C$ für alle Komponenten von $[R(T)]$ ungerade viele Elemente hat:

Zu einem S -Trenner T' von G , für den $[R(T')]$ eine Komponente C mit geradem $|\partial_{G-V(T')}C|$ besitzt, ist $T'' = (T \cap (G - \{v\}) \cup \{v\})$ (wobei $v \in \partial_{G-V(T')}C$ gewählt wurde) ein S -Trenner mit mehr Knoten als T' für den offenbar

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_G(S, T') - \mathbb{M}_G(S, T'') &= -1 + \sum_{C' \in \mathcal{C}(C-\{v\})} \left[\frac{1}{2} |\partial_{G-V(T'')}C'| \right] - \frac{1}{2} |\partial_{G-V(T')}C| \\ &\leq -1 + \left[\frac{1}{2} |\partial_{G-V(T')-\{v\}}(C - \{v\})| \right] - \frac{1}{2} |\partial_{G-V(T')}C| \\ &\leq -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

gilt (vgl. Lemma 4) weswegen T' nicht für T gewählt wurde.

Sei mit $c(M)$ für eine Menge M die Anzahl der Komponenten von $\lceil R(M) \rceil$ bezeichnet. Dann folgt offenbar

$$\mathbb{M}_G(S, T) = |V(T)| + \frac{1}{2}(|\partial T| - c(T))$$

Schritt 3: Wir konstruieren nun ein spezielles $G - V(T)$ -treues Mengensystem f mit Indexmenge G . Sei $V_1 = V(\lceil R(T) \rceil) \setminus \partial T$ und $V_2 = V(G) \setminus (V(T) \cup V_1)$ gesetzt. Für $v \in V_2$ sei $i(v) \in I$ so gewählt, daß alle S_i mit $i \in I \setminus \{i(v)\}$ disjunkt zu der Komponente von $G \setminus T$ sind, die v enthält. Das ist möglich, da T ein S -Trenner von G sein soll, Komponenten von $G \setminus T$ also höchstens zu einer Komponente von S nicht disjunkt sein können. Für verschiedene Paare (i, x) mit $i \in I$ und $x \in V(T)$ seien $v(i, x)$ unterschiedliche und nicht in G enthaltene Knoten. Wir definieren

$$f_x = \begin{cases} \{x\} & : x \in G - V(T) \\ \{v(i, x) | i \in I\} & : x \in V(T) \\ \{(x_1, x_2, v(i, x_3)) | i \in I\} & : x_1 \in V_1 \text{ und } x_3 \in V(T) \\ \{(x_1, x_2, v(i(x_1), x_3))\} & : x_1 \in V_2 \text{ und } x_3 \in V(T) \\ \{(v(i, x_1), x_2, v(j, x_3)) | i, j \in I\} & : \{x_1, x_3\} \subseteq V(T) \\ \emptyset & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$G' = f(G)$$

$$A = S(I)$$

$$A' = f(A)$$

$$J = V(T) \cup \mathcal{C}(\lceil R(T) \rceil)$$

$$B_j = \{j\}$$

$$B'_j = f_j$$

$$b_j = \begin{cases} |\partial_{G-V(T)} j| - 1 & : j \in \mathcal{C}(\lceil R(T) \rceil) \\ 2 & : j \in V(T) \end{cases}$$

f bildet den Graphen G durch „Aufblasen“ der Knoten $V(T)$ so auf einen Graphen G' ab, daß das Bild eines beliebigen S -Weges zwei disjunkte $A'B'_j$ -Wege enthält. $f(U)$ enthält daher offenbar einen Untergraphen U' , dessen $2k$ Komponenten Wege sind, deren erste Knoten in A liegen und deren letzte Knoten eine partielle b -Transversale von B bilden. Wir zeigen nun für alle $L \subseteq J$ und alle AL -Trenner X

$$|X| \geq 2m - b(J \setminus L)$$

um dann mit Theorem 19 (wobei wir U' anstelle von U verwenden) schlußfolgern zu können, daß es $2m$ entsprechende Wege in G' gibt, deren erste Knoten $S(I) \cap U$ enthalten.⁸ Dafür genügt es, aus jedem $AB'(L)$ -Trenner X von G' einen S -Trenner

⁸Für alle Leser, die den Originalbeweis von W.Mader (vgl. [13]) kennen, sei an dieser Stelle erwähnt, daß wir von nun an nicht mehr und keine andere Arbeit zu leisten haben, als dort auch

T' von G mit $2\mathbb{M}_G(S, T') \leq |X| + b(J \setminus L)$ zu konstruieren, da wegen $\mathbb{M}_G(S, T') \geq m$ die gewünschte Beziehung folgt. Diese Konstruktion geht wie folgt:

Sei V'_1 die Menge aller Knoten v von G mit $v \in B(J \setminus L)$ oder $|f_v \cap X| \geq 2$ (diese Knoten werden die Knoten von T') und V'_2 die Menge aller Knoten v von $G \setminus V'_1$ mit $v \in f^{-1}(X) \cup \partial^T(B(J \setminus L))$ (diese Knoten sind die Kandidaten für $\partial T'$). V'_1 ist folglich eine Teilmenge von T . Jeder S -Weg P von G , der keinen Knoten aus V'_1 enthält, muß zwei Knoten aus V'_2 enthalten, da $f(P)$ offenbar zwei $S(I)f(T)$ -Wege aus $f(G)$ enthält und $X \cup V(B(J \setminus L)) \cup \partial^T(B(J \setminus L))$ ein $S(I)f(T)$ -Trenner in $f(G)$ und T ein S -Trenner von G ist. Fassen wir alle Richtungen, die zu einer Komponente von $(G - V'_1) \setminus V'_2$ gehören, welche disjunkt zu $S(I)$ ist, zu einer Menge R_2 zusammen, dann ist offenbar $T' = V'_1 \cup R_2$ ein S -Trenner von G . Sei nun $Sch(T)$ die Zahl der Knoten aus $\partial^T(B(J \setminus L))$ die nicht zu $\partial T'$ gehören und $Sch(X)$ die Zahl der Knoten aus $f^{-1}(X) \cap V'_2$, die nicht zu $\partial T' \setminus \partial^T(B(J \setminus L))$ gehören. Zusammengefaßt sei also $Sch = Sch(T) + Sch(X)$ gesetzt. Mit $Rest$ bezeichnen wir die Zahl der Komponenten von $\lceil R(T') \rceil$, die auch Komponenten von $\lceil R(B(J \setminus L)) \rceil$ sind. Sei am Ende $u(T')$ die Zahl der Komponenten C von $\lceil R(T') \rceil$ mit ungeradem $|\partial^T C|$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
2|V'_1| &\leq 2|V(B(J \setminus L))| + |f(V'_1) \cap X| \\
u(T') &\geq Rest \\
\partial T' &= |f(V'_2) \cap X| - Sch(X) + |\partial^T(B(J \setminus L))| - Sch(T) \\
&= |f(V'_2) \cap X| + |\partial^T(B(J \setminus L))| - Sch \\
|J \setminus (L \cup V(T))| &\leq Sch + Rest \\
b(J \setminus L) &= 2|V(B(J \setminus L))| + |\partial^T(B(J \setminus L))| - |J \setminus (L \cup V(T))| \\
&\geq 2|V(B(J \setminus L))| + |\partial^T(B(J \setminus L))| - (Sch + Rest) \\
2m &\leq 2\mathbb{M}_G(S, T') \\
&= 2|V'_1| + \partial T' - u(T') \\
&\leq 2|V(B(J \setminus L))| + |X| + |\partial^T(B(J \setminus L))| - Sch - Rest \\
&\leq |X| + b(J \setminus L) \\
|X| &\geq 2m - b(J \setminus L)
\end{aligned}$$

wobei wir die Abschätzung von $|J \setminus (L \cup V(T))|$ genauer unter die Lupe nehmen wollen:

Sei $C \in J \setminus (L \cup V(T))$. Falls $C \in \mathcal{C}(\lceil R(T') \rceil)$ gilt, wird es in $Rest$ einmal gezählt. Ist dies nicht der Fall und $\partial^T C$ ist nicht vollständig in $\partial T'$ enthalten, so wird C mindestens einmal in $Sch(T)$ gezählt. Treffen diese beiden Varianten nicht

getan ist - durch die Zusatzüberlegung im Schritt 1 über die Nichtexistenz „gerader Kantenkomponenten“ von T bleiben uns sogar ein paar - wenn auch einfache - Überlegungen erspart. Die Vorschreiberei ergibt sich einfach aus der Anwendung der etwas detaillierteren Variante des Satzes von Menger, die in Theorem 19 gegeben ist.

auf C zu, so muß C mindestens einen Knoten von $f^{-1}(X) \cap V_2$ enthalten, denn es muß benachbart zu einem Knoten v aus $V(B(L)) \setminus V_1'$ sein (sonst würde die erste Variante folgen), und $f(G)$ besitzt einen X vermeidenden $S(I)(f(C))$ -Weg (sonst würde die zweite Variante folgen). Da es keinen $S(I)\{v\}$ -Weg in $f(G)$ gibt, muß mindestens ein Knoten von $X \cap f(V_2)$ zu $f(C)$ gehören. Das Urbild dieses Knotens gehört aber nicht zu $\partial T' \setminus \partial^T(B(J \setminus L))$, wird also in $Sch(X)$ gezählt. Dadurch wird aber C in $Sch(X)$ mindestens einmal gezählt!

Aus Theorem 19 folgt mit $|X| \geq 2m - b(J \setminus L)$ für jeden $S(I)B(J \setminus L)$ -Trenner X die Existenz eines Untergraphen W' von $f(G)$ derart, daß $f^{-1}(W')$ die Vereinigung von $2m$ gerichteten Wegen ist, deren erste Knoten in $S(I)$ liegen und die ersten Knoten der Komponenten von U enthalten, und deren letzte Knoten zu $V(T) \cup \partial T$ gehören, wobei jeder Knoten von T genau zweimal als letzter Knoten auftaucht und in jeder Komponente C von $[R(T)]$ genau $|\partial^T C| - 1$ verschiedene letzte Knoten vorkommen.

Schritt 4: Wir zeigen nun, daß G für jede Vereinigung M von Komponenten⁹ von $[R(T)]$ einen Untergraphen $W(M)$ hat, der folgende Bedingungen erfüllt:

1. $|W(M) \cap S(I)| = 2m$
2. $U \cap S(I) \in W(M)$
3. Keine Komponente von $W(M)$ hat mehr als zwei Knoten in $S(I)$.
4. Eine Komponente von $W(M)$, die zwei Knoten in $S(I)$ hat, ist ein S -Weg von $G \setminus R(M)$.
5. Eine Komponente von $W(M)$, die einen Knoten in $S(I)$ hat, ist ein $S(I)M$ -Weg.
6. Für jede Komponente C von M gilt entweder $|C \cap W(M)| = |\partial^T C \cap W(M)| = |\partial^T C| - 1$ oder $|C \cap W(M)| = |\partial^T C| + 1$ und $\partial^T C \subseteq W(M)$.
7. Eine Komponente von $W(M)$, die keinen Knoten in $S(I)$ hat, ist ein $C_1 C_2$ -Weg, wobei C_1 und C_2 Komponenten von M sind.

Falls $M = \emptyset$ ergibt sich aus dieser Aussage sofort der zu beweisende Satz, da insbesondere alle Komponenten von $W = W(\emptyset)$ auch S -Wege sein müssen und es dann $\frac{2m}{2}$ davon gibt!

Zum Beweis dieser Aussage verwenden wir vollständige Induktion nach der Anzahl n der Komponenten von $[R(T)] - M$.

Für $n = 0$ enthält $[f^{-1}(W') \setminus R(T)]$ offenbar einen Untergraphen $W([R(T)])$ entsprechend den genannten Bedingungen.

⁹Dabei ist auch die leere Menge als Vereinigung von null derartigen Komponenten erlaubt!

Wir gehen daher im Folgenden von $M \neq \lceil R(T) \rceil$ aus. Sei also C eine Komponente von $\lceil R(T) \rceil \setminus M$ und $W(M \cup C)$ gemäß Induktionsvoraussetzung entsprechend der Bedingungen der zu beweisenden Aussage gegeben. Betrachten wir die Wege von $W(M \cup C)$ deren letzte Knoten in C liegen.

Im ersten Fall handelt es sich hierbei um $|\partial^T C| - 1$ Wege, deren letzte Knoten alle in $\partial^T C$ liegen. Sei nun v der Knoten von $\partial^T C$, der kein Endknoten einer Komponente von $W(M \cup C)$ ist. S'_i sei für alle $i \in I$ die Menge derjenigen Knoten von $\partial^T C$, die letzter Knoten einer Komponente von $W(M \cup C)$ sind, deren erster Knoten in S_i liegt. Es folgt $\partial^T C = S'(I) \cup \{v\}$. Ist nun T' ein S' -Trenner von $C - v$ mit

$$\mathbb{M}_{C-v}(S', T') < \frac{1}{2}(|\partial^T C| - 1)$$

so ist $T'' = (T \setminus R(C)) \cup T' \cup \{v\}$ ein S -Trenner von G mit mehr Knoten als T und

$$\mathbb{M}_G(S, T'') = \mathbb{M}_G(S, T) + \mathbb{M}_{C-v}(S', T') + 1 - \frac{1}{2}(|\partial^T C| - 1) \leq \mathbb{M}_G(S, T)$$

was der Wahl von T widerspricht. Aus den Vorüberlegungen zu G folgt, daß Theorem 28 für den Graphen $C - v$ statt G sehr wohl anwendbar ist. Wir wählen bei dieser Anwendung statt U den leeren Graphen (\emptyset) . Wir finden also in $C - v$ einen Untergraphen W_i , dessen $\frac{1}{2}(|\partial^T C| - 1)$ Komponenten sämtlich S' -Wege sind. Dann enthält $[W(M \cup C) \cup W_i]$ aber einen Untergraphen $W(M)$ entsprechend den Bedingungen der zu beweisenden Aussage.

Bleibt der Fall, daß es sich um $|\partial^T C| + 1$ Wege handelt. Sei $x \notin I$ und $I \cup \{x\}$ Indexmenge des wie folgt erklärten Mengensystems S' :

Für alle $i \in I$ definieren wir S'_i als die Menge derjenigen Knoten von C , die Endknoten einer Komponente von $W(M \cup C)$ sind, deren Anfangsknoten in S_i liegt. Desweiteren sei $S_x = (W(M \cup C) \cap C) \setminus S'(I)$. Ist nun T' ein S' -Trenner von C mit

$$\mathbb{M}_C(S', T') < \frac{1}{2}(|\partial^T C| + 1)$$

so ist $T'' = (T \setminus R(C)) \cup T'$ ein S -Trenner von G mit mindestens genausoviel Knoten wie T , aber weniger Richtungen als T und

$$\mathbb{M}_G(S, T'') = \mathbb{M}_G(S, T) + \mathbb{M}_C(S', T') - \frac{1}{2}(|\partial^T C| + 1) \leq \mathbb{M}_G(S, T)$$

was der Wahl von T widerspricht. Aus den Vorüberlegungen zu G folgt, daß Theorem 28 für den Graphen C statt G sehr wohl anwendbar ist, da T mindestens einen Knoten, C also mindestens einen Knoten weniger als G besitzt. Wir wählen bei dieser Anwendung statt U den leeren Graphen (\emptyset) . Wir finden also in C einen Untergraphen W_i , dessen $\frac{1}{2}(|\partial^T C| + 1)$ Komponenten sämtlich S' -Wege sind. Dann enthält $[W(M \cup C) \cup W_i]$ aber einen Untergraphen $W(M)$ entsprechend den Bedingungen der zu beweisenden Aussage. Damit ist die Aussage bewiesen und Theorem 28 folgt wie zu Beginn von Schritt 4 schon erläutert. \square

Kapitel 3

Einbettungsbereiche

In diesem Kapitel werden wir uns mit Verknüpfungen zwischen Einbettungsbereichen beschäftigen. Offenbar gilt folgender Satz:

Theorem 29 (Göring) *Die Vereinigung und der Durchschnitt von zwei Einbettungsbereichen ist ein Einbettungsbereich.*

Beweis. Seien die Einbettungsbereiche mit \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 bezeichnet und mögen die Lokalitäten S_1 und S_2 haben. Offenbar gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 &= \text{ein}(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2, S_1 \cup S_2) \\ \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 &= \text{ein}(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2, S_1 \cup S_2)\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Daher interessieren uns im folgenden eher Aussagen zur Endlichkeit der Erzeugendensysteme - und vor allem, wie man sich endliche Erzeugendensysteme verschaffen kann.

3.1 Relationen und Vereinigung

Viele Problemstellungen der Graphentheorie bestehen daraus, aus gegebenen Eigenschaften eines Graphen eine gesuchte Eigenschaft zu folgern. Wie wir im ersten Kapitel gesehen haben, lassen sich einige Grapheneigenschaften durch Einbettungsbereiche beschreiben. Daher ist es sinnvoll, die Frage aufzuwerfen, wie man erkennen kann, ob ein Einbettungsbereich in einem anderen enthalten oder disjunkt zu ihm ist. Die Disjunktheit von Einbettungsbereichen tritt eigentlich nicht auf; das folgende Theorem ist leicht einzusehen.

Theorem 30 (Göring) *Sind zwei Einbettungsbereiche disjunkt, so ist wenigstens einer davon die leere Menge.*

Beweis. Angenommen X_1 und X_2 sind nichtleere zueinander disjunkte Einbettungsbereiche. Dann gilt $G_1 \in X_1 \setminus X_2$ sowie $G_2 \in X_2 \setminus X_1$. Sei $G = G_1 \cup G_2$. Es folgt $G \in X_1$ und $G \in X_2$, also $G \in X_1 \cap X_2$, womit X_1 und X_2 im Widerspruch zur Annahme nicht disjunkt sind. \square

Schwieriger wird es mit dem Enthaltensein. Wir benutzen zur Charakterisierung unsere Definition des Einbettungsbereiches und charakterisieren diese Relationen über die Erzeugendensysteme:

Theorem 31 (Göring) *Gegeben sind zwei Einbettungsbereiche über ihre Erzeugendensysteme (\mathcal{R}_1, S) und (\mathcal{R}_2, S) gleicher Lokalität S . Dann ist $\text{ein}(\mathcal{R}_1, S) \subseteq \text{ein}(\mathcal{R}_2, S)$ äquivalent zu der folgenden Bedingung: Es gilt $\mathcal{R}_1 \subseteq \text{ein}(\mathcal{R}_2, S)$.*

Beweis. Da \mathcal{R}_1 in $\text{ein}(\mathcal{R}_1)$ enthalten ist, ist die Notwendigkeit dieser Bedingung klar. Wir müssen also nur noch prüfen, ob sie hinreichend ist. Sei also $G \in \text{ein}(\mathcal{R}_1, S)$. Damit gibt es einen Graphen $R_1 \in \mathcal{R}_1$ und ein S -treues Wegesystem W_1 mit Indexmenge R_1 und $W_1(R_1) \in G$. Wegen der Bedingung $\mathcal{R}_1 \subseteq \text{ein}(\mathcal{R}_2, S)$ gibt es einen Graphen $R_2 \in \mathcal{R}_2$ und ein S -treues Wegesystem W_2 mit Indexmenge R_2 und $W_2(R_2) \in R_1$. Folglich gilt auch $W_2 \preceq W_1$. Dann ist aber $W_1 \circ W_2$ ein S -treues Wegesystem. \square

Gemäß Theorem 31 zu bestimmen, ob ein Einbettungsbereich in einem anderen enthalten ist, ist insbesondere dann ein endliches Problem, wenn zu beiden Einbettungsbereichen endliche Erzeugendensysteme gleicher Lokalität bekannt sind - man braucht dann nur alle (endlich vielen) Fälle durchzuspielen.

Um mit Einbettungsbereichen arbeiten zu können, macht es Sinn, wenn man sie vereinigen und ihren Durchschnitt bilden kann. Ein Erzeugendensystem der Vereinigung zweier Einbettungsbereiche läßt sich leicht bestimmen, wenn zu beiden Einbettungsbereichen Erzeugendensysteme gleicher Lokalität gegeben sind.

Lemma 32 (Göring) *Gegeben sind zwei Einbettungsbereiche über ihre Erzeugendensysteme (\mathcal{R}_1, S) und (\mathcal{R}_2, S) gleicher Lokalität S . Dann ist $\text{ein}(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2, S)$ die Vereinigung beider Einbettungsbereiche.*

Beweis. Das folgt sofort aus der Definition von $\text{ein}(\cdot)$ \square

Sind aber endliche Erzeugendensysteme unterschiedlicher Lokalität gegeben, so bleiben Theorem 31 und Lemma 32 nicht anwendbar. Es stellt sich also die Frage, wie man aus endlichen Erzeugendensystemen unterschiedlicher Lokalität endliche Erzeugendensysteme gleicher Lokalität konstruiert.

Das folgende Lemma zeigt, wie man die Lokalität eines endlichen Erzeugendensystems um einen Knoten vergrößert.

Lemma 33 (Göring) *Sei E ein Einbettungsbereich und (\mathcal{R}, S) ein Erzeugendensystem von E . Darüber hinaus sei v ein nicht in S enthaltener Knoten und*

$S' = S \cup \{v\}$. Zu jedem $R \in \mathcal{R}$ sei W ein S -treuer Isomorphismus mit Indexmenge R und $v \notin W(R)$. Darüber hinaus sei $WK(w)$ zu jedem Knoten $w \in R \setminus S$ ein S -treuer Isomorphismus mit Indexmenge R und $WK(w)_w = v$. Zu jeder Kante $e \in E(R)$, die keinen linearen Endknoten in $R \setminus S$ hat, sei $W(e)$ ein S -treues Wegesystem, dessen Komponenten - bis auf $W(e)_r$ für alle $r \in e \cup R$ - einelementig sind, und in dem $V(WK(e)(e \cup R)) = \{v\}$ gilt. \mathcal{R}' sei die Menge aller Graphen R' , für die es einen Graphen $R \in \mathcal{R}$ derart gibt, daß eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

- Es gilt: $R' = W(R)$.
- Es gibt ein $x \in V(R)$ so, daß $WK(x)$ definiert ist und $R' = WK(x)(R)$ gilt.
- Es gibt ein $e \in E(R)$ so, daß $WK(e)$ definiert ist und $R' = WK(e)(R)$ gilt.

Dann gilt $\text{ein}(\mathcal{R}', S') = E$.

Beweis. Wir zeigen, daß für jeden Graphen $G \in E$ ein Graph $R' \in \mathcal{R}'$ und ein S' -treues Wegesystem W' mit Indexmenge R' und Bild in G existiert. Aus $G \in E$ folgt die Existenz eines S -treuen Wegesystems X dessen Indexmenge ein Graph R aus \mathcal{R} und dessen Bild in G liegt.

Falls $v \notin X(R)$ gilt, ist gemäß Fallvoraussetzung $X \circ W^{-1}$ das gesuchte S' -treue Wegesystem.

Falls $v \in W(R)$ gilt und $W^{-1}(\{v\})$ ein Knoten w ist, ist $X \circ WK(v)^{-1}$ das gesuchte S' -treue Wegesystem.

Bleibt der Fall, daß es eine Kante e mit $v \in W(e \cap R)$ gibt. Gehört ein Ende x von e nicht zu S und hat außerdem in R die Valenz zwei, so gibt es offenbar ein $S \cup \{v\}$ -treues Wegesystem W' mit Indexmenge $WK(x)(R)$ mit

$$W'_y = \begin{cases} X(WK(x)^{-1}(\{y\})) & \text{falls } y \in WK(x)(R) - \{v\} \\ v & \text{falls } y = v \end{cases}$$

wobei die Richtungen der zu v inzidenten Kanten von $WK(x)(R)$ und gemäß der Definition eines Wegesystems (in Abbildung 3.1 leicht nachzuvollziehen) gewählt werden.

Anderenfalls gibt es offenbar ein $S \cup \{v\}$ -treues Wegesystem W' mit Indexmenge $WK(e)(R)$ mit $X = W' \circ WK(e)$. Die Konstruktion von W' auf $WK(e)(e)$ ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Es sei vermerkt, daß man im praktischen Konstruieren nicht so viele Fälle bekommt, da man Kanten bzw. Knoten von R mit „äquivalenter“ Lage (d.h. Elemente x, y von R , zu denen ein Isomorphismus A mit Indexmenge R , $A(R) = R$ und $A(x) = y$ existiert) in der Fallunterscheidung nur einmal berücksichtigt. Da aber nur der Erhalt der Endlichkeit von theoretischem Interesse ist, haben wir an dieser Stelle auf eine entsprechende Modifikation des Beweises verzichtet. \square

Lemma 34 (Göring) Sei E ein Einbettungsbereich und (\mathcal{R}, S) ein Erzeugendensystem von E . Darüber hinaus sei e eine nicht in S enthaltene Kante mit $\text{Enden}(e) \subseteq S$ und $S' = S \cup \{e\}$. Zu jedem $R \in \mathcal{R}$ sei W ein S -treuer Isomorphismus mit Indexmenge R und $e \cap W(R) = \emptyset$. Darüber hinaus sei $WK(f)$ zu jeder Kante $f \in E(R)$ mit $\text{Enden}(\{f\}) = \text{Enden}(e)$ ein S -treuer Isomorphismus mit Indexmenge R und $WK(f)_f = e$. \mathcal{R}' sei die Menge aller Graphen R' , für die es einen Graphen $R \in \mathcal{R}$ derart gibt, daß eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

- Es gilt: $R' = W(R)$.
- Es gibt ein $f \in E(R)$ sodaß $WK(f)$ definiert ist und $R' = WK(f)(R)$ gilt.

Dann gilt $\text{ein}(\mathcal{R}', S \cup \{e\}) = E$.

Beweis. Wir zeigen wieder, daß für jeden Graphen $G \in E$ ein Graph $R' \in \mathcal{R}'$ und ein S' -treues Wegesystem mit Indexmenge R' und Bild in G existiert. Aus $G \in E$ folgt die Existenz eines S -treuen Wegesystems X dessen Indexmenge ein Graph R aus \mathcal{R} und dessen Bild in G liegt. Falls $e \cap X(R) = \emptyset$ gilt, ist gemäß

Abbildung 3.1: Konstruktion von W' in Umgebung von x

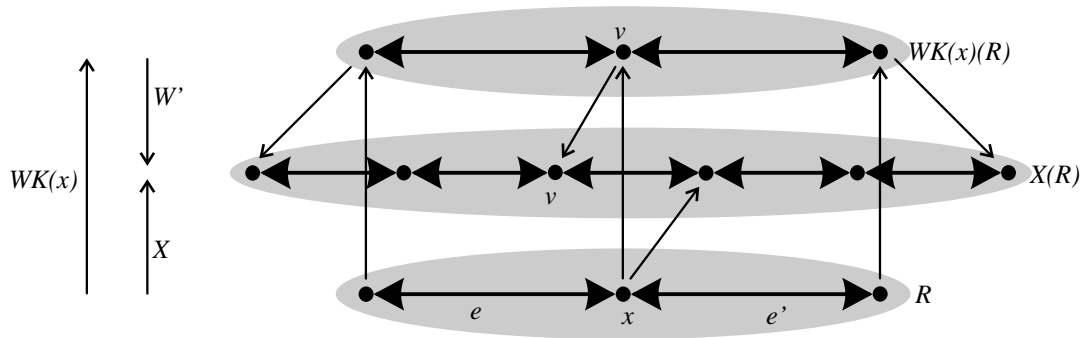
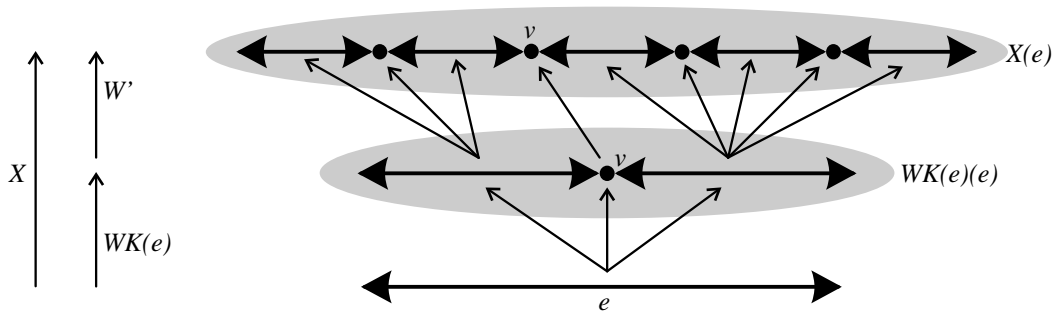


Abbildung 3.2: Konstruktion der Komponenten von W' auf $WK(e)(e)$



Fallvoraussetzung $X \circ W^{-1}$ das gesuchte S' -treue Wegesystem. Sonst sei f die Kante von R mit $X(f \cap R) = e \cap X(R)$. Dann ist $X \circ WK(f)^{-1}$ das gesuchte S' -treue Wegesystem. \square

Aus Lemma 33 und Lemma 34 ergibt sich folgender Satz:

Theorem 35 (Göring) *Zu einem Erzeugendensystem (\mathcal{R}, S) eines Einbettungsbereiches und einem endlichen ungerichteten Graphen S' gibt es stets ein Erzeugendensystem mit Lokalität $S' \cup S$ zum gleichen Einbettungsbereich.*

Ist (\mathcal{R}, S) sogar ein endliches Erzeugendensystem, dann gibt es auch ein endliches Erzeugendensystem mit Lokalität $S' \cup S$ zu diesem Einbettungsbereich.

Beweis. Das ist eine direkte Folgerung aus den genannten Lemmata. \square

Wegen Theorem 35 und Theorem 32 ist es möglich, zu zwei über endliche Erzeugendensysteme gegebenen Einbettungsbereichen herauszufinden, ob der eine im anderen enthalten ist. Insbesondere kann man aber leicht ein endliches Erzeugendensystem der Vereinigung zweier Einbettungsbereiche konstruieren, sofern diese über endliche Erzeugendensysteme gegeben sind. Es ergibt sich folgendes Korollar:

Korollar 36 (Göring) *Die Vereinigung zweier Einbettungsbereiche mit endlichem Erzeugendensystem ist wieder ein Einbettungsbereich mit endlichem Erzeugendensystem.*

3.2 Durchschnitt

Wie wir gesehen haben, hat die Vereinigung zweier Einbettungsbereiche mit endlichem Erzeugendensystem selbst wieder ein endliches Erzeugendensystem. Angenehm wäre es, würde dies auch für den Durchschnitt gelten. Das ist aber nicht der Fall, da z.B.

$$\text{ein}(\{\{1, 2, (1, 0, 2)\}\}, \{1, 2\}) \cap \text{ein}(\{\{1, 2, (2, 0, 1)\}\}, \{1, 2\})$$

kein endliches Erzeugendensystem hat (vgl. Abbildung 3.3)

Allerdings ist uns kein Beispiel dafür bekannt, daß der Durchschnitt zweier ungerichteter Einbettungsbereiche mit jeweils endlichem Erzeugendensystem kein endliches Erzeugendensystem besitzt. Es ergibt sich folgende Vermutung:

Vermutung: Der Durchschnitt zweier ungerichteter Einbettungsbereiche mit jeweils endlichem Erzeugendensystem ist ein ungerichteter Einbettungsbereich mit endlichem Erzeugendensystem.

Diese Vermutung wird in dieser Arbeit leider nicht abschließend bearbeitet werden. Das Hauptergebnis dieses Abschnittes ist der schwächere folgende Satz:

Theorem 37 (Göring) *Der Durchschnitt eines ungerichteten Einbettungsbereiches mit endlichem Erzeugendensystem und eines Mengerbereiches hat ein endliches Erzeugendensystem.*

Bevor wir zum Beweis des Satzes schreiten, befassen wir uns mit Algorithmen zum Auffinden spezieller Wegesysteme. In diesen Algorithmen wollen wir spezielle Wegesysteme mit „kleinen“ Indexmengen I in einem gegebenen Graphen G konstruieren, wobei uns ein S -treues Wegesystem W in diesem Graphen und ein c -facher Zusammenhang zweier Mengen A und B bzw. zweier Knoten a und b gegeben ist. Dabei soll die Indexmenge von W S -treu in I einbettbar sein und A und B (bzw. a und b) auch in I c -fach zusammenhängen. In Stufe 1 ist das gegebene Wegesystem sehr einfach gehalten, wird aber von Stufe zu Stufe allgemeiner. Das Gesamtverfahren bezeichnen wir als *Zusammenhängen*.

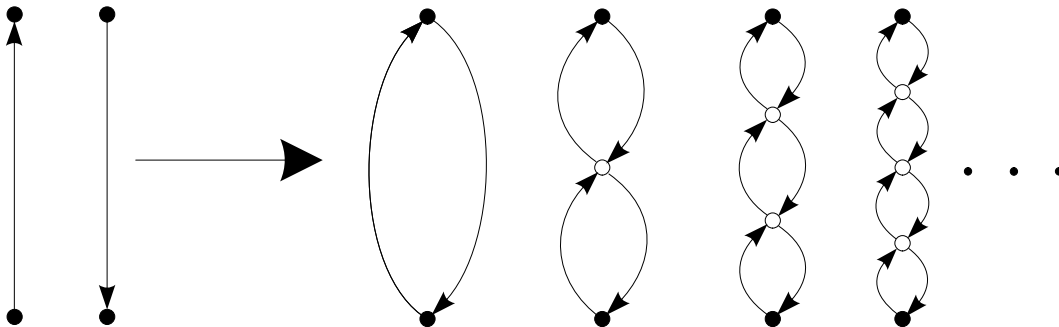
Bevor wir einen Algorithmus zur Erzeugung eines Wegesystems mit beschränkter Indexmenge vorstellen, legen wir noch ein paar Bezeichnungen fest. Seien A und B Knotenmengen. Wir nennen einen AB -Trenner T eines Graphen G *richtungsmaximal*, wenn durch Austausch eines beliebigen Knotens v von T mit einer zu v inzidenten Richtung nie ein AB -Trenner von G entstehen kann.

Seien c eine natürliche Zahl und A und B Knotenmengen. Gibt es in einem Graphen G $c - 1$ disjunkte AB -Wege, so sei der (A, c, B) -Rest X von G die Menge aller Elemente b von G derart, daß G einen richtungsmaximalen AB -Trenner enthält, der ebenfalls $A\{b\}$ -Trenner ist und aus $c - 1$ Elementen besteht.

Lemma 38 (Göring) *Mit den vorab verwendeten Bezeichnungen gibt es einen AB -Trenner T in G mit $|X \cap T| = c - 1$, welcher AX -Trenner ist, oder es gilt $X = \emptyset$.*

Beweis. Falls $X = \emptyset$ gilt, ist der Beweis abgeschlossen.

Abbildung 3.3: S enthält jeweils die vollschwarzen Knoten. Die linken beiden Graphen sind die einzigen Repräsentanten der zu schneidenden Einbettungsbereiche. Die anderen Graphen sind Repräsentanten in jedem Erzeugendensystem des Durchschnitts (bis auf Isomorphie).



Anderenfalls folgt $B \subseteq X$. Gibt es einen richtungsmaximalen AX -Trenner T aus $c-1$ Elementen, so folgt wegen der Konstruktion von X sofort $|X \cap T| = c-1$.

Anderenfalls gibt es überhaupt keinen AX -Trenner mit weniger als c Elementen. Betrachten wir ein System aus $c-1$ disjunkten AB -Wegen, dann enthält jeder dieser AB -Wege genau einen AX -Weg. Mit T' bezeichnen wir die letzten Knoten dieser AX -Wege. Nach Theorem 11 gibt es dann ein System aus c AX -Wegen derart, daß jeder Knoten von T' in einem dieser Wege enthalten ist. Es gibt aber auch einen Knoten $t \in X \setminus T'$, welcher in einem dieser c AX -Wege enthalten ist. Dann kann es offenbar keinen AB -Trenner mit weniger als c Elementen geben, der gleichzeitig $A\{t\}$ -Trenner ist, weswegen ein Widerspruch zu $t \in X$ folgt. Somit kann dieser letzte Fall nicht eintreten und der Beweis ist erbracht. \square

Theorem 39 (Göring) *Es gibt ein Verfahren, welches zu Graphen G und S , Knoten a und b aus S und einem S -treuen Wegesystem W in G mit Indexmenge I , die a und b enthält, ein S -treues Wegesystem W^* in G mit beschränkter Indexmenge I^* derart konstruiert, daß sowohl I als auch eine c -fache ab -Verbindung ein S -Minor von I^* ist.*

Beweis. Wir bauen das Verfahren in sechs Stufen auf:

Stufe 1:

Wir konstruieren zunächst für jedes $c \in \mathbb{N}_0$ ein Verfahren namens $Stufe1_c$ mit folgenden Eigenschaften: Seien G, W, S, A und B in dieser Reihenfolge die ersten fünf Komponenten des Eingabetupels des Verfahrens vor dessen Abarbeitung, sowie W^* die zweite und a und b die sechste und siebte Komponente nach dessen Abarbeitung (sofern möglich). $Stufe1_c$ soll die Bedingungen gemäß Theorem 8 erfüllen um ein Algorithmus mit linearem Aufwand zu sein, falls gilt:

- G ist ein Graph.
- A und B disjunkte Teilmengen der Knotenmenge von G .
- G enthält $c-1$ disjunkte und zu A und B disjunkte Wege, deren Vereinigung das Bild des Wegesystems W ist.
- Die Indexmenge von W ist ein Graph, dessen Komponenten Wege mit zwei Knoten sind.
- G enthält keinen A^*B^* Trenner mit weniger als c Elementen, wobei A^* die Vereinigung von A mit den ersten Knoten von W und B^* die Vereinigung von B mit den letzten Knoten von W ist.
- Für jeden Knoten v in B^* gilt $\text{val}_G^-(v) = 1$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so soll nach Abarbeitung des Verfahrens gelten:

- Die Indexmenge I^* von W^* enthält c disjunkte A^*B^* -Wege.
- I^* enthält beschränkt viele Elemente. Die Schranke darf dabei von c aber nicht vom Eingabetupel abhängen.
- I^* enthält keine linearen Knoten.
- Die Indexmenge I von W ist $V(I)$ -treu einbettbar in I^* .
- Der $(A^*, c, B^* \setminus B)$ -Rest von I^* ist $B^* \setminus B$.
- Das Bild von W^* liegt in G und hat mit A nur das Element a und auch mit B nur das Element b gemeinsam.

Von der Idee her entspricht das Verfahren demjenigen aus Theorem 11. Das Bild des Wegesystems W entspricht dabei der Menge U , A^* und B^* entsprechen dort A und B . In jenem Verfahren wird im letzten Schritt stets ein Weg S gelöscht. Dadurch kann es passieren, daß die Indexmenge von W nicht mehr in das Ergebnis jenes Verfahrens $A^* \cap B^*$ -treu einbettbar ist. In diesem Verfahren wird der Weg S daher genau dann gelöscht, wenn dies die Einbettbarkeit der Indexmenge von W in das Ergebnis nicht behindert. Wird der Weg S also nicht gelöscht, so wäre U ansonsten in das Ergebnis nicht einbettbar. Die Anzahl der Möglichkeiten, $c - 1$ Knoten von B^* durch eine Funktion f so auf die Startknoten von U abzubilden, daß das Ergebnis dieses Verfahrens disjunkte $\{b\}\{f(b)\}$ -Wege (für alle b im Definitionsbereich von f) enthält, steigt daher, ist andererseits aber bei festem c beschränkt. Daher kann der Weg S nur beschränkt oft erhalten bleiben. Folglich wird I^* auch nur beschränkt viele Elemente enthalten. Die Korrektheit des Verfahrens folgt leicht aus einer Induktion über die Rekursionstiefe. Dabei kann bei Selbstaufrufen davon ausgegangen werden (gemäß Induktionsvoraussetzung), daß zumindest diese korrekt abgearbeitet werden.

Man beachte, daß die Variablenbezeichnungen innerhalb der Beschreibung eines Verfahrens nur innerhalb dieses Verfahrens Gültigkeit haben, die Bezeichnungen außerhalb desselben aber nicht beeinflussen sollen. Variablen sind innerhalb eines Verfahrens also stets als „lokale“ Variablen aufzufassen.

Es folgt die Beschreibung des Verfahrens.

1. Mögen G , W , S , A , B , a und b in dieser Reihenfolge die ersten sieben Komponenten des Eingabetupels bezeichnen.
Setze U gleich der Indexmenge von W und wähle ein Element a aus A . Sei A^* die Vereinigung von A mit den Anfangsknoten der Komponenten von U und B^* die Vereinigung von B mit deren Endknoten.
2. Falls keine in a beginnende Richtung existiert, gehe zu 9.
3. Sei r eine Richtung von G mit $r_1 = a$.

4. Falls $r_3 \in A$ gehe zu 10.
 Falls $r_3 \in B$ gehe zu 11.
 Falls r_3 nicht im Bild von W liegt, gehe zu 7.
5. Sei P der $A\{r_3\}$ -Systemweg des Bildes von W und a' der Anfangsknoten von P .
 Das Wegesystem W wird abgeändert, indem in der Komponente von W , in der r_3 liegt, alle Knoten des Bildes von $P \setminus r_3$ entfernt werden und die Komponente von W , in der a' liegt, durch $\{r_3\}$ ersetzt wird.
 Zu A werden die Knoten des Bildes von P außer r_3 hinzugefügt.
 In G werden alle Richtungen des Bildes von P gelöscht.
 Führe Stufe $1_c(G, W, S, A, B, a, b)$ aus.
6. Liegt a in P , so gehe zu 16.
 Inzidiert r_3 im Bild von W mit mehr als einer Richtung, so gehe zu 14.
 Gehe zu 15.
7. Setze $G = G \setminus \{r\}$, $A = A \cup \{r_3\}$ und führe Stufe $1_c(G, W, S, A, B, a, b)$ aus.
8. Liegt r_3 im Bild von W (dann gilt $b = r_3$) und inzidiert dort mit keiner Richtung (tritt nie auf) oder mehr als einer Richtung, so gehe zu 12.
 Liegt r_3 im Bild von W und ist mit genau einer Richtung r' inzident, so gehe zu 13.
 Anderenfalls liegt r_3 nicht im Bild von W . Gehe zu 17.
9. Setze $G = G \setminus \{a\}$ und $A = A \setminus \{a\}$.
 Führe Stufe $1_c(G, W, S, A, B, a, b)$ aus und gehe zu 17.
10. Setze $G = G \setminus \{r\}$, führe Stufe $1_c(G, W, S, A, B, a, b)$ aus und gehe zu 17.
11. Setze $b = r_3$, $W = W \cup X$, wobei X der AB -Systemweg von $[r]$ ist und gehe zu 17.
12. Setze $W = W \cup X$, wobei X der $\{a\}\{r_3\}$ -Systemweg von $[\{r\}]$ ist und gehe zu 17.
13. Sei r' eine (die) zu r_3 inzidente Richtung im Bild von W .
 Füge in W^* zu der Komponente, die r' enthält, r_3 und r hinzu.
 Setze $a = r_1$ und gehe zu 17.
14. Setze $W = W \cup X$ wobei X der $\{r_1\}\{r_3\}$ -Systemweg von $[\{r\}]$ ist. Die Vereinigung von X mit W ist dabei so zu organisieren, daß U in die Indexmenge des Ergebnisses $V(U)$ -treu einbettbar ist.
 Setze $a = r_1$ und gehe zu 17.

15. Sei r' die mit r inzidente Richtung des Bildes von W . Füge zu der Komponente von W , die r' enthält, r_3 und r hinzu, setze die Komponente von W , welche r_3 enthält, gleich r_1 , setze $a = r_1$ und gehe zu 17.
16. Setze $W = W \cup P \cup X$, wobei X der $\{a\}\{r_3\}$ -Systemweg von $[\{r\}]$ ist. Die Vereinigung ist so zu gestalten, daß U in die Indexmenge von W $V(U)$ -treu einbettbar ist.
 Lösche nun beginnend mit der zu A^* disjunkten im Bild von P enthaltenen Komponente von W aber ansonsten in beliebiger Reihenfolge so lange Komponenten von W , wie U noch S -treu einbettbar in das Ergebnis ist und es in seiner Indexmenge noch c disjunkte A^*B^* -Wege enthält. Dabei ist durchaus denkbar, daß keine Komponente gelöscht werden kann. Entstehen dadurch in der Indexmenge Knoten der Valenz zwei außerhalb von A^* und B^* , so hebe diese auf.
 Setze $a = r_1$.
17. Beende den Algorithmus.

Stufe 2

Ziel ist es hier, die Valenzbeschränkung für die B -Menge (in Stufe 1 B^* , hier B') aus Stufe 1 loszuwerden. Seien A^* und B' Knotenmengen eines Graphen G' und W' ein Wegesystem, dessen Indexmenge ein gerichteter Graph ist, dessen $c - 1$ Komponenten Wege mit ein oder zwei Knoten sind. Das Bild von W' liege in G , die Startknoten der Komponenten des Bildes von W' (die Bilder der Komponenten der Indexmenge von W' sind) liegen in A^* , ihre Endknoten mögen in B' liegen. Desweiteren enthalte G keinen A^*B' -Trenner mit weniger als c Elementen. Der Graph G entstehe aus G' durch Hinzufügen jeweils eines neuen Knotens v' und einer Richtung $(v, 0, v')$ für jeden Knoten $v \in B'$. Mit B^* bezeichnen wir die Menge der neuen Knoten v' zu allen Knoten $v \in B'$. Dann gibt es in G offenbar ein Wegesystem W entsprechend den Voraussetzungen von *Stufe1_c*. Dabei werden die Komponenten des Bildes von W' durch Hinzufügen der Kante $(v, 0, v')$ (wobei v hier der Endknoten der jeweiligen Komponente sei) und des Knotens v zu den Komponenten von W . Die Komponenten der Indexmenge von W' , die nur einen Knoten x enthalten, werden durch Hinzufügen eines zusätzlichen Knotens x' und der Richtung $(x, 0, x')$ zu Komponenten der Indexmenge von W , alle anderen Komponenten der Indexmengen können unverändert beibehalten werden. A und B erhalten wir aus A^* und B^* durch Entfernen der Knoten des Bildes von W .

Da die Voraussetzungen für *Stufe1_c* nun gegeben sind, findet *Stufe1_c* mit einem Aufwand linear in $|G|$ eine c -Verbindung W^* zwischen A^* und B^* . Durch Entfernen der zusätzlichen (nicht in G' enthaltenen) Knoten und Kanten im Bild von W^* und entsprechendes Anpassen der Indexmenge von W^* erhalten wir entsprechend mit in $|G|$ linearem Aufwand ein Wegesystem W^{**} in G , in dessen

Indexmenge die Indexmenge I' von $W' V(I')$ -treu einbettbar ist. W^{**} enthält im Bild eine Menge von c disjunkten A^*B' -Wegen. Die Mächtigkeit der Indexmenge ist weiterhin in $|G|$ beschränkt, d.h. es gibt eine obere Schranke für sie, die nicht von $|G|$ (wohl aber von c) abhängt.

Stufe 3

Sei G ein Graph, A, B und S Knotenmengen und W ein S -treues Wegesystem mit Bild in G derart, daß die Indexmenge I von W ungerichtet ist und $c - 1$ paarweise disjunkte AB -Wege enthält. In G möge jeder AB -Trenner mindestens c Elemente aufweisen.

Ziel ist es nun, aus W ein S -treues Wegesystem W^* mit möglichst kleiner Indexmenge I^* derart zu konstruieren, daß I S -treu in I^* einbettbar ist und I^* keinen AB -Trenner mit weniger als c Knoten besitzt. Dabei ist unter „möglichst klein“ nicht minimal, sondern nur „in der Mächtigkeit durch eine nur von I aber nicht von $|G|$ abhängige Funktion nach oben beschränkt“ zu verstehen.

Sei X der (A, c, B) -Rest von I und $t(I) = ||X||$ gesetzt.

Falls $t(I) = 0$ gilt, können wir das Verfahren mit $W^* = W$ beenden.

Anderenfalls genügt ein lineares Verfahren, welches aus W ein S -treues Wegesystem W^+ mit möglichst kleiner Indexmenge I' derart konstruiert, daß I S -treu in I' einbettbar ist und $t(I') < t(I)$ erfüllt, da dies ja höchstens $t(I) \leq |I|$ mal angewendet werden muß, um am Ende W^* gemäß den gesetzten Anforderungen zu konstruieren.

Sei T ein richtungsmaximaler AX -Trenner von I mit $c - 1$ Elementen gemäß Lemma 38. Mit I^A bezeichnen wir $(I \setminus X) \cup V(T)$. Gemäß Stufe 2 können wir aus $W|_T$ in G eine c -Verbindung W^{**} zwischen $W(I^A)$ und $W(X)$ konstruieren. Das Verfahren endet dann mit $W^* = W|_{I^A \cup X} \cup W^{**}$.

Gemäß Konstruktion gibt es eine S -treue Einbettung f von I in die Indexmenge I^* von W^* . Wir müssen hier noch zeigen, daß $t(I^*) < t(I)$ gilt. Sei also X^* der (A, c, B) -Rest von I^* . Es folgt $X^* \subseteq f(X)$. Sei q' der Knoten des Bildes von W^{**} , welcher nicht in $W(T)$ aber in $W(X)$ vorkommt. Dann gibt es ein $q^* \in I^*$ mit $W^*(q) = q'$. Es folgt $f_{q^*}^{-1} \in X$, aber $f(f_{q^*}^{-1}) \cap X^* = \emptyset$; letzteres, da das Bild von W^* offenbar c disjunkte $A(B \cup \{q'\})$ -Wege besitzt. Da aber für alle $x \in X \setminus f_{q^*}^{-1}$ auch $|f_x| = 1$ folgt (höchstens die Elemente von $W_{q'}^{-1} = f_{q^*}^{-1}$ sind zu unterteilende Richtungen), gilt tatsächlich $t(I^*) = |X^*| < |X| = t(I)$.

Stufe 4

Seien G ein Graph, S eine Menge von Knoten, darunter a und b , und W ein S -treues Wegesystem in G , das in seiner Indexmenge I (wie folglich auch in seinem Bild $W(I)$) die Knoten a und b sowie $c - 1$ im Inneren disjunkte Wege von a nach b enthält. In G möge es sogar c im Inneren disjunkte Wege von a nach b geben. Ziel ist es hier, ein S -treues Wegesystem zu konstruieren, in dessen Indexmenge zum einen c im Inneren disjunkte ab -Wege existieren und zum anderen I S -treu einbettbar ist.

Der Graph G' möge aus G entstehen, indem alle zu a oder b inzidenten Kanten genau einmal unterteilt werden. Die gleiche Operation auf die Komponenten

von W sowie ihre Indizes angewandt möge das Wegesystem W' in G' liefern. Die Indexmenge von W' bezeichnen wir mit I' . Auch G' besitzt c im Inneren disjunkte $\{a\}\{b\}$ -Wege und folglich c disjunkte AB -Wege, wobei wir mit A die Nachbarschaft $N_{G'}(a)$ und mit B die Nachbarschaft $N_{G'}(b)$ bezeichnen. Wir setzen $S' = S \cup A \cup B$.

Gemäß Stufe 3 finden wir mit in $|G'|$ linearem Aufwand ein S' -treues Wegesystem W^* zwischen A und B mit beschränkter Mächtigkeit der Indexmenge I^* , in die I' S' -treu einbettbar ist. Kehren wir in das ungestrichene System zurück (durch Kontraktion aller mit a bzw. b inzidenten Kanten und geeignetes Umbenennen), so erhalten wir ein S -treues Wegesystem W^{**} in dessen Indexmenge I^{**} sowohl c im Inneren disjunkte $\{a\}\{b\}$ -Wege existieren, als auch I S -treu einbettbar ist. Dabei ist $|I^{**}|$ immer noch nach oben beschränkt durch eine Funktion, die nur von I und c abhängt.

Stufe 5

Nun wollen wir in S auch Richtungen zulassen. Seien G und S Graphen mit Knoten a und b und W ein S -treues Wegesystem in G , das in seiner Indexmenge I (wie folglich auch in seinem Bild $W(I)$) $c - 1$ im Inneren disjunkte Wege von a nach b enthält. In G möge es sogar c im Inneren disjunkte Wege von a nach b geben. Außerdem sei die Mächtigkeit von S endlich.

Gemäß Stufe 4 finden wir ein $V(S)$ -treues Wegesystem - welches wir hier allerdings W^{**} nennen, in dessen Indexmenge I^{**} die Menge I $V(S)$ -treu einbettbar ist, derart das in I^{**} c im Inneren disjunkte AB -Wege existieren.

Dann ist $W^* = W^{**} \cup W|_S$ allerdings ein Wegesystem mit beschränkter Indexmenge I^* (Die Mächtigkeit ist nach oben durch eine nur von c , S und I abhängige Funktion beschränkt) derart, daß I^* c im Inneren disjunkte ab -Wege enthält und I in I^* S -treu einbettbar ist. Damit ist Stufe 5 abgeschlossen.

Stufe 6

Hier wollen wir den Zusammenhang zwischen a und b beim Übergang zum gefundenem Wegesystem auch auf c erhöhen, wenn er im gegebenen Wegesystem nicht $c - 1$ war. Seien G und S Graphen mit Knoten a und b und W ein S -treues Wegesystem in G , das in seiner Indexmenge I (wie folglich auch in seinem Bild $W(I)$) die Knoten a und b enthält. In G möge es c im Inneren disjunkte Wege von a nach b geben. Außerdem sei die Mächtigkeit von S endlich.

Sei $d(I) = c - c'$, wobei c' die Maximalzahl im Inneren disjunkter $\{a\}\{b\}$ -Wege von I ist. Durch $d(I)$ -faches Anwenden von Stufe 5 findet man also - mit immer noch linearem Aufwand - ein S -treues Wegesystem W^* mit beschränkter Indexmenge I^* derart, daß sowohl I als auch eine c -fache ab -Verbindung in I^* S -treu einbettbar ist. Damit ist Stufe 6 und somit auch der Beweis von Lemma 39 abgeschlossen. \square

Nun zum Beweis von Theorem 37

Beweis. Da die Indexmenge des Wegesystems, welches in Stufe 6 konstruiert

wurde, beschränkte Mächtigkeit hat, gibt es (bis auf S -Isomorphie) für sie nur endlich viele Möglichkeiten bei gegebenem S, I, a, b und c . Das Theorem 37 ist daher eine einfache Folgerung aus den Eigenschaften des beschriebenen sechsstufigen Verfahrens. \square

3.3 Praktische Anwendung

Für die praktische Anwendung der besprochenen Verfahren benötigen wir noch einige kleine Überlegungen. Wir wollen und können ja nicht alle Graphen, die den Voraussetzungen des Verfahrens entsprechen, durch das Verfahren untersuchen lassen, um die endlich vielen Möglichkeiten für die Indexmenge des Ergebnisses zu bestimmen.

Wie erzeugen wir also (bis auf S -Isomorphie) alle Graphen, die als Indexmengen des Ergebnis-Wegesystems unseres Verfahrens auftreten können? Bei jeder Manipulation von Wegesystemen in unserem Verfahren können wir eine Fallunterscheidung nach den möglichen Ergebnissen machen. Die einzige Stufe, in der eine solche Fallunterscheidung unendlich werden könnte, ist Stufe 1, da diese Stufe sich selbst aufruft. Hier können wir uns helfen, indem wir die Fallunterscheidung nach Rekursionstiefe (Anzahl geschachtelter Selbstaufrufe) voranstellen. Da nur bis auf S -Isomorphie endlich viele Indexmengen im Ergebnis von Stufe 1 möglich sind, gibt es eine Rekursionstiefe derart, daß alle erzeugbaren Fälle für die Indexmengen des Ergebnisses schon vorher aufgetaucht sind. Hier können wir also unsere Fallunterscheidung abbrechen.

Da der gebräuchlichere Zusammenhangsbegriff der des globalen Zusammenhangs ist (ein Graph wird c -fach zusammenhängend genannt, wenn beliebige zwei seiner Knoten c -fach zusammenhängend sind), ist folgende Überlegung noch von praktischer Bedeutung:

Ist in einem ungerichteten Graphen G ein S -treues Wegesystem W mit Indexmenge I gegeben, so gibt es einen zu G S -isomorphen Graphen G' , für den W ein $S' = S \cup V(I)$ -treues Wegesystem ist. Falls G c -fach zusammenhängend (mit $c \leq 3$) ist, kann man nun mit Hilfe des vorgestellten Algorithmus in G' ein S' -treues Wegesystem W' konstruieren, in dessen (in $|G'|$ beschränkter) Indexmenge I' sämtliche Knoten von S' c -fach zusammenhängend sind. Da jeder Trenner von I' mit weniger als drei Knoten jedoch ein ab -Trenner mit $\{a, b\} \subseteq V(I)$ ist, ist folglich I' c -fach zusammenhängend. W' ist wiederum ein S -treues Wegesystem in G .

Es ergibt sich folgendes Korollar:

Korollar 40 (Göring) *Sei $c \in \mathbb{G}_1^3$, \mathcal{G} eine endliche Menge von endlichen ungerichteten Graphen, S ein endlicher Graph und \mathcal{Z}_c die Klasse aller c -fach zusammenhängenden ungerichteten Graphen, so gibt es eine endliche Menge $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{Z}_c$*

mit

$$\text{ein}(\mathcal{G}, S) \cap \mathcal{Z}_c = \text{ein}(\mathcal{G}', S) \cap \mathcal{Z}_c$$

Darüber hinaus kann zu einem Graphen $G \in \text{ein}(\mathcal{G}, S) \cap \mathcal{Z}_c$ mit einem linearen Aufwand in $|G|$ ein Wegesystem W von G mit Indexmenge $I \in \text{ein}(\mathcal{G}', S) \cap \mathcal{Z}_c$ gefunden werden.

Der Abschnitt 4.2 illustriert die Anwendung dieses Korollars.

In praktischen Anwendungen macht es Sinn, zunächst die leere Menge als Trenner zu beseitigen, da hier schon der Algorithmus aus Theorem 11 zum Erweitern des gegebenen Wegesystems genügt. Gemäß Korollar 12 kann man den Zusammenhang zwischen zwei Komponenten der Indexmenge des Wegesystem durch Hinzufügen von k Systemwegen zum Wegesystem sofort auf k erhöhen (sofern die Bilder der Komponenten im betrachteten Graphen k -fach zusammenhängend sind), was die entstehende Fallunterscheidung in unseren Beispielen erheblich verkürzt hat. Als nächstes kann man die Trenner beseitigen, die nur Kanten enthalten, welche mit einem der Knoten adjazent sind. Dazu ist es nicht nötig, Stufe 1 anzusteuern, da man gemäß Theorem 25 ja schon die entsprechenden Wege findet und das Wegesystem geeignet vergrößern kann.

Kapitel 4

Beispiele

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns ausschließlich mit ungerichteten Graphen, sodaß wir eine Kante $\{(a, b, c), (c, b, a)\}$ stets vorfinden, wenn wir eine ihrer beiden Richtungen vorfinden. Daher brauchen wir nicht mehr zwischen Kante und Richtung zu unterscheiden, was die Bezeichnungsweise erheblich vereinfacht und dem ansonsten üblichen Standard angleicht. Entsprechend ist die Existenz eines gerichteten Weges P in einem Graphen gleichbedeutend mit der Existenz des ungerichteten Weges $[P]$, sodaß wir zwar stets ungerichtete Wege suchen, sie aber ohne Bedenken falls nötig als in die eine oder andere Richtung gerichtet betrachten können.

4.1 Kurze Kreise durch vorgeschriebene Knoten

4.1.1 Problemstellung und Resultate

Wenn wir in einem gegebenen Graphen G einen Kreis suchen, der eine vorgegebene Menge A von Knoten enthält, so suchen wir nach einem Wegesystem \mathcal{P} , welches eine A -treue Einbettung eines Kreises auf der Knotenmenge A in den Graphen G ist. Es ist klar, daß unsere Werkzeuge geeignet sind, um für festes $|A|$ zu untersuchen, ob aus gewissen Zusammenhangsvoraussetzungen die Existenz eines solchen Wegesystems folgt. In diesem Kapitel wollen wir aber mehr - wir suchen nach möglichst kurzen Wegesystemen, d.h. nach kurzen Kreisen. Sehen wir alle Kreise mit mindestens l Knoten als lang an, alle anderen entsprechend als kurz, so wollen wir Sätze der folgenden Form erzwingen:

Aussage¹ : *Jeder Graph $G \in \mathcal{K}$ mit weniger als n Knoten hat durch je k seiner Knoten einen Kreis kürzer als l .*

¹Soll nur für eine gegebene Menge \mathcal{K} , sowie vorgegebene natürliche Zahlen n, k, l als Aussage betrachtet werden.

Sei folglich $n(\mathcal{K}, k, l)$ die größte ganze Zahl so, daß mit $n = n(\mathcal{K}, k, l)$ die Aussage wahr ist, sofern eine solche existiert. Andernfalls sei $n(\mathcal{K}, k, l) = +\infty$ gesetzt. Dies ist sinnvoll, da es keine Graphen gibt, die höchstens -1 Knoten haben, wir also sicher nicht über die leere Menge maximieren. Es kristallisiert sich sofort als wesentliche Frage heraus, wie groß nun $n(\mathcal{K}, k, l)$ ist. Sinnvoll ist diese Frage natürlich nur, falls durch beliebige k Knoten eines beliebigen Graphen aus G auch tatsächlich ein Kreis existiert. G.A. Dirac hat in [3] gezeigt, daß jeder k -fach zusammenhängende Graph durch beliebige k seiner Knoten einen Kreis besitzt. Nach einem Resultat von W.T.Tutte [22] sind 4-fach zusammenhängende planare Graphen hamiltonsch. A.K. Kelmans und M.V. Lomonosov zeigten in [12], daß jeder Polyedergraph zu beliebigen fünf seiner Knoten einen Kreis besitzt, der sie enthält. Damit hat also sowohl Planarität als auch Zusammenhang etwas mit dieser Bedingung zu tun. Entsprechend haben wir $n(\mathcal{K}, k, l)$ für die Klassen $\mathcal{K} = \mathcal{G}_c$ der c -fach zusammenhängenden Graphen sowie für die Klassen $\mathcal{K} = \mathcal{P}_c$ der c -fach zusammenhängenden planaren Graphen untersucht (vgl. [8]). Sei also $n_k(c, l) = n(\mathcal{G}_c, k, l)$ und $n_k^*(c, l) = n(\mathcal{P}_c, k, l)$. Es ist klar, daß $n_k^*(c, l + 1) \geq n_k^*(c, l) \geq n_k(c, l)$ gilt. Da die Untersuchung mit wachsendem k an Schwierigkeit gewinnt, haben wir bisher nur die Fälle $k = 1$, $k = 2$, und $k = 3$ untersucht. Als pathologische Fälle erhält man $n_k(1, l) = n_k^*(1, l) = k$, sowie $n_3(2, l) = n_3^*(2, l) = \min(5, l)$. Auf diese Fälle wollen wir hier nicht eingehen.

Die folgenden beiden Sätze fassen die Ergebnisse zusammen:

Theorem 41 (Göring, Harant, Hexel, Tuza, [8])

- (i) $n_1(c, l) = \frac{c(c-1)}{2}l - 2c(c-2) + (l \bmod 2) \frac{(c-1)(c-2)}{2}$ für $l \geq 3$ und $c \geq 2$,
- (ii) $n_2(c, l) = \frac{c}{2}l - c + 2 + (l \bmod 2) \frac{c-2}{2}$ für $l \geq 3$ und $c \geq 2$, und
- (iii) $n_3(c, l) = \frac{c}{2}l - 2c + 3 + (l \bmod 2) \frac{c-2}{2}$ für $c \geq 3$ und $l \geq 6$.

Theorem 42 (Göring, Harant, Hexel, Tuza, [8])

- (i) $n_1^*(3, l) = 3l - 5$ für $l \geq 3$,
- (ii) $n_1^*(4, l) = 6l - 12$ für $l \geq 3$,
- (iii) $15l - 34 \leq n_1^*(5, l) \leq 15l - 24$ für $l \geq 3$,
- (iv) $n_2^*(c, l) = \max(n_2(c, l), 6(c-3))$ für $2 \leq c \leq 5$, $l \geq 3$ und $(c, l) \neq (5, 7)$,
 $16 \leq n_2^*(5, 7) \leq 17$,
- (v) $n_3^*(3, l) = \lfloor \frac{3}{2}(l-1) \rfloor$ für $l \geq 5$,
- (vi) $n_3^*(4, l) = 2l - 4 + (l \bmod 2)$ für $l \geq 5$, und
- (vii) $n_3^*(5, l) = \lceil \frac{5}{2}(l-2) \rceil$ für $l \geq 9$.

Wir wollen an dieser Stelle noch die vorhandenen Lücken des Theorems 42 ausloten, damit klar wird, welche Fragen hier wirklich noch offen sind. Da der kleinste vierfach zusammenhängende planare Graph der Graph des Oktaeders ist, welches durch gegenüberliegende Knoten keinen Kreis der Länge drei oder kürzer besitzt, folgt

$$n_2^*(4, 3) = 6.$$

Da der kleinste fünffach zusammenhängende planare Graph der Graph des Ikosaeders ist, welcher

$$n_2(5, 6) = 12$$

Knoten hat, erhalten wir

$$n_3^*(5, l) = n_2^*(5, l) = 12 \quad \text{für alle } l < 7.$$

Für $n_2^*(5, 7)$ erhalten wir nur die Ungleichung

$$17 = n_2^*(5, 8) \geq n_2^*(5, 7) \geq n_2(5, 7) = 16.$$

Es bleibt offen, welcher der beiden Werte angenommen wird.

Im Beweis von Theorem 42 (vii) wird insbesondere

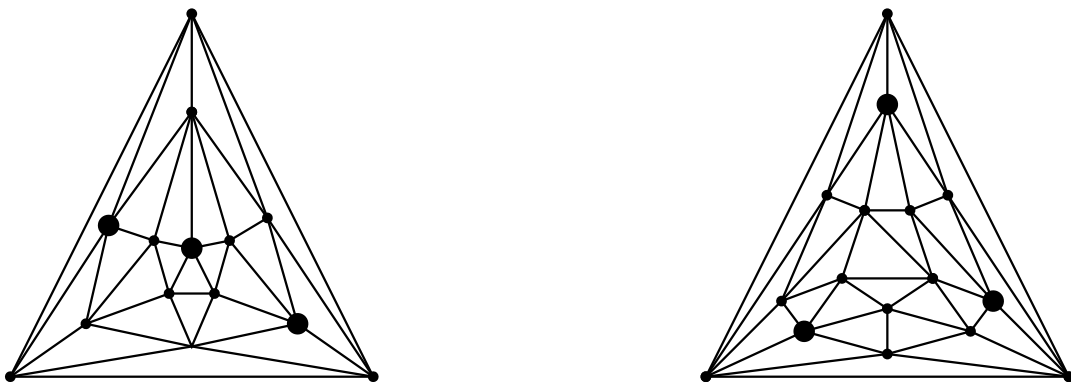
$$n_3^*(5, l) \geq \lfloor \frac{5l - 9}{2} \rfloor$$

gezeigt - und dies sogar für beliebiges $l \geq 3$. Da es keinen 5-fach zusammenhängenden planaren Graphen mit 13 Knoten gibt, folgt mit den beiden Beispielgraphen $G_3^*(5, 7)$ und $G_3^*(5, 8)$ aus Abbildung 4.1, daß

$$14 = n_3^*(5, 7) \quad \text{sowie} \quad 15 \leq n_3^*(5, 8) \leq 16$$

gilt.

Abbildung 4.1: $G_3^*(5, 7)$ und $G_3^*(5, 8)$ haben 14 bzw. 16 Knoten, aber keinen Kreis mit weniger als 7 bzw. weniger als 8 Knoten, der jeweils die drei fett gekennzeichneten Knoten enthält.



4.1.2 Beweise

Die Beweise gliedern sich jeweils in zwei Teile. Um die untere Schranken für $n_k(c, l)$ bzw. $n_k^*(c, l)$ zu beweisen, müssen wir eine unvermeidbare Klasse möglichst großer Untergraphen finden, d.h. eine Menge von großen Graphen, von denen in c -fach zusammenhängenden Graphen ohne kurzen Kreis (kürzer als l) durch k vorgegebene Knoten stets wenigstens einer enthalten ist. Dazu können wir in vielen Fällen unsere Verfahren benutzen. Die obere Schranke ergibt sich dann durch „Auffüllen des Zusammenhangs“ in den Graphen dieser Menge. Wir brauchen dabei aber nur das Ergebnis zu präsentieren, da die Knotenzahl eines konkreten c -fach zusammenhängenden Graphen ohne kurzen Kreis durch k vorgegebene Knoten sofort eine obere Schranke ist. Die Graphen, die „unsere“ oberen Schranken liefern, nennen wir im folgenden Beispielgraphen. Der Beispielgraph für $n_k(c, l)$ wird mit $G_k(c, l)$ bezeichnet, jener für $n_k^*(c, l)$ entsprechend mit $G_k^*(c, l)$.

Für die Abschätzungen von $n_3(c, l)$ bzw. $n_3^*(c, l)$ benötigen wir ein Lemma.

Lemma 43 (Göring, Hexel) *Seien i und c natürliche Zahlen mit $c \geq i \geq 2$, G ein c -fach zusammenhängender Graph, $S = \{x, y, z\} \subseteq G$ und $|S| = 3$.*

Dann hat G einen schlingenf freien S -Minor $H = H(i)$ mit

$$\text{val}_H(x) = \text{val}_H(y) = c$$

$$\text{val}_H(z) = i$$

und der Eigenschaft, daß für jeden Knoten $a \in V(H) \setminus S$ gilt $\text{val}_H(a) = 3$ und $N_H(a) = S$.

Beweis: Da das Aufheben von Mehrfachkanten und Löschen von Schlingen den Zusammenhang eines Graphen nicht senkt, setzen wir o.B.d.A. den Graphen G als schlicht voraus.

Nach Theorem 21 besitzt G eine c -fach-Kante U_0 zwischen x und y als festen Minor.

Falls z in keiner G -Einbettung von U_0 enthalten ist, besitzt nach Korollar 24 (wobei U eine beliebige G -Einbettung von U_0 und $b = z$ sein möge) der Graph G einen S -Minor U_c mit genau $c + 3$ Knoten, der dadurch entsteht, daß jeder der i $z, V(U)$ -Wege auf einem anderen der i x, y -Wege in U endet. Somit ist $N_{U_c}(v) = S$ für $v \in V(U_c) \setminus S$. Das Lemma 43 folgt sofort - H ist ein Untergraph von U_c .

Im anderen Falle ist der Beweis eine vollständige Induktion nach i . In diesem Fall werden wir zusätzlich beweisen, daß H sogar mindestens eine Kante zwischen x und z sowie mindestens eine Kante zwischen y und z besitzt.

Nach Fallvoraussetzung besitzt G einen S -Minor $H(2)$ mit $V(H(2)) = S$, $\text{val}_{H(2)}(x) = \text{val}_{H(2)}(y) = c$ und $\text{val}_{H(2)}(z) = 2$, was die Induktionsvoraussetzung für $i = 2$ klärt.

Sei also für $c > i \geq 2$ die Existenz von $H(i)$ gemäß Lemma 43 vorausgesetzt und besitze mindestens eine xz -Kante und eine yz -Kante. Wir müssen nun die

Existenz von $H(i+1)$ gemäß Lemma 43 zeigen, wobei auch $H(i+1)$ eine xz -Kante und eine yz -Kante besitzen möge. Wegen $i < c$ ist $\text{val}_{H(i)}(x) > \text{val}_{H(i)}(z)$ womit $H(i)$ mindestens zwei xy -Kanten besitzt. Somit ist in jeder² S -treuen Einbettung eine xy -Kante ein xy -Weg der Länge zwei. Aus Korollar 24 folgt somit, daß G einen S -Minor H' besitzt, welcher aus $H(i)$ durch Unterteilen einer (geeigneten) Kante mittels eines neuen Knotens a , sowie Verbinden dieses Knotens mit z entsteht. War die unterteilte Kante eine xy Kante, so können wir $H(i+1) = H'$ setzen. Ansonsten besitzt a in H' einen Nachbarknoten b aus $V(H(I)) \setminus S$. $H(i+1)$ entsteht dann aus H' durch Löschen der ab -Kante und Aufheben der Knoten a und b , was den Induktionsschritt abschließt und damit den Beweis beendet. \square

Setzt man $i = c$ erhält man:

Korollar 44 (Göring, Hexel) *Sei G ein c -fach zusammenhängender Graph und S eine dreielementige Teilmenge von $V(G)$. Dann gibt es ein Wegesystem \mathcal{W} aus G so, daß in $W = \text{Graph}(\mathcal{W})$ jeder Knoten aus S die Valenz c und jeder Knoten $a \in V(W) \setminus S$ die Eigenschaften $\text{val}_M(a) = 3$ und $N_M(a) = S$ erfüllt.*

Dieses Korollar hat noch einen eigenständigen Beweis, den wir im Anschluß bringen - wir wollten aber auf das Lemma mit dem Induktionsbeweis nicht verzichten, da er am besten veranschaulicht, wie unsere Technik zum Auffinden unvermeidbarer Strukturen praktisch funktioniert.

Eigenständiger Beweis (Göring). Seien x, y und a die drei Elemente von S . Wir gehen zu einem Graphen G' über, der aus G entsteht, wenn man a durch eine Menge A von $\lfloor \frac{c}{2} \rfloor$ neuen unabhängigen Knoten mit der gleichen Nachbarschaft wie der von a ersetzt und alle Schlingen sowie bei allen Mehrfachkanten jeweils alle bis auf eine Kante löscht. Offenbar ist G' auch c -fach zusammenhängend. Damit gibt es in G' nach Theorem 21 eine Menge P' von c im Inneren disjunkten xy -Wegen, die wir so wählen wollen, daß zusätzlich die Zahl h jener Wege von P' , die genau einen Knoten aus A enthalten, maximal wird. Dann enthält offenbar jeder Weg aus P' höchstens einen Knoten aus A . Betrachten wir als B die Menge der Knoten aller zu A disjunkten xy -Wege, so zerfällt jeder andere xy -Weg aus P' in zwei AB -Wege. Die Menge aller dieser AB -Wege formt das AB -Wegesystem U . Die Anwendung des Theorems 23 liefert nun eine Menge \mathcal{W}' von c AB -Wegen, wovon mindestens h Wege Ax -Wege und mindestens h Wege Ay -Wege sind und zu jedem $b \in B \setminus S$ aber höchstens ein Ab -Weg in \mathcal{W}' enthalten ist. Falls $2h < c$ gibt es in P' mindestens zwei A vermeidende xy -Wege, somit mindestens einen Knoten in $B \setminus S$ und folglich mindestens einen $A, B \setminus S$ -Weg in \mathcal{W}' . Also gibt es in jedem Falle genau h Ax -Wege und genau h Ay -Wege. Da es aber keine Menge aus c im Inneren disjunkten xy -Wegen geben kann, von denen mehr als h Wege zu A disjunkt sind, darf es unter den verbleibenden $c - 2h$ Wegen aus \mathcal{W}' keine zwei geben, die in B denselben xy -Weg aus P' treffen. Teilt man nun alle A vermeidenden xy -Wege von P' , die durch \mathcal{W}' im Inneren in einem Knoten

²...schlichten... Aber wir hatten ja G als schlicht vorausgesetzt.

- sagen wir w - getroffen werden je in einen xw -Weg und einen wy -Weg auf, fügt die verbleibenden A vermeidenden xy -Wege von P' sowie \mathcal{W}' hinzu und ersetzt danach in allen Wegen jeden zu A gehörigen Knoten durch a , so findet man auch das gesuchte Wegesystem \mathcal{W} aus G gemäß Korollar 44. \square

Zur einfachen Konstruktion der Beispielgraphen benötigen wir noch folgendes Hilfsmittel: Zu einem planar eingebetteten Graphen G und einem Knoten $v \in V(G)$ sei $H(G, v)$ der Graph, der aus G durch Unterteilen jeder mit v inzidenten Kante e durch einen neuen Knoten v_e , Verbinden beliebiger neuer Knoten v_e und $v_{e'}$, falls die e und e' in G mit dem gleichen Land inzidieren und Verbinden von v_e mit den Knoten aus $\text{Enden}(e') \setminus \{v\}$ (das ist höchstens einer), falls e und e' in dieser Reihenfolge in Uhrzeigerichtung um v betrachtet direkt aufeinanderfolgen (vgl. Abbildung 4.2, hervorgeht).

Zu dieser Konstruktion benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 45 (Göring) Falls G ein c -fach zusammenhängender eben eingebetteter schlichter Graph und $v \in V(G)$, so ist $H(G, v)$ ein c -fach zusammenhängender eben eingebetteter Graph mit $|V(G)| + \text{val}_G(v)$ Knoten und der Eigenschaft, daß für alle $w \in V(G - v)$ gilt $d_G(v, w) + 1 = d_{H(G, v)}(v, w)$.

Beweis: Aus den gegebenen Voraussetzungen folgt, daß die Zahl der mit v inzidenten Länder gleich val_G ist. Da beim Übergang von G zu $H(G, v)$ für jedes dieser Länder ein Knoten hinzukommt, aber kein Knoten gelöscht wird, gilt $|V(H(G, v))| = |V(G)| + \text{val}_G(v)$.

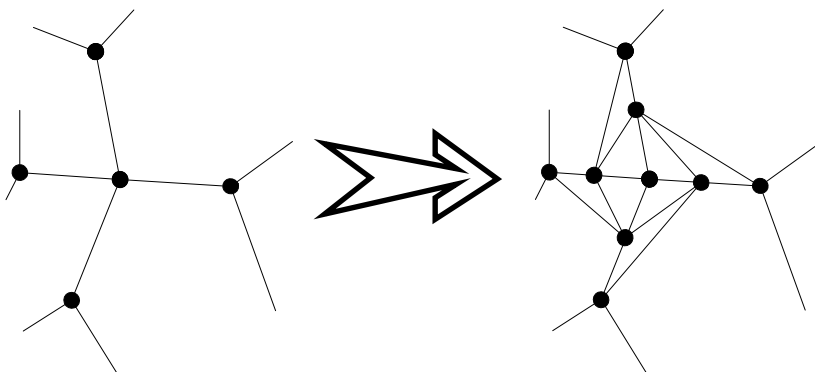
Da für beliebige Knoten w aus $N_G(v)$ gilt $d_{H(G, v)}(v, w) = 2$ und $G - v = H(G, v) - (\{v\} \cup N_{H(G, v)}(v))$, folgt leicht³, daß für alle $w \in V(G - v)$ gilt $d_G(v, w) + 1 = d_{H(G, v)}(v, w)$.

Bleibt noch zu zeigen, daß $H(G, v)$ ein c -fach zusammenhängender Graph ist, was für $c < 2$ trivial ist⁴. Sei also $c \geq 2$ und S ein Separator von $H(G, v)$. Wir

³Beispielsweise durch Induktion über $d_G(v, w)$.

⁴Im Übrigen benötigen wir Lemma 4.2 sowieso nur für $c \geq 2$.

Abbildung 4.2: Konstruktion von $H(G, v)$



zeigen $|S| \geq c$. Sei ϕ die Abbildung, die jedem Knoten $v_e \in V(H(G, v)) \setminus H(G)$ die Kante e zuordnet, bei deren Unterteilung er entstand. Sei

$$S' = (S \cap V(G)) \cup \{\phi(w) | w \in S \setminus V(G)\}$$

Angenommen $G - S'$ zerfällt in mehrere Komponenten. Falls S' weniger als c Elemente, aber G mehr als c Knoten hat, ist es möglich, jede in S' enthaltene Kante geeignet durch einen ihrer Endknoten zu ersetzen, sodaß im Ergebnis ein Separator von G entsteht, der dann mindestens c Knoten hat, woraus $c \leq |S'| = |S|$ folgt.

Bleibt der Fall, daß $G - S'$ ein zusammenhängender Graph ist. Da G offenbar ein fester Minor von $H(G, v)$ und gemäß Konstruktion auch $G - S'$ ein fester Minor von $G - S$ ist, gibt es in $H(G, v) - S$ eine Komponente C , die nur Knoten aus $V(H(G, v)) \setminus V(G)$ enthält. Da unterschiedliche mit v inzidente Kanten nur v als gemeinsamen Endknoten haben, gilt

$$\begin{aligned} |N_{H(G,v)}(C)| &\geq |V(C)| + 1 + \min(2, \text{val}_G(v) - |V(C)|) + \\ &\quad + \min(1, \text{val}_G(v) - |V(C)|) \\ &\geq \min(5, \text{val}_G(v)) \end{aligned}$$

Da $N_{H(G,v)}(C) \subseteq S$ und $|\text{val}_G(v)| \geq c|$ sowie $5 \geq c$ gilt, folgt

$$|S| \geq |N_{H(G,v)}(C)| \geq \min(5, \text{val}_G(v)) \geq c$$

□

Zu einem eben eingebetteten Graphen G und einem Knoten $x \in V(G)$ sei $C(G, x)$ der Graph, der aus allen Knoten und Kanten besteht, die mit dem Land von $G - x$ inzidieren, welches x enthält. Ein weiteres Lemma für planare Graphen ist:

Lemma 46 (Göring) *Für natürliche Zahlen $c, l \geq 3$ sei G ein c -fach zusammenhängender eben eingebetteter Graph, der einen Knoten x aber keinen Kreis durch x mit weniger als l Knoten enthält. Dann ist $C(G, x)$ ein Kreis und es gilt $|V(C(G, x))| \geq \text{val}_G(x)(l - 2)$*

Beweis. $C(G, x)$ ist ein Kreis, da $G - x$ mindestens zweifach zusammenhängend ist. $|V(C(G, x))| \geq \text{val}_G(x)(l - 2)$ gilt, da die anderen Endknoten zweier mit x inzidenter Kanten in $G - x$ mindestens den Abstand $l - 2$ voneinander haben müssen, um Kreise einer kleineren Länge als l zu vermeiden. □

Das letzte Lemma, welches wir benötigen, hilft uns, in bestimmten planaren Graphen Knoten zu zählen:

Lemma 47 (Göring, Zs.Tuza) *Sei G ein vierfach zusammenhängender planarer Graph, C ein Randkreis eines Landes von G und h die Zahl der Knoten von C mit Valenz vier in G . Dann gilt $|N_G(C)| \geq 2|V(C)| - h$.*

Beweis. Zwei in C nicht benachbarte Knoten x und y von C müssen in $G - (C - \{x, y\})$ mindestens den Abstand 3 haben, da die Knoten eines xy -Weges in $G - (C - \{x, y\})$ einen Separator in G bilden.

In C benachbarte Knoten x und y haben höchstens einen gemeinsamen Nachbarn, da bei zwei gemeinsamen Nachbarn z und z' eine der Mengen $\{x, y, z\}$ und $\{x, y, z'\}$ einen Separator bildet. Für die Zahl e von Kanten zwischen C und $N_G(C)$ gilt folglich $|N_G(C)| + |V(C)| \geq e$. Da wegen des vierfachen Zusammenhangs von G die Minimalvalenz in G mindestens vier ist, folgt aber auch $e \geq (5-2)(|V(C)|-h) + (4-2)h = 3|V(C)|-h$. Hängt man beide Ungleichungen aneinander und subtrahiert $|V(C)|$, so ergibt sich die Behauptung. \square

Nun sind wir bereit, die Theoreme 41 und 42 zu beweisen. Um die Notation abzukürzen, bezeichnen wir mit $o_k(c, l)$ bzw. $u_k(c, l)$ die in Theorem 41 gegebene obere bzw. untere Schranke für $n_k(c, l)$. Wird für $n_k(c, l)$ ein genauer Wert angegeben, so sei $o_k(c, l) = u_k(c, l)$ gleich diesem Wert gesetzt. Analog definieren wir $o_k^*(c, l)$ und $u_k^*(c, l)$. Wir müssen unter den gegebenen Voraussetzungen zeigen, daß $o_k(c, l) \geq n_k(c, l) \geq u_k(c, l)$ gilt.

Da dies besonders einfach ist, beginnen wir mit $n_2(c, l)$ bzw. $n_2^*(c, l)$. Für $c = 2$ sind die Behauptungen trivial, betrachten wir also $c > 2$. Sei G ein c -fach zusammenhängender Graph, welcher zwei Knoten x und y enthält, aber keinen Kreis mit weniger als l Knoten durch x und y . Laut Theorem 21 gibt es ein System von c im Inneren disjunkten xy -Wegen. Die kürzesten beiden dieser Wege bilden einen Kreis durch x und y der mindestens l Knoten besitzt, weswegen alle anderen Wege mindestens die Länge $l/2$ haben. Es ergibt sich

$$|G| \geq l + (c-2) \frac{l-1+l \bmod 2}{2} = \frac{c}{2}l - c + 2 + (l \bmod 2) \frac{c-2}{2},$$

was die gewünschte untere Schranke für $n_2(c, l)$ sowie $n_2^*(c, l)$ liefert.

Sei $G_2(c, l)$ ein Graph, der zu zwei Knoten x und y ein System von c disjunkten xy -Wegen enthält von denen einer die Länge $\lfloor \frac{c}{2} \rfloor$ und die anderen die Länge $\lceil \frac{c}{2} \rceil$ haben und in dem zwei Knoten unterschiedlicher Wege dieses Systems genau dann verbunden sind, wenn sie jeweils auf dem sie enthaltenden Weg gleichen Abstand zu x haben.

Mit $G_2^*(3, 3)$, $G_2^*(3, 4)$, $G_2^*(4, 4)$, $G_2^*(4, 5)$, $G^*(5, 6)$, $G^*(5, 9)$ gemäß Abbildung 4.3 sowie der rekursiven Definition $G_2^*(c, l+2) = H(G^*(c, l), x)$ (vgl. Lemma 4.2) lassen sich alle nötigen oberen Schranken induktiv zeigen. Besonders zu beachten ist dabei, daß $G_2^*(5, 8)$ die korrekte obere Schranke auch für $n_2^*(5, 7)$ liefert, nämlich 17.

Lediglich im Falle $n_2^*(5, 7)$ müssen wir noch zeigen, daß die bisher bewiesene untere Schranke nicht angenommen werden kann, d.h. $n_2^*(5, 7) > 16$.

Fahren wir fort mit dem Beweis der Aussage über $n_1(c, l)$.

Sei also G ein c -fach zusammenhängender Graph mit einem Knoten x der in keinem Kreis von G mit weniger als $l > 3$ Knoten enthalten ist. Sei M_v die

Menge aller Knoten, die in $G - x$ zu v einen Abstand von weniger als $\frac{l}{2} - 1$ hat. Offenbar sind zu Nachbarn v und w von x bezüglich unterschiedlicher Kanten die Mengen M_v und M_w disjunkt und falls l gerade ist gibt es noch nicht einmal eine $M_v M_w$ -Kante in G , da ansonsten sofort die Existenz eines Kreises mit weniger als l Knoten durch x in G folgen würde. Wegen des c -fachen Zusammenhangs von G gibt es für jedes $v \in N_G(x)$ in G ein System aus c im Inneren disjunkten vx -Wegen, von denen nach Definition von M_v wenigstens $c - 1$ je mindestens $\frac{l}{2} - 2$ innere Knoten in M_v haben, also auch mindestens $\frac{l}{2} - 2 + \frac{l \bmod 2}{2}$. Zusätzlich liegt noch v in M_v .

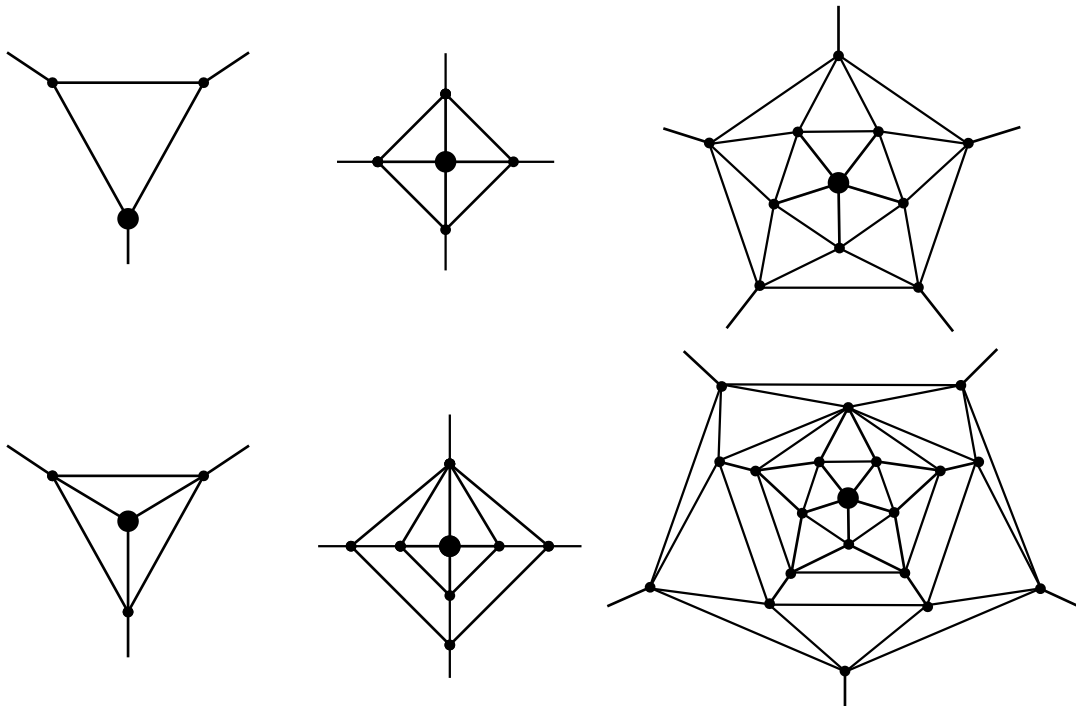
Ebenfalls wegen des c -fachen Zusammenhangs von G gehen von x mindestens c Kanten aus, sodaß es somit mindestens

$$c((c-1)(\frac{l}{2} - 2 + \frac{l \bmod 2}{2}) + 1) = \frac{c(c-1)}{2}l - 2c(c-1) + c + (l \bmod 2) \frac{c(c-1)}{2}$$

Knoten in G gibt, die zu $\bigcup_{v \in N_G(x)} M_v$ gehören. Falls l gerade ist, bilden alle anderen Knoten von G einen Separator in G , es handelt sich also mindestens um c Stück; andernfalls gibt es wenigstens noch einen anderen Knoten in G , und zwar x . Es

Abbildung 4.3: oben: $G_2^*(3, 3)$ (links); $G_2^*(4, 4)$ (Mitte); $G_2^*(5, 6)$ (rechts)
 unten: $G_2^*(3, 4)$ (links); $G_2^*(4, 5)$ (Mitte); $G_2^*(5, 9)$ (rechts)

Der fett markierten Knoten ist x , die hängenden Kanten sollen zu y führen.



folgt

$$|G| \geq \frac{c(c-1)}{2}l - 2c(c-1) + c + (l \bmod 2) \frac{c(c-1)}{2} + c - (l \bmod 2)(c-1) = u_1(c, l)$$

$G_1(c, l)$ erhalten wir entsprechend: Seien T_i für $i \in \mathbb{G}_1^c$ jeweils disjunkte Graphen bestehend aus je $c-1$ Wegen der Länge $\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1$ die alle einen Knoten v_i enthalten und ansonsten paarweise disjunkt sind. K sei ein zu allen T_i disjunkter Graph mit $c-1$ Knoten. $G_1(c, l)$ entsteht nun durch

- Vereinigung aller T_i ,
- Hinzunahme eines neuen Knoten x ,
- Verbinden von x mit allen Knoten v_i ,
- Verbinden aller Knoten die zum gleichen T_i gehören und darin zu v_i gleichen Abstand haben,
- falls l gerade ist, Verbinden aller Knoten die bis dahin maximalen Abstand zu x haben mit allen Knoten aus K ,
- und in jedem Falle am Ende Verbinden aller Knoten, die bis dahin zu x maximalen Abstand haben.

Offenbar sind für $G_1(c, l)$ alle Abschätzungen des vorigen Absatzes scharf⁵, was $o_1(c, l) = n_1(c, l) = u_1(c, l)$ liefert.

Um $u_1^*(3, l)$ für $l \geq 3$ zu bestimmen, betrachten wir einen beliebigen eben eingebetteten dreifach zusammenhängenden Graphen G , der x , aber keinen Kreis mit weniger als l Knoten durch x enthält. Wegen Lemma 46 gilt:

$$|V(G)| \geq |V(C(G, x))| + 1 \geq 3(l-2) + 1 = u_1^*(3, l)$$

Entsprechend sei C ein Kreis mit $3(l-2)$ Knoten und $S = \{a, b, c\} \subseteq V(C)$ mit $d_C(a, b) = d_C(a, c) = d_C(b, c) = l-2$ gegeben. Desweiteren sei x ein Knoten, der nicht zu $V(C)$ gehört. $G_1^*(3, l)$ entstehe durch Verbinden von x mit allen Knoten von S und Verbinden von je zwei Knoten y und z zu denen es ein $v \in S$ gibt mit $d_C(v, y) = d_C(v, z) \leq \frac{l}{2} - 1$ (vgl. Abbildung 4.4). Es folgt sofort

$$o_1^*(3, l) = n_1^*(3, l) = u_1^*(3, l)$$

⁵Man beachte besonders $M_{v_i} = V(T_i)$, auch um einzusehen, daß tatsächlich ein Beispielgraph konstruiert wurde.

Um $u_1^*(4, l)$ für $l \geq 3$ zu bestimmen, sei G irgendein vierfach zusammenhängender eben eingebetteter Graph der einen Knoten x aber keinen Kreis kürzer als l durch x enthält. T entstehe aus G durch Verbinden von x mit allen Knoten die nicht mit x adjazent, aber mit x gemeinsam zu einem Land von G inzident sind, sowie durch beliebige Triangulation der restlichen Länder von G . Wegen Lemma 46 folgt $|N_T(x)| = |V(C(G, x))| \geq \text{val}_G(x)(l - 2)$. Da wegen des vierfachen Zusammenhangs von G jeder Knoten aus G in G mindestens Valenz vier hat, enthält $N_T(x)$ genau $\text{val}_G(x)$ Knoten mit einer Valenz von mindestens vier und die Valenz aller anderen Knoten von $N_T(x)$ ist mindestens fünf. Da auch T vierfach zusammenhängend ist, enthält ein Dreieck höchstens zwei Knoten von $N_T(x)$ und das auch nur, wenn diese benachbart sind. Somit zerlegt T die Ebene in mindestens

$$\begin{aligned} 5|N_T(x)| - \text{val}_G(x) - 2|N_T(x)| &= 3|N_T(x)| - \text{val}_G(x) \\ &\geq 3\text{val}_G(x)(l - 2) - \text{val}_G(x) \geq 12l - 28 \end{aligned}$$

Dreiecke, wobei die letzte Abschätzung wegen $3(l - 2) - 1 > 0$ (aus $l \geq 3$) und $\text{val}_G(x) \geq 4$ gilt. Da bekanntlich (vgl. [2]) jede Triangulation der Ebene in k Dreiecke genau $\frac{k}{2} + 2$ Knoten hat⁶, folgt $|V(G)| = |V(T)| \geq 6l - 12 = u_1^*(4, l)$.

Um $G_1^*(4, l)$ zu konstruieren,

- beginnen wir mit einem eben eingebetteten Oktaedergraphen in dem x und y nichtadjazente Knoten sind,
- ersetzen jede Kante die weder mit x noch mit y inzidiert,
- durch je einen Weg der Länge $l - 2$,
- zwei mit y aber mit keinem gemeinsamen Land des Oktaedergraphen inzidente Kanten durch Wege der Länge $\lceil \frac{l-1}{2} \rceil$
- und die anderen beiden mit y inzidenten Kanten durch Wege der Länge $\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$

und erhalten als Zwischenergebnis einen Graphen H .

Die acht hierbei verwendeten Wege mögen dabei im Inneren disjunkt sein. $G_1^*(4, l)$ ergibt sich nun durch Triangulation der 4 nicht mit x inzidenten Länder von H derart, daß alle Knoten, die zu einem Land inzident sind, zu dem auch x inzident ist, die Valenz vier erhalten (vgl. Abbildung 4.4). Setzen wir bei der Herleitung von $u_1^*(4, l)$ den Graphen G gleich $G_1^*(4, l)$, so stellen wir fest, daß dann alle Abschätzungen scharf sind, woraus sofort $o_1^*(4, l) = n_1^*(4, l) = u_1^*(4, l)$ folgt.

⁶Man beachte, daß die Ebene nur in gerade viele Dreiecke zerlegbar ist!

Um $u_1^*(5, l)$ für $l \geq 3$ zu erhalten, betrachten wir irgendeinen eben eingebetteten fünffach zusammenhängenden Graphen G , der x , aber keinen Kreis mit weniger als l Knoten durch x enthält. Wegen Lemma 46 gilt $|V(C(G, x))| \geq \text{val}_G(x)(l-2)$. Desweiteren ist $G - x$ vierfach zusammenhängend und $C(G, x)$ besitzt höchstens $\text{val}_G(x)$ Knoten, die in $G - x$ die Valenz vier haben. Nach Lemma 47 ist folglich

$$\begin{aligned} |N_{G-x}(C(G, x))| &\geq 2|V(C(G, x))| - \text{val}_G(x) \\ &\geq (2l - 5)\text{val}_G(x). \end{aligned}$$

Somit ist

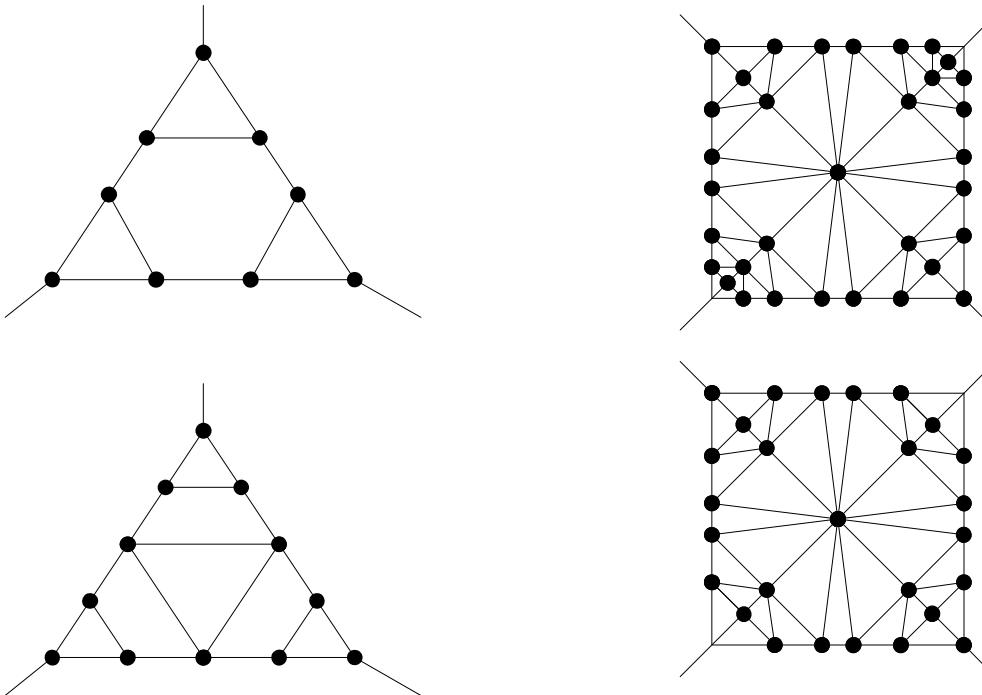
$$\begin{aligned} |V(G)| &\geq |N_{G-x}(C(G, x))| + |V(C(G, x))| + 1 \\ &\geq (3l - 7)\text{val}_G(x) + 1 \geq 15l - 34 = u_1^*(5, l) \end{aligned}$$

Um $o_1^*(5, l)$ zu erhalten konstruieren wir $G_1^*(5, l)$ entsprechend der oben betrachteten Struktur. Sei

- C ein eben eingebetteter Kreis der Länge $5(l-2)$,

Abbildung 4.4: $G_1^*(3, 5)$ (links oben); $G_1^*(4, 7)$ (rechts oben);
 $G_1^*(3, 6)$ (links unten); $G_1^*(4, 8)$ (rechts unten).

Die hängenden Kanten mögen zu dem nicht gezeichneten Knoten x führen.



- $S \subseteq V(C)$ eine fünfelementige Menge von Knoten, die auf C paarweise einen Abstand von mindestens $l - 2$ haben,
- D ein in das Innenland von C eingebetteter Kreis mit $10l - 25$ Knoten
- und x ein im Außenland von C eingebetteter isolierter Knoten.

Der Hilfsgraph H entsteht aus der Vereinigung von C , D und x , durch Verbinden von x mit allen Knoten aus S und nachfolgendes Triangulieren des von C und D berandeten Landes durch Kanten zwischen C und D derart, daß im Ergebnis alle Knoten aus C die Valenz fünf haben. H hat dann $u_1^*(5, l)$ Knoten da alle obigen Abschätzungen scharf eingehalten wurden; ist aber leider nicht fünffach zusammenhängend, da die Knoten von D höchstens Valenz vier haben. Dieses Problem läßt sich nicht durch Triangulation des nur von D berandeten Landes ohne zusätzliche Knoten beheben, da hierbei wenigstens zwei Dreiecke zwei Kanten mit D gemeinsam haben, also die Valenz von wenigstens zwei Knoten von D im resultierenden Graphen kleiner als 5 bliebe. Zwangsläufig könnten wir die untere Schranke für $n_1^*(5, l)$ noch um eins erhöhen⁷.

Die kleinsten schlichten fünffach zusammenhängenden Polyedergraphen sind Ikosaedergraphen⁸, sodaß trivialerweise tatsächlich $o_1^*(5, 3) \geq n_1^*(5, 3) = 12 = u_1^*(5, 3) + 1$ gilt. Für $l \in \{4, 5, 6, 7\}$ genügt es gemäß Abbildung 4.5 je vier Knoten in das von D berandete Land von H einzufügen, um durch geeignete nachfolgende Triangulation von D mit Hilfe dieser vier Knoten den fünffachen Zusammenhang zu erzeugen ohne das dabei kurze Kreise entstehen. Für $l \geq 8$ setzen wir $H' = (H - x) - (C - S)$ und ordnen jedem Knoten v aus S die Menge

$$M_v = \{w \in V(D) \mid 2 \leq d_{H'}(v, w) \leq l - 2\}$$

zu. Um $G_1^*(5, l)$ zu konstruieren (vgl. Abbildung 4.6),

- verbinden wir in H zunächst zu jedem $v \in S$ alle Paare (w, w') verschiedener Knoten aus M_v mit $d_{H'}(v, w) = d_{H'}(v, w')$ durch eine Kante $e_v(d_{H'}(v, w))$,
- verdoppeln für jedes $v \in S$ die Kante $e_v(2)$,
- unterteilen jeweils die beiden entstehenden Kanten durch je einen Knoten,
- verbinden diese Unterteilungsknoten mit allen Knoten, die zu einem zu ihnen inzidenten Land inzident sind

⁷Das tun wir deswegen nicht, weil die Eindeutigkeit der Konstruktion bis dahin unter der Bedingung der scharfen Abschätzungen, die zu $u_1^*(5, l)$ führten, zwar plausibel ist, ein Beweis aber eventuell größerer Sorgfalt bedarf.

⁸Einen solchen erhält man aus H , wenn man im Fall $l = 3$ in das von D berandete Land von H einen Knoten einsetzt und mit allen Knoten aus D verbindet!

- und fügen in jedes nun noch durch ein Viereck berandete Land eine Diagonale so ein, daß keine zwei der eingefügten Diagonalen Endknoten gemeinsam haben.

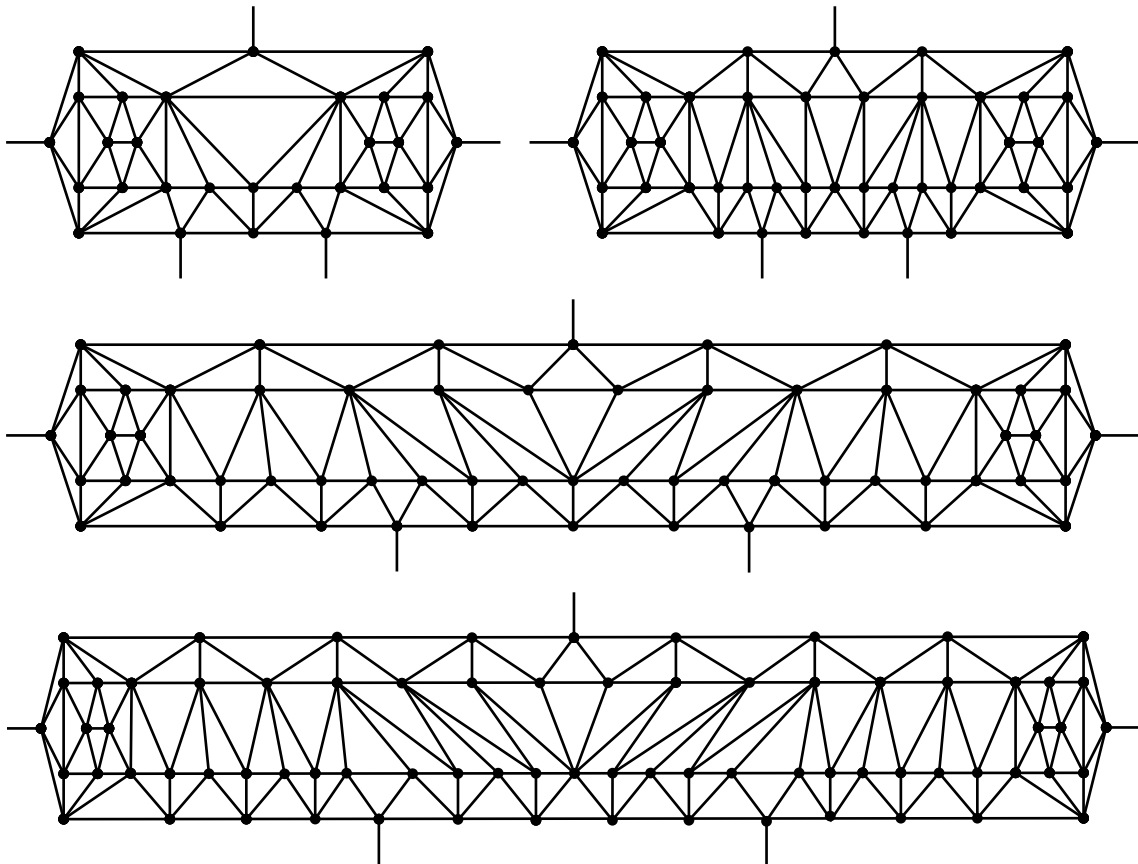
Offenbar mußten wir nur noch zehn zusätzliche Knoten einfügen um den Beispielgraphen zu erzeugen, was dann

$$o_1^*(5, l) = u_1^*(5, l) + 10 \geq n^*(5, l) \geq u_1^*(5, l)$$

liefert. Das die allgemeine Konstruktion für $l \geq 6$ den fünffachen Zusammenhang liefert, überlegt man sich beispielsweise, indem man zunächst überprüft, daß in H schon S fünffach zusammenhängend war und dann in $G_1^*(5, l)$ nur noch zu jedem Knoten w außerhalb von S fünf Sw -Wege sucht, die sich nur in w überschneiden.

Am Ende dieses Falles sei angemerkt, daß wir vermuten, daß für hinreichend großes l tatsächlich zehn zusätzliche Knoten notwendig sind, man aber für $l \in \{4, 5, 6\}$ genau vier zusätzliche Knoten benötigt.

Abbildung 4.5: $G_1^*(5, 4)$ (links); $G_1^*(5, 5)$ (rechts); $G_1^*(5, 6)$ (Mitte); $G_1^*(5, 7)$ (unten). Die hängenden Kanten führen zum nicht gezeichneten Knoten x .



An dieser Stelle nehmen wir uns kurz Zeit für eine Zwischenbilanz über die Nutzung unseres Wissens über Wegesysteme. Im planaren Fall war dieses Wissen bei einem vorgeschriebenen Knoten nicht sehr hilfreich. Hier spielten Valenzaussagen und Folgerungen aus der Einbettbarkeit die tragende Rolle, was man am dramatischsten beim fünffachen Zusammenhang durch die Änderung des linearen Faktors (Vorfaktor vor l) beim Übergang von $n_1(5, l)$ zu $n_1^*(5, l)$ bemerkt.

Bei zwei vorgeschriebenen Knotenpunkten hingegen spielte die Einschränkung auf die Ebene so gut wie keine Rolle.

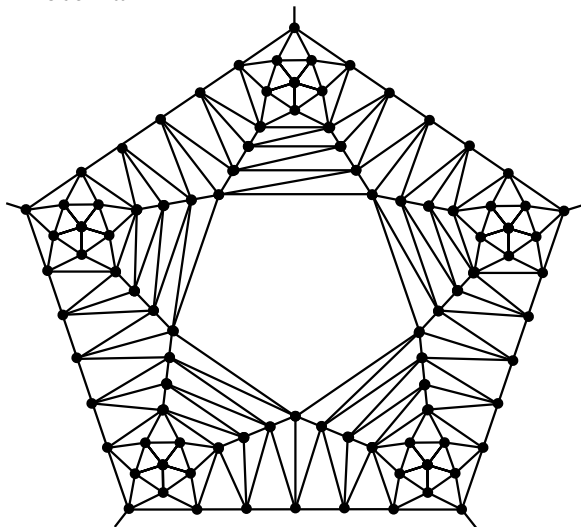
Beide Male trat aber eine „Entmischung“ der Argumente auf - einmal im wesentlichen Einbettungsargumente - mit z.T. erheblich anderen Ergebnissen als ohne Einschränkung auf die Ebene, das andere Mal reine „Wegesystemargumente“, wobei die Einschränkung auf die Ebene aber kaum Veränderung der Ergebnisse bedeutete.

Was hat die zusätzliche Betrachtung planarer Graphen in diesem Beispiel also mit dem Thema dieser Arbeit zu tun, wo wir doch bisher dabei entweder ohne Wegesysteme auskamen, oder die Einschränkung nahezu einflußlos blieb?

Nun, die Entkopplung bei ein bis zwei vorgeschriebenen Knoten kommt daher zustande, daß die mit „Wegesystemargumenten“ aufgespürten Strukturen in diesen Fällen ohnehin planar waren und erst durch das „Auffüllen“ dieser Strukturen auf den gewünschten Zusammenhang die Einbettungsargumente ins Feld geführt werden, entweder vernichtend für den Ansatz über diese Strukturen, oder aber ohne wesentlichen Einfluß.

Fahren wir aber nun fort im Beweis und wenden wir uns nun $n_3(c, l)$ und $n_3^*(c, l)$

Abbildung 4.6: $G_1^*(5, 8)$. Die hängenden Kanten führen zum nicht gezeichneten Knoten x .



zu, wobei wir zuerst die untere Schranke ermitteln und dann wie gewohnt mittels Beispielgraphen zeigen, daß sie auch angenommen wird.

Sei G also ein c -fach zusammenhängender Graph, S eine dreielementige Teilmenge von $V(G)$ und l eine natürliche Zahl so, daß kein S enthaltender Kreis aus G weniger als l Knoten hat. Sei weiter \mathcal{W} dann das Wegesystem von G gemäß Korollar 44 und $W = \text{Graph}(\mathcal{W})$ sowie $H = \text{Bild}(W)$. Für jeden S enthaltenden Kreis C aus W ist $\text{Bild}(C)$ ein S enthaltender Kreis aus H und mithin aus G . Das führt uns zu

$$\sum_{e \in E(C)} |E(e)| = |E(\text{Bild}(C))| \geq l \quad (4.1)$$

Aufgrund seiner Struktur läßt sich der Graph W zerlegen in β kantendisjunkte Kreise mit Knotenmenge S und α kantendisjunkte Klauen⁹ mit Blattmenge S , wobei $\alpha + 2\beta = c$ und $\alpha + 3 = |V(W)|$ gilt. Die Klauen überschneiden sich dabei nur in S . Die Mengen der Klauen und Kreise entsprechend dieser Zerlegung nennen wir \mathcal{K} und \mathcal{C} . Durch zweifaches Abzählen der Knoten-Kante-Inzidenzen in H erhält man

$$\begin{aligned} |V(G)| &\geq |V(H)| \\ &\geq |E(H)| + \frac{9 - 3c - |V(W)|}{2} \\ &= 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + \sum_{X \in \mathcal{K} \cup \mathcal{C}} |E(\text{Bild}(X))| \end{aligned} \quad (4.2)$$

Für jeden Kreis $C \in \mathcal{C}$ gilt offenbar $|E(\text{Bild}(C))| \geq l$.

Falls alle Bilder aller Klauen mindestens $\frac{l + (l \bmod 2)}{2}$ Kanten haben - oder dies zumindest im arithmetischen Mittel gilt, folgt aus Beziehung (4.2) sofort

$$\begin{aligned} |V(G)| &\geq 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + \beta l + \alpha \frac{l \bmod 2}{2} \\ &= \frac{c}{2} l + 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + \alpha \frac{l \bmod 2}{2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\geq u_3(c, l) \quad (4.4)$$

Falls G und somit auch W sogar planar ist, folgt im Falle $c \in \{3, 5\}$ sofort $\alpha = 1$, sowie im Falle $c = 4$ entsprechend $\alpha \in \{0, 2\}$, da für $\alpha \geq 3$ der Graph W ja einen $K_{3,3}$ enthält und $c - \alpha = 2\beta$, also gerade ist. Aus Beziehung (4.3) folgt also durch Einsetzen von 3, 4 bzw. 5 für c und entsprechendes Abschätzen von α nach oben¹⁰ dann sofort $|V(G)| \geq u_3^*(c, l)$, falls G planar ist.

Kehren wir zurück zum allgemeinen Fall. Wir brauchen für die unteren Schranken nur noch die Situation zu untersuchen, in der es eine Klaue $K \in \mathcal{K}$ gibt, die

$$h = |E(\text{Bild}(K))| \leq \frac{l - (l \bmod 2)}{2} \quad (4.5)$$

⁹Eine Klaue ist ein Baum mit drei Kanten und drei Blättern, d.h. drei Knoten der Valenz 1

¹⁰Der Vorfaktor für α ist $\frac{(l \bmod 2) - 1}{2} \leq 0$

erfüllt.

Sei C ein beliebiger Kreis aus \mathcal{C} . Dann besitzt $C \cup K$ genau drei Kreise der Länge vier, jede Kante von W ist in genau zwei dieser Kreise enthalten und die Längen der Bilder dieser drei Kreise müssen sich zu mindestens $3l$ addieren. Es folgt also $2h + 2|E(\text{Bild}(C))| \geq 3l$, also wegen der Ganzzahligkeit aller auftauchenden Größen sogar

$$|E(\text{Bild}(C))| \geq \frac{3}{2}l - h + \frac{l \bmod 2}{2} \quad (4.6)$$

Im Falle $\alpha = 1$ liefert uns diese Ungleichung zusammen mit den Beziehungen (4.2), (4.5) und $c \geq 3$

$$\begin{aligned} |V(G)| &\geq 3 - \frac{3c+1}{2} + h + \frac{c-1}{2} \left(\frac{3}{2}l - h + \frac{l \bmod 2}{2} \right) \\ &= \frac{5-3c}{2} + \frac{3(c-1)}{4}l - \frac{c-3}{2}h + \frac{c-1}{4}(l \bmod 2) \\ &\geq \frac{5-3c}{2} + \frac{3(c-1)}{4}l - \frac{c-3}{2} \left(\frac{l - (l \bmod 2)}{2} \right) + \frac{c-1}{4}(l \bmod 2) \\ &= \frac{c}{2}l + \frac{5-3c}{2} + \frac{c-2}{2}(l \bmod 2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\geq u_3(c, l) \quad (4.8)$$

Falls G planar ist, folgt sofort¹¹ $c = 3$ oder $c = 5$ und in beiden Fällen liefert Einsetzen des Wertes von c tatsächlich

$$|V(G)| \geq u_3^*(c, l).$$

Im weiteren können wir also von $\alpha \geq 2$ ausgehen. Seien unterschiedliche $K, K' \in \mathcal{K}$ so gewählt, daß $h' = |E(\text{Bild}(K \cup K'))|$ minimal wird und außerdem $h = |E(\text{Bild}(K))| \leq |E(\text{Bild}(K'))|$ gilt. Falls $h \geq l + 1$ gilt, folgt für alle Klauen $K'' \in \mathcal{K} \setminus \{K, K'\}$ sofort $|E(\text{Bild}(K''))| \geq \frac{l+l \bmod 2}{2}$, womit wiederum Beziehung (4.3) mit allen Konsequenzen folgt.

Somit brauchen wir lediglich noch die Möglichkeit $h' \leq l$ zu betrachten. Es folgt weiter

$$h \leq \frac{h' - (h' \bmod 2)}{2} \quad (4.9)$$

Falls es eine Klaue $K'' \in \mathcal{K} \setminus \{K, K'\}$ gibt, so gibt es genau sechs Kreise der Länge sechs in $H' = K \cup K' \cup K''$. Jede Kante von H' ist in genau vier dieser Kreise enthalten und die Summe der Längen der Bilder dieser sechs Kreise ist mindestens $6l$. Somit folgt $|E(\text{Bild}(K''))| + h' = |E(\text{Bild}(H'))| \geq \frac{6}{4}l = \frac{3}{2}l$ und wegen Ganzzahligkeit aller beteiligten Größen sogar

$$|E(\text{Bild}(K''))| \geq \frac{3}{2}l - h' + \frac{l \bmod 2}{2} \quad (4.10)$$

¹¹Wegen $\alpha + 2\beta = c$ ist $c - \alpha = c - 1$ gerade, also c ungerade.

Falls es einen Kreis $C \in \mathcal{C}$ gibt, so gibt es genau sechs Kreise der Länge fünf in $H'' = K \cup K' \cup C$. Jede Kante von $K \cup K'$ ist in genau vier dieser Kreise, jede Kante von C in genau zwei dieser Kreise enthalten und die Summe der Längen der Bilder dieser sechs Kreise ist mindestens $6l$. Somit folgt $2|E(\text{Bild}(C))| + 4h' \geq 6l$ und folglich

$$|E(\text{Bild}(C))| \geq 3l - 2h' \quad (4.11)$$

Sollte $h' = l$ gelten, so ergibt sich aus den Beziehungen (4.2), (4.6), (4.9) und (4.10)

$$\begin{aligned} |V(G)| &\geq 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + \sum_{X \in \mathcal{K} \cup \mathcal{C}} |E(\text{Bild}(X))| \\ &\geq 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + l + \beta \left(\frac{3}{2}l - h + \frac{l \bmod 2}{2} \right) + \\ &\quad + (\alpha - 2) \left(\frac{3}{2}l - l + \frac{l \bmod 2}{2} \right) \\ &\geq 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + l + \beta \left(\frac{3}{2}l - \frac{l - (l \bmod 2)}{2} + \frac{l \bmod 2}{2} \right) + \\ &\quad + (\alpha - 2) \left(\frac{3}{2}l - l + \frac{l \bmod 2}{2} \right) \\ &= 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + \frac{\beta + 2\alpha}{2}l + \frac{2\beta + \alpha - 2}{2}(l \bmod 2) \\ &= \frac{c}{2}l + 3 - \frac{3c}{2} + \frac{c - 2}{2}(l \bmod 2) - \frac{\alpha}{2} \quad (4.12) \\ &\geq u_3(c, l) \quad (4.13) \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung braucht man in Gleichung (4.12) lediglich $\alpha \leq c$ einzusetzen. Sollte G zusätzlich planar sein, folgt wegen $\alpha \geq 2$ sofort $c = 4$ und $\alpha = 2$, womit Gleichung (4.12) in $|V(G)| \geq u_3^*(4, l)$ übergeht.

Somit können wir uns im folgenden auf $h' \leq l - 1$ beschränken. Setzen wir die Beziehungen (4.2), (4.9), (4.10) und (4.11) zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} |V(G)| &\geq 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + \sum_{X \in \mathcal{K} \cup \mathcal{C}} |E(\text{Bild}(X))| \\ &\geq 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + h' + \beta(3l - 2h') + (\alpha - 2) \left(\frac{3}{2}l - h' + \frac{l \bmod 2}{2} \right) \\ &\geq \frac{3}{2}(2\beta + \alpha - 2)l - (2\beta + \alpha - 3)h' + 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + (\alpha - 2) \frac{l \bmod 2}{2} \\ &= \frac{3c}{2}l - (c - 3)h' - 3l + 3 - \frac{3c + \alpha}{2} + (\alpha - 2) \frac{l \bmod 2}{2} \\ &\geq \frac{c}{2}l - \frac{c + \alpha}{2} + (\alpha - 2) \frac{l \bmod 2}{2} \end{aligned}$$

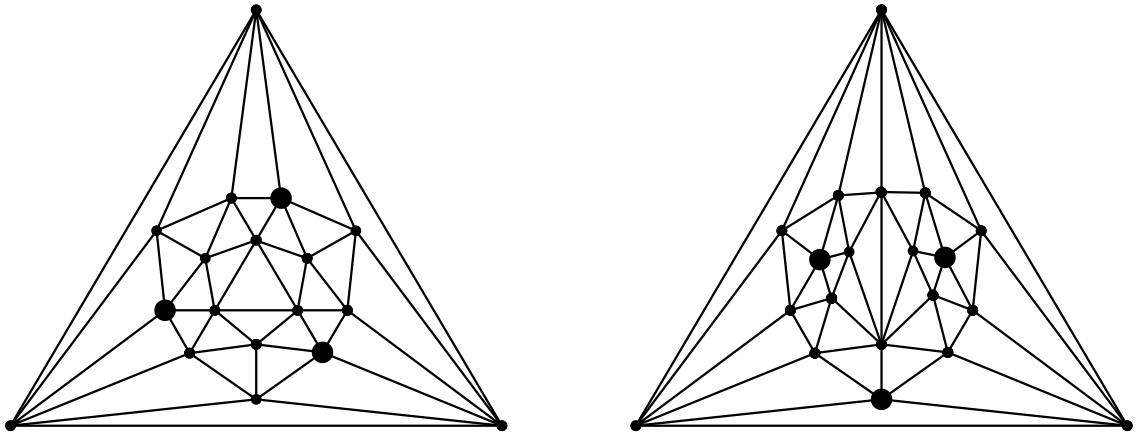
$$\begin{aligned}
&\geq \frac{c}{2}l - c + (c-2)\frac{l \bmod 2}{2} \\
&\geq u_3(c, l)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Wenden wir uns nun den Beispielgraphen zu, die zeigen, daß die unteren Schranken scharf sind. Wir konstruieren $G_3(c, l)$ für $l \geq 6$ und $c \geq 3$ aus $G_2(c, l-2)$ durch Hinzufügen eines weiteren Knotens z und Verbinden von z mit allen bisherigen Nachbarn von x . Zu jedem Kreis in $G_3(c, l)$, der x, y und z enthält, finden wir (durch Kontraktion von x und z) in $G_2(c, l)$ einen x und y enthaltenden Kreis, der mindestens zwei Knoten weniger besitzt, da wegen $l > 6$ der Knoten y weder mit x noch mit z inzidiert. Daraus folgt, daß $G_3(c, l)$ tatsächlich keinen Kreis mit weniger als l Knoten durch x, y und z besitzt. Offenbar ist mit $G_2(c, l-2)$ auch $G_3(c, l)$ ein c -fach zusammenhängender Graph. Damit ist gezeigt, daß $n_3(c, l) \leq n_2(c, l-2) + 1 = o_3(c, l)$.

Planare Beispielgraphen ergeben sich wie folgt: Sei C ein Kreis der Länge sechs und S eine Menge von drei unabhängigen Knoten. $G_3^*(3, 6)$ und $G_3^*(4, 6)$ entstehen aus C durch Verbinden von allen Knoten von C mit einem bzw. zwei zusätzlich hinzugenommenen Knoten. $G_3^*(3, 5)$ und $G_3^*(4, 5)$ entstehen aus $G_3^*(3, 6)$ bzw. $G_3^*(4, 6)$ durch Löschen eines Knotens aus $v \in V(C) \setminus S$ und Hinzufügen einer Kante e mit $\text{Enden}(e) = N_C(v)$. In Abbildung 4.7 sind die Beispielgraphen $G_3^*(5, 9)$ und $G_3^*(5, 10)$ angegeben. Mit Lemma 45 ist dann induktiv leicht einzusehen, daß durch $G_3^*(c, l+2) = H(G_3^*(c, l), x)$ die Beispielgraphen für alle l derart definiert sind, daß $o_3^*(c, l) = u_3^*(c, l) = |V(G_3^*(c, l))| = n_3^*(c, l)$ gilt. \square

Zunächst noch einige Bemerkungen zu dem hinter uns liegenden Beweis für die Größe von $n_3^*(c, l)$. Wir verwenden an keiner Stelle, daß ein planarer Graph auch keinen K_5 als Minor haben darf. Sei $\mathcal{G}_c(m', m)$ die Klasse aller c -fach zusammenhängenden Graphen, die keinen $K_{m', m}$ als Minor haben. Es folgt sofort:

Abbildung 4.7: $G_3^*(5, 9)$ (links) und $G_3^*(5, 10)$ (rechts).



Korollar 48 (Göring) $n(\mathcal{G}_c(3, 3), 3, l) = n_3^*(c, l)$

In die Betrachtungen des Beweises läßt sich natürlich jede beliebige Abschätzung für α einarbeiten, wodurch diese Überlegungen auch zu interessanten unteren Schranken für $n(\mathcal{G}_c(3, m), 3, l)$ führen.

Die Bestimmung der unteren Schranken $u_3(c, l)$ alleine läßt sich auch durch eine vereinfachte Behandlung der Abschätzungen erreichen, wie wir dies im Beweis des folgenden Lemmas tun werden. In diesem Lemma werden den Kanten eines Graphen Gewichte zugeordnet; die Zielfunktion (linke Seite der Behauptung) erscheint im ersten Augenblick etwas eigentümlich. Sie entsteht, wenn wir in einem Wegesystem \mathcal{W} mit $W = \text{Graph}(\mathcal{W})$ für jede Kante $e \in E(W)$ ihr Gewicht mit $g_e = |E(e)|$ festlegen und zu so gegebenen Gewichten nach der Zahl der Knoten von $\text{Bild}(\mathcal{W})$, also der Zahl der von \mathcal{W} überdeckten Knoten fragen.¹² Die rechte Seite der Behauptung ist gleich $n_3(c, l)$. Mit dem Lemma folgt somit sofort die exakte untere Schranke für $n_3(c, l)$.

Lemma 49 (Göring) *Seien $c \geq 3$ und l natürliche Zahlen, S eine Menge von drei verschiedenen Knoten und W ein schlingenfreier Graph mit $S \subseteq V(W)$ so, daß*

$$\text{val}_W(v) = \begin{cases} c & , \text{ falls } v \in S \\ 3 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

und für alle $v \in V(W - S)$ die Beziehung $N_W(v) = S$ gilt. Jeder Kante $e \in E(W)$ sei ein ganzzahliges Gewicht g_e so zugeordnet, daß für jeden Kreis $C \subseteq W$ gilt:

$$\sum_{e \in E(C)} g_e \geq l.$$

Dann gilt:

$$\frac{3(3 - c) - |V(W)|}{2} + \sum_{e \in E(W)} g_e \geq \frac{c}{2}l - 2c + 3 + (l \bmod 2) \frac{c - 2}{2}.$$

Beweis. Setzen wir die linke Seite der Behauptung gleich $k(W)$. Wir verfahren wie folgt. In einem ersten Schritt konstruieren wir zu jedem Graphen W mit ganzzahligen Gewichten g_e entsprechend der Voraussetzung von Lemma 49 im Falle $|V(W)| < c + 3$ einen Graphen W' entsprechend dieser Voraussetzung mit ganzzahligen Kantengewichten g'_e .

Im zweiten Schritt zeigen wir, daß die Konstruktion $k(W) \geq k(W')$ und $|V(W)| < |V(W')|$ liefert und die Kantengewichte g'_e den Voraussetzungen von Lemma 49 ebenfalls genügen.

Dann brauchen wir in einem dritten Schritt die Behauptung nur noch für Graphen W mit maximal vielen, also $c + 3$ Knoten zu zeigen, da die rechte Seite der Behauptung von der Wahl von W unabhängig ist.

¹²Zweifaches Abzählen der Knoten-Kante-Inzidenzen genügt.

Erster Schritt.

Sei W also ein Graph gemäß Voraussetzungen des Lemmas 49 mit weniger als $c + 3$ Knoten. Die Knoten in S bezeichnen wir mit x, y und z . Aus den Voraussetzungen für W folgt, daß W einen Kreis C mit $V(C) = S$ enthält. Seien a und b unterschiedliche nicht in W enthaltene Knoten und B ein vollständiger $S, \{a, b\}$ -partiter Graph. Wir setzen $W' = (W - E(C)) \cup B$. Da wir in $B \cup C$ keine Mehrfachkante vorfinden, bezeichnen wir im Weiteren für $v, w \in V(B \cup C)$ mit vw diejenige Kante aus $E(B \cup C)$ deren Enden v und w sind. Für jede Kante e aus $E(W)$ sei g_e ebenfalls entsprechend der Voraussetzungen von Lemma 49 gegeben. Für alle $e \in E(W \cap W')$ setzen wir $g'_e = g_e$. Desweiteren sei $g = g_{xz} + g_{yz} + g_{xy}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} g'_{ax} &= g'_{bx} = \frac{g-g \bmod 2}{2} - g_{yz} \\ g'_{ay} &= g'_{by} = \frac{g+g \bmod 2}{2} - g_{xz} \\ g'_{az} &= g'_{bz} = \frac{g+g \bmod 2}{2} - g_{xy} \end{aligned}$$

Zweiter Schritt.

Es folgt

$$\begin{aligned} k(W) &= k(W') + \frac{|V(W')| - |V(W)|}{2} - 2(g_{ax} + g_{ay} + g_{az}) + g \\ &= k(W') + 1 - g \bmod 2 \\ &\geq k(W'), \\ |V(W')| &= |V(W)| + 2 \end{aligned}$$

und für alle $v, v' \in S$ und alle $w \in \{a, b\}$ außerdem

$$g_{vv'} \leq g'_{vw} + g'_{v'w}.$$

Zu jedem S enthaltenden Kreis C' aus W' finden wir also durch Ersetzen jedes Kantenpaares $vw, v'w$ mit $w \in \{a, b\}$ durch die Kante vv' aus $E(W - E(W'))$ bei Löschung des Knotens w einen Kreis C aus W mit

$$\sum_{e \in E(C')} g'_e \geq \sum_{e \in E(C)} g_e \geq l$$

was den zweiten Schritt abschließt.

Dritter Schritt.

Nun ist $A = V(W - S)$ also eine c -elementige Menge und zu jedem $v \in A$ definieren wir g_v als die Summe der Gewichte der mit v inzidenten Kanten. Es folgt:

$$k(W) = 3 - 2c + \sum_{v \in A} g_v$$

Seien nun zwei unterschiedliche Knoten $a, b \in A$ so gewählt, daß $h = g_a + g_b$ minimal ist und c sei ein beliebiger anderer Knoten aus A . Wir betrachten die drei Kreise $xyabzcx, xbyczax$ und $xcyazbx$ die in der Reihenfolge entsprechend ihrer

Bezeichnung die Knoten a, b, c, x, y und z aber keine weiteren Knoten durchlaufen. Nach Voraussetzung ist die Summe der Summen der Gewichte dieser drei Kreise mindestens $3l$, woraus $2(g_a + g_b + g_c) \geq 3l$ und wegen Ganzzahligkeit und der Definition von h sogar $2(h + g_c) \geq 3l + l \pmod{2}$, also

$$g_c \geq \frac{3}{2}l - h + \frac{l \pmod{2}}{2}$$

folgt. Damit gilt

$$\begin{aligned} k(W) &\geq 3 - 2c + h + (c - 2)\frac{3}{2}l - (c - 2)h + (l \pmod{2})\frac{c - 2}{2} \\ &= 3 - 2c + (3 - c)h - 3l + \frac{3c}{2}l + (l \pmod{2})\frac{c - 2}{2} \end{aligned}$$

was für $h \leq l$ wegen $c \geq 3$ die Behauptung liefert. Für $h \geq l + 1$ folgt aus der Wahl von a und b und somit $g_c \geq \frac{h}{2}$ sofort

$$\begin{aligned} k(W) &\geq 3 - 2c + h + (c - 2)\frac{h}{2} \\ &= \frac{c}{2}h \\ &\geq \frac{c}{2}l + 3 - 2c + \frac{c}{2} \end{aligned}$$

was offenbar auch die Behauptung bestätigt. \square

4.2 Kreissysteme erzwingen weitere Kreise

Wir suchen in einem gegebenen Polyedergraphen G einen Kreis, der eine Menge S vorgegebener Knoten enthält. Angenommen, durch gewisse Untersuchungen gelingt es uns, zumindest einen zweiregulären Untergraphen U (also ein Kreissystem) aufzuspüren, der S enthält. Nehmen wir weiter an, wir wissen, wie sich die Knoten von S auf die Komponenten von U verteilen. Diese Verteilung bezeichnen wir als *Typ* von U bezüglich S , gegeben durch eine absteigende Folge $T(S, U)$ nichtnegativer ganzer Zahlen, wobei jede Zahl die Anzahl von Knoten aus S in einer Komponente von U bezeichnen soll (und die Summe aller Zahlen folglich gleich $|S|$ ist). Wann können wir allein aus diesen Informationen schließen, daß auch ein entsprechender Kreis existiert?

Gemäß Korollar 40 können wir für jeden Typ von U offenbar herausfinden, ob ein solcher Kreis oder ein Gegenbeispiel existiert. Daher sollte es nicht überraschen, daß wir mit unserer Methode diese Frage abschließend beantworten können. Die Fallunterscheidung entlang des Algorithmus aus Abschnitt 3.2 ist allerdings mühsam, sodaß wir im Beweis eine (durch Ausnutzung von Symmetrien und Abänderung der Reihenfolge der Trennerarbeit - gemäß den

praktischen Überlegungen also Nulltrenner und Trenner in der Nachbarschaft eines Knotens zuerst) erheblich verkürzte Fallunterscheidung angeben. Der in Abschnitt 3.2 angegebene Algorithmus ist gewissermaßen nur eine Krücke, die uns ermöglicht hat, zu beweisen, daß es eine Fallunterscheidung gibt, die stets zum Ziel führt - entweder zu einem Gegenbeispiel oder zu einem linearen Algorithmus zum Aufspüren der gesuchten Struktur (hier: S enthaltender Kreis) - und die uns diese Fallunterscheidung sicher finden läßt.

Um die Antwort zu formulieren definieren wir für eine endliche Folge T nichtnegativer ganzer Zahlen die Zahl $t(T)$ als kleinste positive Zahl der Folge und $s(T)$ als Summe aller Zahlen dieser Folge.

Mit dieser Definition gilt der folgende Satz:

Theorem 50 (Göring, Harant) *Besitzt ein dreifach zusammenhängender planarer Graph G zu einer Teilmenge S seiner Knotenmenge einen S enthaltenden zweiregulären Untergraphen U eines Typs $T = T(S, U)$ mit $s(T) - t(T) < 5$, so besitzt G auch einen S enthaltenden Kreis. Umgekehrt gibt es zu jeder endlichen Folge T nichtnegativer ganzer Zahlen mit $s(T) - t(T) \geq 5$ einen Polyedergraphen G sowie eine Teilmenge S seiner Knotenmenge so, daß G zwar einen zweiregulären S enthaltenden Untergraphen vom Typ $T = T(S, U)$ besitzt, jedoch keinen S enthaltenden Kreis.*

Bevor wir den Satz beweisen, wollen wir ihn ein wenig diskutieren: Da im Satz Schlingen und Mehrfachkanten nicht ausgeschlossen waren und das Hinzufügen von Schlingen und Vervielfachen von Kanten nicht aus der betrachteten Klasse herausführt, können wir die möglichen Komponenten von U offenbar um in S enthaltene isolierte Knoten und K_2 auf Knoten aus S erweitern.

Hat ein Polyedergraph also einen S enthaltenden Untergraphen U mit einem der Typen $T(U, S)$, $(1; 1)$, $(1; 1; 1)$, $(1; 1; 1; 1)$, $(1; 1; 1; 1; 1)$, $(2; 1)$, $(2; 1; 1)$, $(2; 1; 1; 1)$, $(2; 2)$, $(2; 2; 1)$, $(2; 2; 2)$, $(3; 1)$, $(3; 1; 1)$, $(3; 2)$, $(3; 3)$, $(4; 1)$, $(4; 2)$, $(4; 3)$ oder $(4; 4)$, so besitzt er einen S enthaltenden Kreis. Da Typ $(1, 1, 1, 1, 1)$ mit dabei ist, ergibt sich folgendes Korollar:

Korollar 51 (Kelmans, Lomonosov, [12]) *Zu beliebigen 5 Knoten eines Polyedergraphen G besitzt G stets einen Kreis, der sie enthält.*

Dabei ist das aus den Typen zu $|S| \leq 3$ leicht aus dem Satz von Dirac (vgl. [3]), sowie bei den Typen mit $|S| \leq 5$ aus einem Resultat von Kelmans und Lomonosov (vgl. [12], hier leider ohne Beweis) zu folgern.

Zunächst gelang der Beweis J. Harant zusammen mit dem Autor für die verbleibenden Typen 10, 14, 16 und 17; wir werden hier jedoch einen Beweis angeben, der das Resultat geschlossen für alle Typen liefert.

Schwächt man in Theorem 50 die Planarität zu Toroidalität ab oder läßt sie gar ganz weg, so braucht man die 5 nur durch eine 3 zu ersetzen, um wieder zu einer wahren Aussage zu gelangen.

Bis auf $(2, 2, 2)$ haben alle Typen, bei denen wir die Existenz eines S enthaltenden Kreises im Beweis von Theorem 50 nachweisen müssen, offenbar die Eigenschaft, daß höchstens ihre ersten zwei Einträge größer als 1 sind. Da wir diese Eigenschaft im Beweis von Theorem 50 verwenden wollen, benötigen wir für den Typ $(2, 2, 2)$ noch folgendes Lemma:

Lemma 52 (Göring, Harant) *Besitzt ein dreifach zusammenhängender planarer Graphen G zu einer Teilmenge S seiner Knoten einen zweiregulären Untergraphen U vom Typ $T(U, S) = (2, 2, 2)$, so besitzt er auch einen zweiregulären Untergraphen U' mit Typ $T(U', S) \in \{(4, 2), (6)\}$.*

Beweis. Wir betrachten G im folgenden als fest in die Ebene eingebettet. Seien C_0, C_1 und C_2 die Komponenten des Untergraphen U des Graphen G gemäß den Voraussetzungen aus Lemma 52. Setzen wir zunächst voraus, daß eine dieser drei Komponenten (C_0) mindestens drei Knoten enthält. Wegen des Dreifachzusammenhangs von G gibt es nach Korollar 12 drei disjunkte $V(C_0), V(C_1 \cup C_2)$ -Wege in G . Nach Schubfachsluß gibt es dann ein $i \in \{1, 2\}$ so, daß zwei dieser Wege, C_{3-i} vermeidende $V(C_0), V(C_i)$ -Wege sind. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir uns auf den Fall $i = 1$ zurückziehen. Desweiteren mögen im weiteren die Kreise C_0, C_1 und C_2 sowie die zwei disjunkten C_2 vermeidenden $V(C_0), V(C_1)$ -Wege P_1 und P_2 so gewählt sein, daß eine möglichst große Zahl z von Knoten aus $S \setminus V(C_2)$ in $C_0 \cup C_1 \cup P_0 \cup P_1$ die Valenz drei hat. Seien die Knoten aus $S \cap C_0$ mit a_0 und b_0 , die Knoten aus $S \cap C_1$ mit a_1 und b_1 bezeichnet. Der Graph $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup P_0 \cup P_1$ ist Bild eines S -treuen Wegesystems W , dessen Indexmenge I außerhalb S keine Knoten der Valenz zwei aufweist. Sind in I sowohl a und b als auch c und d benachbart, so folgt offenbar Lemma 52. Nehmen wir also zusätzlich an, dies sei nicht der Fall.

Sei $v \in (C_0 \cup C_1) \cap S$ ein Knoten mit $\text{val}_I(v) = 2$. Erweitern wir unser Wegesystem gemäß Theorem 25 von v ausgehend, und treffen dabei nicht C_2 , so entsteht entweder ein zu C_2 disjunkter $S \setminus C_2$ enthaltender Kreis oder wir erhalten einen Widerspruch zur Maximalitätseigenschaft von z .

Also treffen wir im verbleibenden Unterfall von jedem solchen Knoten v aus stets C_2 , woraus folgt, daß einer der beiden Kreise den anderen in G von C_2 trennt und daß seine in S enthaltenen Knoten auf ihm nicht benachbart sind. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, daß es sich dabei um den Kreis C_0 handelt. Sonst vertauschen wir im weiteren die Indizes Null und Eins, da wir dann auch $|V(C_1)| > 2$ folgern können. Sei desweiteren der Knoten v o.B.d.A. gleich a_0 (sonst vertauschen wir a und b) und der in a_0 beginnende $C_0 C_2$ -Weg sei P_2 .

Gemäß Theorem 12 können wir - falls $|V(C_2)| = 2$ - genau zwei disjunkte $C_0 C_2$ -Wege finden, von denen einer in a_0 beginnt. Es ergibt sich die Existenz eines C_1 vermeidenden $S \setminus C_1$ enthaltenden Kreises.

Nehmen wir also an, daß $|V(C_2)| > 2$. Gemäß Theorem 12 können wir nun drei disjunkte $C_0 C_2$ -Wege finden (die offenbar zu C_1 disjunkt sind), von denen

einer, sagen wir P_3 den Knoten a_0 enthält. Die anderen beiden Wege nennen wir P_4 und P_5 . Betrachten wir nun das $C_0 \cup C_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5$ zugrunde liegende S -treue Wegesystem W_2 mit Indexmenge I_2 . Ist der Index des Knotens in $P_3 \cap C_2$ in I_2 mit dem Index des Knotens in $P_4 \cap C_2$ oder dem Index des Knotens in $P_5 \cap C_2$ benachbart, so ergibt sich zwangsläufig ein C_1 vermeidender $S \setminus C_1$ enthaltender Kreis. Anderenfalls genügt die Erweiterung dieses Wegesystems gemäß Theorem 25 von einem Knoten aus $S \cap C_2$ ausgehend, um einen solchen Kreis zu erzeugen.

Bleibt der Fall, daß $|C_0| = |C_1| = |C_2| = 2$. Möge A die Knoten von C_0 sowie einen Knoten von C_1 und B die Knoten von C_2 sowie den verbleibenden Knoten von C_1 enthalten. Gemäß Theorem 12 finden wir in G drei disjunkte AB -Wege. Ist darunter einer, welcher die Knoten von C_1 verbindet, haben wir offenbar einen Kreis gefunden, der die Knoten von C_0 und C_2 enthält und disjunkt zu C_1 ist. Anderenfalls haben wir bei Hinzunahme von C_1 einen Kreis gefunden, der S enthält. \square

Das zentrale Lemma, welches den Beweis erst ermöglichen wird, ist

Lemma 53 (Göring) *In einem dreifach zusammenhängenden planaren Graphen G seien disjunkte Kreise C und D (wobei D wenigstens zwei Knoten enthält) sowie eine 4-elementige Teilmenge S von $V(C)$ so gegeben, daß $V(C)$ und $V(D)$ $|V(D)|$ -zusammenhängend in G sind und für höchstens die Hälfte der Kanten e von D in G ein Kreis C_e existiert, welcher S und e enthält, aber keine Knoten von D , welche nicht mit e inzidieren.*

Dann gilt: $|V(D)| = 4$ und D enthält einen Knoten v derart, daß zu jedem anderen Knoten w von D ein vw -Weg in G existiert, welcher S enthält und im Inneren disjunkt zu D ist.

Beweis. Mit g bezeichnen wir die Zahl der Kanten von D , für die kein Kreis C_e gemäß Voraussetzungen des Lemmas existiert. Mit d bezeichnen wir die Zahl der Knoten von D . Gemäß Voraussetzung gilt $d \leq 2g$. Zwei Knoten a, b aus D heißen unverträglich, wenn es keinen im Inneren mit D disjunkten S enthaltenden ab -Weg in G gibt. G sei so in die Ebene eingebettet, daß D das Außenland berandet. Aufgrund der gegebenen Voraussetzungen folgt sofort $g \geq 2$. Man beachte, daß im Falle $d = 2$ entweder zu jeder oder zu keiner Kante e von D der Kreis C_e in G existiert!

Wir konstruieren nun gemäß Lemma 12 d disjunkte Wege P_i ($i \in \mathbb{G}_1^d$). Sei $G_1 = C \cup \bigcup_{i \in \mathbb{G}_1^d} P_i$. Sei x die Anzahl der Knoten von S , die in keinem dieser Wege enthalten sind. Offenbar gilt $x \geq g$.

Wir machen nun eine Extremalannahme, die wir konstruktiv zum Widerspruch führen, falls die Behauptung des Lemmas nicht gilt: Seien der S enthaltende Kreis C sowie die d disjunkten CD -Wege in G so gewählt, daß x minimal ist.

Wir zeigen zunächst $g \leq 2$. Dazu brauchen wir nur den Fall $x \geq 3$ zu betrachten. Sei $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ wobei wir in diesem Fall voraussetzen dürfen, daß bei Durchlaufung des Kreises C im Uhrzeigersinn beginnend bei s_1 die Knoten von S in der Reihenfolge ihrer Indizes durchlaufen werden und die ersten drei dieser Knoten disjunkt zu den P_i sind. Angenommen wir können die Indizes nicht so wählen, daß sowohl auf dem s_1s_2 - als auch auf dem s_2s_3 -Wegstück von C je mindestens einer der P_i endet. Dann ergibt sich $g \leq 2$. Also können wir davon ausgehen, daß sowohl auf dem s_1s_2 - als auch auf dem s_2s_3 -Wegstück von C je mindestens einer der P_i endet. Erweitern wir das G_1 zugrundeliegende S -treue Wegesystem gemäß Theorem 25 von s_2 aus um einen Weg zu einem Wegesystem W , so liegt wegen der Extremalität von x die hinzugekommene von s_2 ausgehende Kante der Indexmenge von W im Inneren des S enthaltenden Kreises und wir können o.B.d.A. davon ausgehen, daß ihr Bild den s_3s_4 -Weg von C trifft. Erweitern wir W gemäß Theorem 25 von s_3 ausgehend um einen Weg zu einem Wegesystem W' , so liegt die diesen Weg indizierende Kante wegen der Extremalität von x außerhalb des C repräsentierenden Kreises. Ihr anderer Endpunkt indiziert dann entweder einen Knoten auf einem der P_i (sagen wir P_1), welcher in s_4 endet (der Endpunkt ist aber wegen Extremalität von x nicht s_4), oder einen Knoten auf dem s_4s_2 -Weg im Uhrzeigersinn auf C . In beiden Fällen ergibt sich $g < 3$. Es ist also nur noch $g = 2$ und somit $d \leq 4$ zu betrachten.

Betrachten wir zunächst den Fall $x = 2$. Seien s_i und s_j die beiden Knoten aus S , welche zu je einem der P_k gehören. Ist die Differenz zwischen i und j ungerade, so können wir o.B.d.A. davon ausgehen, daß $\{i, j\} = \{1, 2\}$, anderenfalls gehen wir davon aus, daß $\{i, j\} = \{1, 3\}$.

Falls $\{i, j\} = \{1, 2\}$ erweitern wir das G_1 zugrunde liegende Wegesystem von s_3 aus gemäß Theorem 25. Wegen $g = 2$ indiziert der Endknoten der zusätzlichen Kante des Wegesystems einen Knoten auf c . Von jedem Knoten aus D ausgehend, der über einen der Wege P_i mit einem Knoten auf dem s_2s_3 -Stück von C verbunden ist, gibt es einen S enthaltenden Weg zu einem der Knoten s_1 oder s_2 . Damit ist die Behauptung von Lemma 53 in diesem Falle leicht einzusehen.

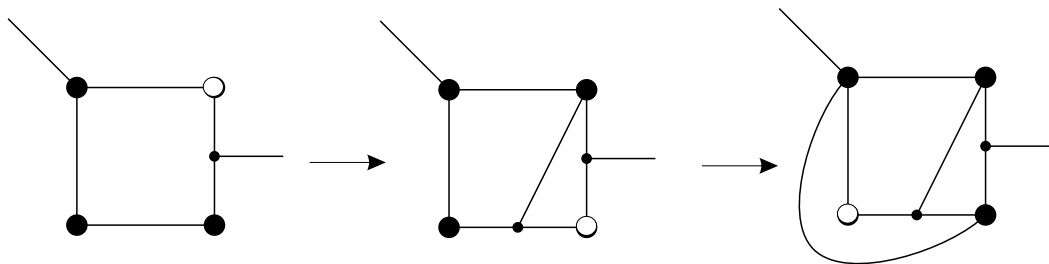
Falls $\{i, j\} = \{1, 3\}$ erweitern wir das G_1 zugrunde liegende Wegesystem von s_2 aus gemäß Theorem 25 zum Wegesystem W . Wegen $g = 2$, der Maximalität von x und Symmetrie können wir O.B.d.A. annehmen, daß der andere Endknoten der zusätzlichen Kante der Indexmenge einen Knoten auf dem s_3s_4 -Weg von C indiziert. G besitzt dann offenbar einen S enthaltenden s_1x -Weg für jeden Endknoten eines P_i auf dem s_1s_2 -Stück von C . Es folgt sofort $d = 4$, da sich ansonsten $g \leq 1$ ergibt, was den Voraussetzungen des Theorems widerspricht. Desweiteren liegt folglich genau ein Auftreffpunkt eines P_i im Inneren des s_2s_3 -Wegstückes von C und genau ein Auftreffpunkt eines P_i im Inneren des s_4s_1 -Wegstückes von C . Erweitern wir nun W von s_4 aus gemäß Theorem 25, so stellen wir in jedem Fall $g < 2$ fest, sodaß dieser Fall den Voraussetzungen von Lemma 53 nicht entsprechen kann.

Bei den nächsten Fällen ($x = 3$ und $x = 4$) ist die Fallunterscheidung etwas

umfangreicher, weswegen wir sie grafisch durchführen werden. Dabei gehen wir so vor, daß wir die Indexmenge des jeweils aktuellen Wegesystems aufzeichnen, wobei Kanten durch Linien und Knoten durch Punkte bezeichnet werden. Die D repräsentierenden Punkte und Kanten lassen wir weg. Ebenso werden nur die P_i im aktuellen Wegesystem berücksichtigt, deren Endknoten auf C schon den vier Wegstücken von C zwischen den Knoten aus S zugeordnet wurden. Die Knoten aus S werden im allgemeinen fett gefüllt gezeichnet. Wird im nächsten Schritt das Wegesystem von einem Knoten aus S aus gemäß Theorem 25 erweitert, so wird dieser Knoten in der jeweiligen Abbildung als leerer Kreis derselben Größe dargestellt. Von den sich ergebenden Unterfällen werden jeweils nur jene dargestellt, aus denen sich nicht direkt ein Widerspruch zur Voraussetzung oder der Fallvoraussetzung von Lemma 53 und ebenso nicht die Behauptung von Lemma 53 ergibt.

Betrachten wir zunächst den Fall $x = 3$. Möge s_1 zu einem der P_i gehören und der andere Endknoten dieses P_i sei mit d_1 bezeichnet. Wir brauchen nur den Fall zu betrachten, daß in D ein Knoten d_2 existiert, der über ein P_i mit einem inneren Knoten des s_2s_3 -Wegstückes verbunden ist, zu dem es keinen im Inneren D vermeidenden S enthaltenden d_1d_2 Weg gibt, da jeder andere Fall durch umindizieren auf diesen zurückzuführen ist, der Voraussetzung von Lemma 53 zuwider läuft oder die Behauptung von Lemma 53 erfüllt. In Abbildung 4.8 wird dieser Fall abgeschlossen. Betrachten wir als nächstes den Fall $x = 4$. Nehmen wir zunächst an, es gibt in D zwei unverträgliche Knoten d_1 und d_2 derart gibt, daß die sie enthaltenden P_i in benachbarten Wegstücken von C bzgl. S enden (sagen wir zwischen s_1 und s_2 bzw. zwischen s_3 und s_4). Dieser Fall wird in Abbildung 4.9 bis auf den rechts unten abgebildeten Unterfall abgehandelt. In Abbildung 4.10 ergeben sich vier Unterfälle, die nun die komplette Anwendung unseres Algorithmus aus Abschnitt 3.2 nach sich ziehen würde, da der verbleibende Zweitrenner der Indexmenge nicht mehr die Nachbarschaft eines Knotens aus S bildet. Allerdings hat der grau markierte Teilgraph (welcher durch einen Zweitrenner abgeteilt wird) einen Weg, der seine kleinen Knoten verbindet und seine großen Knoten (Knoten aus S) enthält. In seinem Bild in G gibt es sogar von jedem Knoten aus zu jedem der Bilder der kleinen Knoten einen beide Kno-

Abbildung 4.8: Fallunterscheidung für $x = 3$



ten aus S enthaltenden Weg. Daher genügt es, mit dem in Theorem 11 gegebenen Algorithmus den ihn abgrenzenden Zweitrenner zu überwinden. In Abbildung 4.11 ist das vom Ergebnis gezeigt, woran man erkennt, daß wir einen Widerspruch zur Fallvoraussetzung erhalten: Das Bild der gepunkteten Linie kann in G nach den Vorbemerkungen problemlos zu einem S enthaltenden Weg von d_1 nach d_2 vervollständigt werden, der im Inneren disjunkt zu D ist.

Gibt es in D keine zwei unverträgliche Knoten d_1 und d_2 derart, daß die sie enthaltenden P_i in benachbarten Wegstücken von C bzgl. S enden, so verbleibt nur der Fall zu betrachten, daß sämtliche der P_i auf gegenüberliegenden Wegstücken von C , sagen wir, den Wegstücken von C zwischen s_1 und s_2 bzw.

Abbildung 4.9: Fallunterscheidung für $x = 4$, erster Teil

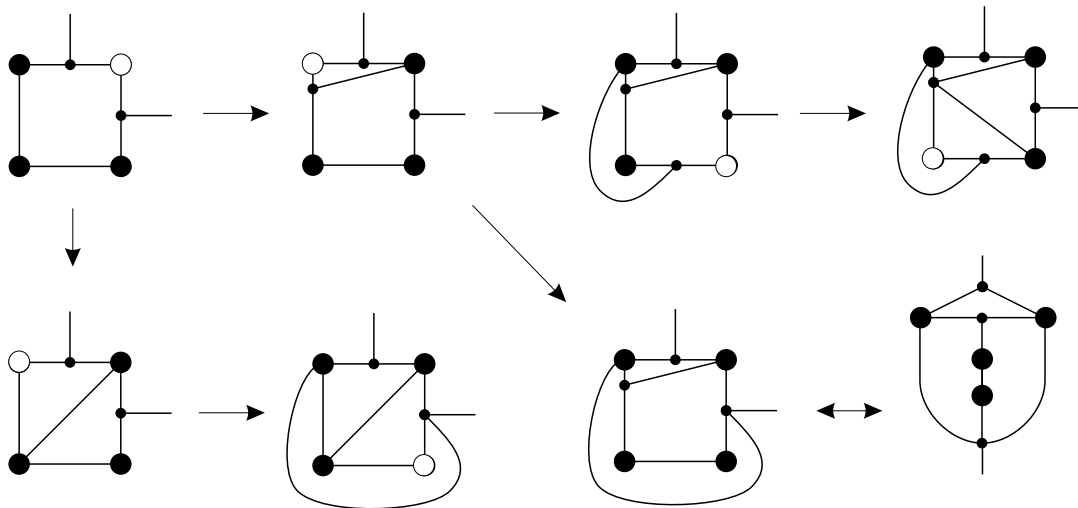
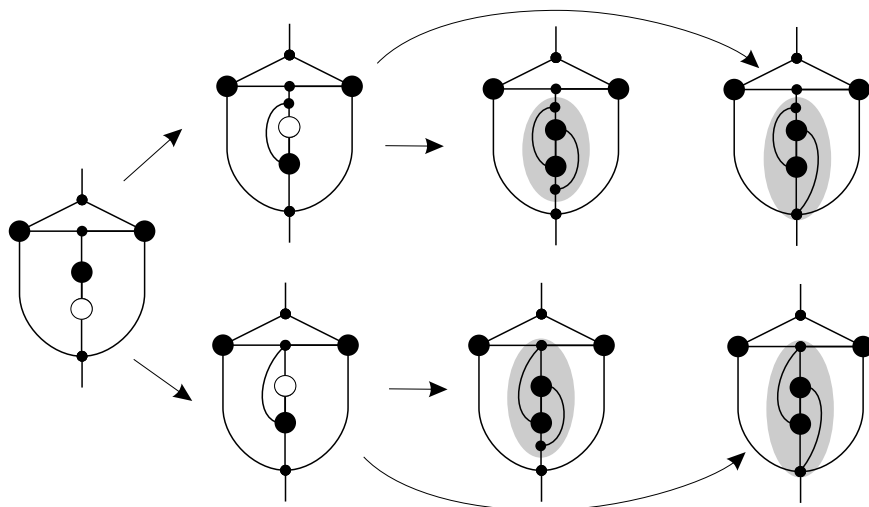


Abbildung 4.10: Fallunterscheidung für $x = 4$, zweiter Teil



zwischen s_3 und s_4 enden. Es muß dann zwei auf D benachbarte unverträgliche Knoten d_1 und d_2 geben, die zugehörigen P_i sind die Bilder der in den folgenden Abbildungen auftretenden hängenden Kanten. Nehmen wir zunächst an, es gibt eine $S \cup D$ -treu in den Graphen einbettbare Indexmenge der in Abbildung 4.12 links abgebildeten Form, wobei die hängenden Kanten zu unverträglichen Knoten aus D führen mögen. Die Abbildung zeigt, daß dies im verbleibenden Fall auf die im vorigen Absatz abschließend diskutierte Situation führt.

Anderenfalls ergibt sich nach vierfachem Anwenden von Theorem 25 zwangsläufig die in Abbildung 4.13 links dargestellte Situation. Da d_1 und d_2 auf D benachbart sind, ist für einen der beiden grauen Teilgraphen klar, daß nach Anwendung des in Theorem 11 angegebenen Algorithmus zur Überwindung des ihn

Abbildung 4.11: Fallunterscheidung für $x = 4$, dritter Teil

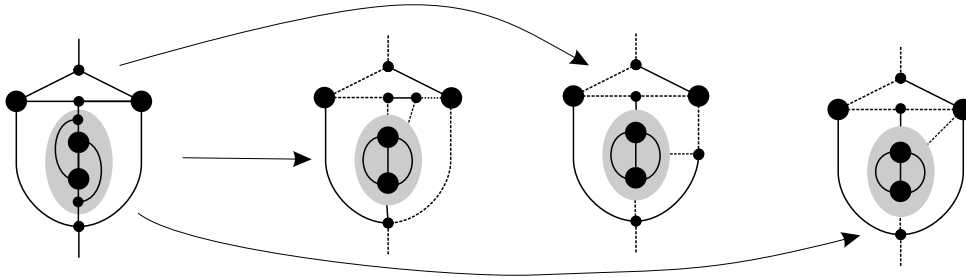


Abbildung 4.12: Fallunterscheidung für $x = 4$, vierter Teil

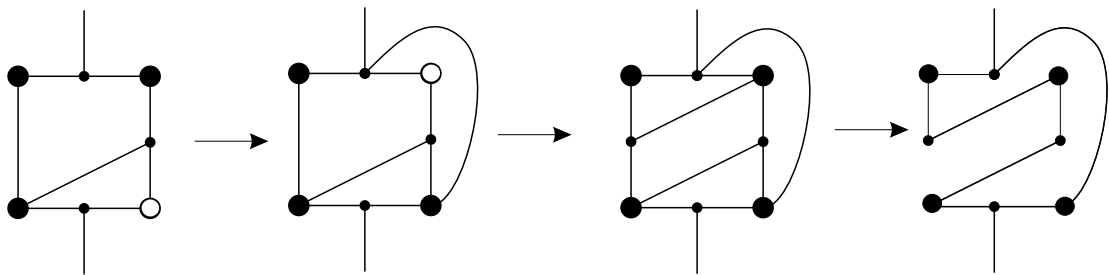
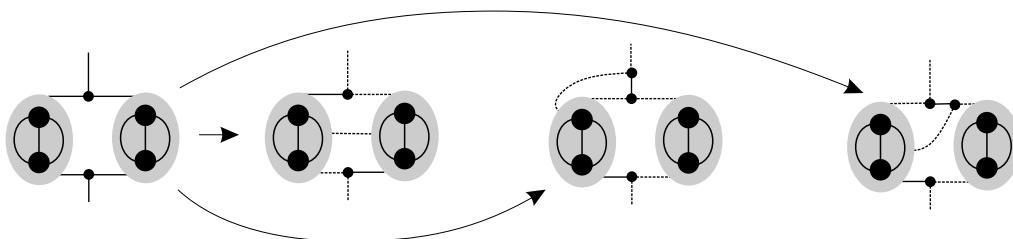


Abbildung 4.13: Fallunterscheidung für $x = 4$, letzter Teil



abtrennenden Trenners der zusätzliche Endknoten des dritten Weges nicht in D liegt. Die verbleibenden Fälle sind in Abbildung 4.13 angegeben. Sie widersprechen aber offenbar der Fallvoraussetzung: Das Bild der gepunkteten Linie kann in G nach den Vorbemerkungen wiederum zu einem S enthaltenden Weg von d_1 nach d_2 vervollständigt werden, der im Inneren disjunkt zu D ist. Es ist zu dieser Abbildung noch zu bemerken, daß die waagerechten Kanten außerhalb des grau markierten Bereiches eventuell im Bild innerhalb des Graphen die Länge Null haben können; die korrekte Indexmenge ergibt sich dann durch Kontraktion der entsprechenden Kanten. Das führt aber zu keinen wirklich anderen Fällen. \square

Nun sind wir in der Lage, Theorem 50 zu beweisen.

Beweis. Im ersten Teil des Beweises zeigen wir die erste Behauptung.

Wir führen eine Induktion nach der Anzahl der Komponenten des Kreissystems durch. Ist diese Anzahl Eins, so ist der Satz trivial. Es genügt offenbar, sich auf den Fall zurückzuziehen, in dem Komponenten von U , die nur einen Knoten aus S enthalten stets Kreise der Länge Eins sind. Wegen Lemma 52 genügt es, den Fall zu betrachten, daß bis auf höchstens zwei Komponenten jede andere Komponente nur einen Knoten von S enthält. Wählen wir also zwei Komponenten C_1 und C_2 derart aus, daß alle anderen Komponenten höchstens einen Knoten von S enthalten.

Ziel ist es nun, in G einen Kreis C zu finden, der alle Knoten aus S , die in C_1 und C_2 liegen, enthält. Mit Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf $U' = (U - C - C_1 - C_2) \cup C$ folgt dann das Theorem 50. Es genügt also im weiteren, sich auf den Fall zu beschränken, daß U genau die zwei Komponenten C_1 und C_2 hat. Sei G so eingebettet, daß C_1 im Außenland von C_2 und C_2 im Außenland von C_1 liegt.

Falls diese beiden Komponenten genau zwei Knoten enthalten und diese Knoten alle zu S gehören, finden wir gemäß Theorem 12 zwei disjunkte C_1C_2 -Wege, und somit einen Kreis C , der alle Knoten von C_1 und C_2 enthält. Mit Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf $U' = (U - (C_1 \cup C_2)) \cup C$ ergibt sich die Behauptung.

Gehen wir also davon aus, daß C_1 nicht genau zwei Knoten enthält. Wir zeigen in diesem Fall zusätzlich, daß der gefundene Kreis zwei disjunkte Wege enthält, von denen einer $S \cap C_1$ und der andere $S \cap C_2$ enthält.

Enthält C_1 genau einen Knoten v , so können wir dies auf den Fall zurückführen, daß C_1 mehr als zwei Knoten enthält, indem wir von G zu einem Graphen G' übergehen, indem wir v durch ein Dreieck ersetzen und die in G mit v inzidenten Kanten geeignet durch Kanten zu den Ecken des Dreiecks ersetzen. In S wird beim Übergang zu S' v durch die Ecken des Dreiecks ersetzt. Finden wir nun in G' einen Kreis gemäß Theorem 50, so finden wir diesen auch in G . Analog können wir auch mit C_2 verfahren, wenn C_2 genau einen Knoten enthält.

Enthält C_1 genau drei Knoten u, v, w , so können wir dies auf den Fall zurückführen, daß C_1 vier Knoten aus S enthält, indem wir zum Graphen G' übergehen, indem wir in G alle Knoten innerhalb von C_1 löschen, die Kante von C_1 zwischen

u und v durch einen Knoten w' unterteilen und w' dann durch eine neue Kante mit w verbinden. Zum Schluß setzen wir $S' = S \cup \{u, v, w, w'\}$. Finden wir nun in G' einen Kreis gemäß Theorem 50, so finden wir diesen auch in G . Analog können wir auch mit C_2 verfahren, wenn C_2 genau drei Knoten enthält.

Enthalten C_1 (bzw. C_2) mindestens vier Knoten, so dürfen wir davon daß darunter vier Knoten aus S sind. Enthält C_1 vier Knoten aus S und C_2 genau zwei Knoten, so geht Theorem 53 in die Behauptung über.

Letztlich brauchen wir also nur den Fall betrachten, daß C_1 und C_2 jeweils vier Knoten aus S enthalten. Sei T ein minimaler C_1C_2 -Trenner. Wir erhalten den Graphen G'_1 aus G indem wir alle Knoten von $G - T$ in G löschen, die in $G - T$ nicht derselben Komponente angehören, wie C_1 . Beachte: $T \subseteq G'_1$. An jeden Knoten von $T \cap C_1$ hängen wir eine Kante zu jeweils einem neuen Knoten an. T_1 sei die Menge $T \setminus C_1$ zuzüglich dieser neuen Knoten. G_1 erhalten wir nun, indem wir zwischen den Knoten von T_1 so geeignete Kanten einfügen, daß diese mit den Knoten von T_1 einen Kreis D_1 bilden und das Resultat G_1 planar bleibt. Nun gibt es folgende Bijektion b_1 die jedem Knoten $t \in T$ einen Knoten $b_1(t)$ in T_1 zuordnet: Falls $t \in T_1$ sei $b_1(t) = t$, anderenfalls sei $b_1(t)$ der (einzige) Knoten aus T_1 , der in G_1 zu t benachbart ist.

Analog konstruieren wir G_2, T_2 und D_2 und b_2 .

Aus Theorem 53 folgt nun die Existenz von zwei Knoten v_1 und v_2 in T derart, daß es in G_1 einen $S \cap G_1$ überdeckenden $b_1(v_1)b_1(v_2)$ -Weg P_1 gibt der im Inneren disjunkt zu T_1 ist, sowie die Existenz eines entsprechenden Weges P_2 in G_2 :

Falls die Voraussetzung des Theorems nicht erfüllt wird, sind $b_1(v_1)$ und $b_1(v_2)$ Endknoten einer Kante e_1 auf D_1 sowie $b_2(v_1)$ und $b_2(v_2)$ Endknoten der entsprechenden Kante auf D_2 derart, daß die in dieser Voraussetzung beschriebenen Kreise C_{e_1} bzw. C_{e_2} in G_1 bzw. G_2 existieren.

Anderenfalls sind v_1 und v_2 jeweils die v entsprechenden Knoten der Behauptung von Theorem 53.

Aus der Konstruktion folgt, daß $(P_1 \cup P_2) \cap G$ der gesuchte Kreis in G ist: Da $P_1 \cap G = P_1 \cap G_1$ nur die Knoten v_1 und v_2 sowie eventuell Knoten aus $T \cap C_1$ mit T gemeinsam hat und $P_2 \cap G = P_2 \cap G_2$ nur die Knoten v_1 und v_2 sowie eventuell Knoten aus $T \cap C_2$ mit T gemeinsam hat, haben die Wege $P_1 \cap G$ und $P_2 \cap G$ genau die Knoten v_1 und v_2 gemeinsam. Mit $C_1 \cap S \in P_1 \cap G_1$ und $C_2 \cap S \in P_2 \cap G_2$ folgt die Behauptung. Offenbar enthält P_1 auch tatsächlich einen Teilweg P'_1 , der $S \cap C_1$ enthält und P_2 einen Teilweg P'_2 , der $S \cap C_2$ enthält derart, daß P'_1 und P'_2 disjunkt sind.

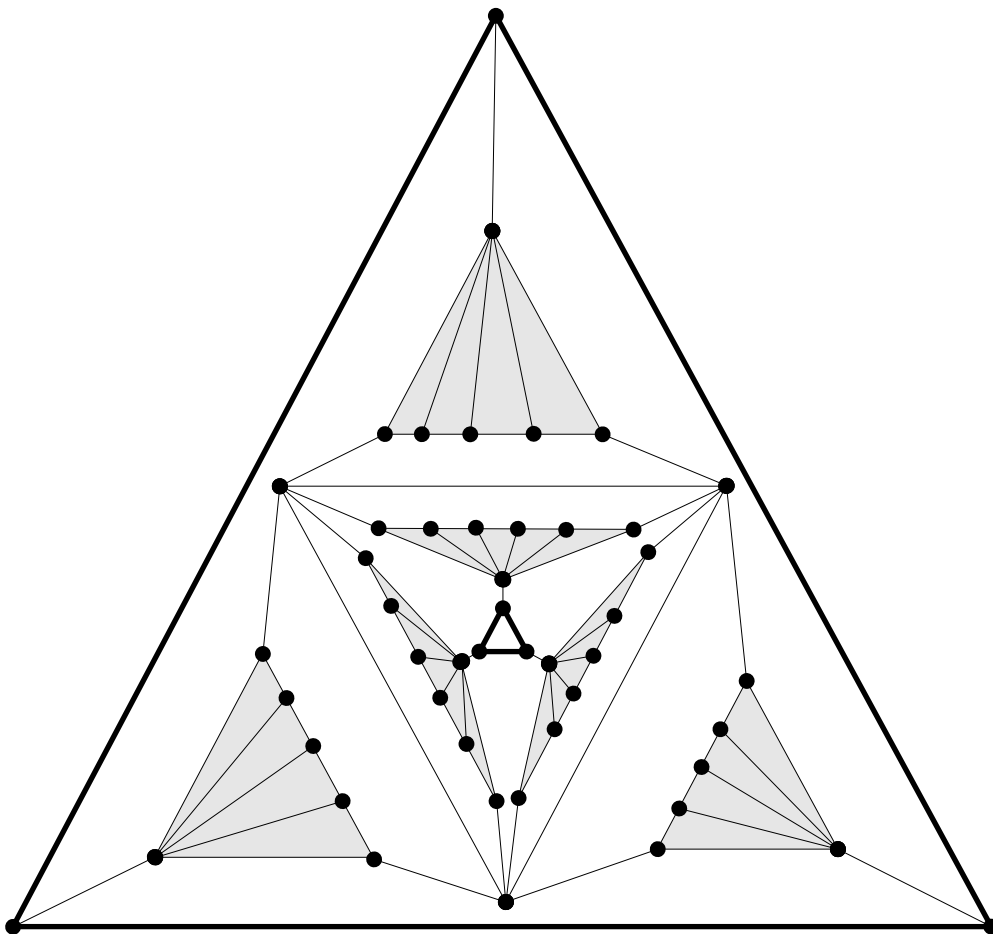
Der abschließende zweite Teil des Beweises läßt sich durch die folgendes Überlegung abdecken: Enthält jedes graue Dreieck des Graphen in Abbildung 4.14 einen Knoten aus S , so gibt es keinen S überdeckenden Kreis, da nach Löschen der Knoten, die mit keinem grauen Dreieck inzidieren, ein Kreis in höchstens fünf Komponenten zerfällt. Für die grauen Dreiecke können dabei beliebige plane Polyedergraphen eingesetzt werden, deren Außenland ein Dreieck ist. Da es im entstehenden Graphen sowohl einen Kreis durch fünf der grauen Dreiecke, als

auch einen durch genau vier bzw. drei der grauen Dreiecke gibt, aber auch zwei disjunkte Kreise von denen der eine durch drei bzw. zwei der grauen Dreiecke und der andere durch genau zwei der grauen Dreiecke geht, ist es leicht, für jede beliebige Folge T entsprechend den Voraussetzungen der zweiten Behauptung einen Graphen G , eine Menge S und einen Untergraphen U von Typ $T(S, U) = T$ anzugeben. \square

Abschließend sei noch vermerkt, daß es entlang dieses Beweises natürlich ebenfalls möglich ist, einen Algorithmus zu konstruieren, der mit linearem Aufwand in der Anzahl der Knoten eines gegebenen planaren Graphen G aus einem gegebenen Kreissystem von einem der in der Voraussetzung von Theorem 50 angegebenen Typen bzgl. einer Teilmenge S der Knotenmenge von G einen S enthaltenden Kreis in G ermittelt.

Schwächt man, wie bereits bemerkt, in Theorem 50 die Planarität zur Ein-

Abbildung 4.14: Zur Konstruktion der Beispielgraphen



bettbarkeit auf einen Torus ab oder läßt sie ganz weg, so braucht man die Fünf in $s(T) - t(T) < 5$ jedesmal durch eine Drei ersetzen. Der Beweis dieser Tatsache ist wesentlich einfacher und im gleichen Stil. Daher möchten wir auf ihn an dieser Stelle verzichten.

Anhang A

Notation

A.1 Funktionen und Operationen

A.1.1 Tupel

In der Erläuterung der folgenden Begriffe sei a ein Tupel mit Indexmenge I , i ein Element von I und J Teilmenge von I .

a_i i -te Komponente von a .

a^{-1} Umkehrung des Mengensystems a

$a(J)$ bezeichnet $\sum_{j \in J} a_j$ falls die Komponenten von a Zahlen sind und $\bigcup_{j \in J} a_j$ falls a ein Mengensystem ist.

\bar{a} ist (a_3, a_2, a_1) , wobei a ein Tripel sein muß.

A.1.2 Mengen und Graphen

In der Erläuterung der folgenden Begriffe mögen M und M' jeweils Mengen, H und G Graphen mit $H \subseteq G$ sowie n und m ganze Zahlen sein. Weiter bezeichne T eine Teilmenge von G , S ein I -Tupel von Teilmengen von $V(G)$ und R ein Teilmenge der Richtungen von M .

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{G}_0$ natürliche Zahlen einschließlich Null.

\mathbb{G}_n^m Menge der ganzen Zahlen z mit $n \leq z \leq m$.

\mathbb{G}_n Menge der ganzen Zahlen z mit $z \geq n$.

\mathbb{G}^m Menge der ganzen Zahlen z mit $z \leq m$.

\mathbb{G} Menge der ganzen Zahlen.

$\cup, \cap, \in, \subseteq$ Vereinigung, Durchschnitt, Enthalten in, Teilmenge von

$V(M)$ Menge der in M enthaltenen Knoten.

$R(M)$ Menge der in M enthaltenen Richtungen.

$E(M)$ Menge der zu M nicht disjunkten Kanten.

$\mathcal{C}(M)$ Menge der Komponenten von M .

$M \div R$ Klasse aller Mengensysteme f mit Indexmenge M , für die $f_x = f_y$ genau dann gilt, wenn x und y der gleichen Komponente von $[[R]]$ angehören, und aus f_x inzident f_y auch x inzident zu y folgt (f „kontrahiert“ R).

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{n,m} &= \mathbb{G}_1^{n+m} \cup \{(i, \emptyset, j) \mid i \in \mathbb{G}_1^n \text{ und } j \in \mathbb{G}_{n+1}^{n+m}\} \\
\mathbb{K}_{A,B} &= A \cup B \cup \{(a, \emptyset, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \setminus \{a\}\} \\
\mathbb{K}_n &= \mathbb{G}_1^n \cup \{(i, \emptyset, j) \mid i, j \in \mathbb{G}_1^n \text{ und } j \neq i\} \\
\mathbb{K}_A &= A \cup \{(a, \emptyset, b) \mid a, b \in A \text{ und } a \neq b\} \\
\text{Start}(M) &= \{r_1 \notin M \mid r \in R(M)\} \\
\text{Ende}(M) &= \{r_3 \notin M \mid r \in R(M)\} \\
\text{Enden}(M) &= \text{Start}(M) \cup \text{Ende}(M) \\
\overline{M} &= (M \setminus R(M)) \cup \{\bar{r} \mid r \in R(M)\} \\
[M] &= M \cup \text{Enden}(M) \\
[M] &= M \setminus \{r \in R(M) \mid \{r_1, r_3\} \not\subseteq V(M)\} \\
[M] &= V(M) \cup \bigcup_{e \in E(M)} e \\
M - M' &= [M \setminus M'] \\
\partial_M M' &= M \cap [M'] \cap [M \setminus M'] \\
\text{val}_M^+(M') &= |\{r \in R(M \setminus M') \mid \text{Start}(\{r\}) \subseteq M'\}| \\
\text{val}_M^-(M') &= |\{r \in R(M \setminus M') \mid \text{Ende}(\{r\}) \subseteq M'\}| \\
\text{val}_M(M') &= |\{e \in E(M \setminus M') \mid \text{Enden}(\{e\}) \cap M' \neq \emptyset\}| + \\
&\quad |\{e \in E(M \setminus M') \mid \text{Enden}(\{e\}) \subseteq M'\}| \\
N_M^+(M') &= \bigcup_{\substack{(a,b,c) \in R(M) \\ a \in V(M')}} c \\
N_M^-(M') &= \bigcup_{\substack{(a,b,c) \in R(M) \\ c \in V(M')}} a \\
N_M(M') &= N_M^+(M') \cup N_M^-(M') \\
\text{Gesp}_H(G) &= \{[X] \mid X \in \mathcal{C}(G \setminus H)\} \\
\mathbb{M}_M(M') &= |V(M')| + \sum_{C \in \mathcal{C}(\overline{[R(M')])} \left[\frac{1}{2} |\partial_{M-V(M')} C| \right] \\
\partial_{G,S} H &= \partial_G H \cup (V(H) \cap S(I)) \\
\mathbb{M}_G(S, T) &= |V(T)| + \sum_{C \in \mathcal{C}(\overline{[R(T)]})} \left[\frac{1}{2} |\partial_{G-V(T), S} C| \right]
\end{aligned}$$

A.1.3 Wegesysteme

In der Erläuterung der folgenden Begriffe bezeichnen A und B Wegesysteme, I und J die zugehörigen Indexmengen und X eine beliebige Teilmenge von I .

$\text{Bild}(A)$ ist $A(I)$.

$Graph(A)$ ist I .

$A \subseteq B$ bedeutet $I \subseteq J$ und für jedes $j \in J$ gilt $A_j = B_j$.

$A \preceq B$ bedeutet $A(I) \subseteq J$

$B \circ A$ ist das Wegesystem C mit Indexmenge I , das $C_c = B(A_c)$ für alle $c \in I$ erfüllt, falls $A \preceq B$ gilt.

$A \cup B$ ist ein Wegesystem C mit folgenden Eigenschaften:

- $Bild(C) = Bild(A) \cup Bild(B)$
- Alle Fixpunkte von A und von B sind Fixpunkte von C .
- Darüberhinaus hat C keinen Fixpunkt.
- Es gibt Wegesysteme A' und B' mit $C \circ A' = A$ und $C \circ B' = B$.
- Für jeden Knoten $c \in Graph(C)$, für den C_c linear ist, gibt es einen Knoten a mit $A_a = C_c$ oder einen Knoten b mit $B_b = C_c$.

$kurz(A)$ ist ein Wegesystem C , für das die folgenden drei Bedingungen gelten:

- Das Bild von C ist $A(I)$.
- Die Indexmenge von C hat keine linearen Knoten.
- Ein Knoten der Indexmenge von C ist genau dann Fixpunkt von C , wenn er Fixpunkt von a ist.

$A \cap B$ ist das Wegesystem C mit $C \subseteq A \cup B$ und $Bild(C) = A(I) \cap B(J)$.

$A|_X$ ist das Wegesystem C mit Indexmenge X und $C_x = A_x$ für alle $x \in X$.

A.2 Begriffe

Algorithmus Ein Verfahren \mathcal{A} wird für ein Eingabetupel P als Algorithmus bezeichnet, sofern $\mathcal{A}(P)$ ausführbar ist und nur eine endliche Rekursionstiefe erreicht.

Anfang Der Anfang einer Richtung ist seine erste Komponente. Der Anfang einer Menge ist die Menge derjenigen Anfänge von in ihr enthaltenen Richtungen, welche nicht in ihr enthalten sind.

Aufwand Der Aufwand eines Algorithmus $\mathcal{A}(P)$ für ein Tupel P ist die Anzahl der Elementarschritte, die bei Abarbeitung von $\mathcal{A}(P)$ durchgeführt werden. Der Aufwand eines Verfahrens \mathcal{A} ist linear für eine Menge von Tupeln P , deren erste Komponente ein Graph und für die $\mathcal{A}(P)$ ein Algorithmus ist, falls es eine Konstante c derart gibt, daß der Aufwand von $\mathcal{A}(P)$ stets höchstens $c * |P_1|$ ist.

Bild Das Bild eines Wegesystems W ist $W(G)$ wobei G die Indexmenge von W ist.

Einbettungsbereich Ein Einbettungsbereich sei eine Menge \mathcal{Z} von Graphen derart, daß es eine Menge \mathcal{R} von Graphen, sowie einen ungerichteten Graphen S derart gibt, daß \mathcal{Z} die Menge aller Graphen ist, in die wenigstens ein Element aus \mathcal{R} S -treu einbettbar ist. Dabei heißen die Graphen aus \mathcal{R} Repräsentanten von \mathcal{Z} , der Graph S Lokalität von \mathcal{Z} und (\mathcal{R}, S) ist ein Erzeugendensystem zu \mathcal{Z} . Wir setzen entsprechend $ein(\mathcal{R}, S) = \mathcal{Z}$. Die Menge aller ungerichteten Graphen eines Einbettungsbereiches heißt ungerichteter Einbettungsbereich.

Eingabetupel Argument eines Verfahrens.

Ende Das Ende einer Richtung ist ihre letzte (dritte) Komponente. Das Ende einer Menge ist die Menge derjenigen Enden von in ihr enthaltenen Richtungen, welche nicht in ihr enthalten sind.

Endrichtung Richtung eines Verfahrens, deren Ende dessen Ende ist.

Erzeugendensystem Siehe Einbettungsbereich!

Fixpunkt Index i eines Mengensystems A mit $A_i = \{i\}$.

Gegenrichtung Zu einer Richtung r ist (r_3, r_2, r_1) die Gegenrichtung.

Graph Ein Graph ist eine Menge aus Richtungen und Knoten ohne Anfang und Ende.

Grapheneigenschaften Ein Graph G heißt

- AB -partit, wenn er für Knotenmengen A und B die Bedingungen

$$\text{Start}(R(G)) \in A \setminus B \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Ende}(R(G)) \in B \setminus A \quad (\text{A.2})$$

erfüllt, und

- S -partit, wenn er für ein Mengensystem S mit Indexmenge I die Bedingungen

$$\text{Enden}(R(G)) \in S(I) \setminus \{v \in S(I) \mid |S_v^{-1}| > 1\} \quad (\text{A.3})$$

$$\forall r \in R(G) \quad : \quad |S^{-1}(\{r_1, r_3\})| = 2 \quad (\text{A.4})$$

erfüllt.

Indexmenge Siehe Tupel!

Inzidenz Eine Richtung r und ein Knoten v heißen inzident, wenn $v \in \{r_1, r_3\}$ gilt. Eine Kante e und ein Knoten v heißen inzident, wenn die Elemente von e inzident zu v sind.

Inneres Siehe Weg!

Isomorphismus Ein Wegesystem heißt Isomorphismus, wenn seine Umkehrung ein Wegesystem ist.

Kante Eine Kante ist eine Menge e zu der es eine Richtung r gibt mit

$$e = \{r, \bar{r}\}$$

. Eine Kante heißt Kante einer Menge, wenn sie nicht disjunkt zu ihr ist.

Knoten Ein Knoten ist alles was kein Tripel ist.

Knoteneigenschaften Ein Knoten v heißt

- linear in einer Menge M , wenn $\text{val}_M(v) = 2$ und $\text{val}_M^-(v) = \text{val}_M^+(v)$ gilt, und
- innerer Knoten eines Wegesystems W , wenn es eine Richtung r in der Indexmenge von W derart gibt, daß $v \in W_r$ gilt.

Komponente Zu jedem Element i der Indexmenge eines Tupels A wird A_i als i te Komponente von A bezeichnet. Eine Menge M' heißt Komponente einer Menge M , wenn sie zusammenhängend und nicht leer ist und $\partial_M M' = \emptyset$ gilt.

Kreis Ein Kreis ist eine lineare Menge M , die einen Knoten v so enthält, daß $M \setminus v$ ein endlicher offener Weg ist.

Lokalität Siehe Einbettungsbereich!

Mengeneigenschaften Eine Menge M heißt

- anziehend in einer Menge M' , wenn $\partial_{M'} M \subseteq M$ und $\text{val}_{M'}^+(M) = 0$.
- S -treu einbettbar in eine Menge M' (kurz $M \preceq_S M'$), wenn es ein S -treues Wegesystem auf M gibt, dessen Bild Teilmenge von M' ist. Die Menge M heißt dann auch kurz S -Minor von M' .
- ungerichtet, wenn sie ihre Kanten als Teilmengen enthält,
- gerichtet, wenn sie von jeder ihrer Kanten genau eine Richtung als Element enthält,
- linear, wenn sie zusammenhängend ist und jeder ihrer Knoten linear ist,

- unabhängig in einer Menge M' , wenn $M = \lfloor M \cup R(M') \rfloor = V(M)$ gilt
- und zusammenhängend, sofern für jede ungerichtete Menge M' mit $\partial_M M' = \emptyset$ gilt $M' \cap M \in \{\emptyset, M\}$.

Mengensystem Ein Mengensystem ist ein Tupel dessen Komponenten Mengen sind.

Mengensystemeigenschaft Ein Mengensystem M mit Indexmenge I heißt

- S -treu, wenn S eine Menge ist und für alle $I' \subseteq I$ gilt $A(I') \cap S = A(I' \cap S) = I' \cap S$.

Mengerbereich Ein (a, c, b) -Mengerbereich ist der Einbettungsbereich einer c -fachen ab -Verbindung.

Minor M heißt S -Minor von M' , wenn M S -treu einbettbar in M' ist. Ein \emptyset -Minor entspricht dem in der Literatur üblichen Begriff des topologischen Minors. Andere Minorenbegriffe werden nicht verwendet.

Rekursionstiefe Ist \mathcal{A} ein Verfahren und P ein Tupel, so ist die Rekursionstiefe von $\mathcal{A}(P)$ ein wie folgt definierter Wert N : Wird das Verfahren $\mathcal{A}(P)$ gestartet, so läuft es zunächst mit Rekursionstiefe Null. Startet sich das Verfahren in der Rekursionstiefe n aufgrund der Zuweisung $\mathcal{A}(P')$ in einer seiner Richtungen selbst, so läuft das nun gestartete Verfahren mit Rekursionstiefe $n + 1$. N ist nun die maximal erreichte Rekursionstiefe im Verlauf des Verfahrens, sofern eine solche existiert, anderenfalls ist N unendlich.

Repräsentant Siehe Einbettungsbereich!

Repräsentantensystem Sind ein Mengensystem A sowie ein Tupel natürlicher Zahlen a mit gleicher Indexmenge I gegeben, so nennen wir ein Mengensystem X auf der gleichen Indexmenge ein partielles a -Repräsentantensystem von A , falls die Komponenten von X disjunkt sind und für alle $i \in I$ sowohl $|X_i| \leq a_i$ als auch $X_i \subseteq A_i$ gilt. $X(I)$ heißt dann partielle a -Transversale von A . Gilt $|X(I)| = a(I)$ so ist $X(I)$ eine a -Transversale und X ein a -Repräsentantensystem. Gilt $a_i = 1$ für alle $i \in I$, so kann das a als Attribut für Transversalen und Repräsentantensysteme entfallen.

Richtung Eine Richtung ist ein Tripel, dessen erste und letzte Komponente Knoten sind.

Schlinge Eine Kante heißt Schlinge, sofern sie einelementig ist.

Startrichtung Richtung eines Verfahrens, deren Anfang dessen Anfang ist.

Systemweg Besitzt ein Graph G zu zwei Mengen A und B einen AB -Weg P mit erstem Knoten a und letztem Knoten b , so ist das $\{a, b\}$ -treue Wegesystem mit Indexmenge $\{a, b, (a, \emptyset, b)\}$ und Bild P als AB -Systemweg.

Transversale Siehe Repräsentantensystem!

Trenner

- Sind A und B Mengen, so ist eine Menge T ein AB -Trenner einer Menge M , wenn $M' = M \setminus T$ eine anziehende Menge enthält, die $A \cap M'$ überdeckt und zu $B \cap M'$ disjunkt ist.
- Ist A eine Menge, so ist eine Menge T ein A -Trenner von M , wenn $M \setminus T$ keine Komponente enthält, die mehr als ein Element mit A gemeinsam hat.
- Ist \mathcal{A} ein Mengensystem, so ist eine Menge T ein A -Trenner von M , wenn $M \setminus T$ keine Komponente enthält, die mit mehr als einer Komponenten von \mathcal{A} ein Element gemeinsam hat.

Tupel Ein I -Tupel a ist eine Abbildung, die jedem Element i der Indexmenge I ein a_i (woher auch immer) zuordnet.

Umbenennen Sind v und v' Knoten und M eine Menge, die weder v' noch eine zu v' inzidente Richtung enthält, so entstehe die Menge M' durch Umbenennen von v in v' aus der Menge M , wenn $M' = \{f(x) | x \in M\}$ gilt, wobei $f(x) = x$ für alle x gilt, die weder mit v inzident noch gleich v sind. Weiterhin sei $f(v) = v'$ und $f(r) = (f(r_1), r_2, f(r_3))$ gesetzt.

Umkehrung Ein Mengensystem B über einer Indexmenge Y heißt Umkehrung eines Mengensystems A über einer Indexmenge X , falls $A(X) = Y$ und $B(Y) = X$ gilt und für jedes $y \in Y$ gilt $B_y = \{x \in X | y \in A_x\}$.

Untergraph G ist ein Untergraph der Menge M , wenn G ein Graph ist und $G \subseteq M$ gilt.

Verbindung Ein Graph, der aus zwei Knoten a und b sowie $c \in \mathbb{N}_0$ verschiedenen Richtungen von a nach b besteht, heißt c -fache ab -Verbindung.

Verfahren Ein Verfahren ist eine Menge \mathcal{A} mit folgenden Eigenschaften: $[\mathcal{A}]$ ist ein Graph, dessen Knoten Fallunterscheidungen anhand der Werte gegebener Variablen darstellen, welche der von ihnen ausgehenden Richtungen als nächstes beschriftet werden, dessen Richtungen als zweite Komponente eine Folge von Wertzuweisungen für Variablen darstellen, der einen Knoten besitzt, in welchem keine Richtung endet (Startknoten) und der einen Knoten besitzt, in welchem keine Richtung beginnt (Endknoten).

$\mathcal{A} \setminus [\mathcal{A}]$ besteht aus zwei Richtungen, von denen eine (die Startrichtung) im Startknoten endet und deren zweite Komponente Namenszuweisungen für Komponenten eines Eingabetupels P enthält. Die zweite Richtung (Endrichtung) beginnt im Endknoten.

Weg Eine lineare Menge heißt

- endlicher offener Weg, falls $|\text{Start}(M)| = |\text{Ende}(M)| = 1$ gilt,
- linksunendlicher offener Weg, falls $\text{Start}(M) = \emptyset$ und $|\text{Ende}(M)| = 1$ gilt,
- rechtsunendlicher offener Weg, falls $|\text{Start}(M)| = 1$ und $\text{Ende}(M) = \emptyset$ gilt,
- beidseitig unendlicher Weg, falls $\text{Start}(M) = \text{Ende}(M) = \emptyset \neq V(M)$ gilt.

Zu zwei Mengen A und B ist ein AB -Weg eine Menge W derart, daß für eine Teilmenge W' von W genau dann die leere Menge kein AB -Trenner von W' ist, wenn $W' = W$ gilt. Gibt es Knotenmengen A und B derart, daß eine Menge W ein AB -Weg ist, so nennen wir W einen abgeschlossenen Weg, die Elemente von $W \cap A$ erste Knoten von W , die Elemente von $W \cap B$ letzte Knoten von W , und die Menge aller Elemente von W außer den ersten und den letzten Knoten Inneres von W . Ist S ein Mengensystem, so ist eine Menge W ein S -Weg, wenn W die einzige Teilmenge von W ist, zu der zwei Komponenten A und B von S derart existieren, daß sie ein AB -Weg ist.

Wegesystem Ein Tupel f mit Indexmenge X heißt Wegesystem auf X wenn gilt:

- Für alle $r \in R(X)$ ist f_r ein offener Weg.
- Für alle $v \in V(X)$ ist f_v einelementig und enthält einen Knoten.
- Für alle $x, y \in X$ sind f_x und f_y disjunkt, falls $[\{x\}] \neq [\{y\}]$ gilt.
- Für alle $r \in R(X \cap \overline{X})$ gilt $f_{\overline{r}} = \overline{f_r}$.
- Für alle $r \in R(X)$ und alle $v \in V(X)$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Start}(f_r) \in f_v & \text{ ist äquivalent zu } r_1 = v \\ \text{Ende}(f_r) \in f_v & \text{ ist äquivalent zu } r_3 = v \end{aligned}$$

Wegesystemeigenschaften Ein Wegesystem W mit Indexmenge M heißt

- A -Wegesystem, wenn für jedes $r \in R(M)$ der Graph $W([\{r\}])$ ein A -Weg ist.

Zusammenhangseigenschaft Zwei Knoten a und b heißen in einer Menge M c -fach zusammenhängend von a nach b , wenn eine c -fache ab -Verbindung $\{a, b\}$ -treu in M einbettbar ist.

Anhang B

Thesen

Für die Begriffsbildung verweisen wir auf Anhang A dieser Arbeit. Die Arbeit beginnt mit drei neuen kurzen Beweisen von Mengers Theorem (Theorem 10):
Sei G ein endlicher Graph, $A, B \subseteq V(G)$, $c \in \mathbb{N}_0$ und kein AB -Trenner hat weniger als c Elemente. Dann hat G einen Untergraphen aus c disjunkten AB -Wegen.

Die ersten beiden Beweise (vgl. [6] und [7]) können als Standardinduktionen nach der Anzahl der Kanten bzw. Richtungen zusammengefaßt werden, wobei im ersten Beweis (nur für ungerichtete Graphen) zum Reduzieren des Graphen eine Kante kontrahiert wird, im zweiten Beweis hierzu einfach eine Richtung gelöscht wird.

Der dritte Beweis bedient sich des Theorems 11 (Böhme, Göring, Harant):
Sei G ein Graph, A und B seien Knotenmengen des Graphen und U sei ein Untergraph von G bestehend aus endlich vielen disjunkter AB -Wege von G . Für das folgende Verfahren menger ist $menger(G, A, B, U, W)$ ein Algorithmus, nach dessen Durchführung W ein Untergraph von G aus disjunkten AB -Wegen ist, welcher $(A \cup B) \cap U \subset (A \cup B) \cap W$ erfüllt, sofern es keinen AB -Trenner gibt, der genausoviele Elemente hat, wie U Komponenten.

1. Seien G, A, B, U, W die ersten fünf Komponenten des Eingabetupels.
2. Falls es in $G - U$ keinen AB -Weg P gibt gehe zu 4.
3. Setze $W^* = menger(G, A, B, U) = U \cup P$ und gehe zu 8.
4. Sei P ein $A, V(U)$ -Weg in $G - (A \cap V(U))$,
 a ein (das) Element von $V(P \cap U)$,
 Q die a enthaltende Komponente von U
 R ein (der) Aa -Weg in Q und
führe $menger(G, A \cup V(P \cup R), B, U - (R - a), W)$ aus.
5. Falls $W - a$ nicht disjunkt zu $P \cup R$ ist, gehe zu 7,

6. Setze $W^* = W \cup R$ und gehe zu 8.
7. Sei b ein (das) Element von $V(W - a) \cap (P \cup R)$,
 S ein (der) ab -Weg von $P \cup R$
 und $W^* = W \cup (R \cup P - (S - \{a, b\}))$.
8. Setze $W = W^*$.

Damit gelingt direkt der Beweis von Korollar 12 (Menger 1927), welches die weitreichendste bekannte Version des Satzes von Menger ist, die ohne Auswahlaxiom auskommt.

Seien G ein Graph¹, c eine natürliche Zahl und A und B solche Teilmengen von $V(G)$, daß es keinen AB -Trenner mit weniger als c Knoten in G gibt. Dann gibt es ein Menge aus c disjunkten AB -Wegen in G .

Das Vorschreiben der Start- und Endknoten eines nicht maximalen AB -Wegesystems in einem Graphen für ein maximales AB -Wegesystem desselben Graphen wird in Theorem 13 (Göring) verallgemeinert:

In einem endlichen Graphen G seien ein Mengensystem A und ein Tupel a natürlicher Zahlen jeweils mit Indexmenge I sowie ein Mengensystem B und ein Tupel b natürlicher Zahlen jeweils mit Indexmenge J gegeben. Die maximale Anzahl disjunkter Wege von G deren erste Knoten eine partielle a -Transversale von A und deren letzte Knoten eine partielle b -Transversale von B bilden, ist

$$\min_{K \subseteq I, L \subseteq J} t(K, L) + a(I \setminus K) + b(J \setminus L)$$

wobei $t(K, L)$ die minimale Größe eines $A(K)B(L)$ -Trenners von G ist.

Als Beispiele für kantenlose Spezialfälle werden der Satz von Hall (vgl. [23]), ein Satz von Ford und Fulkerson (vgl. [5]), der Satz von Perfect (vgl. [18]), eine Verallgemeinerung desselben durch Welsh (vgl. [23]) sowie eine weitere (unwesentliche) Verallgemeinerung hiervon genannt. Es werden auch einige weitere Spezialfälle aufgeführt, wie die Zweipunktversion des Satzes von Menger und die „Pinselversion“.

Eine andere Variante, das Vorschreiben von Start- und Endknoten in AB -Wegesystemen zu steuern liefert Theorem 23 (Göring):

Sei G ein Graph, A und B disjunkte Teilmengen von $V(G)$ so, daß zu keinem $a \in A$ und keinem $b \in B$ ein a und b vermeidender $\{a\}\{b\}$ -Trenner mit weniger als c Knoten existiert. Weiterhin sei U ein Wegesystem dessen Indexmenge AB -partit ist und höchstens c Kanten hat und dessen Bild in G liegt. Darüber hinaus seien z ein Tupel natürlicher Zahlen und C_A und C_B je eine Menge mit

- $z(A) = z(B) = c$,

¹endlich oder unendlich, gerichtet, ungerichtet oder gemischt

- falls $|A \setminus V(U)| \leq c - |E(U)|$ gilt $z_v \geq \max(\text{val}_U^+(v), 1)$ und $C_A = \emptyset$,
ansonsten gilt $C_A = A \setminus V(U)$ und $z_v \leq \max(\text{val}_U^+(v), 1)$ für alle $v \in A$
- falls $|B \setminus V(U)| \leq c - |E(U)|$ gilt $z_v \geq \max(\text{val}_U^-(v), 1)$ und $C_B = \emptyset$,
ansonsten gilt $C_B = B \setminus V(U)$ und $z_v \leq \max(\text{val}_U^-(v), 1)$ für alle $v \in B$.

Dann hat G einen festen AB -partiten Minor W mit

- $\text{val}_W(v) = z_v$ für alle $v \in A \cup B \setminus (C_A \cup C_B)$ und
- $\text{val}_W(v) \leq 1$ für alle $v \in C_A \cup C_B$.

Für S -treue Wegesysteme (Wegesysteme, die Knoten aus S entsprechend einer gegebenen Vorschrift enthalten bzw. vermeiden) wird daraus Theorem 25 (Göring) hergeleitet:

Seien G und S Graphen und U ein S -treues Wegesystem in G mit Indermenge I , für welches $S \subseteq I$ gilt. Desweiteren sei $v \in V(I \cap S)$ ein Knoten derart, daß es in G keinen v vermeidenden $\{v\}U(I - v)$ -Trenner mit weniger als c Elementen gibt. Dann gibt es in G ein S -treues Wegesystem U' mit Indermenge I' derart, daß $\text{val}_{U'}(v) = c$ gilt und I' aus I durch (eventuelles) Unterteilen von Kanten e von I durch Knoten v_e und Einfügen je einer zusätzlichen v und v_e verbindenden Kante, sowie Einfügen von geeignet vielen v mit verschiedenen anderen Knoten aus I , die nicht Nachbarknoten von v sind, verbindenden Kanten entsteht.

Unter Verwendung von Theorem 13 (Göring) wird der Originalbeweis von Maders Theorem (Theorem 26) modifiziert um zusätzlich die Vorschreibbarkeit von Startknoten nichtmaximaler Systeme disjunkter S -Wege für maximale solche Systeme zu zeigen (Theorem 28 (Göring)):

Sei G ein endlicher ungerichteter Graph, S ein System von Teilmengen von $V(G)$ mit endlicher Indermenge I , U ein Untergraph von G bestehend aus k disjunkten S -Wegen und m das Minimum über $\mathbb{M}_G(S, T)$, wobei T alle S -Trenner von G durchläuft. Dann hat G einen Untergraphen W bestehend aus m disjunkten S -Wegen derart, daß $S(I) \cap U \subseteq S(I) \cap W$ gilt.

Eine neue Klassifizierung von Graphen wird eingeführt: Die Menge aller Graphen, in denen ein S -treues Wegesystem mit gegebener Struktur enthalten ist, wird als Einbettungsbereich bezeichnet.

Für Einbettungsbereiche werden folgende Sätze gezeigt:

Theorem 29(Göring):

Die Vereinigung und der Durchschnitt von zwei Einbettungsbereichen ist ein Einbettungsbereich.

Theorem 30(Göring):

Sind zwei Einbettungsbereiche disjunkt, so ist wenigstens einer davon die leere Menge.

Theorem 31(Göring)

Gegeben sind zwei Einbettungsbereiche über ihre Erzeugendensysteme (\mathcal{R}_1, S) und

(\mathcal{R}_2, S) gleicher Lokalität S . Dann ist $\text{ein}(\mathcal{R}_1, S) \subseteq \text{ein}(\mathcal{R}_2, S)$ äquivalent zu der folgenden Bedingung: Es gilt $\mathcal{R}_1 \subseteq \text{ein}(\mathcal{R}_2, S)$.

Theorem 35(Göring)

Zu einem Erzeugendensystem (\mathcal{R}, S) eines Einbettungsbereiches und einem endlichen ungerichteten Graphen S' gibt es stets ein Erzeugendensystem mit Lokalität $S' \cup S$ zum gleichen Einbettungsbereich.

Ist (\mathcal{R}, S) sogar ein endliches Erzeugendensystem, dann gibt es auch ein endliches Erzeugendensystem mit Lokalität $S' \cup S$ zu diesem Einbettungsbereich.

Korollar 36(Göring)

Die Vereinigung zweier Einbettungsbereiche mit endlichem Erzeugendensystem ist wieder ein Einbettungsbereich mit endlichem Erzeugendensystem.

Theorem 37(Göring)

Der Durchschnitt eines ungerichteten Einbettungsbereiches mit endlichem Erzeugendensystem und eines Mengerbereiches hat ein endliches Erzeugendensystem.

Theorem 39(Göring)

Es gibt ein Verfahren, welches zu Graphen G und S , Knoten a und b aus S und einem S -treuen Wegesystem W in G mit Indexmenge I , die a und b enthält, ein S -treues Wegesystem W^* in G mit beschränkter Indexmenge I^* derart konstruiert, daß sowohl I als auch eine c -fache ab -Verbindung ein S -Minor von I^* ist.

Dabei sind die letztgenannten beiden Theoreme die wichtigsten der Arbeit. Im Beweis von Theorem 39 wird das im Theorem genannte Verfahren beschrieben. Als Korollar zu Theorem 37 ergibt sich Korollar 40

Sei $c \in \mathbb{G}_1^3$, \mathcal{G} eine endliche Menge von endlichen ungerichteten Graphen, S ein endlicher Graph und \mathcal{Z}_c die Klasse aller c -fach zusammenhängenden ungerichteten Graphen, so gibt es eine endliche Menge $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{Z}_c$ mit

$$\text{ein}(\mathcal{G}, S) \cap \mathcal{Z}_c = \text{ein}(\mathcal{G}', S) \cap \mathcal{Z}_c$$

Darüber hinaus kann zu einem Graphen $G \in \text{ein}(\mathcal{G}, S) \cap \mathcal{Z}_c$ mit einem linearen Aufwand in $|G|$ ein Wegesystem W von G mit Indexmenge $I \in \text{ein}(\mathcal{G}', S) \cap \mathcal{Z}_c$ gefunden werden.

Als Anwendung der hier entwickelten Theorie zu Wegesystemen werden folgende Resultate erzielt: Theorem 41(Göring, Harant, Hexel, Tuza)

- (i) $n_1(c, l) = \frac{c(c-1)}{2}l - 2c(c-2) + (l \bmod 2) \frac{(c-1)(c-2)}{2}$ für $l \geq 3$ und $c \geq 2$,
- (ii) $n_2(c, l) = \frac{c}{2}l - c + 2 + (l \bmod 2) \frac{c-2}{2}$ für $l \geq 3$ und $c \geq 2$, und
- (iii) $n_3(c, l) = \frac{c}{2}l - 2c + 3 + (l \bmod 2) \frac{c-2}{2}$ für $c \geq 3$ und $l \geq 6$.

Theorem 42(Göring, Harant, Hexel, Tuza)

- (i) $n_1^*(3, l) = 3l - 5$ für $l \geq 3$,
- (ii) $n_1^*(4, l) = 6l - 12$ für $l \geq 3$,
- (iii) $15l - 34 \leq n_1^*(5, l) \leq 15l - 24$ für $l \geq 3$,
- (iv) $n_2^*(c, l) = \max(n_2(c, l), 6(c - 3))$ für alle (c, l) mit $2 \leq c \leq 5$, $l \geq 3$ und $(c, l) \neq (5, 7)$
 $16 \leq n_2^*(5, 7) \leq 17$
- (v) $n_3^*(3, l) = \lfloor \frac{3}{2}(l - 1) \rfloor$ für $l \geq 5$,
- (vi) $n_3^*(4, l) = 2l - 4 + (l \bmod 2)$ für $l \geq 5$, und
- (vii) $n_3^*(5, l) = \lceil \frac{5}{2}(l - 2) \rceil$ für $l \geq 9$.

In den beiden letztgenannten Theoremen ist $n_k(c, l)$ (bzw. $n_k^*(c, l)$) die kleinste Anzahl von Knoten die ein c -fach zusammenhängender (bzw. zusätzlich planarer) Graph haben kann, wenn er k Knoten derart enthält, daß kein sie enthaltender Kreis des Graphen weniger als l Knoten besitzt.

Theorem 50(Göring, Harant)

Besitzt ein dreifach zusammenhängender planarer Graph G zu einer Teilmenge S seiner Knotenmenge einen S enthaltenden zweiregulären Untergraphen U eines Typs $T = T(S, U)$ mit $s(T) - t(T) < 5$, so besitzt G auch einen S enthaltenden Kreis. Umgekehrt gibt es zu jeder endlichen Folge T nichtnegativer ganzer Zahlen mit $s(T) - t(T) \geq 5$ einen Polyedergraphen G sowie eine Teilmenge S seiner Knotenmenge so, daß G zwar einen zweiregulären S enthaltenden Untergraphen vom Typ $T = T(S, U)$ besitzt, jedoch keinen S enthaltenden Kreis.

Dabei bezeichnet der Typ von U die absteigende Folge der Mächtigkeiten der Komponenten von U , $t(T)$ ihr kleinstes Element und $s(T)$ ihre Summe.

Offen bleibt die Frage:

Hat der Durchschnitt zweier Einbettungsbereiche mit jeweils endlichem Erzeugendensystem stets ein endliches Erzeugendensystem?

Anhang C

Veröffentlichungen des Autors

Bisherige Veröffentlichungen (Stand Juli 2002)

1. On 2-regular subgraphs in polyhedral graphs, *Discrete Mathematics*, 251 (2002) 97-102.
2. Menger's Theorem, (with T. Böhme, J. Harant), *Journal of Graph Theory*, 37 (2001), 35-36.
3. Short Proof of Menger's Theorem, *Discrete Mathematics*, 219 (2000), 295-296.
4. A proof of Menger's Theorem by contraction, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 22 (2002), 111-112.
5. On short cycles through prescribed vertices of a graph (with J. Harant, E.Hexel, Zs.Tuza), eingereicht bei *Discrete Mathematics*.

Anhang D

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Besonders danke ich hier Jochen Harant und Thomas Böhme, die immer ein offenes Ohr hatten, wenn ich etwas erklären wollte (meist um mir selber darüber klarzuwerden) und mir mit Rat und Tat zur Seite standen.

Ich danke meinem Sohn Valentin; mit ihm machte ich viele zweisame Spaziergänge, bei denen er meist im Kinderwagen schlief und ich viel Ruhe und Zeit hatte, um die vorliegenden Resultate zu entdecken.

Ich danke meiner Frau Daniela, die mich stets motiviert hat, wenn ich bei einem Problem mal nicht weiterkam - und meinem Sohn Laurin, dessen Geburt den nötigen Druck auf mich ausübte, die Arbeit abzuschließen, um mich bei neuen Spaziergängen mit Kind im Wagen neuen mathematischen Problemen zuzuwenden.

Literaturverzeichnis

- [1] T.Böhme, F.Göring, J.Harant, Mengers Theorem, *Journal of Graph Theory* 37(2001) 35-36.
- [2] R. Diestel, Graph Theory (second edition), Springer, Heidelberg (2000).
- [3] G.A.Dirac, 4-chrome Graphen und vollständige 4-Graphen, *Math. Nachr.* 22 (1960) 51-60.
- [4] M.G.Dirac, Généralisations du théorème de Menger, *C.R.Académie des Sciences* 26(1960), 4252-4253.
- [5] L.R.Ford, D.R.Fulkerson, Network flows and systems of representatives, *Canad. J. Math.* 10(1958), 78-84.
- [6] F.Göring, Short proof of Mengers Theorem, *Discrete Mathematics* 219(2000) 295-296.
- [7] F.Göring, A proof of Mengers Theorem by contraction, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 22(2002), 111-112.
- [8] F.Göring, J.Harant, E.Hexel, Zs.Tuza, On short cycles through prescribed vertices of a graph, eingereicht zum *Sonderband Discrete Mathematics anlässlich des 10. Workshops „Cycles and Colourings“*, September 2001 Stara Lesna, Slowakei.
- [9] J.Harant, On paths and cycles through specified vertices, eingereicht bei *Discrete Mathematics*.
- [10] A.J.Hoffmann, H.W. Kuhn, On systems of distinct representatives *Linear Inequalities and Related Systems. Ann Math.Studies* 28 (Princeton, 1956) 199-206.
- [11] R. Halin, Graphentheorie, Akademie-Verlag Berlin (1989).
- [12] A.K. Kelmans, M.V. Lomonosov, When m vertices on a k -connected Graph cannot be walked round along a simple cycle, *Discrete Mathematics* 38 (1982), 317-322.

- [13] W.Mader, Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege, *Arch. Math.* 31(1978) 387-402.
- [14] W. McCuaig, A simple proof of Menger's Theorem, *Journal of Graph Theory* 8(1984) 427-429.
- [15] K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fundam. Math.* 10(1927), 96-115.
- [16] Nash-Williams, C.St.J.A., Tutte, W.T., More proofs of Menger's theorem, *Journal of Graph Theory* 1(1977) 13-17.
- [17] O. Ore, Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.* 22(1955),625-639.
- [18] H.Perfect, Applications of Mengers graph theorem. *J. Math. Analysis Appl.* 22(1968), 96-111.
- [19] L.Pyber, Zs. Tuza, Menger-type theorems with restrictions on path lengths, *Discrete Mathematics* 120 (1993), 161-174.
- [20] A. Schrijver, A Short Proof of Mader's \mathcal{S} -Path's Theorem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol.82, No. 2(2001) 319-321.
- [21] P.D.Seymour, Disjoint paths in graphs, *Discrete Mathematics* 29(1980) 293-309.
- [22] W.T.Tutte, A theorem on planar graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* 82 (1956), 99-116.
- [23] D.J.A. Welsh, Matroid Theory, Academic Press Inc. (London) Ltd. (1976).

Erklärung

Ich erkläre hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Ilmenau, den 10.7.2002

Frank Göring