Über Kreise durch vorgeschriebene Elemente eines Graphen

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Dr. rer. nat.

eingereicht bei der
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Ilmenau

vorgelegt von
Tobias Gerlach
Institut für Mathematik
Technische Universität Ilmenau
D-98684 Ilmenau

eingereicht am 13.01.2004
verteidigt am 03.06.2004

Gutachter:
Prof. J. Harant (TU Ilmenau)
Prof. I. Schiermeyer (TU Bergakademie Freiberg)
Prof. M. Tkáč (University of Economics Bratislava)

Zusammenfassung

Ein linear forest ist ein kreisloser Graph mit einer Maximalvalenz von höchstens zwei. Damit besteht ein linear forest lediglich aus (isolierten) Knotenpunkten und/oder Wegen.
Inhalt der vorliegenden Arbeit sind hinreichende Zusammenhangs- und Toughnessvoraussetzungen für die Existenz eines Kreises durch einen vorgeschriebenen linear forest eines Graphen.
Es werden die Fälle betrachtet, daß der vorgeschriebene linear forest aus allen Knotenpunkten des Graphen (Hamiltonkreise, speziell in sep-chordalen planaren Graphen), aus einigen Knotenpunkten des Graphen bzw. aus einigen Knotenpunkten und einigen Kanten des Graphen besteht.
Darauf aufbauend wird die Fragestellung nach der Existenz eines Kreises durch einige vorgeschriebene Knotenpunkte und einige vorgeschriebene Kanten mit einer zusätzlich vorgeschriebenen Durchlaufungsreihenfolge (speziell in chordalen Graphen) untersucht.

Abstract

A linear forest is an acyclic graph of maximum degree at most two. Hence, a linear forest consists of isolated vertices and/or paths.
The content of the present dissertation are sufficient conditions (Connectivity and Toughness) forcing the existence of a cycle through a specified linear forest of a graph.
We consider the cases, that the specified linear forest consists of all vertices of the graph (Hamiltonian Cycles, especially in sep-chordal planar graphs), of some vertices of the graph, and of some vertices and some edges of the graph, respectively.
Moreover we study a generalization of the k-ordered concept (especially in chordal graphs).

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das folgende Kapitel soll zunächst eine Einführung in die in dieser Arbeit behandelten Problemstellungen geben. Es wird dabei vorausgesetzt, daß der Leser mit den grundlegenden Begriffen der Graphentheorie (z.B. Graph, Knotenpunkt, Kante, Weg, Kreis, Untergraph, ...) vertraut ist. Im Wesentlichen folgt die verwendete Bezeichnungsweise [15]. Desweiteren wird auf die für die vorliegende Arbeit fundamentalen Begriffe des Zusammenhangs eines Graphen und der Toughness eines Graphen eingegangen. Der Autor möchte den Leser dieser Arbeit bitten, ihm die Verwendung und „Eindeutschung“ von einigen englischen Fachbegriffen zu verzeihen. Der Grund dafür liegt in der Ungebräuchlickeit der entsprechenden deutschen Bezeichnungen.

1.1 Motivation

Der zentrale Gegenstand dieser Arbeit ist die Frage, unter welchen Voraussetzungen (hier Zusammenhangsvoraussetzungen und Toughnessvoraussetzungen) die Existenz eines Kreises durch vorgeschriebene Elemente (Knotenpunkte, Kanten, Wege) eines endlichen, schlichten und ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gesichert werden kann.

Ein Untergraph H eines Graphen G wird als *Hamiltonkreis* (bzw. *Hamiltonweg*) von G bezeichnet, wenn H ein Kreis (bzw. ein Weg) ist und $V(H) = V(G)$ gilt. Ein Graph, der einen Hamiltonkreis enthält, heißt *hamiltonsch*. Die Resultate über die Existenz von Hamiltonkreisen können grob in zwei Klassen eingeteilt werden. Die erste Klasse bilden hinreichende Bedingungen für die Existenz von Hamiltonkreisen. Dagegen besteht die zweite Klasse aus Resultaten, welche zeigen, daß aus gewissen starken Voraussetzungen nicht auf die Existenz von Hamiltonkreisen und noch nicht einmal auf die Existenz von Kreisen großer Länge geschlossen werden kann. Ein erstes Resultat aus der ersten Klasse wurde 1931 von WHITNEY ([58]) bewiesen. Es gelang ihm zu zeigen, daß jeder 4-fach zusammenhängende maximal planare Graph einen Hamiltonkreis besitzt. Im Jahre

1956 konnte dieses Resultat durch TUTTE auf 4-fach zusammenhängende planare Graphen verallgemeinert werden.

Theorem 1.1. *(TUTTE [56])*
Jeder 4-fach zusammenhängende planare Graph G besitzt einen Hamiltonkreis.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Hamiltonkreises in nicht notwendig planaren Graphen liefert Theorem 1.2.

Theorem 1.2. *(DIRAC [17])*
Haben alle Knotenpunkte eines Graphen G mit $|V(G)| \geq 3$ eine Valenz von mindestens $\frac{|V(G)|}{2}$, so besitzt G einen Hamiltonkreis.

Dieses Theorem ist ein typisches Beispiel für sogenannte „Dichteresultate", d.h. für Resultate, bei denen mittels Valenzbedingungen eine gewisse Anzahl von Kanten garantiert wird, die dann wiederum die Existenz eines Hamiltonkreises sichern. Es sei bemerkt, daß Ergebnisse dieser Art (nicht nur bezogen auf die Hamiltonkreisproblematik) nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind, d.h. die Existenz der gesuchten Kreise wird nicht durch Voraussetungen an die „Dichte" eines Graphen, sondern durch Zusammenhangs- und Toughnessbedingungen gesichert. In Kapitel 2 soll ein kleiner Beitrag zur Hamiltonkreistheorie geleistet werden, wobei sich auf Toughnessbedingungen beschränkt wird, die die Existenz eines Hamiltonkreises in speziellen planaren und speziellen chordalen Graphen garantieren.
Eine der Hamiltonkreisproblematik entsprechende Fragestellung nach der Existenz eines Kreises durch alle Kanten eines Graphen läßt sich nur für Kreise positiv beantworten und ist damit eine uninteressante Fragestellung.
Fordert man von einem Kreis, daß er nicht notwendig alle Knotenpunkte, sondern nur einige vorgeschriebene Knotenpunkte eines Graphen enthält, so kann in einem gewissen Sinne von einer Abschwächung der Hamiltonkreisproblematik gesprochen werden. Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ eine Teilmenge seiner Knotenpunktmenge. Ein Kreis in G, der alle Knotenpunkte von X enthält, wird *X-Kreis* in G genannt. Besitzt ein Graph G für alle Knotenpunktmengen $X \subseteq V(G)$ mit $|X| = k$ einen X-Kreis, so bezeichnet man G als *k-cyclable.*

Theorem 1.3. *(DIRAC [18])*
Jeder k-fach zusammenhängende Graph ($k \geq 2$) ist k-cyclable.

Der vollständige paare Graph $K_{k,k+1}$ zeigt, daß die Aussage des Theorems 1.3 bezüglich der Mächtigkeit der Knotenpunktmenge X bestmöglich ist. Kapitel 3 der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen zusätzlichen Toughnessbedingungen die Existenz eines X-Kreises in einem k-fach zusammenhängenden Graphen für $|X| = k + 1$ bzw. $|X| = k + 2$ und für nicht unabhängige Knotenpunktmengen X im Fall $|X| = k + 3$ gesichert werden kann. Mit den bisher aufgeführten Problemstellungen verwandt ist die Fragestellung nach notwendigen Bedingungen für die Existenz von Kreisen durch alle Knotenpunkte und einige vorgeschriebene Kanten eines Graphen oder für die Existenz von Kreisen durch einige vorgeschriebene Knotenpunkte und einige vorgeschriebene Kanten eines Graphen. Für 4-fach zusammenhängende planare Graphen folgt die Existenz eines Hamiltonkreises, der zusätzlich noch eine beliebige vorgeschriebene Kante des Graphen enthält, bereits aus dem Beweis des Theorems 1.1 von TUTTE.

Theorem 1.4. *(SANDERS [53])*
Sei G ein 4-fach zusammenhängender planarer Graph. Ferner seien e und f zwei Kanten von G. Dann besitzt G einen Hamiltonkreis, der e und f enthält.

Problemstellungen dieser Art (d.h. Kreise durch alle Knotenpunkte eines Graphen und durch einige vorgeschriebene Kanten) sind ebenfalls nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Demgegenüber beschäftigt sich der erste Abschnitt des Kapitels 4 mit der Fragestellung, unter welchen zusätzlichen Toughnessbedingungen die Existenz von Kreisen durch einige vorgeschriebene Knotenpunkte und einige vorgeschriebene Kanten eines Graphen gesichert werden kann.
Fordert man schließlich von einem Kreis, daß er nicht nur gewisse vorgeschriebene Knotenpunkte und vorgeschriebene Kanten enthält, sondern diese auch in einer (zusätzlich) vorgeschriebenen Reihenfolge durchläuft, so führt diese Problemstellung zu einer Verallgemeinerung des von NG und SCHULTZ (siehe [50]) im Jahre 1997 eingeführten k-ordered Problems. Der zweite Abschnitt des Kapitels 4 beschäftigt sich abschließend mit der Fragestellung, welcher Zusammenhang in einem chordalen Graphen garantiert, daß dieser Graph einen Kreis durch k vorgeschriebene Knotenpunkte und Kanten besitzt und daß dieser Kreis diese vorgeschriebenen Knotenpunkte und Kanten in einer vorgegebenen Reihenfolge durchläuft. Dabei gelingt es, eine Vermutung von FAUDREE (siehe [22]), daß jeder $(2k-3)$-fach zusammenhängende Graph k-ordered ist, zumindest für chordale Graphen zu beweisen.

Zu den aufgeführten Problemstellungen, die nicht Gegenstand dieser Arbeit sind, sei bemerkt, daß sich durch zusätzliche Zusammenhangs- bzw. Toughnessbedingungen bezüglich dieser Fragestellungen leider keine neuen Ergebnisse ergaben. Analog ist die Beschränkung auf spezielle Graphenklassen in Kapitel 2 (sepchordale planare Graphen) und im zweiten Abschnitt des Kapitels 4 (chordale Graphen) begründet.

Zusammenfassend und grob dargestellt befassen sich die einzelnen Kapitel mit den folgenden Problemstellungen:

- Kapitel 2: Kreise durch alle Knotenpunkte eines planaren bzw. chordalen Graphen

- Kapitel 3: Kreise durch einige Knotenpunkte eines beliebigen Graphen

- Kapitel 4: Kreise durch einige Knotenpunkte und Kanten eines beliebigen Graphen sowie Kreise durch einige Knotenpunkte und Kanten eines chordalen Graphen mit vorgeschriebener Durchlaufungsreihenfolge

1.2 Der Zusammenhang eines Graphen

Ist $\mathcal{P}$ eine Menge von Wegen eines Graphen G, dann sei $V(\mathcal{P}) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} V(P)$. Für zwei Knotenpunktmengen $A, B \subseteq V(G)$ heißt ein Weg $P = x_0 \dots x_k$ mit $x_i \in V(G)$ für alle $i \in \{0, \dots, k\}$, $V(P) \cap A = \{x_0\}$ und $V(P) \cap B = \{x_k\}$ ein *A-B-Weg* in G. Jeder gemeinsame Knotenpunkt von A und B ist ein *trivialer A-B-Weg*. Seien $B \subsetneq V(G)$ und $a \in V(G) \setminus B$. Eine Menge $\mathcal{R}$ von $\{a\}$-B-Wegen heißt ein *$\{a\}$-B-Fächer*, wenn alle $\{a\}$-B-Wege aus $\mathcal{R}$ paarweise nur den Knotenpunkt a gemeinsam haben. Desweiteren sei mit $|\mathcal{R}|$ die Anzahl der $\{a\}$-B-Wege in einem $\{a\}$-B-Fächer $\mathcal{R}$ bezeichnet.
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zwei Knotenpunkte $x, y \in V(G)$ heißen *zusammenhängend*, wenn ein $\{x\}$-{y}-Weg in G existiert. Dies definiert auf der Knotenpunktmenge von G eine Äquivalenzrelation. Jeder von einer Äquivalenzklasse induzierte Untergraph von G heißt *Komponente* von G. Sind $G_1, \dots, G_\omega$ die Komponenten von G, so gilt $G = \bigcup_{i=1}^{\omega} G_i$. Die Anzahl der Komponenten eines Graphen G sei mit $\omega(G)$ bezeichnet. Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, falls $\omega(G) = 1$ gilt. Einen nicht vollständigen Graphen bezeichnet man als *k-fach zusammenhängend*, wenn je zwei verschiedene Knotenpunkte des Graphen durch k innerlich disjunkte Wege verbunden sind. Die größte natürliche Zahl $k \leq |V(G)| - 1$, für die ein nicht vollständiger Graph k-fachzusammenhängend ist, wird als *Zusammenhangszahl* $\kappa(G)$ von G bezeichnet.
Es sei bemerkt, daß für nicht vollständige Graphen in der entsprechenden Fachliteratur diese Definition des Zusammenhangs bzw. der Zusammenhangszahl einheitlich Anwendung findet. Dies ändert sich jedoch bei vollständigen Graphen, da in diesem Fall mehrere gebräuchliche Zusammenhangsdefinitionen existieren. So wird beispielsweise in [15] die Zusammenhangszahl eines vollständigen Graphen mit n Knotenpunkten $\kappa(K_n) = n - 1$ gesetzt, während beispielsweise in [37] $\kappa(K_n) = \infty$ definiert wird. Beide Definitionen sind sowohl mit Vorteilen als auch mit Nachteilen behaftet, da, je nachdem für welche der beiden man sich entscheidet, bei der Formulierung von einigen Resultaten die vollständigen Gra-

phen künstlich ausgeschlossen werden müssen (obwohl beispielsweise die Aussage für vollständige Graphen zumindest ab einer bestimmten Knotenpunktanzahl trivialerweise erfüllt ist) und somit z.B. vollständige Graphen nicht als Induktionsanfang im Rahmen einer vollständigen Induktion genutzt werden können oder aber nützliche Eigenschaften des Zusammenhangs (beispielsweise die in Kapitel 3 aufgeführte Eigenschaft (π_1)) ihre Gültigkeit verlieren und somit z.B. möglicherweise in bestimmten Beweisen unsinnige Fallunterscheidungen notwendig werden. In dieser Arbeit werden aus den aufgeführten Gründen beide Definitionen des Zusammenhangs eines vollständigen Graphen Anwendung finden ($\kappa(K_n) = n - 1$ in Kapitel 2 und im zweiten Abschnitt des Kapitels 4 bzw. $\kappa(K_n) = \infty$ in Kapitel 3 und im ersten Abschnitt des Kapitels 4). Abschließend sei erwähnt, daß alle in dieser Arbeit betrachteten Problemstellungen für vollständige Graphen trivial sind.
Seien $u, v \in V(G)$ zwei verschiedene Knotenpunkte eines Graphen G und $S \subseteq V(G)$. Enthält jeder $\{u\}$-$\{v\}$-Weg einen Knotenpunkt aus S (und existiert somit in $G - S$ kein $\{u\}$-$\{v\}$-Weg), dann *trennt* S die Knotenpunkte u und v in G. Allgemeiner seien $U, V \subseteq V(G)$ zwei Knotenpunktmengen. Enthält jeder U-V-Weg einen Knotenpunkt aus S, so sagt man, daß S die Knotenpunktmengen U und V *trennt*. Der folgende Satz von MENGER aus dem Jahre 1927 ist von fundamentaler Bedeutung für die Untersuchung von Zusammenhangseigenschaften.

Theorem 1.5. *(MENGER [48])*
Seien G ein Graph und $U, V \subseteq V(G)$ zwei Knotenpunktmengen. Dann ist die minimale Kardinalität einer U und V trennenden Knotenpunktmenge gleich der maximalen Kardinalität einer Menge disjunkter U-V-Wege.

Sei G ein Graph. Eine Knotenpunktmenge $S \subset V(G)$ *trennt* G, wenn $\omega(G-S) \geq 2$ gilt.

1.3 Die Toughness eines Graphen und eine Vermutung von CHVÁTAL

Löscht man in einem Kreis k seiner Knotenpunkte, so besitzt der resultierende Graph höchstens k Komponenten. Daraus folgt, daß ein Graph, welcher einen Hamiltonkreis besitzt, durch Löschen von k Knotenpunkten in höchstens k Komponenten zerlegt werden kann. Ausgehend von dieser Beobachtung wurde von CHVÁTAL ([13]) im Jahre 1973 der Begriff der Toughness eines Graphen eingeführt. Ein zusammenhängender Graph G heißt *t-tough*, wenn

$$\omega(G - S) \leq \frac{|S|}{t}$$

für jede Knotenpunktmenge $S \subsetneq V(G)$ mit $\omega(G-S) \geq 2$ gilt. Die *Toughness* $\tau(G)$ eines nicht vollständigen zusammenhängenden Graphen G ist die größte (rationale) Zahl t, so daß G t-tough ist. Ist G ein vollständiger Graph, so setzt man $\tau(G) = \infty$. Aus der einleitenden Bemerkung ergibt sich als notwendige Bedingung für die Existenz eines Hamiltonkreises:

Theorem 1.6. *(CHVÁTAL [13])*
Besitzt ein Graph G einen Hamiltonkreis, so gilt $\tau(G) \geq 1$.

Wie im weiteren ausgeführt wird, gilt die Umkehrung des Theorems 1.6 nicht. Es ist nicht einmal bekannt, ob Graphen mit beliebig hoher Toughness existieren, welche keinen Hamiltonkreis besitzen. CHVÁTAL stellte diesbezüglich die folgende Vermutung auf:

Vermutung 1. *(CHVÁTAL [13])*
Es existiert eine Zahl t_0, so daß jeder Graph G mit einer Toughness $\tau(G) \geq t_0$ einen Hamiltonkreis besitzt.

Die stärkere Vermutung von CHVÁTAL, daß bereits jeder Graph G mit einer Toughness $\tau(G) > \frac{3}{2}$ einen Hamiltonkreis besitzt, wurde von THOMASSEN (siehe [4]) widerlegt.
Ein k-regulärer aufspannender Untergraph eines Graphen G heißt *k-Faktor* von G. ENOMOTO, JACKSON, KATERINIS und SAITO ([21]) zeigten, daß jeder Graph G mit mindestens drei Knotenpunkten und einer Toughness $\tau(G) \geq 2$ einen 2-Faktor besitzt. In [21] wurde ferner von ihnen bewiesen, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $(2-\varepsilon)$-tougher Graph G ohne 2-Faktor und folglich ohne Hamiltonkreis existiert. Diese Resultate legten die Vermutung nahe, daß jeder Graph G mit einer Toughness $\tau(G) \geq 2$ hamiltonsch ist. Aber auch diese Vermutung, die als CHVÁTALsche 2-tough Vermutung bekannt wurde und lange Zeit eine zentrale Stellung in der Graphentheorie einnahm, erwies sich als falsch.

Theorem 1.7. *(BAUER, BROERSMA und VELDMAN [1])*
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $(\frac{9}{4} - \varepsilon)$-tougher Graph ohne Hamiltonkreis.

Die ursprüngliche Vermutung 1 von CHVÁTAL ist bis heute offen.

Ein *k-Zug* eines Graphen G ist ein geschlossener Kantenzug, der jeden Knotenpunkt von G höchstens k-mal enthält. Ein Hamiltonkreis ist mit dieser Terminologie ein 1-Zug. Eine der Vermutung von CHVÁTAL entsprechende Vermutung für 2-Züge konnte von ELLINGHAM und ZHA positiv beantwortet werden.

Theorem 1.8. *(ELLINGHAM und ZHA [20])*
Jeder Graph G mit einer Toughness $\tau(G) \geq 4$ besitzt einen 2-Zug.

Das folgende Theorem zeigt, daß die Toughness eines Graphen einen gewissen Zusammenhang des Graphen impliziert.

Theorem 1.9. *(CHVÁTAL [13])*
Ein nicht vollständiger Graph G mit einer Toughness $\tau(G) = t$ ist $\lceil 2t \rceil$-fach zusammenhängend.

Die Umkehrung des Theorems 1.9 gilt i.a. nicht. Man kann sogar zeigen, daß zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein k-fach zusammenhängender Graph G mit einer Toughness $\tau(G) \leq \varepsilon$ existiert. Man betrachte dazu beispielsweise den vollständigen paaren Graphen $K_{k,l}$ mit $l \geq \lceil \frac{k}{\varepsilon} \rceil$.
Ein Graph ohne induzierten $K_{1,3}$ heißt *klauenfrei*. Es sei bemerkt, daß für klauenfreie Graphen die Umkehrung des Theorems 1.9 gilt, wie von MATTHEWS und SUMNER ([47]) bewiesen wurde.

Kapitel 2

Kreise durch alle Knotenpunkte eines Graphen

Kreise durch alle Knotenpunkte eines Graphen, sogenannte Hamiltonkreise, gehören zu den meist untersuchten Objekten in der Graphentheorie. Einen aktuellen Überblick über dieses Gebiet liefert u.a. GOULD in [33]. Im folgenden Kapitel soll ein kleiner Beitrag zur Hamiltonkreisproblematik geleistet werden, wobei speziell planare und chordale Graphen untersucht werden. Dabei steht die Frage im Mittelpunkt, unter welchen Toughnessbedingungen die Existenz eines Hamiltonkreises in einem Graphen garantiert werden kann. (In diesem Kapitel gelte für vollständige Graphen mit n Knotenpunkten $\kappa(K_n) = n - 1$.)

2.1 Toughnessbedingungen und Hamiltonkreise in planaren und chordalen Graphen

Wie im vorhergehenden Kapitel ausgeführt wurde, ist es nicht bekannt, ob eine positive Zahl t_0 existiert, so daß jeder Graph G mit einer Toughness $\tau(G) \geq t_0$ einen Hamiltonkreis besitzt. Es gibt jedoch positive Resultate dieser Art für Graphen, welche gewissen zusätzlichen Bedingungen genügen. Ein erstes Beispiel bilden die planaren Graphen. Als Folgerung aus Theorem 1.1 und Theorem 1.9 erhält man:

Theorem 2.1.
Jeder planare Graph G mit mindestens drei Knotenpunkten und einer Toughness $\tau(G) > \frac{3}{2}$ besitzt einen Hamiltonkreis.

Wie das folgende Theorem zeigt, ist die Aussage des Theorems 2.1 bestmöglich.

Theorem 2.2. *(HARANT [36])*
Es existieren planare Graphen G mit einer Toughness $\tau(G) = \frac{3}{2}$, welche keinen Hamiltonkreis besitzen.

Als Maß für die Nicht-Hamiltonizität einer Klasse von Graphen wurde von GRÜNBAUM und WALTHER ([34]) der Begriff des *shortness exponenten* eingeführt. Die Länge eines längsten Kreises in einem Graphen G heißt *Umfang* des Graphen G und wird mit $circ(G)$ bezeichnet. Der *shortness exponent* $\sigma(\Gamma)$ einer (unendlichen) Menge Γ von Graphen ist definiert durch:

$$\sigma(\Gamma) = \liminf_{G \in \Gamma} \left(\frac{\log(circ(G))}{\log(|V(G)|)} \right) \quad .$$

Gilt $\sigma(\Gamma) < 1$, so kann für einen Graphen $G \in \Gamma$ der Anteil der Knotenpunkte, die in einem längsten Kreis von G enthalten sind, bezogen auf die Gesamtanzahl der Knotenpunkte von G beliebig klein sein.
Ein Resultat von MOON und MOSER ([49]) zeigt unter Benutzung dieser Terminologie, daß der shortness exponent der Klasse aller maximal planaren Graphen nicht größer als $\frac{\log(2)}{\log(3)}$ ist. Da jeder maximal planare Graph mit mindestens 4 Knotenpunkten 3-fach zusammenhängend ist, folgt daraus, daß der shortness exponent der Klasse aller 3-fach zusammenhängenden planaren Graphen ebenfalls nicht größer als $\frac{\log(2)}{\log(3)}$ sein kann. Die Schärfe dieser oberen Schranke konnte von CHEN und YU bewiesen werden.

Theorem 2.3. *(CHEN und YU [12])*
Der shortness exponent der Klasse aller 3-fach zusammenhängenden planaren Graphen beträgt $\frac{\log(2)}{\log(3)}$.

Es gibt eine Vielzahl von Untersuchungen, welche sich mit oberen Schranken für den shortness exponenten von speziellen Teilklassen der Klasse aller 3-fach zusammenhängenden planaren Graphen beschäftigen. Als Beispiel dafür sei die Klasse der 1-toughen maximal planaren Graphen erwähnt.
Die Frage von CHVÁTAL, ob jeder 1-toughe maximal planare Graph hamiltonsch sei, wurde von NISHIZEKI ([51]) durch die Konstruktion eines 1-toughen maximal planaren Graphen mit 19 Knotenpunkten ohne Hamiltonkreis negativ beantwortet. Für die Klasse aller 1-toughen maximal planaren Graphen zeigte DILLENCOURT ([16]), daß der shortness exponent dieser Klasse höchstens $\frac{\log(6)}{\log(7)}$ beträgt. Diese Schranke für den shortness exponenten konnte von TKÁČ ([54]) auf $\frac{\log(5)}{\log(6)}$ verbessert werden. Desweiteren gelang es TKÁČ, einen 1-toughen maximal planaren Graphen mit 13 Knotenpunkten ohne Hamiltonkreis zu konstruieren und zu zeigen, daß jeder 1-toughe maximal planare Graph mit weniger als 13 Knotenpunkten hamiltonsch ist.
Es ist nicht bekannt, ob maximal planare Graphen G ohne Hamiltonkreis mit der Toughness $\tau(G) = \frac{3}{2}$ existieren. Jedoch wurde durch OWENS folgendes bemerkenswerte Theorem bewiesen:

Theorem 2.4. *(OWENS [52])*
Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein maximal planarer nicht hamiltonscher Graph G mit einer Toughness $\tau(G) = \frac{3}{2} - \varepsilon$.

Eine zweite Klasse von Graphen, für welche positive Resultate über den Zusammenhang zwischen der Toughness und der Existenz von Hamiltonkreisen bekannt sind, wird von den chordalen Graphen gebildet. Ein Graph heißt *chordal*, wenn er keine induzierten Kreise einer größeren Länge als drei besitzt, d.h. wenn jeder Kreis mit mehr als drei Knotenpunkten eine Sehne besitzt.

Theorem 2.5. *(CHEN, JACOBSON, KÉZDY und LEHEL [11])*
Jeder chordale Graph G mit mindestens drei Knotenpunkten und einer Toughness $\tau(G) \geq 18$ besitzt einen Hamiltonkreis.

Wie in [11] ausgeführt wird, ist es unwahrscheinlich, daß die Konstante 18 in Theorem 2.5 bestmöglich ist. BAUER, KATONA, KRATSCH und VELDMAN ([3]) gelang es zu zeigen, daß jeder $\frac{3}{2}$-toughe chordale Graph einen 2-Faktor besitzt. Die Fragestellung, ob bereits jeder $\frac{3}{2}$-toughe chordale Graph hamiltonsch sei, wurde von BAUER, BROERSMA und VELDMAN negativ beantwortet.

Theorem 2.6. *(BAUER, BROERSMA und VELDMAN [1])*
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $(\frac{7}{4} - \varepsilon)$-tougher chordaler Graph ohne Hamiltonkreis.

Es gibt jedoch Ergebnisse, welche zeigen, daß für einige spezielle Teilklassen von chordalen Graphen bereits schwächere Bedingungen an die Toughness ausreichen, um die Existenz eines Hamiltonkreises zu sichern. Ein Beispiel einer solchen Teilklasse mit zumindest partiell besseren Ergebnissen bilden die k-trees, die im weiteren Verlauf dieses Abschnittes untersucht werden sollen. Zur Definition dieser Teilklasse sind einige zusätzliche Definitionen und Ergebnisse notwendig, die im folgenden aufgeführt werden.
Ein Knotenpunkt $x \in V(G)$ eines Graphen G heißt *simplizialer Knotenpunkt* von G, wenn der von seinen Nachbarn in G induzierte Untergraph $G[N_G(x)]$ vollständig ist. Die Menge aller simplizialen Knotenpunkte eines Graphen G sei mit $Si(G)$ bezeichnet. Gilt $x \in Si(G)$ und $|N_G(x)| = k$, so bezeichnet man x auch als einen *k-simplizialen Knotenpunkt* des Graphen G. Für chordale Graphen gilt das folgende Lemma:

Lemma 2.1. *(DIRAC [19])*
Ist G ein chordaler Graph, so gilt $Si(G) \neq \emptyset$.

Eine lineare Anordnung $x_n x_{n-1} \cdots x_1$ der Knotenpunkte eines Graphen G heißt *perfekte Eliminationsanordnung* von G, wenn $x_n \in Si(H_n)$ mit $H_n = G$ und $x_i \in Si(H_i)$ mit $H_i = G - \{x_n, \ldots, x_{i+1}\}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ gilt. Chordale Graphen lassen sich mittels perfekter Eliminationsanordnungen wie folgt charakterisieren:

Lemma 2.2. *(DIRAC [19])*
Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er eine perfekte Eliminationsanordnung besitzt.

Sei k eine positive natürliche Zahl. Ein Graph G mit mindestens k Knotenpunkten ist ein *k-tree*, wenn er eine perfekte Eliminationsanordnung $x_n x_{n-1} \cdots x_1$ besitzt, für welche die folgende Bedingung $(*)$ erfüllt ist:

$$(*) \qquad |N_{H_i}(x_i)| = k \textit{ für alle } i = k+1, \ldots, n \textit{ und } H_k \simeq K_k$$

Offenbar gilt:

Lemma 2.3.

(i) Ein Graph mit k oder $k+1$ Knotenpunkten ist genau dann ein k-tree, wenn er vollständig ist.

(ii) Ein Graph ist genau dann ein 1-tree, wenn er ein Baum ist.

(iii) Jeder k-tree ist chordal.

(iv) Jeder k-tree mit mindestens $k+1$ Knotenpunkten ist k-fach zusammenhängend.

(v) Seien G ein k-tree mit mindestens $k+1$ Knotenpunkten und x ein simplizialer Knotenpunkt von G. Dann gilt $|N_G(x)| = k$ (d.h. x ist ein k-simplizialer Knotenpunkt von G).

(vi) Ist G ein k-tree, so genügt jede perfekte Eliminationsanordnung von G der Bedingung $(*)$.

Für k-trees mit $k \geq 2$ bewiesen BROERSMA, XIONG und YOSHIMOTO:

Theorem 2.7. *(BROERSMA, XIONG und YOSHIMOTO [9])*

(i) Jeder 2-tree G ($G \neq K_2$) mit einer Toughness $\tau(G) \geq 1$ ist hamiltonsch.

(ii) Jeder k-tree G ($k \geq 3$) mit einer Toughness $\tau(G) > \frac{k}{3}$ ist hamiltonsch.

Im Abschnitt 2.1.1 dieses Kapitels wird ein neuer und kürzerer Beweis des Theorems 2.7 angegeben, der eine Beweisidee von BÖHME, HARANT und TKÁČ ([6]) verallgemeinert und im Gegensatz zum Beweis in [9] nur die besondere perfekte Eliminationsanordnung eines k-trees benutzt.
BROERSMA, XIONG und YOSHIMOTO ([9]) gelang es weiterhin, für alle $k \geq 3$, 1-toughe nicht hamiltonsche k-trees zu konstruieren. Damit ist die Aussage des Theorems 2.7 für $k = 3$ bezüglich der Toughness bestmöglich. Die Konstruktion aus [9] für den Fall $k \geq 4$ wird im Abschnitt 2.1.2 dieses Kapitels in leicht modifizierter Form (Löschen eines Knotenpunktes) angewandt, um das folgende Theorem 2.8 zu beweisen.

Theorem 2.8. *(GERLACH)*
Der shortness exponent der Klasse aller 1*-toughen k-trees mit $k \geq 4$ ist höchstens* $\frac{\log(3k-4)}{\log(3k-3)}$.

Für $k = 3$ sei auf Korollar 2.12 verwiesen. Abschließend sei bemerkt, daß es nicht bekannt ist, ob für $k \geq 4$ nicht hamiltonsche k-trees mit einer Toughness größer als eins existieren.

2.1.1 Beweis Theorem 2.7

Seien G ein k-tree mit $k \geq 2$ und $x_n x_{n-1} \cdots x_1$ eine perfekte Eliminationsanordnung von G. Für $n \leq k+1$ folgt die Aussage des Theorems 2.7 unmittelbar, da in diesem Fall G ein vollständiger Graph ist. Somit gelte im weiteren $n \geq k+2$. Seien $H_i \in \{H_k, ..., H_n\}$, S eine k-Clique des Graphen H_i und $\mathcal{N}_{H_i}(S) \subseteq V(H_i)$ die Menge der Knotenpunkte, die in H_i zu allen Knotenpunkten von S adjazent sind. Eine k-Clique S heißt *aktive k-Clique* von H_i, falls $\mathcal{N}_{H_i}(S) \subsetneq \mathcal{N}_{H_n}(S)$ gilt. Die Menge aller aktiven k-Cliquen von H_i sei mit Σ_i bezeichnet. Es folgt $\Sigma_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \{k, \ldots, n-1\}$ und $\Sigma_n = \emptyset$.
Sei C ein Hamiltonkreis eines Graphen $H_i \in \{H_k, ..., H_n\}$. Existiert eine injektive Abbildung f, die jeder aktiven k-Clique $S \in \Sigma_i$ eine Kante $f(S) \in E(C) \cap E(S)$ zuordnet, so heißt das geordnete Paar (C, f) ein *gutes Paar* von H_i. Es wird bewiesen, daß für alle $i = k+1, \ldots, n$ ein gutes Paar (C_i, f_i) von H_i existiert, woraus die Behauptung des Theorems 2.7 folgt.
Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion nach i. Per Definition ist H_{k+1} ein vollständiger Graph mit der Knotenpunktmenge $V(H_{k+1}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$ und somit $C_{k+1} = x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} x_1$ ein Hamiltonkreis von H_{k+1}. Weiterhin seien S_j die k-Cliquen von H_{k+1} mit $S_j = H_{k+1}[V(H_{k+1}) \setminus \{x_j\}]$ und $j = 1, \ldots, k+1$

sowie die Abbildung f^*_{k+1} wie folgt definiert:

$$f^*_{k+1}(S_j) \;=\; \begin{cases} x_{j+1}x_{j+2} & , \quad j = 1, \dots, k-1 \\ x_{k+1}x_1 & , \quad j = k \\ x_1x_2 & , \quad j = k+1 \end{cases} \qquad .$$

Bezeichnet f_{k+1} die Einschränkung von f^*_{k+1} auf Σ_{k+1}, so ist (C_{k+1}, f_{k+1}) ein gutes Paar von H_{k+1}.
Somit gelte $i \geq k+2$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein gutes Paar (C_{i-1}, f_{i-1}) von H_{i-1}. Sei S^*_{i-1} die aktive k-Clique von H_{i-1} mit $S^*_{i-1} = H_i[N_{H_i}(x_i)]$ und $V(S^*_{i-1}) = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$. O.B.d.A. gelte $f_{i-1}(S^*_{i-1}) = y_1y_2 \in E(C_{i-1})$. Der Hamiltonkreis C_i von H_i entstehe aus C_{i-1}, indem die Kante y_1y_2 durch den Weg $y_1x_iy_2$ ersetzt wird. Da $i \geq k+2$ und $\tau(G) \geq 1$ im Fall $k = 2$ bzw. $\tau(G) > \frac{k}{3}$ im Fall $k \geq 3$ vorausgesetzt wird, ist S^*_{i-1} keine aktive k-Clique von H_i. Andererseits existieren in H_i genau k neue k-Cliquen $S^j_i := H_i[\{x_i, y_1, y_2, \dots, y_k\} \setminus \{y_j\}]$ mit $j = 1, \dots, k$.
Angenommen, im Fall $k \geq 3$ seien l dieser neuen k-Cliquen aktive k-Cliquen von H_i mit $3 \leq l \leq k$. Es folgt $\omega(G - \{x_i, y_1, y_2, \dots, y_k\}) \geq l+1$ und somit $\tau(G) \leq \frac{k+1}{l+1} \leq \frac{k+1}{4} \leq \frac{k}{3}$, im Widerspruch zur Voraussetzung $\tau(G) > \frac{k}{3}$. Somit sind höchstens zwei der neuen k-Cliquen $S^1_i, \dots, S^k_i$ auch aktive k-Cliquen von H_i. Die Abbildung f_i sei nun wie folgt definiert:

- *Ist S^1_i eine aktive k-Clique von H_i, dann definiere man $f_i(S^1_i) = x_iy_2$. Existiert in diesem Fall noch eine weitere aktive k-Clique S^m_i von H_i mit $m \in \{2, \dots, k\}$, so definiere man weiterhin $f_i(S^m_i) = y_1x_i$.*

- *Ist S^1_i keine aktive k-Clique von H_i und ist S^2_i eine aktive k-Clique von H_i, dann definiere man $f_i(S^2_i) = y_1x_i$. Existiert in diesem Fall noch eine weitere aktive k-Clique S^m_i von H_i mit $m \in \{3, \dots, k\}$, so definiere man weiterhin $f_i(S^m_i) = x_iy_2$.*

- *Sind weder S^1_i noch S^2_i aktive k-Cliquen von H_i und existiert eine aktive k-Clique $S^{m_1}_i$ von H_i mit $m_1 \in \{3, \dots, k\}$, dann definiere man $f_i(S^{m_1}_i) = y_1x_i$. Existiert in diesem Fall noch eine weitere aktive k-Clique $S^{m_2}_i$ von H_i mit $m_2 \in \{3, \dots, k\} \setminus \{m_1\}$, so definiere man weiterhin $f_i(S^{m_2}_i) = x_iy_2$.*

- *Für alle aktiven k-Cliquen $S \in \Sigma_i \cap \Sigma_{i-1}$ definiere man $f_i(S) := f_{i-1}(S)$.*

Damit ist (C_i, f_i) ist ein gutes Paar von H_i und somit Theorem 2.7 bewiesen. ■

2.1.2 Beweis Theorem 2.8

Eine Knotenpunktmenge $S \subsetneq V(G)$ eines nicht vollständigen zusammenhängenden Graphen G heißt *Toughness realisierende Knotenpunktmenge* von G, wenn $\tau(G) = \frac{|S|}{\omega(G-S)}$ gilt. Lemma 2.4 und Lemma 2.5 sind offensichtlich.

Lemma 2.4.
Seien G ein nicht vollständiger zusammenhängender Graph, $S \subsetneq V(G)$ eine Toughness realisierende Knotenpunktmenge von G und $x \in Si(G)$. Dann gilt $x \notin S$.

Lemma 2.5.
Seien G ein zusammenhängender Graph und $x \in Si(G)$. Dann gilt $\tau(G - \{x\}) \geq \tau(G)$.

Die beiden folgenden Lemmata (und ihre Beweise) sind in [9] zu finden. Sie wurden lediglich der Bezeichnungsweise dieser Arbeit angepaßt. Ihre Beweise werden aus Gründen der Vollständigkeit angegeben.

Lemma 2.6. *(BROERSMA, XIONG und YOSHIMOTO [9])*
Seien G ein nicht vollständiger k-tree mit einer Toughness $\tau(G) \geq 1$, K eine k-Clique von G mit $|V(K) \cap Si(G)| \geq 1$ und $w \notin V(G)$ ein weiterer Knotenpunkt. Der k-tree G' sei definiert durch $V(G') = V(G) \cup \{w\}$ und $E(G') = E(G) \cup \{wx|\ x \in V(K)\}$. Dann gilt $\tau(G') \geq 1$.

Beweis Lemma 2.6
Sei S' eine Toughness realisierende Knotenpunktmenge von G'. Mit Lemma 2.4 folgt $w \notin S'$. Im Fall $V(K) \setminus S' \neq \emptyset$ gilt $\omega(G' - S') = \omega(G - S') \leq |S'|$. Gilt andererseits $V(K) \subseteq S'$, so ist wegen $|V(K) \cap Si(G)| \geq 1$ und Lemma 2.4 S' keine Toughness realisierende Knotenpunktmenge von G. Damit folgt $\omega(G - S') \leq |S'| - 1$ (wegen $\tau(G) \geq 1$) und schließlich $\omega(G' - S') \leq |S'|$. In beiden Fällen gilt $\tau(G') = \frac{|S'|}{\omega(G'-S')} \geq 1$. □

Lemma 2.7. *(BROERSMA, XIONG und YOSHIMOTO [9])*
Seien G ein k-tree ($k \geq 3$) mit einer Toughness $\tau(G) \geq 1$ und K eine k-Clique von G mit $V(K) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, so daß $x_1 \in Si(G)$, $x_i \in Si(G - \{x_1, \ldots, x_{i-1}\})$ für alle $i = 2, \ldots, k-1$ und $G - \{x_1, \ldots, x_{k-2}\}$ nicht vollständig ist. Seien ferner W eine Menge von $k-1$ weiteren Knotenpunkten sowie G' der k-tree mit $V(G') = V(G) \cup W$ und $E(G') = E(G) \cup \{wx|\ w \in W, x \in V(K)\}$. Dann gilt $\tau(G') \geq 1$.

Beweis Lemma 2.7
Sei S' eine Toughness realisierende Knotenpunktmenge von G'. Mit Lemma 2.4 folgt $W \cap S' = \emptyset$. Im Fall $V(K) \setminus S' \neq \emptyset$ gilt erneut $\omega(G' - S') = \omega(G - S') \leq |S'|$. Gilt andererseits $V(K) \subseteq S'$, so seien $S^* = S' \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-2}\}$ und $G^* = G - \{x_1, \ldots, x_{k-2}\}$. Mit Lemma 2.5 folgt $\tau(G^*) \geq \tau(G) \geq 1$. Da G^* nicht vollständig ist und $x_{k-1} \in Si(G^*)$ gilt, kann mit Lemma 2.4 S^* keine Toughness

realisierende Knotenpunktmenge von G^* sein. Damit folgt $\omega(G^* - S^*) \leq |S^*| - 1$ und somit $\omega(G' - S') = \omega(G^* - S^*) + k - 1 \leq |S^*| + k - 2 = |S'|$. In beiden Fällen gilt somit $\tau(G') = \frac{|S'|}{\omega(G' - S')} \geq 1$. $\square$

Es folgt der Beweis des Theorems 2.8. Die nachfolgend beschriebene Konstruktion des Graphen H basiert auf Ideen aus [9]. Für $k \geq 4$ seien dafür:

- K ein vollständiger Graph mit k Knotenpunkten und $V(K) = \{x_1, \dots, x_k\}$
- Q^1, Q^2, Q^3 drei weitere paarweise disjunkte vollständige Graphen mit $k-1$ Knotenpunkten und $V(Q^i) = \{u_1^i, \dots u_{k-1}^i\}$ $(i = 1, 2, 3)$
- W^1, W^2, W^3 drei paarweise disjunkte Mengen von jeweils $k-1$ zusätzlichen Knotenpunkten mit $W^i = \{w_1^i, \dots, w_{k-1}^i\}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Der Graph H sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
V(H) &= V(K) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{3} V(Q^i) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{3} W^i \right) \\
E(H) &= E(K) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{3} E(Q^i) \right) \\
&\quad \cup \left(\bigcup_{i=1}^{3} \{u_j^i x_l |\ 1 \leq j \leq k-1, j \leq l \leq k\} \right) \\
&\quad \cup \left(\bigcup_{i=1}^{3} \{w_l^i x_k |\ 1 \leq l \leq k-1\} \right) \\
&\quad \cup \left(\bigcup_{i=1}^{3} \{w_l^i u_j^i |\ 1 \leq j, l \leq k-1\} \right)
\end{aligned}$$

Bei dem Graphen H handelt es sich um einen k-tree mit $|V(H)| = 7k - 6$ und $\tau(H[\{x_1, \dots, x_k, u_1^1, u_1^2, u_1^3, \}]) > 1$. Durch sukzessives Anwenden der Lemmata 2.6 und 2.7 sowie durch die spezielle Wahl einer H trennenden Knotenpunktmenge $S = \{x_k, u_1^1, \dots, u_{k-1}^1\}$ folgt $\tau(H) = 1$. Weiterhin gilt $Si(H) = W^1 \cup W^2 \cup W^3$ und somit $|Si(H)| = 3k - 3$.
Für $i \in \{1, 2, 3\}$ seien $\mathcal{N}(i) = V(Q^i) \cup \{x_k\}$. Angenommen, es existiere ein Kreis C in H, der alle simplizialen Knotenpunkte von H enthält. Sei $i \in \{1, 2, 3\}$. Für alle $w \in W^i$ gilt $N_H(w) = \mathcal{N}(i)$. Somit müssen in C drei Unterwege $P^i = y_1^i, z_1^i, y_2^i, z_2^i, \dots y_{k-1}^i, z_{k-1}^i, y_k^i$ mit $\mathcal{N}(i) = \{y_1^i, \dots, y_k^i\}$ und $W^i = \{z_1^i, \dots, z_{k-1}^i\}$ existieren. Da weiterhin $\mathcal{N}(1) \cap \mathcal{N}(2) \cap \mathcal{N}(3) = \{x_k\}$ gilt, folgt $|\mathcal{N}(1) \cup \mathcal{N}(2) \cup \mathcal{N}(3)| = 3k - 1$, im Widerspruch zur Definition von $\mathcal{N}(1), \mathcal{N}(2)$ und $\mathcal{N}(3)$. Somit existiert in H kein Kreis, der alle simplizialen Knotenpunkte von H enthält.
Löscht man jedoch in H einen beliebigen simplizialen Knotenpunkt $w \in W^1 \cup W^2 \cup W^3$, so besitzt der entstehende Graph $H - \{w\}$ wegen $k \geq 4$ einen $\{x_1\}$-$\{x_2\}$-Hamiltonweg. Für die Länge eines längsten Kreises in H gilt somit $circ(H) = 7k - 7$.

Für einen k-tree G seien $G_1 = G$, $S_1(G) = Si(G_1)$, $G_i = G_{i-1} - Si(G_{i-1})$ sowie $S_i(G) = Si(G_i)$ für $i = 2, 3, \ldots$ und $S_i(G) \neq \emptyset$.

Die Folge $(H^m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Graphen werde nun wie folgt definiert:

- Man setze $H^1 = H$.
- Für $m \geq 2$ sei H^m derjenige Graph, welcher aus H^{m-1} hervorgeht, indem für jeden k-simplizialen Knotenpunkt v von H^{m-1} eine Kopie H' des Graphen H zum Graphen H_{m-1} in der folgenden Weise hinzugefügt wird: Seien $y_1 = v$, $y_n \in N_{H^{m-1}}(v) \cap S_n(H^{m-1})$ für $2 \leq n \leq k$ und $\{x_1', \ldots, x_k'\} \subsetneq V(H')$ die in dieser Reihenfolge mit $\{x_1, \ldots, x_k\} \subsetneq V(H)$ korrespondierenden Knotenpunkte von H'. Für die so definierten Knotenpunkte x_1', …, x_k', y_1, …, y_k enthält H^m alle Kanten $x_p' y_q$ mit $1 \leq p \leq k$ und $1 \leq q \leq k-p+1$.

Sukzessives Anwenden der Lemmata 2.6 und 2.7 zeigt, daß die so definierten Graphen H^m für alle $m = 1, 2, \ldots$ k-trees mit einer Toughness $\tau(H^m) = 1$ sind. Für einen Graphen H^m bzw. einen längsten Kreis C^m in H^m seien a_m die Anzahl aller k-simplizialen Knotenpunkte von H^m, b_m die Anzahl aller nicht k-simplizialen Knotenpunkte von H^m, c_m die Anzahl aller k-simplizialen Knotenpunkte von C^m und d_m die Anzahl aller nicht k-simplizialen Knotenpunkte von C^m. Es gelten die folgenden Rekursionsformeln ($m \geq 1$):

- $a_1 = 3k - 3$, $a_{m+1} = (3k - 3)a_m$
- $b_1 = 4k - 3$, $b_{m+1} = b_m + (4k - 2)a_m$
- $c_1 = 3k - 4$, $c_{m+1} = (3k - 4)c_m$
- $d_1 = 4k - 3$, $d_{m+1} = d_m + (4k - 2)c_m$.

Durch vollständige Induktionen nach m lassen sich die folgenden (expliziten) Lösungen verifizieren ($m \geq 1$):

- $a_m = (3k - 3)^m$
- $b_m = \frac{4k-2}{3k-4}(3k - 3)^m - \frac{7k-6}{3k-4}$
- $c_m = (3k - 4)^m$
- $d_m = \frac{4k-2}{3k-5}(3k - 4)^m - \frac{7k-7}{3k-5}$.

Mit $|V(H^m)| = a_m + b_m$ und $circ(H^m) = c_m + d_m$ folgt

- $|V(H^m)| = \frac{7k-6}{3k-4}\left((3k - 3)^m - 1\right)$ und

- $circ(H^m) = \frac{7k-7}{3k-5}\left((3k-4)^m - 1\right)$.

Damit gilt

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log(circ(H^m))}{\log(|V(H^m)|)} = \frac{\log(3k-4)}{\log(3k-3)} ,$$

womit der shortness exponent der Klasse aller 1-toughen k-trees mit $k \geq 4$ nicht größer als $\frac{\log(3k-4)}{\log(3k-3)}$ ist. ■

2.2 Toughnessbedingungen und Hamiltonkreise in sep-chordalen planaren Graphen

Mittels vollständiger Induktion nach der Länge der perfekten Eliminationsanordnung eines 3-trees folgt, daß jeder 3-tree mit einer Toughness größer als eins ein chordaler planarer Graph ist. Andererseits ist auch jeder chordale planare Graph mit mindestens drei Knotenpunkten und einer Toughness größer als eins ein 3-tree. Damit ist die Aussage des Theorems 2.7 für $k = 3$ äquivalent zu dem folgenden Resultat von BÖHME, HARANT und TKÁČ:

Theorem 2.9. *(BÖHME, HARANT und TKÁČ [6])*
Jeder chordale planare Graph G mit mindestens drei Knotenpunkten und einer Toughness $\tau(G) > 1$ besitzt einen Hamiltonkreis.

Im weiteren wird die Aussage des Theorems 2.9 auf sep-chordale planare Graphen verallgemeinert. Ein Kreis C heißt *trennender* Kreis eines Graphen G, wenn $\omega(G - V(C)) \geq 2$ gilt. Ein trennender Kreis eines Graphen G der Länge i sei kurz als SiC bezeichnet. Ein *Graph G* heißt *sep-chordal*, falls er keinen sehnenlosen SiC für $i \geq 4$ besitzt.

Theorem 2.10. *(GERLACH [25])*
Jeder sep-chordale planare Graph G mit mindestens drei Knotenpunkten und einer Toughness $\tau(G) > 1$ besitzt einen Hamiltonkreis.

Weiterhin gelang es BÖHME, HARANT und TKÁČ in [6] das folgende Theorem bezüglich des shortness exponenten der Klasse aller 1-toughen chordalen planaren Graphen zu beweisen, welches zeigt, daß die Aussagen der Theoreme 2.9 und 2.10 bestmöglich sind.

Theorem 2.11. *(BÖHME, HARANT und TKÁČ [6])*
Der shortness exponent der Klasse aller 1-toughen chordalen planaren Graphen ist höchstens $\frac{\log(8)}{\log(9)}$.

Die zum Beweis des Theorems 2.11 konstruierten Graphen sind (planare) 3-trees. Es folgt damit:

Korollar 2.12.
Der shortness exponent der Klasse aller 1*-toughen* 3*-trees ist höchstens* $\frac{\log(8)}{\log(9)}$.

2.2.1 Beweis Theorem 2.10

Zum Beweis des Theorems 2.10 werden einige zusätzliche Begriffe und Hilfsaussagen über sep-chordale planare Graphen benötigt.
Für einen Kreis C mit einer beliebigen Orientierung φ und zwei beliebigen Knotenpunkten $u, v \in V(C)$ des Kreises C bezeichne $[u, v]$ den Weg auf C von u nach v in Richtung φ. Dementsprechend bezeichnen $[u, v)$, $(u, v]$ bzw. (u, v) die Teilwege von $[u, v]$, die man durch Löschen der Knotenpunkte aus $\{v\}$, $\{u\}$ bzw. $\{u, v\}$ erhält. Besteht $[u, v]$ lediglich aus einer Kante, dann sei $(u, v) = \emptyset$ definiert.
Seien $w \in V(C)$ ein beliebiger Knotenpunkt eines Kreises C und $M \subseteq V(C)$, so daß $M \setminus \{w\} \neq \emptyset$ gilt. Die Knotenpunkte $w_M^+ \in M \setminus \{w\}$ und $w_M^- \in M \setminus \{w\}$ werden definiert durch $V((w, w_M^+)) \cap M = \emptyset$ und $V((w_M^-, w)) \cap M = \emptyset$.
Seien C_l ein Kreis der Länge l ($l \geq 3$) mit $V(C_l) = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ und $y \notin V(C_l)$ ein weiterer Knotenpunkt. Der Graph W^l mit $V(W^l) = V(C_l) \cup \{y\}$ und $E(W^l) = E(C_l) \cup \{yx_i | \ 1 \leq i \leq l\}$ wird als *l-Rad* bezeichnet. Der Knotenpunkt y heißt *zentraler Knotenpunkt* von W^l.

Der Graph G_0 sei wie folgt definiert:

$G_0 \simeq$

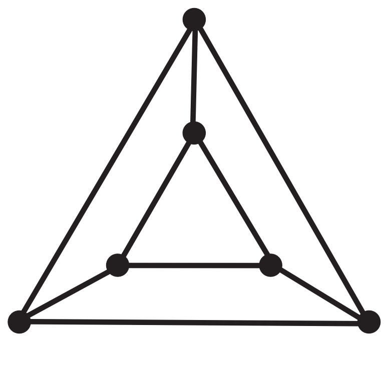

Abb. 2.1: Der Graph G_0

Lemma 2.8. *(GERLACH [25])*
Ist G ein Polyedergraph ($|V(G)| \geq 4$) ohne SiC für alle $i \geq 3$, dann gilt $G \simeq W^l$ oder $G \simeq G_0$.

Beweis Lemma 2.8:
Sei G ein Polyedergraph ($|V(G)| \geq 4$) ohne *SiC* für alle $i \geq 3$ und $x \in V(G)$

ein beliebiger Knotenpunkt von G. Da $G - \{x\}$ noch mindestens 2-fach zusammenhängend ist, gibt es eine Einbettung von $G - \{x\}$ in die Ebene, so daß ein Gebiet und ein dieses Gebiet berandender Kreis C mit $N_G(x) \subseteq V(C)$ existieren. Sei φ eine beliebige Orientierung des Kreises C. Da der Graph G für alle $i \geq 3$ keinen SiC besitzt, folgt $V(G-\{x\}) \setminus V(C) = \emptyset$ und $V(G) = V(C) \cup \{x\}$. Im Fall $N_G(x) = V(C)$ folgt, da G keinen $S3C$ enthält, $E(G) = E(C) \cup \{xy|\ y \in V(C)\}$ und somit $G \simeq W^l$ mit $l = |V(C)| \geq 3$. Gilt dagegen $N_G(x) \subsetneq V(C)$, so existieren zwei Knotenpunkte $u, v \in N_G(x) \cap V(C)$ mit $v = u^+_{N_G(x)}$ und $V((u, v)) \neq \emptyset$. Da der Graph $G - \{u, v\}$ noch zusammenhängend ist, existiert ein Weg zwischen einem Knotenpunkt $y \in V((u, v))$ und einem Knotenpunkt $z \in V((v, u))$, der nur aus einer Kante $e = yz$ besteht. Es sind die beiden Fälle $z \in N_G(x)$ und $z \notin N_G(x)$ zu unterscheiden.
Es gelte $z \in N_G(x)$. Da G keinen SiC für alle $i \geq 3$ besitzt und der Graph $G - \{u', v'\}$ für alle Knotenpunkte $u', v' \in V(G)$ zusammenhängend ist, folgt mit der Planarität von G sukzessive $V((v, z)) = \emptyset$, $V((z, u)) = \emptyset$, $E(G) = E(C) \cup \{xu, xv, xz\} \cup \{zy'|\ y' \in V((u, v))\}$ und schließlich $G \simeq W^l$ mit $l = |V(C)| \geq 4$.
Somit gelte $z \notin N_G(x)$. Aus dem 3-fachen Zusammenhang des Graphen G folgt die Existenz eines weiteren Knotenpunktes $w \in (V(C) \setminus V([u, v])) \cap N_G(x)$. Aus Symmetriegründen gelte o.B.d.A. $z \in V((v, w))$. Da G keinen SiC für alle $i \geq 3$ besitzt, die Graphen $G - \{u, y\}$ bzw. $G - \{w, z\}$ zusammenhängend sind und G planar ist, folgt sukzessive $V((w, u)) = \emptyset$, $V((y, v)) = \emptyset$, $V((v, z)) = \emptyset$, $V((z, w)) \cap N_G(x) = \emptyset$, $V((u, y)) = \emptyset$, $V((z, w)) = \emptyset$ und schließlich $G \simeq G_0$. □

Im weiteren wird in Analogie zu der zu Beginn dieses Kapitels eingeführten perfekten Eliminationsanordnung eines (chordalen) Graphen ein Konstruktionsprinzip für sep-chordale Polyedergraphen hergeleitet.
Sei G ein planarer Graph mit induzierten Untergraphen G', G'' und S, so daß $G = G' \cup G''$ und $S = G' \cap G''$ gilt. Ist S ein berandender 3-Kreis von G' und ein berandender 3-Kreis von G'', so definiere man $G = f_\triangle(G', G'')$. Seien weiterhin Γ die Menge aller Polyedergraphen mit mindestens vier Knotenpunkten und ohne SiC für alle $i \geq 3$, $\langle G^{(k)}, G^{(k-1)}, \ldots, G^{(0)} \rangle$ eine Anordnung von Graphen mit $G^{(j)} \in \Gamma$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ und die Graphen $H^{(j)}$ definiert durch $H^{(0)} \simeq G^{(0)}$ und $H^{(l)} \simeq f_\triangle(G^{(l)}, H^{(l-1)})$ für alle $l \in \{1, \ldots, k\}$. Gilt $G \simeq H^k$, so heißt $\langle G^{(k)}, G^{(k-1)}, \ldots, G^{(0)} \rangle$ eine *perfekte Γ-Eliminationsanordnung* des planaren Graphen G der *Eliminationslänge k*. Trivialerweise besitzt jeder Graph $G \in \Gamma$ eine perfekte Γ-Eliminationsanordnung der Eliminationslänge 0. Mittels einer vollständigen Induktion nach der Eliminationslänge einer perfekten Γ-Eliminationsanordnung folgt, daß jeder planare Graph mit einer perfekten Γ-Eliminationsanordnung ein sep-chordaler Polyedergraph ist.
Ist andererseits G ein sep-chordaler Polyedergraph mit mindestens vier Knotenpunkten, so besitzt G per Definition keinen sehnenlosen SiC für alle $i \geq 4$. Existiert kein $S3C$ in G, so folgt, daß $G \in \Gamma$ gilt, womit G eine perfekte Γ-

Eliminationsanordnung der Eliminationslänge 0 besitzt. Existiert mindestens ein $S3C$ in G, so existieren zwei induzierte Untergraphen G^1 und G^2 von G mit $G = f_\triangle(G^1, G^2)$. Es gilt:

- *Ist G ein sep-chordaler Polyedergraph, so sind auch G^1 und G^2 sep-chordale Polyedergraphen.*
- *Besitzen G^1 und G^2 eine perfekte Γ-Eliminationsanordnung, so besitzt auch G eine perfekte Γ-Eliminationsanordnung.*

Mit einer weiteren vollständigen Induktion nach der Anzahl der $S3C$ eines sep-chordalen Polyedergraphen G folgt, daß G eine perfekte Γ-Eliminationsanordnung besitzt. Sep-chordale Polyedergraphen lassen sich somit wie folgt charakterisieren:

Lemma 2.9. *(GERLACH [25])*
Ein Polyedergraph mit mindestens vier Knotenpunkten ist genau dann sep-chordal, wenn er eine perfekte Γ-Eliminationsanordnung besitzt.

Es folgt der Beweis des Theorems 2.10, in dem wiederum die Beweisidee aus [6] Anwendung findet. Sei G ein sep-chordaler planarer Graph mit mindestens drei Knotenpunkten und einer Toughness $\tau(G) > 1$. Gilt $|V(G)| = 3$, so folgt $G \simeq K_3$, womit die Behauptung des Theorems 2.10 trivialerweise gilt. Somit kann $|V(G)| \geq 4$ angenommen werden. Mit Theorem 1.9 und Lemma 2.9 folgt, daß G eine perfekte Γ-Eliminationsanordnung $\langle G^{(k)}, G^{(k-1)}, \ldots, G^{(0)} \rangle$ besitzt. Die Untergraphen $H^{(0)}, \ldots, H^{(k)}$ seien entsprechend der Definition einer perfekten Γ-Eliminationsanordnung definiert. Ein 3-Kreis D von $H^{(i)}$ heißt *aktiver 3-Kreis* von $H^{(i)}$, falls D ein $S3C$ von G und kein $S3C$ von $H^{(i)}$ ist. Sei Δ_i die Menge aller aktiven 3-Kreise von $H^{(i)}$.
Sei C ein Hamiltonkreis von $H^{(i)}$. Existiert eine injektive Abbildung f, welche jedem aktiven 3-Kreis $D \in \triangle_i$ von $H^{(i)}$ eine Kante $f(D) \in E(C) \cap E(D)$ zuordnet, dann heißt das geordnete Paar (C, f) ein *erweiterbares Paar* von $H^{(i)}$. Zum Beweis des Theorems 2.10 genügt es zu zeigen, daß für alle $i = 0, \ldots, k$ ein erweiterbares Paar $(C^{(i)}, f^{(i)})$ von $H^{(i)}$ existiert.
Der Beweis erfolgt durch Induktion nach i. Nach der Definition der perfekten Γ-Eliminationsanordnung gilt $H^{(0)} \in \Gamma$. Wie man leicht sieht, ist jeder Graph $H^{(0)} \in \Gamma$ hamiltonsch. Desweiteren existiert für jeden Hamiltonkreis $C^{(0)}$ von $H^{(0)}$ eine injektive Abbildung $f_*^{(0)}$, die jeden berandenden 3-Kreis von $H^{(0)}$ auf eine Kante von $C^{(0)}$ abbildet. Bezeichnet $f^{(0)}$ die Einschränkung von $f_*^{(0)}$ auf Δ_0, so ist $(C^{(0)}, f^{(0)})$ ein erweiterbares Paar von $H^{(0)}$.
Somit kann $i \geq 1$ angenommen werden. Sei $H^{(i)} = f_\triangle(G^{(i)}, H^{(i-1)})$ mit $D_{i-1} = G^{(i)} \cap H^{(i-1)}$ und $V(D_{i-1}) = \{a, b, c\}$. O.B.d.A. gelte $f^{(i-1)}(D_{i-1}) = ab$. Da D_{i-1} ein $S3C$ von $H^{(i)}$ ist, kann D_{i-1} kein aktiver 3-Kreis von $H^{(i)}$ sein. Für alle $D \in \Delta_i \cap \Delta_{i-1}$ definiere man $f^{(i)}(D) = f^{(i-1)}(D)$. Aus Symmetriegründen sind die folgenden vier Fälle zu betrachten:

1. Fall: Es gelte $G^{(i)} \simeq G_0$.
Im Fall $G^{(i)} \simeq G_0$ sei $C^{(i)}$ der Hamiltonkreis von $H^{(i)}$, den man erhält, indem man in $C^{(i-1)}$ die Kante ab durch den Weg $adfeb$ ersetzt. In $H^{(i)}$ existiert genau ein neuer berandender 3-Kreis $C_{def} = defd$. Ist $C_{def} \in \Delta_i$, so definiere man $f^{(i)}(C_{def}) = df$.

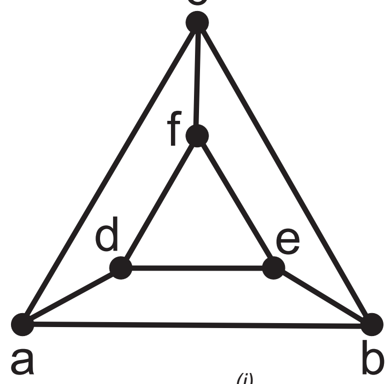

Abb. 2.2: $G^{(i)} \simeq G_0$

2. Fall: Es gelte $G^{(i)} \simeq W^3$.
Im Fall $G^{(i)} \simeq W^3$ entstehe der Hamiltonkreis $C^{(i)}$ von $H^{(i)}$ dadurch, daß in $C^{(i-1)}$ die Kante ab durch den Weg axb ersetzt wird. In $H^{(i)}$ existieren genau drei neue berandende 3-Kreise $C_a = axca$, $C_b = bxcb$ und $C_c = axba$. Da $\tau(G) > 1$ gilt, können höchstens zwei dieser drei neuen berandenden 3-Kreise C_a, C_b und C_c aktive 3-Kreise von $H^{(i)}$ sein. In diesem Fall definiere man:

- $f^{(i)}(C_a) = ax$, *falls* $C_a \in \Delta_i$
- $f^{(i)}(C_b) = xb$, *falls* $C_b \in \Delta_i$
- $f^{(i)}(C_c) = xb$, *falls* $C_a \in \Delta_i$ *und* $C_c \in \Delta_i$
- $f^{(i)}(C_c) = ax$, *falls* $C_a \notin \Delta_i$ *und* $C_c \in \Delta_i$.

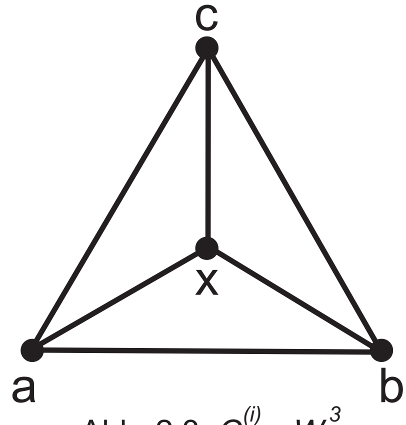

Abb. 2.3: $G^{(i)} \simeq W^3$

3. Fall: Es gelte $G^{(i)} \simeq W^l$ mit $l \geq 4$ und c sei zentraler Knotenpunkt von W^l. In diesem Fall sei $C^{(i)}$ der Hamiltonkreis von $H^{(i)}$, den man erhält, indem man in $C^{(i-1)}$ die Kante ab durch den Weg $ax_1 \dots x_{l-2}b$ ersetzt. In $H^{(i)}$ existieren genau $l-1$ neue berandende 3-Kreise $C_a = cx_1ac$, $C_b = cx_{l-2}bc$ und $C_c^j = cx_jx_{j+1}c$ für $j = 1, \dots, l-3$. Man definiere:

- $f^{(i)}(C_a) = ax_1$, *falls* $C_a \in \Delta_i$
- $f^{(i)}(C_b) = x_{l-2}b$, *falls* $C_b \in \Delta_i$
- $f^{(i)}(C_c^j) = x_jx_{j+1}$, *falls* $C_c^j \in \Delta_i$ *mit* $j = 1, \dots, l-3$.

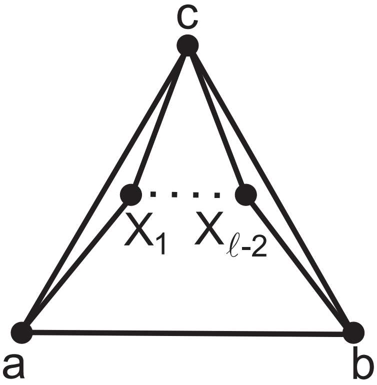

Abb. 2.4: $G^{(i)} \simeq W^{\ell}$ und c ist zentraler Knotenpunkt

4. Fall: Es gelte $G^{(i)} \simeq W^l$ mit $l \geq 4$ und a sei zentraler Knotenpunkt von W^l. In diesem Fall entstehe der Hamiltonkreis $C^{(i)}$ von $H^{(i)}$ dadurch, daß die Kante ab durch den Weg $ax_1 \dots x_{l-2}b$ ersetzt wird. In $H^{(i)}$ existieren wiederum genau $l-1$ neue berandende 3-Kreise $C_b = ax_{l-2}ba$, $C_c = ax_1ca$ und $C_a^j = ax_jx_{j+1}a$ für $j = 1, \dots, l-3$. Man definiere:

- $f^{(i)}(C_b) = x_{l-2}b$, *falls* $C_b \in \Delta_i$
- $f^{(i)}(C_c) = ax_1$, *falls* $C_c \in \Delta_i$
- $f^{(i)}(C_a^j) = x_jx_{j+1}$, *falls* $C_a^j \in \Delta_i$ *mit* $j = 1, \dots, l-3$.

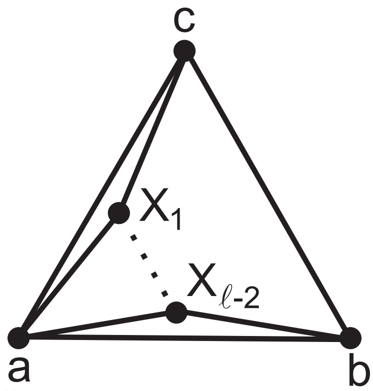

Abb. 2.5: $G^{(i)} \simeq W^{\ell}$ und a ist zentraler Knotenpunkt

In jedem der vier Fälle ist das entsprechend definierte Paar $(C^{(i)}, f^{(i)})$ ein erweiterbares Paar von $H^{(i)}$. Damit ist Theorem 2.10 bewiesen. ■

Kapitel 3

Kreise durch vorgeschriebene Knotenpunkte eines Graphen

Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ eine Teilmenge seiner Knotenpunktmenge. Für $X = V(G)$ ist ein X-Kreis in G ein Hamiltonkreis. Wie im vorhergehenden Kapitel 2 ausgeführt wurde, ist die Vermutung von CHVÁTAL, daß eine Zahl t_0 existiert, so daß jeder Graph G mit einer Toughness $\tau(G) \geq t_0$ einen Hamiltonkreis besitzt, bisher nur für einige Graphenklassen bestätigt worden. Dagegen gelang es DIRAC ([18]) zu zeigen, daß jeder k-fach zusammenhängende Graph k-cyclable ist. Seien A und B zwei disjunkte Knotenpunktmengen sowie $K_{A,B}$ der vollständige paare Graph mit den Bipartitionen A und B. Der Graph $K_{A,B}$ mit $|A| = k+1$ und $|B| = k$ zeigt, daß nicht jeder k-fach zusammenhängende Graph auch $(k+1)$-cyclable ist. Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der Fragestellung, unter welchen zusätzlichen Toughnessbedingungen die Existenz eines X-Kreises durch alle Knotenpunkte einer vorgeschriebenen Knotenpunktmenge X in einem k-fach zusammenhängenden Graphen für $|X| = k+1$ und $|X| = k+2$ sowie partiell für $|X| = k+3$ gesichert werden kann. (In Kapitel 3 gelte für vollständige Graphen mit n Knotenpunkten $\kappa(K_n) = \infty$.)

3.1 Ein lokales Zusammenhangskonzept und ein lokales Toughnesskonzept

Seien G ein zusammenhängender Graph, $X \subseteq V(G)$ mit $|X| \geq 2$ und C ein X-Kreis in G. Löscht man l Knotenpunkte in diesem Kreis C, so besitzt der resultierende Untergraph von C höchstens l Komponenten, die jeweils mindestens einen Knotenpunkt von X enthalten. Im folgenden wird zunächst ein lokales Zusammenhangskonzept und darauf aufbauend ein lokales Toughnesskonzept eingeführt. Für eine Knotenpunktmenge $S \subsetneq V(G)$ bezeichne $\omega_X(G-S)$ die Anzahl der Komponenten des Graphen $G-S$, die jeweils mindestens einen Knotenpunkt aus X enthalten. Ist $G[X]$ kein vollständiger Untergraph von G, so existiert mindestens eine Knotenpunktmenge $S \subsetneq V(G)$ mit $\omega_X(G-S) \geq 2$. In diesem Fall sei $\kappa_G(X)$ definiert als kleinste Kardinalität einer solchen Knotenpunktmenge S. Im Fall, daß $G[X]$ ein vollständiger Untergraph von G ist, setze man $\kappa_G(X) = \infty$. Im weiteren stehe $\kappa(X)$ anstelle von $\kappa_G(X)$ wenn klar ist, auf welchen Graphen G sich die Angabe des lokalen Zusammenhangs der Knotenpunktmenge X bezieht. Für $X = V(G)$ ergibt sich das gewöhnliche (globale) Zusammenhangskonzept. Die folgende Eigenschaft (π_1) ist offensichtlich:

(π_1) *Gilt $A \subseteq B \subseteq V(G)$, so folgt $\kappa(A) \geq \kappa(B)$.*

Sei $t \in \mathbb{R}^+$. $X \subseteq V(G)$ heißt *t-tough in G*, falls

$$\omega_X(G-S) \leq \frac{|S|}{t}$$

für jede Knotenpunktmenge $S \subsetneq V(G)$ mit $\omega_X(G-S) \geq 2$ gilt. Ist $G[X]$ kein vollständiger Untergraph von G, so sei $\tau_X(G)$ die größte (rationale) Zahl t, so daß X t-tough in G ist. Ist $G[X]$ vollständig, so setzt man $\tau_X(G) = \infty$. Für $X = V(G)$ erhält man wiederum das gewöhnliche (globale) Toughnesskonzept. Die Eigenschaft (π_2) ist ebenfalls offensichtlich:

(π_2) *Gilt $A \subseteq B \subseteq V(G)$, so folgt $\tau_A(G) \geq \tau_B(G)$.*

Aus der einleitenden Bemerkung ergibt sich in Analogie zu Theorem 1.6 als notwendige Bedingung für die Existenz eines X-Kreises:

Lemma 3.1.
Seien G ein zusammenhängender Graph und $X \subseteq V(G)$ mit $|X| \geq 2$. Existiert ein X-Kreis in G, dann gilt $\tau_X(G) \geq 1$.

3.2 Toughnessbedingungen und Kreise durch vorgeschriebene Knotenpunkte

Jede Knotenpunktmenge X eines Graphen G mit $|X| \leq \kappa(X)$ ist 1-tough in G, womit die in Lemma 3.1 formulierte notwendige lokale Toughnessbedingung für die Existenz eines X-Kreises in diesem Fall trivialerweise erfüllt ist. Sei $\alpha(X)$ die maximale Anzahl von paarweise nicht adjazenten Knotenpunkten in $G[X]$. Das folgende Theorem 3.1 beantwortet die Frage nach der Existenz eines X-Kreises im Fall $\alpha(X) \leq \kappa(X)$:

Theorem 3.1. *(BROERSMA, LI, LI, TIAN und VELDMANN [8], FLANDRIN, LI, MARCZYK und WOŹNIAK [23])*
Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ mit $\alpha(X) \leq \kappa(X)$, $|X| \geq 3$ und $\kappa(X) \geq 2$. Dann existiert ein X-Kreis in G.

Mit Theorem 3.1 folgt somit die Existenz eines X-Kreises, falls $|X| \leq \kappa(X)$ oder aber $|X| = \kappa(X) + 1$ und $E(G[X]) \neq \emptyset$ gilt. Für den allgemeinen Fall $|X| = \kappa(X) + 1$ gelang es HARANT, folgendes Theorem zu beweisen:

Theorem 3.2. *(HARANT [37])*
Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$, so daß $|X| = \kappa(X) + 1$ und $\kappa(X) \geq 2$ gilt. Dann besitzt G einen X-Kreis oder es existiert eine Knotenpunktmenge $Y \subseteq V(G) \setminus X$ mit $|Y| = \kappa(X)$, so daß der Graph G eine Unterteilung des $K_{X,Y}$ als Untergraph enthält.

Seien G ein Graph sowie $A, B \subsetneq V(G)$ zwei disjunkte Knotenpunktmengen mit $|A| = k + 1$, $|B| = k$, $\tau_A(G) \geq 1$ und $k \geq 3$. Ferner enthalte G eine Unterteilung des $K_{A,B}$ als Untergraph. Angenommen, der Graph G besitze keinen $(A \cup B)$-Kreis. Eine einfache Fallunterscheidung zeigt, daß wegen $k \geq 3$ kein Weg in $G - B$ existiert, der zwei Knotenpunkte aus A verbindet, im Widerspruch zur Voraussetzung $\tau_A(G) \geq 1$. Es folgt:

Lemma 3.2.
Seien G ein Graph sowie $A, B \subsetneq V(G)$ zwei disjunkte Knotenpunktmengen mit $|A| = k + 1$, $|B| = k$, $\tau_A(G) \geq 1$ und $k \geq 3$. Enthält G eine Unterteilung des $K_{A,B}$ als Untergraph, so besitzt der Graph G einen $(A \cup B)$-Kreis.

Als Folgerung aus Theorem 3.2 und Lemma 3.2 bzw. aus einem Resultat von WATKINS und MESNER ([57]) ergibt sich:

Theorem 3.3. *(WATKINS und MESNER [57], HARANT [37])*
Seien G ein Graph sowie $X \subseteq V(G)$ mit $|X| = \kappa(X) + 1$ und $\kappa(X) \geq 3$. Gilt $\tau_X(G) \geq 1$, dann existiert ein X-Kreis in G.

Damit ist die in Lemma 3.1 formulierte notwendige lokale Toughnessbedingung für die Existenz eines X-Kreises im Fall $|X| = \kappa(X) + 1$ und $\kappa(X) \geq 3$ auch hinreichend. Das nachfolgend aufgeführte Theorem 3.4 basiert auf der Beweisidee von Theorem 3.2.

Theorem 3.4. *(GERLACH und HARANT)*
Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, $|X| = \kappa(X) + l$, $\kappa(X) \geq 2$, $l \geq 2$, $\kappa(X) \geq l - 1$, $a \in X$, $Z = X \setminus \{a\}$ und C ein Z-Kreis in G mit $V(C) \subseteq V(G) \setminus \{a\}$. Weiterhin

sei $\mathcal{P}' = \{P'_1, \ldots, P'_{l-1}\}$ *ein* $\{a\}$-$V(C)$-*Fächer mit* $V(P'_i) \cap V(C) = \{b_i\}$ *und* $b_i \in X \setminus \{a\}$ *für alle* $i \in \{1, \ldots, l-1\}$. *Dann besitzt* G *einen* X-*Kreis oder es existiert eine Knotenpunktmenge* $Y \subseteq V(G) \setminus X$ *mit* $|Y| = \kappa(X) - (l-1)$, *so daß* G *eine Unterteilung des* $K_{X \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_{l-1}\}, Y \cup \{b_1, b_2, \ldots, b_{l-1}\}}$ *als Untergraph enthält.*

Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$, so daß $|X| = \kappa(X) + 2$, $\kappa(X) \geq 3$, $ab \in E(G[X])$ und $\tau_X(G) \geq 1$ gilt. Sei ferner $Z = X \setminus \{a\}$. Mit (π_1) bzw. (π_2) folgt $\kappa(Z) \geq \kappa(X) = |X| - 2 = |Z| - 1$ bzw. $\tau_Z(G) \geq \tau_X(G) \geq 1$ und somit mit Theorem 3.3 die Existenz eines Z-Kreises. Als Folgerung aus Theorem 3.4 ($l = 2$) und Lemma 3.2 ergibt sich:

Theorem 3.5. *(GERLACH, GÖRING, HARANT und TKÁČ [26])*
Seien G *ein Graph sowie* $X \subseteq V(G)$ *mit* $|X| = \kappa(X) + 2$, $\kappa(X) \geq 3$ *und* $E(G[X]) \neq \emptyset$. *Gilt* $\tau_X(G) \geq 1$, *dann existiert ein* X-*Kreis in* G.

Die weiteren Hauptresultate dieses Abschnittes bilden die nachfolgend aufgeführten Theoreme.

Theorem 3.6. *(GERLACH, GÖRING, HARANT und TKÁČ [26])*
Seien G *ein Graph sowie* $X \subseteq V(G)$ *mit* $|X| = \kappa(X) + 2$ *und* $\kappa(X) \geq 4$. *Gilt* $\tau_X(G) > 1$, *dann existiert ein* X-*Kreis in* G.

Theorem 3.7. *(GERLACH und HARANT [27])*
Seien G *ein Graph sowie* $X \subseteq V(G)$ *mit* $|X| = \kappa(X) + 3$, $\kappa(X) \geq 8$ *und* $E(G[X]) \neq \emptyset$. *Gilt* $\tau_X(G) > \frac{\kappa(X)+1}{\kappa(X)}$, *dann existiert ein* X-*Kreis in* G.

Es sei erwähnt, daß man mit (π_1) und (π_2) globale Versionen der aufgeführten Theoreme erhält, indem man $\kappa(X)$ durch $\kappa(V(G)) = \kappa(G)$ und $\tau_X(G)$ durch $\tau_{V(G)}(G) = \tau(G)$ ersetzt.
Der vollständige paare Graph $K_{A,B}$ mit $|A| = k + 1$ und $|B| = k$ zeigt, daß Theorem 3.3 ($X = A$) bzw. Theorem 3.5 ($X = A \cup \{b\}$, $b \in B$) nicht ohne die Voraussetzung $\tau_X(G) \geq 1$ gelten.
Seien j, k und l drei positive natürliche Zahlen mit $j \geq k$ und $j \geq l$. Ferner seien A, B und C drei paarweise disjunkte Mengen von Knotenpunkten, so daß $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_j\}$, $|A| = j$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, $|B| = k$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_l\}$ und $|C| = l$ gilt. Der Graph $G(j, k, l)$ sei durch $V(G(j, k, l)) = A \cup B \cup C$ und $E(G(j, k, l)) = \{c_{i_1} c_{i_2} |\ 1 \leq i_1 < i_2 \leq l\} \cup \{ab|\ a \in A;\ b \in B\} \cup \{a_i c_i|\ 1 \leq i \leq l\} \cup \{bc|\ b \in B;\ c \in C\}$ definiert.
Die Graphen $G(k + 2, k, 3)$ bzw. $G(k + 3, k, 5)$ sind Beispiele dafür, daß Theorem 3.6 ($X = A$) nicht ohne die Voraussetzung $\tau_X(G) > 1$ bzw. für $|X| = \kappa(X) + 3$ gilt. Die Graphen $G(3, 1, 3)$ bzw. $G(5, 2, 5)$ zeigen, daß Theorem 3.3 ($X = A$) und Theorem 3.5 ($X = A \cup \{b\}$, $b \in B$) nicht für $\kappa(X) = 2$ gelten bzw. Theorem 3.6

($X = A$) nicht für $\kappa(X) = 3$ gilt. Der Graph $G(5,2,5)$ ist auch ein Beispiel dafür, daß Theorem 3.7 ($X = A \cup \{b\}$, $b \in B$) für $\kappa(X) = 3$ nicht unter der schwächeren Toughnessbedingung $\tau_X(G) > 1$ gilt.

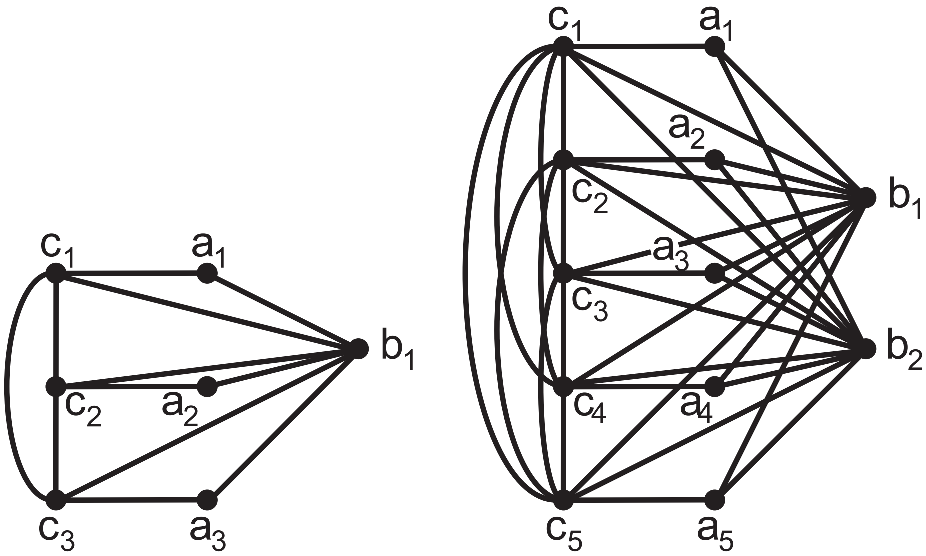

Abb. 3.1: Die Graphen *G(3,1,3)* und G*(5,2,5)*

Die Bedingung $\kappa(X) \geq 8$ in Theorem 3.7 ist durch die angewandte Beweistechnik bedingt. Bezüglich Theorem 3.7 sei die folgende Vermutung angeführt:

Vermutung 2. *(GERLACH und HARANT)*
Seien G ein Graph sowie $X \subseteq V(G)$ mit $|X| = \kappa(X) + 3$, $\kappa(X) \geq 4$ und $E(G[X]) \neq \emptyset$. Gilt $\tau_X(G) > 1$, dann existiert ein X-Kreis in G.

Für die nachfolgenden Beweise werden, ohne es in jedem Fall explizit zu erwähnen, die folgenden leicht verifizierbaren Eigenschaften aus [37] genutzt:

(π_3) *Seien $A, B, B' \subseteq V(G)$ mit $B' \subseteq B$. Dann gilt: Trennt $S \subseteq V(G)$ die Knotenpunktmengen A und B, dann trennt S auch die Knotenpunktmengen A und B'.*

(π_4) *Seien $a \in A \subseteq V(G)$ und $\kappa(A) < \infty$, dann folgt $|N_G(a)| \geq \kappa(A)$ oder $A \subseteq \{a\} \cup N_G(a)$.*

(π_5) *Seien $A \subsetneq V(G)$ und $b \in V(G) \setminus A$. Gilt $|A| \geq \kappa(A \cup \{b\})$, dann können die Knotenpunktmengen A und $N_G(b)$ nicht durch eine Menge von höchstens $\kappa(A \cup \{b\}) - 1$ Knotenpunkten getrennt werden.*

Die folgende Verallgemeinerung des Theorems 1.5 ist im weiteren von fundamentaler Bedeutung.

Lemma 3.3. *(BÖHME, GÖRING und HARANT [5])*
Seien s eine natürliche Zahl, G ein Graph und $U, V \subseteq V(G)$, so daß U und V nicht durch eine Menge von höchstens s Knotenpunkten getrennt werden können. Sei ferner $\mathcal{Q}$ eine Menge von s innerlich disjunkten U-V-Wegen. Dann existiert auch eine Menge $\mathcal{R}$ von $s+1$ innerlich disjunkten U-V-Wegen, so daß $U \cap V(\mathcal{Q}) \subsetneq U \cap V(\mathcal{R})$ und $V \cap V(\mathcal{Q}) \subsetneq V \cap V(\mathcal{R})$ gilt.

3.2.1 Beweis Theorem 3.4

Es wird die Bezeichnungsweise aus dem Beweis des Theorems 2.10 übernommen. Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, $|X| = \kappa(X) + l$, $\kappa(X) \geq 2$, $l \geq 2$, $\kappa(X) \geq l - 1$, $a \in X$, $Z = X \setminus \{a\}$, C ein Z-Kreis in G mit $V(C) \subseteq V(G) \setminus \{a\}$ sowie $\mathcal{P}' = \{P_1', \ldots, P_{l-1}'\}$ ein $\{a\}$-$V(C)$-Fächer mit $V(P_i') \cap V(C) = \{b_i\}$ und $b_i \in X \setminus \{a\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, l-1\}$. Angenommen, der Graph G besitze keinen X-Kreis. Weiterhin seien $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{l-1}\}$, φ eine fest gewählte Orientierung von C, $U = N_G(a)$, $V = V(C)$, $V' = Z$ und $s = l-1$. Ferner enthalte $\mathcal{Q}$ die $N_G(a)$-$\{b_i\}$-Unterwege von P_i' für $i \in \{1, \ldots, l-1\}$. Unter Berücksichtigung von (π_3) und (π_5) folgt durch sukzessives Anwenden von Lemma 3.3 die Existenz eines $\{a\}$-$V(C)$-Fächers $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_{\kappa(X)}\}$. Man beachte, daß $\mathcal{P}$ für alle $i \in \{1, \ldots, l-1\}$ einen $\{a\}$-$\{b_i\}$-Weg enthält. Für einen Weg $P \in \mathcal{P}$ sei $T(P) \in V(P) \cap V(C)$. Ferner seien $T(\mathcal{P}) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \{T(P)\}$ und $M = T(\mathcal{P}) \cup Z$. Da G keinen X-Kreis besitzt, gilt $y_M^+ \notin T(\mathcal{P})$ für alle $y \in T(\mathcal{P})$ und $T(\mathcal{P}) \cap Z = B$. Im Fall $\kappa(X) = 2$ folgt $l \in \{2, 3\}$ und somit die Aussage von Theorem 3.4 unmittelbar mit $Y = T(\mathcal{P}) \setminus B$. Damit gelte im weiteren $\kappa(X) \geq 3$. Da kein X-Kreis in G existiert, folgt $|V([z, z_Z^+]) \cap T(\mathcal{P})| \leq 1$ für alle $z \in Z$ und somit:

(*i*) $|V((z, z_Z^+))| = 1$ *für alle* $z \in Z \setminus (B \cup \bigcup_{i=1}^{l-1} \{b_{iZ}^-\})$ *und* $V((b_Z^-, b_Z^+)) \cap T(\mathcal{P}) = \{b\}$ *für alle* $b \in B$.

(*ii*) *Es existiert kein* $\{z\}$-$\{z'\}$*-Weg* Q *in* G *mit* $z, z' \in Z \setminus B$, $z \neq z'$ *und* $V(Q) \cap (V(C) \cup V(\mathcal{P})) = \{z, z'\}$.

Sei $z \in Z \setminus B$. Mit (i) folgt $p = z_M^- \in T(\mathcal{P})$ und $p' = z_M^+ \in T(\mathcal{P})$. Seien $q = z_{V(C)}^- \in N_G(z)$ und $q' = z_{V(C)}^+ \in N_G(z)$. Man beachte, daß $q = p$ oder $q' = p'$ gelten kann. Sei $U = N_G(z)$, $V = (V(C) \cup V(\mathcal{P})) \setminus V((p, p'))$, $V' = X \setminus \{z\}$, $s = 2$ und $\mathcal{Q} = \{[p, q], [q', p']\}$. Mit (π_3), (π_4) und (π_5) folgt bei Anwendung von Lemma 3.3, daß die entsprechende Wegemenge $\mathcal{R}$ einen $\{y\}$-$\{p\}$-Weg Q, einen $\{y'\}$-$\{p'\}$-Weg Q' und einen $\{y''\}$-$\{p''\}$-Weg Q'' mit $\{q, q'\} \subsetneq \{y, y', y''\} \subseteq N_G(z)$ und $p'' \in V \setminus \{p, p'\}$ besitzt. Ersetzt man in C das Segment $[p, p']$ durch die Vereinigung von Q, yz, zy' und Q', so erhält man einen Z-Kreis von G, der wiederum mit C bezeichnet wird. Der Weg, der durch Hinzufügen der Kante zy'' zu Q'' entsteht, ist ein $\{z\}$-$((V(C) \cup V(P)) \setminus \{z\})$-Weg bezüglich dieses neuen (umdefinierten) Kreises C. Da der Graph G keinen X-Kreis besitzt, folgt $p'' \in T(\mathcal{P})$. Man beachte, daß sich die Wegemenge $\mathcal{P}$ nicht ändert. Durch sukzessive Anwendung von Lemma 3.3 (gegebenenfalls jeweils verbunden mit einer Umdefinition des Z-Kreises C) folgt:

(*iii*) *Sei* $z \in Z \setminus B$, *dann existiert ein* $\{z\}$-$(V(C) \cup V(P))$-*Fächer* $\mathcal{R}(z)$ *mit* $|\mathcal{R}(z)| = \kappa(X) - 2$, *wobei all diese Wege aus* $\mathcal{R}(z)$ *in* $T(\mathcal{P}) \setminus \{z_M^-, z_M^+\}$ *enden.*

Wegen (*ii*) können sich zwei Wege $W \in \mathcal{R}(z)$ und $W' \in \mathcal{R}(z')$ mit $z, z' \in Z \setminus B$ und $z \neq z'$ nur in einem Knotenpunkt aus $T(\mathcal{P})$ schneiden. Setzt man $Y = T(\mathcal{P}) \setminus B$, so bildet die Vereinigung des Kreises C mit allen Wegen $P \in \mathcal{P}$ und allen Wegen $Q \in R(z)$ für $z \in Z \setminus B$ die gesuchte Unterteilung des $K_{X\setminus B, Y \cup B}$ in G. ■

Es sei angemerkt, daß für $l = 2$ die Aussage des Theorems 3.4 bereits in [26] mittels einer analogen Vorgehensweise bewiesen wurde.

3.2.2 Beweis Theorem 3.6

Ein ursprünglicher Beweis des Theorems 3.6 liefert die wesentlichen Schlußweisen für den Beweis des Theorems 3.7, indem diese Schlußweisen auf $|X| = \kappa(X) + 3$ mit der Einschränkung $E(G[X]) \neq \emptyset$ ausgedehnt werden. In [26] wird ein kurzer Beweis des Theorems 3.6 angegeben, der auf Ideen von KELMANS, LOMONOSOV sowie GÖRING basiert und im folgenden wiedergegeben wird.
Seien G ein Graph und $Z \subseteq E[G]$. Der Untergraph $H(Z)$ sei definiert durch $V(H(Z)) = \bigcup_{e \in Z} V(e)$ und $E(H(Z)) = Z$. Ferner sei $\mathcal{C}(Z)$ die Menge der Komponenten von $H(Z)$. Für einen Untergaphen H von G, bezeichne $\partial_G H$ die Menge aller Knotenpunkte von H, die mit Kanten aus $E(G) \setminus E(H)$ inzidieren.
In [43] und später in [45] wurde von KELMANS und LOMONOSOV der Begriff des A-Separators eingeführt. Sei $A \subsetneq V(G)$ eine Menge von unabhängigen Knotenpunkten. Ein Paar (Y, Z) heißt *A-Separator* von G, falls

- $Y \subseteq V(G - A)$,
- $Z \subseteq E(G - A - Y)$,
- $\omega_A(G - Y - Z) = |A|$ *und*
- $|A| > c(Y, Z) = |Y| + \sum_{C \in \mathcal{C}(Z)} \left\lfloor \frac{|\partial_{G-Y} C|}{2} \right\rfloor$

gilt.
In Abb. 3.2 ist ein Beispiel (aus [45]) für einen A-Separator (Y, Z) eines Graphen G dargestellt mit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1z_2,\ z_1z_3,\ z_2z_3,\ z_4z_5,\ z_4z_6,\ z_5z_6\}$ und $c(Y, C) = 4$.

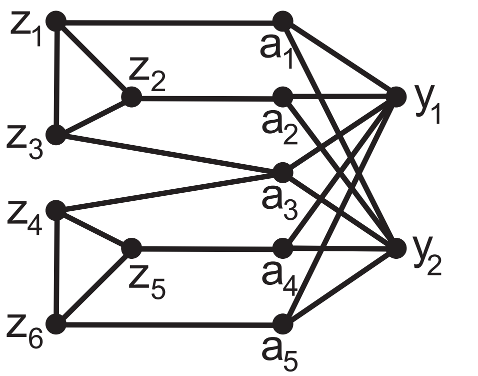

Abb. 3.2: Beispiel eines *A*-separators mit |*A*|=*5*, |*Y*|=2, |*Z*|=*6* und *c(Y,Z)=4*

Wie man leicht sieht, kann ein Graph G, der für eine Knotenpunktmenge $A \subseteq V(G)$ einen A-Separator besitzt, keinen A-Kreis enthalten.

Theorem 3.8. *(KELMANS und LOMONOSOV [43, 45])*
Sei k eine natürliche Zahl mit $k \geq 2$. Ferner seien G ein k-fach zusammenhängender Graph und $X \subseteq V(G)$ eine Menge von unabhängigen Knotenpunkten mit $|X| \leq k + 2$. Dann existiert ein X-Kreis in G genau dann, wenn G für alle $A \subseteq X$ keinen A-Separator besitzt.

In [45] werden die wesentlichen Ideen zum Beweis des Theorems 3.8 angeführt, welche auch unter lokalen Zusammenhangsvoraussetzungen arbeiten. Somit kann im weiteren das folgende Theorem angewandt werden.

Theorem 3.9.
Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$, so daß $E(G[X]) = \emptyset$, $|X| \leq \kappa(X) + 2$ und $\kappa(X) \geq 2$ gilt. Dann existiert ein X-Kreis in G genau dann, wenn G für alle $A \subseteq X$ keinen A-Separator besitzt.

Desweiteren findet das folgende Lemma Anwendung:

Lemma 3.4. *(GERLACH, GÖRING, HARANT und TKÁČ [26])*
Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$, so daß $E(G[X]) = \emptyset$ und $2 \leq \kappa(X) \leq |X| \leq 2(\kappa(X) - 1)$ gilt. Besitzt G einen A-Separator für eine Knotenpunktmenge $A \subseteq X$, dann gilt $\tau_X(G) \leq 2 - \frac{\kappa(X)+2}{|X|}$.

Beweis Lemma 3.4:
Seien $A \subseteq X$ und (Y, Z) ein A-Separator. Unter allen A-Separatoren sei (Y, Z) so gewählt, daß $|Y|$ maximal ist. Ferner setze man $|A| = a$, $|X| = x$, $|Y| = y$, $|\mathcal{C}(Z)| = z$, $\sum\limits_{C \in \mathcal{C}(Z)} |\partial_{G-Y} C| = r$ und $\kappa(X) = k$. Es werden die beiden Fälle $Z = \emptyset$ und $Z \neq \emptyset$ betrachtet.

Im Fall $Z = \emptyset$ gilt $\omega_A(G - Y) = a$, $y \leq a - 1$ und $y \leq y + 2(a - 1 - y) = 2a - y - 2 \leq 2a - y\frac{a}{x} - 2\frac{a}{x} = \left(2 - \frac{y+2}{x}\right) a$. Mit $y \geq k$ folgt $\tau_X(G) \leq \tau_A(G) \leq \frac{\left(2 - \frac{y+2}{x}\right)a}{a} \leq \left(2 - \frac{k+2}{x}\right)$.

Somit kann $Z \neq \emptyset$ angenommen werden. Sei $C \in \mathcal{C}(Z)$. Aufgrund der Maximalität von $|Y|$ enthält $\partial_{G-Y} C$ eine ungerade Anzahl von mindestens drei Knotenpunkten. Damit gilt $3z \leq r$, $a - 1 \geq c(Y, Z) = y + \frac{r-z}{2}$ und $r - z \leq 2(a - 1 - y)$. Die Knotenpunktmenge $T(Y, Z)$ enthalte alle Knotenpunkte aus Y und von jeder Komponente $C \in \mathcal{C}(Z)$ alle Knotenpunkte aus $\partial_{G-Y} C$ bis auf einen. Es folgt $\omega_A(G - T(Y, Z)) = a$ und $|T(Y, Z)| = y + r - z \leq y + 2(a - 1 - y) = 2a - y - 2 \leq \left(2 - \frac{y+2}{x}\right) a$. Analog dem Fall $Z = \emptyset$ gilt somit die Aussage des Lemmas für $y \geq k$.

Damit kann $Z \neq \emptyset$ und $y < k$ vorausgesetzt werden. Mit $\omega_A(G - Y - Z) = a$ und Lemma 3.3 (angewandt auf jeden Knotenpunkt aus A in $G - Y$) folgt $r \geq (k - y)a$, $a - 1 \geq c(Y, Z) = y + \frac{r-z}{2} \geq y + \frac{r}{2} - \frac{r}{6} = y + \frac{r}{3} \geq y + \frac{(k-y)a}{3}$ und somit $1 \leq k - y \leq 2$.

Für $k - y = 2$ gilt $a \geq 3(y + 1)$ und folglich $2(k - 1) \geq x \geq a \geq 3(y + 1) = 3(k - 1)$, im Widerspruch zur Voraussetzung $k \geq 2$.

Damit gelte $k - y = 1$. Aus $\omega_A(G - Y) = 1$ folgt $r \geq a + z - 1$ und damit sukzessive $a - 1 \geq c(Y, Z) = y + \frac{r-z}{2} \geq y + \frac{a-1}{2}$, $a \geq 2y + 1$ und schließlich $2k - 1 = 2y + 1 \leq a \leq x$, im Widerspruch zur Voraussetzung $x \leq 2(k - 1)$. $\square$

Die Aussage des Theorems 3.6 folgt nun unmittelbar mit Theorem 3.5, Theorem 3.9 und Lemma 3.4 $\blacksquare$

3.2.3 Beweis Theorem 3.7

Zum Beweis des Theorems 3.7 werden zwei Lemmata benötigt, die zunächst bewiesen werden.

Seien G ein Graph, $U \subsetneq V(G)$ und $U' \subsetneq V(G)$ zwei Knotenpunktmengen mit $U \cap U' = \emptyset$ sowie $\mathcal{W}$ eine Menge von innerlich disjunkten U-U'-Wegen in G. Für einen Weg $P \in \mathcal{W}$ seien $f_U(P) \in V(P) \cap U$ und $f_{U'}(P) \in V(P) \cap U'$. Man beachte, daß die Knotenpunkte $f_U(P)$ und $f_{U'}(P)$ eindeutig bestimmt sind.

Seien $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+2}\}$ und $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ zwei disjunkte Mengen von Knotenpunkten mit $k \geq 3$, $|A| = k + 2$ und $|B| = k$. Der Graph $H(A, B)$ sei definiert durch $V(H(A, B)) = A \cup B$ und $E(H(A, B)) = \{ab |\ a \in A \setminus \{a_1, a_2\},\ b \in B\} \cup \{a_1a_2, a_1b_1, a_2b_2\}$.

Lemma 3.5. *(GERLACH und HARANT [27])*
Seien $k \geq 6$, G ein Graph, $A = \{a_1, \ldots, a_{k+2}\} \subsetneq V(G)$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\} \subsetneq V(G)$, so daß $A \cap B = \emptyset$, $|A| = k + 2$, $|B| = k$ und $\tau_A(G) > \frac{k+1}{k}$ gilt. Enthält G eine Unterteilung S des Graphen $H(A, B)$ als Untergraph, so existiert ein $(A \cup B)$-Kreis in G.

Beweis Lemma 3.5:
Angenommen, der Graph G besitze keinen $(A \cup B)$-Kreis. Seien $\mathcal{P}$ die Menge aller (innerlich disjunkter) A-B-Wege von S und $\mathcal{Q}$ die Menge aller $V(S)$-$V(S)$-Wege in $G - B$, die zwei verschiedene Wege $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ mit $f_A(P_1) \neq f_A(P_2)$ verbinden. Sei $Q \in \mathcal{Q}$ ein Weg, der zwei Wege $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ verbindet. Ferner gelte $q_1 \in V(Q) \cap V(P_1)$ und $q_2 \in V(Q) \cap V(P_2)$.

1.Fall: Es gelte $f_A(P_1), f_A(P_2) \in A \setminus \{a_1, a_2\}$.
O.B.d.A. kann $f_A(P_1) = a_3$, $f_A(P_2) = a_4$ und $\{f_B(P_1), f_B(P_2)\} \subseteq \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ angenommen werden. In diesem Fall existiert ein $(A \cup B)$-Kreis in G, welcher die Knotenpunkte aus $A \cup B \cup \{q_1, q_2\}$ in der Reihenfolge a_3, q_1, q_2, a_4, b_5, a_5, b_1, a_1, a_2, b_2, a_6, b_3, a_7, b_4, a_8, b_6, …, a_l, b_{l-2}, …, a_{k+2}, b_k, a_3 durchläuft. Man beachte, daß $a_3 = q_1$ oder $a_4 = q_2$ gelten kann.

Es folgt somit:

(*i*) *Es existiert kein Weg $Q \in \mathcal{Q}$, welcher zwei Wege $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ verbindet, so daß $f_A(P_1), f_A(P_2) \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ gilt.*

In den weiteren Fällen wird abkürzend lediglich die Durchlaufungsreihenfolge des resultierenden $(A \cup B)$-Kreises angegeben, um somit den Widerspruch zur angenommenen Nichtexistenz eines $(A \cup B)$-Kreises zu zeigen.

2. Fall: Es gelte $f_A(P_1) \in \{a_1, a_2\}$ und $f_A(P_2) \in A \setminus \{a_1, a_2\}$.
O.B.d.A. kann $f_A(P_1) = a_1$, $f_A(P_2) = a_3$ und $f_B(P_2) \in \{b_1, b_2, b_3\}$ vorausgesetzt werden. Durchlaufungsreihenfolge: a_3, q_2, q_1, a_1, a_2, b_2, a_4, b_1, a_5, b_3, a_6, b_4, $\ldots$, a_l, b_{l-2}, $\ldots$, a_{k+2}, b_k, a_3.

Damit gilt:

(ii) *Es existiert kein Weg $Q \in \mathcal{Q}$, welcher zwei Wege $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ verbindet, so daß $f_A(P_1) \in \{a_1, a_2\}$ und $f_A(P_2) \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ gilt.*

Seien P^* der $\{a_1\}$-$\{a_2\}$-Weg, $P_{a_1} \in \mathcal{P}$ der $\{a_1\}$-$\{b_1\}$-Weg und $P_{a_2} \in \mathcal{P}$ der $\{a_2\}$-$\{b_2\}$-Weg in S. Weiterhin seien $u, v \in V(P^*)$ und $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \setminus \{P_{a_1}, P_{a_2}\}$ mit $f_A(P_1) \neq f_A(P_2)$.

3. Fall: Es existiere ein $(V(P_1) \setminus B)$-$\{u\}$-Weg Q_1 und ein $(V(P_2) \setminus B)$-$\{v\}$-Weg Q_2, so daß $q_1 \in V(Q_1) \cap V(P_1)$, $q_2 \in V(Q_2) \cap V(P_2)$, $V(Q_1) \cap V(S) = \{u, q_1\}$, $V(Q_2) \cap V(S) = \{v, q_2\}$ und $u \neq v$ gilt.
Wegen (i) sind Q_1 und Q_2 innerlich disjunkt. O.B.d.A. gelte $f_A(P_1) = a_3$, $f_A(P_2) = a_4$ und $\{f_B(P_1), f_B(P_2)\} \subseteq \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Durchlaufungsreihenfolge: a_3, q_1, u, a_1, b_1, a_5, b_2, a_2, v, q_2, a_4, b_5, a_6, b_3, a_7, b_4, a_8, b_6, $\ldots$, a_l, b_{l-2}, $\ldots$, a_{k+2}, b_k, a_3 oder a_3, q_1, u, a_2, b_2, a_5, b_1, a_1, v, q_2, a_4, b_5, a_6, b_3, a_7, b_4, a_8, b_6, $\ldots$, a_l, b_{l-2}, $\ldots$, a_{k+2}, b_k, a_3.

Es folgt:

(iii) *Seien $u, v \in V(P^*)$ und $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \setminus \{P_{a_1}, P_{a_2}\}$ mit $f_A(P_1) \neq f_A(P_2)$. Ferner existiere ein $(V(P_1) \setminus B)$-$\{u\}$-Weg Q_1 und ein $(V(P_2) \setminus B)$-$\{v\}$-Weg Q_2 mit $q_1 \in V(Q_1) \cap V(P_1)$, $q_2 \in V(Q_2) \cap V(P_2)$, $V(Q_1) \cap V(S) = \{u, q_1\}$ und $V(Q_2) \cap V(S) = \{v, q_2\}$. Dann gilt $u = v$.*

Der Graph, der aus $H(A, B)$ durch Löschen der k Knotenpunkte aus B entsteht, besitzt k Komponenten, welche jeweils genau einen Knotenpunkt aus $A \setminus \{a_1, a_2\}$ enthalten. Da der Graph G keinen $(A \cup B)$-Kreis besitzt, folgt wegen (i) und (ii), daß die k Knotenpunkte aus $A \setminus \{a_1, a_2\}$ in G durch eine Knotenpunktmenge bestehend aus B und möglicherweise einem weiteren Knotenpunkt (siehe (iii)) getrennt werden können, im Widerspruch zu $\tau_A(G) > \frac{k+1}{k}$. □

Seien $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+2}\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{k+1}\}$ zwei disjunkte Knotenpunkte mit $k \geq 3$, $|A| = k + 2$ und $|B| = k + 1$. Ferner sei $\Gamma(A, B)$ die Menge aller paaren Graphen H mit $V(H) = A \cup B$ und $E(H) \subsetneq \{ab|\ a \in A, b \in B\}$, so daß $|N_H(a)| = k$ für alle $a \in A$, $N_H(b_1) = \{a_1, a_2, a_3\}$ und $|N_H(b)| \geq 4$ für alle $b \in B \setminus \{b_1\}$ gilt.

Lemma 3.6.
Seien $k \geq 8$, G ein Graph, $A = \{a_1, \ldots, a_{k+2}\} \subsetneq V(G)$ und $B = \{b_1, \ldots, b_{k+1}\} \subsetneq V(G)$, so daß $A \cap B = \emptyset$, $|A| = k+2$, $|B| = k+1$ und $\tau_A(G) > \frac{k+1}{k}$ gilt. Enthält G eine Unterteilung $S(H)$ eines Graphen $H \in \Gamma(A, B)$ als Untergraph, so existiert ein $(A \cup B)$-Kreis in G.

Beweis Lemma 3.6:
Angenommen, der Graph G besitze keinen $(A \cup B)$-Kreis. Aus der Definition von $\Gamma(A, B)$ folgt $N_H(a_i) = B \setminus \{b_1\}$ für alle $i \in \{4, 5, \ldots, k+2\}$ und $|N_H(a_j) \cap (B \setminus \{b_1\})| = k - 1$ für alle $j \in \{1, 2, 3\}$. O.B.d.A. kann

- $N_H(a_1) = N_H(a_2) = N_H(a_3) = B \setminus \{b_2\}$ *oder*
- $N_H(a_1) = N_H(a_2) = B \setminus \{b_2\}$ *und* $N_H(a_3) = B \setminus \{b_3\}$ *oder*
- $N_H(a_1) = B \setminus \{b_2\}$, $N_H(a_2) = B \setminus \{b_3\}$ *und* $N_H(a_3) = B \setminus \{b_4\}$

angenommen werden.
Seien $\mathcal{P}$ die Menge aller (innerlich disjunkter) A-B-Wege von S und $\mathcal{Q}$ die Menge aller $V(S(H))$-$V(S(H))$-Wege in $G - B$, welche zwei verschiedene Wege $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ mit $f_A(P_1) \neq f_A(P_2)$ verbinden. Sei ferner $Q \in \mathcal{Q}$ ein Weg, der zwei Wege $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ verbindet. Weiterhin gelte $q_1 \in V(Q) \cap V(P_1)$ und $q_2 \in V(Q) \cap V(P_2)$.

1. Fall: Es gelte $f_A(P_1), f_A(P_2) \in A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$.
O.B.d.A. kann $f_A(P_1) = a_4$, $f_A(P_2) = a_5$ und $\{f_B(P_1), f_B(P_2)\} \subseteq \{b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ angenommen werden. In diesem Fall existiert ein $(A \cup B)$-Kreis in G, der die Knotenpunkte aus $A \cup B \cup \{q_1, q_2\}$ in der Reihenfolge b_3, a_1, b_1, a_2, b_4, a_6, b_2, a_7, b_5, a_3, b_6, a_8, b_7, a_4, q_1, q_2, a_5, b_8, a_9, …, b_l, a_{l+1}, …, b_{k+1}, a_{k+2}, b_3 durchläuft. Man beachte, daß $a_4 = q_1$ oder $a_5 = q_2$ gelten kann.

Es folgt somit:

(*i*) *Es existiert kein Weg $Q \in \mathcal{Q}$, welcher zwei Wege $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ verbindet, so daß $f_A(P_1), f_A(P_2) \in A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ gilt.*

Im folgenden wird ebenfalls abkürzend nur die Durchlaufungsreihenfolge des resultierenden $(A \cup B)$-Kreises angegeben.

2. Fall: Es gelte $f_A(P_1) = a_1$ und $f_A(P_2) \in A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$.
O.B.d.A. kann $f_A(P_2) = a_4$ sowie $\{f_B(P_1), f_B(P_2)\} \subseteq \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ vorausgesetzt werden. Durchlaufungsreihenfolge: b_7, a_1, q_1, q_2, a_4, b_8, a_2, b_1, a_3, b_9, a_5, b_2, a_6, b_3, a_7, b_4, a_8, b_5, a_9, b_6, a_{10}, $\ldots$, b_l, a_{l+1}, $\ldots$, b_{k+1}, a_{k+2}, b_7.

3. Fall: Es gelte $f_A(P_1) = a_2$ und $f_A(P_2) \in A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$.
O.B.d.A. gelte $f_A(P_2) = a_4$ sowie $\{f_B(P_1), f_B(P_2)\} \subseteq \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$. Durchlaufungsreihenfolge: b_7, a_2, q_1, q_2, a_4, b_8, a_1, b_1, a_3, b_9, a_5, b_2, a_6, b_3, a_7, b_4, a_8, b_5, a_9, b_6, a_{10}, $\ldots$, b_l, a_{l+1}, $\ldots$, b_{k+1}, a_{k+2}, b_7.

4. Fall: Es gelte $f_A(P_1) = a_3$ und $f_A(P_2) \in A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$.
O.B.d.A. kann $f_A(P_2) = a_4$ sowie $\{f_B(P_1), f_B(P_2)\} \subseteq \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ angenommen werden. Durchlaufungsreihenfolge: b_7, a_3, q_1, q_2, a_4, b_8, a_1, b_1, a_2, b_9, a_5, b_2, a_6, b_3, a_7, b_4, a_8, b_5, a_9, b_6, a_{10}, $\ldots$, b_l, a_{l+1}, $\ldots$, b_{k+1}, a_{k+2}, b_7.

Es folgt:

(*ii*) *Es existiert kein Weg $Q \in \mathcal{Q}$, welcher zwei Wege $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ verbindet, so daß $f_A(P_1) \in \{a_1, a_2, a_3\}$ und $f_A(P_2) \in A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ gilt.*

Der Graph, welcher aus $S(H)$ durch Löschen der $k+1$ Knotenpunkte aus B entsteht, besitzt $k+2$ Komponenten, welche jeweils genau einen Knotenpunkt aus A enthalten. Weiterhin folgt aus (i) und (ii), daß in $G - B$ noch mindestens k Komponenten mit einem Knotenpunkt aus A existieren, im Widerspruch zu $\tau_A(G) > \frac{k+1}{k}$. □

Es folgt der Beweis des Theorems 3.7, wobei die Bezeichnungsweise aus dem Beweis des Theorems 3.4 übernommen wird.

Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$, so daß $|X| = \kappa(X) + 3$, $\kappa(X) \geq 8$, $ab \in E(G[X])$ und $\tau_X(G) > \frac{\kappa(X)+1}{\kappa(X)}$ gilt. Angenommen, der Graph G besitze keinen X-Kreis. Sei ferner $Z = X \setminus \{a\}$. Mit (π_1) bzw. (π_2) folgt $\kappa(Z) \geq \kappa(X) = |X| - 3 = |Z| - 2$ bzw. $\tau_Z(G) \geq \tau_X(G) > \frac{\kappa(X)+1}{\kappa(X)} > 1$ und somit mit Theorem 3.6 die Existenz eines Z-Kreises.

Seien φ eine beliebige Orientierung des Kreises C, $A = N_G(a)$, $B = V(C)$, $s = 1$ und $\mathcal{Q} = \{b\}$. Analog der Argumentation im Beweis des Theorems 3.4 folgt die Existenz eines $\{a\}$-$V(C)$-Fächers mit $|\mathcal{P}| = \kappa(X)$. Man beachte, daß $\mathcal{P}$ die Kante ab enthält. Unter allen Paaren $(C, \mathcal{P})$ sei $(C, \mathcal{P})$ so gewählt, daß $|V(\mathcal{P})|$ minimal ist. Diese Wahl des Paares $(C, \mathcal{P})$ findet im weiteren wiederholt Anwendung, ohne daß dies explizit erwähnt wird.

Sei $M = Z \cup T(\mathcal{P})$. Da der Graph G keinen X-Kreis besitzt, folgt $Z \cap T(\mathcal{P}) = \{b\}$ mit Theorem 3.4 und Lemma 3.2. Damit existieren zwei Knotenpunkte $z_1, z_2 \in Z \setminus \{b\}$ mit $z_2 = z_{1M}^{+}$. Seien $t_1 = z_{1M}^{-}$ und $t_2 = z_{2M}^{+}$.

Analog der Argumentation im Beweis des Theorems 3.4 folgt:

(*i*) *$|V((z, z_Z^+)) \cap T(\mathcal{P})| = 1$ für alle $z \in Z \setminus \{b_Z^-, b, z_1\}$ und $V((b_Z^-, b_Z^+)) \cap T(\mathcal{P}) = \{b\}$.*

(*ii*) *Sei $z \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$. Dann existiert kein $\{z\} - \{z'\}$-Weg Q mit $z' \in Z \setminus \{b, z\}$ und $V(Q) \cap (V(C) \cup V(\mathcal{P})) = \{z, z'\}$.*

(*iii*) *Sei $z \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$, dann existiert ein $\{z\}$-$(V(C) \cup V(\mathcal{P}))$-Fächer $\mathcal{R}(z)$ mit $|\mathcal{R}(z)| = \kappa(X) - 2$, wobei all diese Wege aus $\mathcal{R}(z)$ in $(T(\mathcal{P}) \cup V((z_1, z_2))) \setminus \{z_M^-, z_M^+\}$ enden.*

Man beachte, daß sich die Wegemenge $V(\mathcal{P})$ nicht ändert.

Wegen (*ii*) können sich zwei Wege $W \in \mathcal{R}(z)$ und $W' \in \mathcal{R}(z')$ mit $z, z' \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$ und $z \neq z'$ nur in einem Knotenpunkt aus $T(\mathcal{P})$ schneiden.

Sei $\dot{Z}$ die Menge aller Knotenpunkte $\dot{z} \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$ mit $V(\mathcal{R}(\dot{z})) \cap V((z_1, z_2)) \neq \emptyset$. Da der Graph G keinen X-Kreis besitzt, folgt mit (*i*), (*ii*), (*iii*) und Lemma 3.5 ($A = X \setminus \{b\}$ und $B = T(\mathcal{P})$) sukzessive:

(*iv*) *$\dot{Z} \neq \emptyset$.*

(*v*) *Für alle $\dot{z} \in \dot{Z}$ existiert genau ein Weg $W \in \mathcal{R}(\dot{z})$ mit $V(W) \cap V((z_1, z_2)) \neq \emptyset$.*

(*vi*) *Es existiert ein eindeutig bestimmter Knotenpunkt $c \in V((z_1, z_2))$, so daß $c \in V(W) \cap V((z_1, z_2))$ für alle $\dot{z} \in \dot{Z}$ und alle korrespondierenden $\{\dot{z}\}$-$V((z_1, z_2))$-Wege $W \in \mathcal{R}(\dot{z})$ gilt.*

(*vii*) *Sei $z \in Z \setminus \{b\}$. Dann existiert kein $\{z\} - \{z'\}$-Weg Q mit $z' \in Z \setminus \{b, z\}$ und $V(Q) \cap (V(C) \cup V(\mathcal{P})) = \{z, z'\}$.*

(*viii*) *Sei $z \in Z \setminus \{b\}$, dann existiert ein $\{z\}$-$(V(C) \cup V(\mathcal{P}))$-Fächer $\mathcal{R}(z)$ mit $|\mathcal{R}(z)| = \kappa(X) - 2$, wobei all diese Wege aus $\mathcal{R}(z)$ in $(T(\mathcal{P}) \cup \{c\}) \setminus \{z_M^-, z_M^+\}$ enden.*

(*ix*) *Seien $z \in Z \setminus \{b\}$ und $y_1, y_2 \in (T(\mathcal{P}) \cup \{c\}) \setminus \{z_{M \cup \{c\}}^-, z_{M \cup \{c\}}^+\}$ mit $y_1 \neq y_2$. Dann gilt $y_1 \in V(\mathcal{R}(z))$ oder $y_2 \in V(\mathcal{R}(z))$.*

Man beachte, daß sich die Wegemenge $V(\mathcal{P})$ wiederum nicht ändert.

Wegen (vii) können sich zwei Wege $W \in \mathcal{R}(z)$ und $W' \in \mathcal{R}(z')$ mit $z, z' \in Z \setminus \{b\}$ und $z \neq z'$ nur in einem Knotenpunkt aus $T(\mathcal{P})$ schneiden.

Sei H der Untergraph von G definiert durch die Vereinigung von C und allen Wegen aus $\mathcal{P}$ und aus $\mathcal{R}(z)$ für $z \in Z \setminus \{b\}$. Trivialerweise gilt $|N_H(x)| = \kappa(X)$ für alle $x \in X \setminus \{b\}$ und $3 \leq |N_H(y)| \leq \kappa(X) + 2$ für alle $y \in T(\mathcal{P}) \cup \{c\}$. Angenommen, in H existieren zwei Knotenpunkte aus $T(\mathcal{P}) \cup \{c\}$ mit Valenz 3, dann folgt $6 + (\kappa(X) - 1)(\kappa(X) + 2) \geq \sum_{y \in T(\mathcal{P}) \cup \{c\}} |N_H(y)| = \sum_{x \in X \setminus \{b\}} |N_H(x)| = \kappa(X)(\kappa(X) + 2)$, im Widerspruch zu $|\kappa(X)| \geq 8$. Mit Lemma 3.6 ($A = X \setminus \{b\}$ und $B = T(\mathcal{P}) \cup \{c\}$) folgt:

(x) *Für alle Knotenpunkte $y \in T(\mathcal{P})$ existiert mindestens ein Knotenpunkt $z \in Z \setminus \{b, y^-_{M \cup \{c\}}, y^+_{M \cup \{c\}}\}$, so daß $y \in V(W)$ für einen Weg $W \in \mathcal{R}(z)$ gilt.*

(xi) $|\dot{Z}| \geq 2$.

Im weiteren seien $\dot{z}_1, \dot{z}_2 \in \dot{Z}$ so gewählt, daß $c \in V((\dot{z}_2, \dot{z}_1))$ gilt. Für $x \in X \setminus \{b\}$ sei $H(x)$ die Komponente von $H - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})$, die den Knotenpunkt x enthält. Sei $\mathcal{W}$ die Menge aller $V(H)$-$V(H)$-Wege in $G - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})$, welche zwei verschiedene Komponenten $H(x)$ und $H(x')$ mit $x, x' \in X \setminus \{b\}$ verbinden. Mit (vii) und $(viii)$ folgt:

(xii) *Seien $z, z' \in Z \setminus \{b\}$ zwei verschiedene Knotenpunkte. Ist $Q \in \mathcal{W}$ ein Weg, der zwei Komponenten $H(z)$ und $H(z')$ in $G - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})$ verbindet mit $q \in V(H(z)) \cap V(Q)$ und $q' \in V(H(z')) \cap V(Q)$, dann gilt $q \in V((z^-_{M \cup \{c\}}, z^+_{M \cup \{c\}})) \setminus \{z\}$ und $q' \in V((z'^-_{M \cup \{c\}}, z'^+_{M \cup \{c\}})) \setminus \{z'\}$.*

Im weiteren sollen abkürzend die Abbildungen bzw. die in den Abbildungen hervorgehobenen X-Kreise den Widerspruch zur Annahme verdeutlichen, daß der Graph G (in jedem möglichen Fall) keinen X-Kreis besitzt.

Sei $z \in Z \setminus \{b\}$. Angenommen, es existiere ein Weg $Q \in \mathcal{W}$, der die Komponenten $H(a)$ und $H(z)$ in $G - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})$ verbindet. Sei $q \in V(H(z)) \cap V(Q)$. Mit Theorem 3.4 und Lemma 3.2 folgt $q \notin \mathcal{R}(z)$. O.B.d.A. kann $q \in V((z^-_M, z))$ im Fall $z \in Z \setminus \{z_1, z_2\}$ bzw. $z = z_1$ im Fall $z \in \{z_1, z_2\}$ angenommen werden.

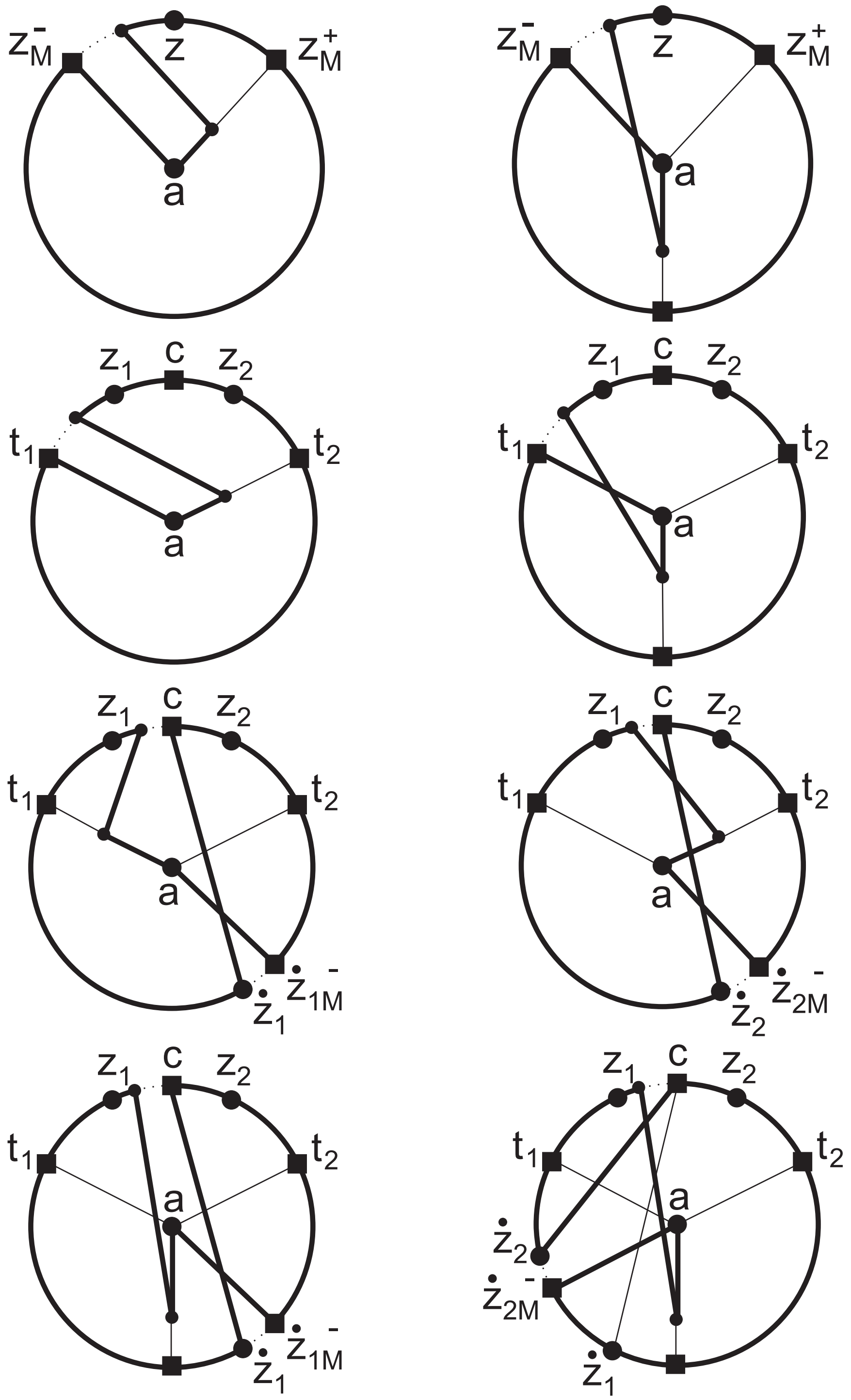

Abb. 3.3

Es gilt somit:

(*xiii*) *Sei* $z \in Z \setminus \{b\}$, *dann existiert kein Weg* $Q \in \mathcal{W}$, *der die beiden Komponenten* $H(a)$ *und* $H(z)$ *in* $G - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})$ *verbindet.*

Im weiteren seien $z, z^{'} \in Z \setminus \{b\}$ zwei verschiedene Knotenpunkte. Es wird jeweils angenommen, daß ein Weg $Q \in \mathcal{W}$ existiert, der die zwei Komponenten $H(z)$ und $H(z^{'})$ in $G - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})$ verbindet. Ferner seien $q \in V(H(z)) \cap V(Q)$ und $q^{'} \in V(H(z^{'})) \cap V(Q)$.

Es gelte $z \in Z \setminus \{b, z_1\}$, $z^{'} = z^{+}_{Z\setminus\{b\}}$ und $|V((q, q^{'})) \cap T(\mathcal{P})| = |V((q, q^{'})) \cap M| = 1$.

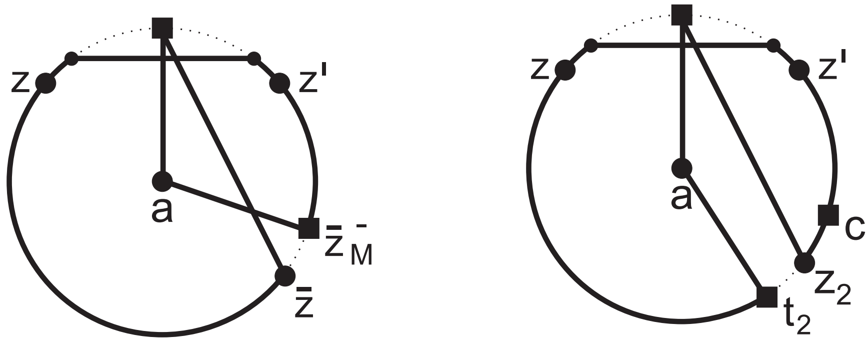

Abb. 3.4

Es folgt:

(xiv) *Seien $z \in Z \setminus \{b, z_1\}$ und $z^{'} = z^{+}_{Z\setminus\{b\}}$. Dann existiert kein Weg $Q \in \mathcal{W}$, der die zwei Komponenten $H(z)$ und $H(z^{'})$ in $G - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})$ verbindet, so daß $q \in V(H(z)) \cap V(Q)$, $q^{'} \in V(H(z^{'})) \cap V(Q)$ und $|V((q, q^{'})) \cap T(\mathcal{P})| = |V((q, q^{'})) \cap M| = 1$ gilt.*

Für $z \in \{z_1, z_2\}$ und $z^{'} \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$ kann o.B.d.A. $z = z_1$ angenommen werden.

Es gelte $z = z_1$, $z^{'} \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$, $q \in V((t_1, z_1))$ und $q^{'-}_{M} \in T(\mathcal{P})$.

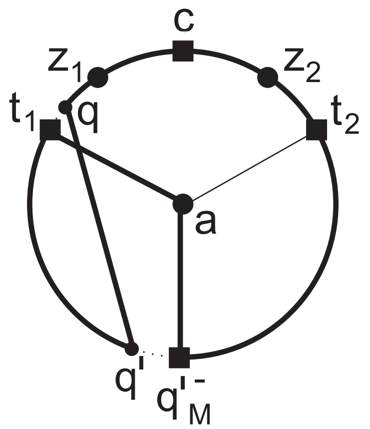

Abb. 3.5

Im Fall $z = z_1$, $z' \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$, $q \in V((t_1, z_1))$ und $q'^{+}_{M} \in T(\mathcal{P})$ folgt $t_1 \neq q'^{+}_{M}$ mit (xiv) bzw. $t_1 \in V(\mathcal{R}(z_2))$ oder $q'^{+}_{M} \in V(\mathcal{R}(z_2))$ mit (ix).

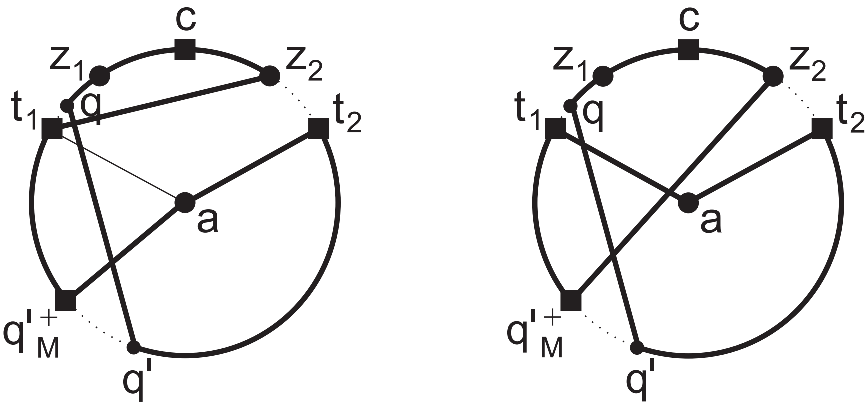

Abb. 3.6

Es gelte $z = z_1$, $z' \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$, $q \in V((z_1, c))$, $q'^{-}_{M} \in T(\mathcal{P})$ und $\dot{z}_2 \in V((q', t_1))$.

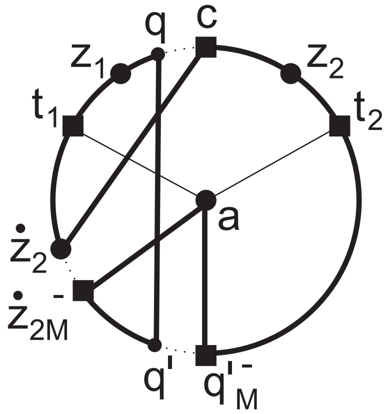

Abb. 3.7

Gilt $z = z_1$, $z' \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$, $q \in V((z_1, c))$, $q'^{-}_{M} \in T(\mathcal{P})$ und $\dot{z}_2 \notin V((q', t_1))$, so folgt $\dot{z}_1, \dot{z}_2 \in V((t_2, q'^{-}_{M}))$ und mit (ix) $\dot{z}^{-}_{1M} \in V(\mathcal{R}(z_1))$ oder $\dot{z}^{-}_{2M} \in V(\mathcal{R}(z_1))$.

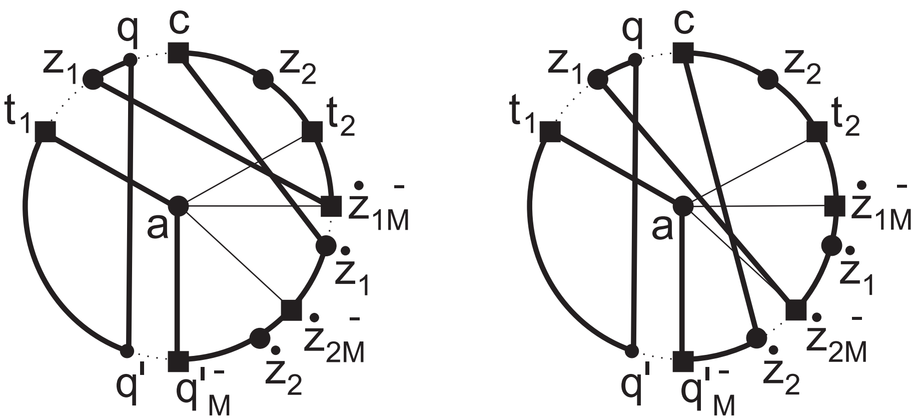

Abb. 3.8

Es gelte schließlich $z = z_1$, $z^{'} \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$, $q \in V((z_1, c))$ und $q^{'+}_M \in T(\mathcal{P})$. Analog dem vorhergehenden Fall folgt $\dot{z}_2 \in V((q^{'+}_M, t_1))$ oder $\dot{z}_1 \in V((t_2, q^{'}))$.

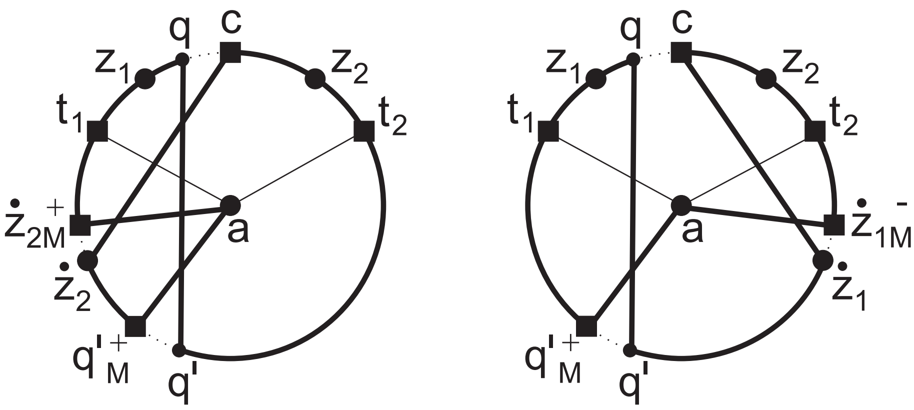

Abb. 3.9

Somit gilt:

(xv) *Seien $z \in \{z_1, z_2\}$ und $z^{'} \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$. Dann existiert kein Weg $Q \in \mathcal{W}$, der die zwei Komponenten $H(z)$ und $H(z^{'})$ in $G - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})$ verbindet.*

Für $z, z^{'} \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$ kann o.B.d.A. $c \in V((z^{'}, z))$ und somit $c \in V((q^{'}, q))$ vorausgesetzt werden.

Im Fall $z, z^{'} \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$ und $|V((q, q^{'})) \cap T(\mathcal{P})| = |V((q, q^{'})) \cap (Z \setminus \{b\})|$ muß $q^+_M \in T(\mathcal{P})$ und $q^{'+}_M \in T(\mathcal{P})$ oder $q^-_M \in T(\mathcal{P})$ und $q^{'-}_M \in T(\mathcal{P})$ gelten.

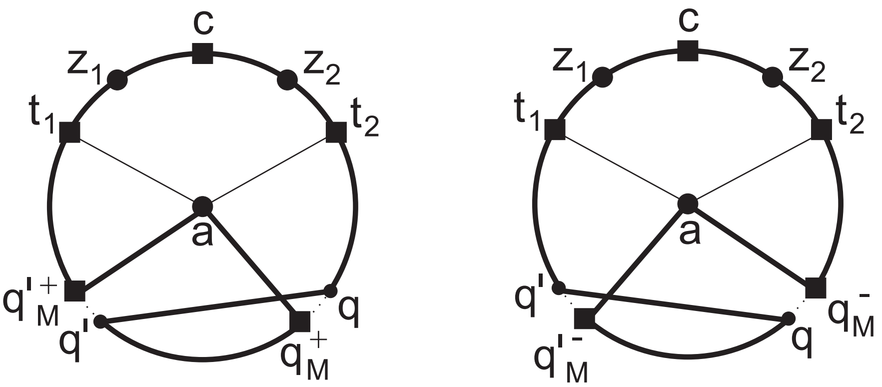

Abb. 3.10

Gilt $z, z^{'} \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$ und $|V((q, q^{'})) \cap T(\mathcal{P})| > |V((q, q^{'})) \cap (Z \setminus \{b\})|$, dann folgt $q^+_M, q^{'-}_M \in T(\mathcal{P})$, $q^+_M \neq q^{'-}_M$ mit (xiv) sowie $q^+_M \in V(\mathcal{R}(z_2))$ oder $q^{'-}_M \in V(\mathcal{R}(z_2))$ mit (ix).

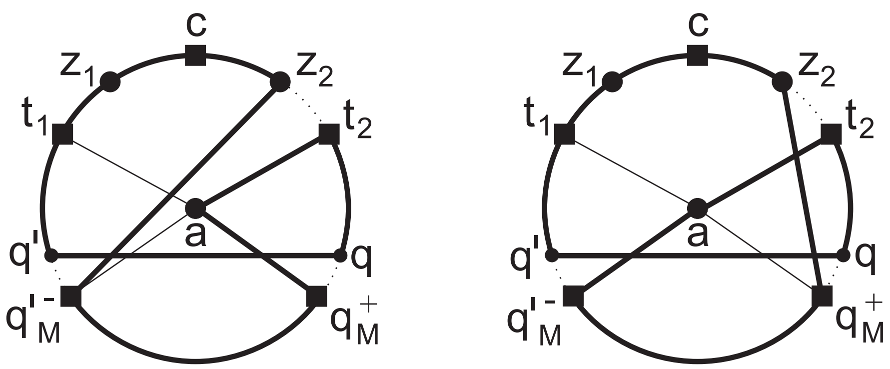

Abb. 3.11

Im Fall $z, z' \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$ und $|V((q, q')) \cap T(\mathcal{P})| < |V((q, q')) \cap (Z \setminus \{b\})|$ folgt $q_M^-, q'^+_M \in T(\mathcal{P})$. Gilt weiterhin $|V((q, q')) \cap T(\mathcal{P})| \geq 2$, so existiert ein Knotenpunkt $\bar{z} \in (Z \setminus \{b, z, z'\}) \cap V((q_M^+, q'^-_M))$. Mit (ix) folgt $q_M^- \in V(\mathcal{R}(\bar{z}))$ oder $q'^+_M \in V(\mathcal{R}(\bar{z}))$.

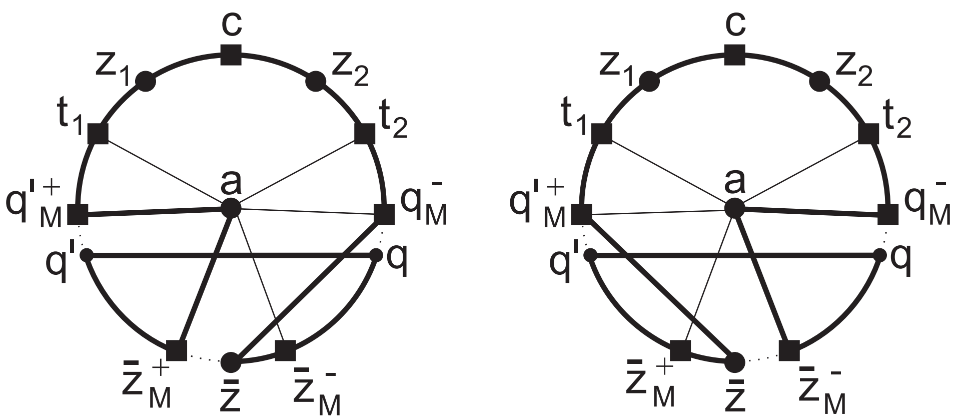

Abb. 3.12

Damit gilt:

(xvi) *Seien $z, z' \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$ mit $c \in V((z', z))$. Existiert ein Weg $Q \in \mathcal{W}$, der die zwei Komponenten $H(z)$ und $H(z')$ in $G - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})$ verbindet mit $q \in V(H(z)) \cap V(Q)$ und $q' \in V(H(z')) \cap V(Q)$, dann muß $|V((q, q')) \cap T(\mathcal{P})| = 1$ und $|V((q, q')) \cap (Z \setminus \{b\})| = 2$ gelten.*

Ein Weg $Q \in \mathcal{W}$, der zwei Komponenten $H(z)$ und $H(z')$ in $G - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})$ mit $z, z' \in Z \setminus \{b, z_1, z_2\}$, $c \in V((z', z))$, $q \in V(H(z)) \cap V(Q)$, $q' \in V(H(z')) \cap V(Q)$, $|V((q, q')) \cap T(\mathcal{P})| = 1$ und $|V((q, q')) \cap (Z \setminus \{b\})| = 2$ verbindet, sei als *schlechter-(z, z', q, q')-Weg* bezeichnet.

Angenommen, es existiere ein schlechter-(z, z', q, q')-Weg mit $q'^+_M \in V(\mathcal{R}(z))$ oder $q_M^- \in V(\mathcal{R}(z'))$.

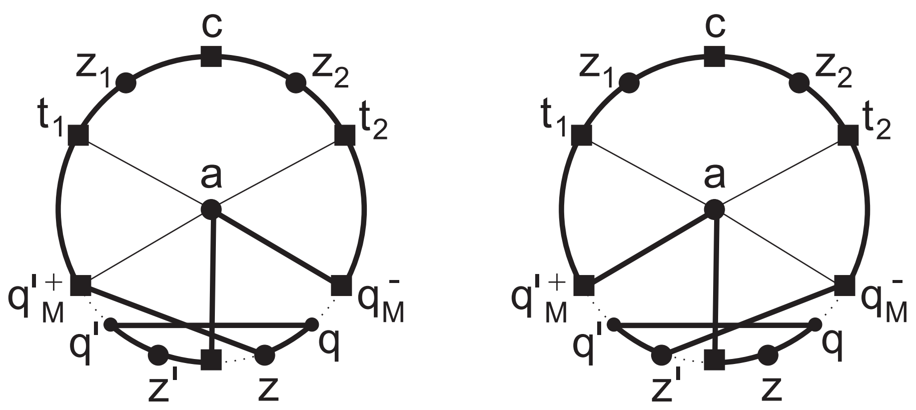

Abb. 3.13

Es folgt somit:

$(xvii)$ *Ist $Q \in \mathcal{W}$ ein schlechter-(z, z', q, q')-Weg, dann gilt $q'^{+}_{M} \notin V(\mathcal{R}(z))$ und $q^{-}_{M} \notin V(\mathcal{R}(z'))$.*

Im weiteren seien Q_1 ein schlechter- (x_1, x'_1, q_1, q'_1)-Weg und Q_2 ein schlechter-(x_2, x'_2, q_2, q'_2)-Weg mit $x_1 \neq x_2$ und $c \in V((x_2, x_1))$.

Mit $x_1 \neq x_2$ und (xvi) folgt $|V((q_1, q'_2)) \cap M| \geq 5$ und $V(Q_1) \cap V(Q_2) = \emptyset$.

Im Fall $|V((q_1, q'_2)) \cap M| = 5$ muß $x'_1 = x_2 = \bar{z}$ gelten. Weiterhin gilt $q^{-}_{1M} \in T(\mathcal{P})$ und $q'^{+}_{2M} \in T(\mathcal{P})$. Mit $(xvii)$ erhält man $q^{-}_{1M} \notin V(\mathcal{R}(\bar{z}))$ und $q'^{+}_{2M} \notin V(\mathcal{R}(\bar{z}))$, im Widerspruch zu (ix). Damit muß $|V((q_1, q'_2)) \cap M| > 5$ gelten. Es folgt:

$(xviii)$ *Seien Q_1 ein schlechter-(x_1, x'_1, q_1, q'_1)-Weg und Q_2 ein schlechter-(x_2, x'_2, q_2, q'_2)-Weg, so daß $x_1 \neq x_2$ und $c \in V((x_2, x_1))$ gilt. Dann folgt $V((q_1, q'_1)) \cap V((q_2, q'_2)) = \emptyset$.*

Somit gilt $\{q^{-}_{1M}, q'^{+}_{1M}, q^{-}_{2M}, q'^{+}_{2M}\} \subsetneq T(\mathcal{P})$.

Seien $y_1 \in V((q_1, q'_1)) \cap T(\mathcal{P})$ und $y_2 \in V((q_2, q'_2)) \cap T(\mathcal{P})$.

Gilt $q'^{+}_{1M} = q^{-}_{2M} = t$, dann folgt $y_2 \in V(\mathcal{R}(x_1))$ und $q'^{-}_{1M} \in V(\mathcal{R}(x'_2))$ mit $(xvii)$ und (ix).

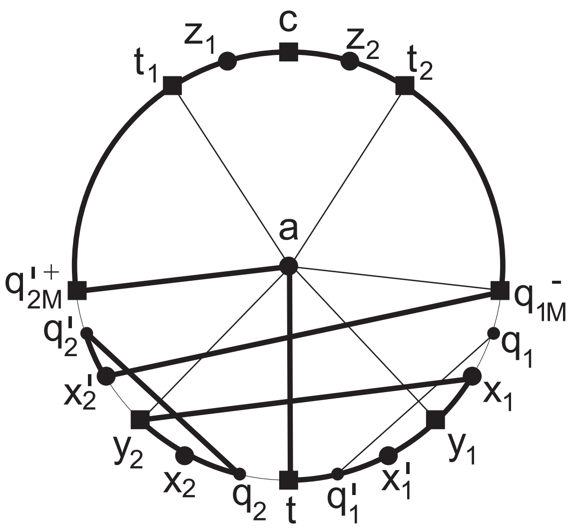

Abb. 3.14

Andererseits folgt im Fall $q_{1M}^{'+} \neq q_{2M}^{-}$ mit $(xvii)$ und (ix), daß $y_2 \in V(\mathcal{R}(x_1))$ und $q_{1M}^{'+} \in V(\mathcal{R}(x_2))$ gelten muß.

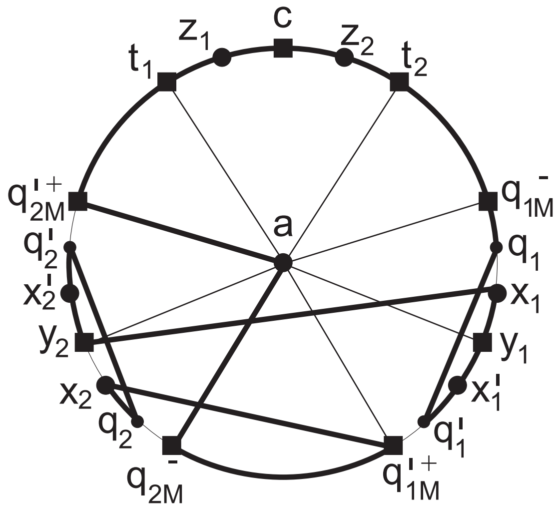

Abb. 3.15

Somit gilt:

(xix) *Existieren ein schlechter-*$(x_1, x_1^{'}, q_1, q_1^{'})$*-Weg und ein schlechter-*$(x_2, x_2^{'}, q_2, q_2^{'})$*-Weg, dann gilt* $x_1 = x_2$.

Mit (xii), $(xiii)$, (xiv), (xv), (xvi), $(xviii)$ und (xix) folgt abschließend $\omega_X(G - (T(\mathcal{P}) \cup \{c\})) \geq \kappa(X)$, im Widerspruch zur Voraussetzung $\tau_X(G) > \frac{\kappa(X)+1}{\kappa(X)}$. ■

Kapitel 4

Verwandte Problemstellungen

Das vorhergehende Kapitel beschäftigte sich mit der Fragestellung, unter welchen Zusammenhangs- und Toughnessbedingungen die Existenz eines Kreises durch vorgeschriebene Knotenpunkte eines Graphen garantiert werden kann. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird eine entsprechende Fragestellung für vorgeschriebene Knotenpunkte und vorgeschriebene Kanten eines Graphen untersucht. Alle bisher aufgeführten Problemstellungen lassen die Durchlaufungsreihenfolge der gesuchten Kreise, d.h. die Reihenfolge der vorgeschriebenen Knotenpunkte oder Kanten in einem solchen Kreis, unberücksichtigt. Fordert man nicht nur die Existenz eines Kreises durch vorgeschriebene Knotenpunkte und vorgeschriebene Kanten, sondern auch eine spezielle Durchlaufungsreihenfolge, so führt dieses zu einem verallgemeinerten k-ordered Problem, das im zweiten Abschnitt dieses Kapitels für chordale Graphen untersucht wird.

4.1 Kreise durch vorgeschriebene Knotenpunkte und Kanten eines Graphen

(In diesem Abschnitt des Kapitels 4 gelte für vollständige Graphen mit n Knotenpunkten $\kappa(K_n) = \infty$.)
Seien G ein Graph und $\mathcal{P}$ eine Menge von disjunkten Wegen P in G, so daß jeder Weg P mindestens eine Kante enthält. Ein Kreis des Graphen G, der alle Wege aus $\mathcal{P}$ enthält, heißt *$\mathcal{P}$-Kreis* in G.
Das folgende Theorem liefert eine Aussage über die Existenz eines $\mathcal{P}$-Kreises für den Fall, daß alle in $\mathcal{P}$ enthaltenen Wege (unabhängige) Kanten sind.

Theorem 4.1. *(HÄGGKVIST und THOMASSEN [35])*
Seien G ein Graph und $Y \subseteq E(G)$ eine Menge von unabhängigen Kanten mit $2 \leq |Y| \leq \kappa(V(Y)) - 1$, dann besitzt G einen Y-Kreis in G.

In [41] gibt KAWARABAYASHI einen Ausblick auf einen Beweis der sogenannten

LOVÁSZ-WOODALL-Vermutung (siehe [46, 59]).

Theorem 4.2. *(KAWARABAYASHI [41])*
Seien G ein Graph sowie $Y \subseteq E(G)$ eine Menge von unabhängigen Kanten mit $|Y| \leq \kappa(V(G))$ und $\kappa(V(G)) \geq 2$, dann besitzt G einen Y-Kreis in G, falls $\kappa(V(G))$ eine gerade Zahl oder $G - Y$ zusammenhängend ist.

Wie man leicht sieht, existiert unter den Voraussetzungen von Theorem 4.2 kein Y-Kreis in G, falls $\kappa(V(G))$ eine ungerade Zahl und $G - Y$ nicht zusammenhängend ist. Da der vollständige Beweis des Theorems 4.2 noch nicht publiziert wurde, kann die Frage, ob dessen Aussage auch unter einer lokalen Zusammenhangsvoraussetzung gilt, vom Autor nicht beantwortet werden. Die Aussage von Theorem 4.2 wird für die folgenden Betrachtungen nicht benutzt.
Ein *linear forest* ist ein kreisloser Graph mit einer Maximalvalenz von höchstens 2. Damit besteht ein linear forest nur aus disjunkten Wegen und isolierten Knotenpunkten. Seien G ein Graph und L ein linear forest mit $V(L) \subseteq V(G)$ und $E(L) \subseteq E(G)$. Ein Kreis von G, der alle Knotenpunkte von L und alle Kanten von L besitzt, heißt *L-Kreis* in G.
Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, $|X| \geq 1$ und $\mathcal{P}$ eine nichtleere Menge von disjunkten Wegen P in $G - X$, so daß jeder Weg P mindestens eine Kante enthält. Der linear forest $X \cup \mathcal{P}$ entstehe durch die Vereinigung der Elemente aus X und der Elemente aus $\mathcal{P}$ (d.h. mögliche Kanten zwischen Knotenpunkten aus X gehören nicht zu $X \cup \mathcal{P}$).
Für einen Weg P seien $e(P)$ die Anzahl der Kanten von P und $i(P)$ die Anzahl der inneren Knotenpunkte von P. Darauf aufbauend definiere man $e(\mathcal{P}) = \sum\limits_{P \in \mathcal{P}} e(P)$ und $i(\mathcal{P}) = \sum\limits_{P \in \mathcal{P}} i(P)$ für eine Wegemenge $\mathcal{P}$. Offensichtlich gilt $|\mathcal{P}| + i(\mathcal{P}) = e(\mathcal{P})$, wenn $\mathcal{P}$ keine trivialen Wege (isolierte Knotenpunkte) enthält. Im weiteren stehe $i_G(.)$ anstelle von $i(.)$, falls es wichtig ist, auf welchen Graphen G sich der Wert bezieht.

Theorem 4.3. *(HARANT [37])*
Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$ und $\mathcal{P}$ eine Menge von disjunkten Wegen P in $G - X$, so daß jeder Weg P mindestens eine Kante enthält und $|X| + e(\mathcal{P}) \leq \kappa(X \cup V(\mathcal{P})) \geq 2$ gilt. Existiert ein $\mathcal{P}$-Kreis in G, so existiert auch ein $(X \cup \mathcal{P})$-Kreis in G.

Der nachfolgend angegebene kurze Beweis des Theorems 4.4 basiert auf den Aussagen des Theorems 4.1 und des Theorems 4.3.

Theorem 4.4.
Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, $|X| \geq 1$ und $\mathcal{P}$ eine Menge von disjunkten

Wegen P in $G - X$, so daß jeder Weg P mindestens eine Kante enthält und $|X| + e(\mathcal{P}) \leq \kappa(X \cup V(\mathcal{P})) \geq 2$ gilt. Dann existiert ein $(X \cup \mathcal{P})$-Kreis in G.

Beweis Theorem 4.4:
Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, $|X| \geq 1$ und $\mathcal{P}$ eine nichtleere Menge von disjunkten Wegen P in $G - X$, so daß jeder Weg P mindestens eine Kante enthält und $|X| + e(\mathcal{P}) \leq \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P})) \geq 2$ gilt. Der Beweis erfolgt mittels Induktion nach $i_G(\mathcal{P})$. Mit Theorem 4.1 und Theorem 4.3 folgt die Aussage für $i_G(\mathcal{P}) = 0$ wegen $|\mathcal{P}| < |X| + |\mathcal{P}| \leq \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P})) \leq \kappa_G(V(\mathcal{P}))$. Somit kann $i_G(\mathcal{P}) \geq 1$ angenommen werden. Seien a ein innerer Knotenpunkt eines Weges $P \in \mathcal{P}$ sowie die Knotenpunkte b und c seine Nachbarn in P. Der Graph G', der Weg P' und die Wegemenge $\mathcal{P}'$ seien definiert durch $V(G') = V(G) \setminus \{a\}$, $E(G') = E(G[V(G) \setminus \{a\}]) \cup \{bc\}$, $V(P') = V(P) \setminus \{a\}$, $E(P') = (E(P) \setminus \{ab, ac\}) \cup \{bc\}$ und $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{P'\}$. Es folgt $\kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}')) \geq \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P})) - 1$, $i_{G'}(\mathcal{P}') = i_G(\mathcal{P}) - 1$ und $|X| + |\mathcal{P}'| = |X| + |\mathcal{P}| \leq \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P})) - i_G(\mathcal{P}) \leq \kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}')) - i_{G'}(\mathcal{P}')$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein $(X \cup \mathcal{P}')$-Kreis C' in G' mit $bc \in E(C')$. Ersetzt man in C' die Kante bc durch den Weg bac, so erhält man einen $(X \cup \mathcal{P})$-Kreis in G. ∎

Das folgende Theorem 4.5 ist das Hauptresultat dieses Abschnittes.

Theorem 4.5. *(GERLACH und HARANT [28])*
Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, $|X| \geq 4$ und $\mathcal{P}$ eine nichtleere Menge von disjunkten Wegen P in $G - X$, so daß $|X| + e(\mathcal{P}) = \kappa(X \cup V(\mathcal{P})) + 1$ gilt und jeder Weg P mindestens eine Kante enthält. Gilt weiterhin $\tau_X(G) > \frac{\kappa(X \cup V(\mathcal{P}))}{|X|}$, dann existiert ein $(X \cup \mathcal{P})$-Kreis in G.

Mit den Eigenschaften (π_1) und (π_2) und der Tatsache, daß die Existenz eines $(X \cup \mathcal{P})$-Kreises als Konsequenz aus Theorem 4.4 im Fall $\kappa(V(G)) < \kappa(X \cup V(\mathcal{P}))$ und $|X| + e(\mathcal{P}) = \kappa(V(G)) + 1$ folgt, erhält man globale Versionen der Theoreme 4.4 und 4.5, indem man $\kappa(X \cup V(\mathcal{P}))$ durch $\kappa(V(G)) = \kappa(G)$ und $\tau_X(G)$ durch $\tau_{V(G)}(G) = \tau(G)$ ersetzt.
Für $k \geq 4$ sei $G(k)$ der Graph, der aus dem vollständigen paaren Graphen $K_{A,B}$ mit $|A| = |B| = k$ durch Hinzufügen einer Kante e zwischen zwei Knotenpunkten aus B entsteht. Der Graph $G(k)$ ist ein Beispiel dafür, daß Theorem 4.5 ($X = A$, $\mathcal{P} = \{e\}$) nicht unter der Voraussetzung $\tau_X(G) = \frac{\kappa(X \cup V(\mathcal{P}))}{|X|}$ gilt.

4.1.1 Beweis Theorem 4.5

Seien A und B zwei disjunkte Mengen von Knotenpunkten. Sei ferner $\Gamma(A, B)$ die Menge aller Graphen H mit $V(H) = A \cup B$ und $\{ab |\ a \in A, b \in B\} \subseteq E(H)$, so daß die Knotenpunktmenge A unabhängig und $H[B]$ ein linear forest mit $E(H[B]) \neq \emptyset$ ist.

Lemma 4.1. *(GERLACH und HARANT [28])*
Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, $|X| \geq 2$ und Y eine nichtleere Menge von unabhängigen Kanten in $G - X$, so daß $|X| + |Y| = \kappa_G(X \cup V(Y)) + 1$ gilt. Dann besitzt G einen $(X \cup Y)$-Kreis oder es existiert eine Knotenpunktmenge $B \subseteq V(G) \setminus X$ mit $|B| = \kappa_G(X \cup V(Y))$, so daß G eine Unterteilung $S(H)$ eines Graphen $H \in \Gamma(X, B)$ als Untergraph enthält, alle Kanten von Y in $B-B$-Wegen von $S(H)$ enthalten sind und jeder $B-B$-Weg von $S(H)$ genau eine Kante aus Y enthält.

Beweis Lemma 4.1:
Der Beweis folgt der Vorgehensweise und der Bezeichnungsweise aus den Beweisen der Theoreme 3.4 und 3.7. Angenommen, der Graph G besitze keinen $(X \cup Y)$-Kreis. Seien $a \in X$ und $X' = X \setminus \{a\}$. Mit Theorem 4.4 existiert ein $(X' \cup Y)$-Kreis C in G. Seien φ eine beliebige Orientierung des Kreises C und $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{\kappa_G(X \cup V(Y))}\}$ ein $\{a\}$-$V(C)$-Fächer in G. Im Fall $\kappa_G(X \cup V(Y)) = 2$ folgt die Aussage von Lemma 4.1 unmittelbar mit $B = T(\mathcal{P})$. Damit gelte im weiteren $\kappa_G(X \cup V(Y)) \geq 3$. Sei $M = X' \cup V(Y)$. Da der Graph G keinen $(X \cup Y)$-Kreis besitzt, folgt:

- $X' \cap T(\mathcal{P}) = \emptyset$.
- *Gilt $x \in X'$ mit $x_M^+ \in X'$, dann folgt $|V([x, x_M^+]) \cap T(\mathcal{P})| = 1$.*
- *Gilt $x \in X'$ mit $x_M^+ \in V(Y)$, dann folgt $|V([x, x_M^+]) \cap T(\mathcal{P})| = 1$.*
- *Gilt $y \in V(Y)$ mit $y_M^+ \in X'$, dann folgt $|V([y, y_M^+]) \cap T(\mathcal{P})| = 1$.*
- *Gilt $y \in V(Y)$ mit $y_M^+ \in V(Y)$ und $yy_M^+ \notin Y$, dann folgt $|V([y, y_M^+]) \cap T(\mathcal{P})| = 1$.*
- *Für jede Kante $e \in Y$ existiert ein Knotenpunkt $z \in T(\mathcal{P})$ mit $\{e\} = E([z, z_{T(\mathcal{P})}^+]) \cap Y$ und $V([z, z_{T(\mathcal{P})}^+]) \cap X' = \emptyset$.*

Mittels analoger Argumentation wie in den entsprechenden vorhergehenden Beweisen erhält man:

(i) *Es existiert kein $\{x\}$-$\{x'\}$-Weg Q in G mit $x, x' \in X'$, $x \neq x'$ und $V(Q) \cap (V(C) \cup V(\mathcal{P})) = \{x, x'\}$.*

(ii) *Sei $x \in X'$, dann existiert ein $\{x\}$-$(V(C) \cup V(\mathcal{P}))$-Fächer $\mathcal{R}(x)$ mit $|\mathcal{R}(z)| = \kappa_G(X \cup V(Y)) - 2$, wobei all diese Wege aus $\mathcal{R}(z)$ in $T(\mathcal{P}) \setminus \{x_{T(\mathcal{P})}^-, x_{T(\mathcal{P})}^+\}$ enden.*

Wegen (i) können sich zwei Wege $\mathcal{R}(x)$ und $\mathcal{R}(x')$ mit $x, x' \in X'$ und $x \neq x'$ nur in einem Knotenpunkt aus $T(\mathcal{P})$ schneiden. Setzt man $B = T(\mathcal{P})$, so bildet die

Vereinigung des Kreises C mit allen Wegen $P \in \mathcal{P}$ und allen Wegen $\mathcal{R}(x)$ mit $x \in X'$ die gesuchte Unterteilung $S(H)$ eines Graphen $H \in \Gamma(X, B)$. $\square$

Es folgt der Beweis des Theorems 4.5. Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, $|X| \geq 4$ und $\mathcal{P}$ eine nichtleere Menge von disjunkten Wegen P in $G - X$, so daß jeder Weg P mindestens eine Kante enthält und $|X| + |\mathcal{P}| = \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P})) + 1 - i_G(\mathcal{P})$ sowie $\tau_G(X) > \frac{\kappa_G(X \cup V(\mathcal{P}))}{|X|}$ gilt. Der Beweis erfolgt wiederum mittels Induktion nach $i_G(\mathcal{P})$.

Es gelte $i_G(\mathcal{P}) = 0$. Angenommen, es existiere kein $(X \cup \mathcal{P})$-Kreis in G. Mit Lemma 4.1 folgt die Existenz einer Knotenpunktmenge $B \subseteq V(G) \setminus X$ mit $|B| = \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P}))$, so daß der Graph G eine Unterteilung $S(H)$ eines Graphen $H \in \Gamma(X, B)$ als Untergraph enthält, alle Kanten von $\mathcal{P}$ in B-B-Wegen von $S(H)$ enthalten sind und jeder B-B-Weg von $S(H)$ genau eine Kante aus $\mathcal{P}$ enthält. Sei H' der schlichte Graph, der aus H durch Kontraktion (d.h. Zusammenziehen einer Kante zu einem Knotenpunkt und Löschen von eventuell resultierenden Doppelkanten) aller Kanten zwischen Knotenpunkten aus B entsteht. Wie man leicht sieht, ist H' ein vollständiger paarer Graph mit Bipartitionen X und B', so daß $|B'| = |X| - 1$ gilt. Der Graph $S(H) - B$, der aus $S(H)$ durch Löschen der $\kappa_G(X \cup V(\mathcal{P}))$ Knotenpunkte von B entsteht, besitzt $|X|$ Komponenten, welche jeweils genau einen Knotenpunkt aus X enthalten. Da der Graph G keinen $(X \cup \mathcal{P})$-Kreis besitzt, zeigt eine einfache Fallunterscheidung, daß wegen $|X| \geq 4$ kein Weg in $G - B$ existiert, der zwei dieser Komponenten verbindet, im Widerspruch zu $\tau_G(X) > \frac{\kappa_G(X \cup V(\mathcal{P}))}{|X|}$.

Damit gelte $i_G(\mathcal{P}) \geq 1$. Seien wiederum a ein innerer Knotenpunkt eines Weges $P \in \mathcal{P}$ und die Knotenpunkte b und c seine Nachbarn in P. Ferner seien G', P' und $\mathcal{P}'$ wie im Beweis des Theorems 4.4 definiert. Es gilt $\kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}')) \geq \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P})) - 1$ und $i_{G'}(\mathcal{P}') = i_G(\mathcal{P}) - 1$.

Gilt $\kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}')) = \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P}))$, dann folgt $|X| + |\mathcal{P}'| = |X| + |\mathcal{P}| = \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P})) + 1 - i_G(\mathcal{P}) = \kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}')) - i_{G'}(\mathcal{P}')$ und mit Theorem 4.4 die Existenz eines $(X \cup \mathcal{P}')$-Kreises C' in G' mit $bc \in E(C')$.

Somit kann im weiteren $\kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}')) = \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P})) - 1$ angenommen werden. Wie man wiederum leicht sieht, gilt $|X| + |\mathcal{P}'| = |X| + |\mathcal{P}| = \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P})) + 1 - i_G(\mathcal{P}) = \kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}')) + 1 - i_{G'}(\mathcal{P}')$. Sei $S' \subseteq V(G')$ so gewählt, daß $\omega_X(G' - S') \geq 2$ und $\frac{|S'|}{\omega_X(G' - S')} = \tau_X(G')$ gilt. Mit $|S'| \geq \kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}') \geq \kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}') \frac{\omega_X(G' - S')}{|X|}$ folgt weiterhin $\tau_X(G') \geq \frac{\kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}'))}{|X|}$.

Gilt $\tau_X(G') = \frac{\kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}'))}{|X|}$, so folgt $|S'| = \kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}'))$ und $\omega_X(G' - S') = |X|$. Für $S = S' \cup \{a\}$ erhält man $|S| = \kappa_G(X \cup V(\mathcal{P}))$ und $\omega_X(G - S) = |X|$, im Widerspruch zu $\tau_G(X) > \frac{\kappa_G(X \cup V(\mathcal{P}))}{|X|}$.

Gilt $\tau_X(G') > \frac{\kappa_{G'}(X \cup V(\mathcal{P}')}{|X|}$, so folgt die Existenz eines $(X \cup \mathcal{P}')$-Kreises C' in G'

mit $bc \in E(C')$ wiederum nach Induktionsvoraussetzung.
In beiden Fällen ist der Kreis, der aus C' durch Ersetzung der Kante bc durch den Weg bac entsteht, ein $(X \cup \mathcal{P})$-Kreis in G. ■

4.2 Kreise durch vorgeschriebene Knotenpunkte und Kanten eines Graphen mit vorgeschriebener Durchlaufungsreihenfolge

(Im folgenden Abschnitt dieses Kapitels gelte für vollständige Graphen mit n Knotenpunkten $\kappa(K_n) = n - 1$.)
Nach Theorem 1.3 bzw. Theorem 3.1 ist jeder k-fach zusammenhängende Graph k-cyclable. Im Jahre 1997 wurde von NG und SCHULTZ ([50]) die k-ordered Eigenschaft eines Graphen eingeführt. Ein Graph G heißt *k-ordered* ($k \geq 2$), wenn für jede Injektion $f : \{1, 2, \ldots, k\} \rightarrow V(G)$ ein Kreis C existiert, der die k Knotenpunkte aus {f(1),f(2),...,f(k)} in der Reihenfolge $f(1), f(2), \ldots, f(k)$ durchläuft. Existiert ein solcher Kreis C mit $V(C) = V(G)$, so bezeichnet man G als *k-ordered hamiltonsch*. Natürlich ist die k-ordered Eigenschaft nur für $k \geq 4$ eine Verschärfung der k-cyclable Eigenschaft.
Ein Graph G heißt *k-linked*, wenn für jede Menge $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ von $2k$ Knotenpunkten aus G eine Menge $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ von k paarweise disjunkten Wegen in G existiert, so daß für $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ der Weg P_i die Knotenpunkte x_i und y_i verbindet.

Die folgenden Lemmata sind beispielsweise in [22] aufgeführt.

Lemma 4.2.
Ist G ein k-ordered Graph mit $3 \leq k \leq |V(G)|$, dann gilt $\kappa(G) \geq k - 1$.

Lemma 4.3.
Ist G ein k-linked Graph, dann gilt $\kappa(G) \geq 2k - 1$.

Lemma 4.4.
Jeder k-linked Graph ist k-ordered.

Unabhängig voneinander gelang es JUNG ([39]) bzw. LARMAN und MANI ([44]) im Jahre 1970 zu beweisen, daß für jedes k eine Funktion $f(k)$ existiert, so daß jeder $f(k)$-fach zusammenhängende Graph k-linked ist. Als obere Schranke konnte durch BOLLOBAS und THOMASSEN ([7]) $f(k) \leq 22k$ bewiesen werden. Diese Schranke wurde durch THOMAS und WOLLAN ([55]) auf $f(k) \leq 16k$ verbessert.

Theorem 4.6. *(KAWARABAYASHI, KOSTOCHKA und YU [42])*
Jeder Graph G mit $\kappa(G) \geq 12k$ ist k-linked.

Wie in [22] ausgeführt wird, sind die beiden folgenden Vermutungen bestmöglich.

Vermutung 3. *(FAUDREE [22])*
Sei $k \geq 3$. Jeder Graph G mit $\kappa(G) \geq 3k-2$ ist k-linked.

Vermutung 4. *(FAUDREE [22])*
Sei $k \geq 5$. Jeder Graph G mit $\kappa(G) \geq 2k-3$ ist k-ordered.

Das gewöhnliche k-ordered Konzept werde wie folgt verallgemeinert:
Seien G ein Graph und $f : \{1, 2, \ldots, k\} \rightarrow V(G) \cup E(G)$ eine Injektion mit $W(f) = \{f(1), f(2), \ldots, f(k)\}$, $V(f) = V(G) \cap W(f)$ und $E(f) = E(G) \cap W(f)$. Ein Knotenpunkt $x \in V(G)$ heißt *markiert durch die Kante e*, falls $e \in E(f)$ gilt und die Kante e mit x inzidiert. Die Injektion f ist *(G,k)-zulässig*, falls sie für jeden Knotenpunkt $x \in V(G)$ die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(i) *Für jeden Knotenpunkt $x \in V(f)$, der durch eine Kante e markiert ist, gilt $|f^{-1}(x) - f^{-1}(e)| = 1$ oder $|f^{-1}(x) - f^{-1}(e)| = k-1$.*

(ii) *Für jeden Knotenpunkt $x \notin V(f)$, der durch zwei verschiedene Kanten e und e' markiert ist, gilt $|f^{-1}(e) - f^{-1}(e')| = 1$ oder $|f^{-1}(e) - f^{-1}(e')| = k-1$.*

Sei f eine (G,k)-zulässige Injektion. Ein Kreis, der die Knotenpunkte und Kanten von $W(f)$ in der Reihenfolge $f(1), f(2), \ldots, f(k)$ durchläuft, wird als *f-Kreis* in G bezeichnet. Ein Graph G heißt *k-vertex-edge-ordered* ($k \geq 2$), falls für jede (G,k)-zulässige Injektion f ein f-Kreis in G existiert.

Theorem 4.7. *(BÖHME, GERLACH und STIEBITZ)*
Sei $k \geq 3$. Dann gilt:

(a) Jeder chordale Graph G mit $\kappa(G) \geq 2k-3$ ist k-vertex-edge-ordered.

(b) Ein chordaler Graph G mit mindestens $2k-2$ Knotenpunkten ist genau dann k-vertex-edge-ordered, wenn $\kappa(G) \geq 2k-3$ gilt.

Als Folgerung aus Theorem 4.7 ergibt sich:

Korollar 4.8. *(BÖHME, GERLACH und STIEBITZ)*
Sei $k \geq 3$. Jeder chordale Graph G mit $\kappa(G) \geq 2k-3$ ist k-ordered.

Damit ist die Vermutung 4 zumindest für chordale Graphen wahr.

Seien G ein Graph und f eine (G,k)-zulässige Injektion. Ferner sei G^* der Untergraph von G mit $V(G^*) = V(f) \cup V(E(f))$ und $E(G^*) = E(f)$. Natürlich ist G^*

ein linear forest. Wie man leicht sieht, wird in jeder Komponente K^* von G^*, die kein isolierter Knotenpunkt und keine isolierte Kante e^* mit $V(e^*) \cap V(f) = \emptyset$ ist, durch die Injektion f für alle Kanten $e \in E(K^*)$ ihre Durchlaufungsrichtung in einem f-Kreis festgelegt. Im folgenden werden spezielle f-Kreise betrachtet, in denen für alle isolierten Kanten e^* mit $V(e^*) \cap V(f) = \emptyset$ noch eine zusätzliche Durchlaufungsrichtung vorgeschrieben wird. Dazu seien $E^*(f)$ die Menge aller isolierten Kanten $e^* \in E(f)$ mit $V(e^*) \cap V(f) = \emptyset$ und ψ eine Funktion, die jeder Kante $e^* \in E^*(f)$ eine Richtung $\psi(e^*)$ zuordnet. Ein f-Kreis, der jede Kante $e^* \in E^*(f)$ in der Richtung $\psi(e^*)$ durchläuft, wird als *(f, ψ)-Kreis* in G bezeichnet. Ein Graph G heißt *$\vec{k}$-vertex-edge-ordered*, wenn er für jede (G, k)-zulässige Injektion f und jede Funktion ψ, die jeder Kante $e^* \in E^*(f)$ eine Richtung $\psi(e^*)$ zuordnet, einen (f, ψ)-Kreis besitzt.

Theorem 4.9. *(BÖHME, GERLACH und STIEBITZ)*
Sei $k \geq 2$. Für einen chordalen Graphen G mit mindestens $2k$ Knotenpunkten sind die folgenden drei Aussagen (a), (b) und (c) äquivalent:

(a) G ist $(2k-1)$-fach zusammenhängend.

(b) G ist k-linked.

(c) G ist $\vec{k}$-vertex-edge-ordered.

Die Gültigkeit des folgenden Lemmas ist unmittelbar einsichtig:

Lemma 4.5.
Es gelte $p, k \in \mathbb{N}$ und $2 \leq p \leq k$. Dann folgt:

(a) Jeder k-vertex-edge-ordered Graph ist p-vertex-edge-ordered.

(b) Jeder $\vec{k}$-vertex-edge-ordered Graph ist $\vec{p}$-vertex-edge-ordered.

Es sei bemerkt, daß in [10] eine ähnliche Problemstellung formuliert wird. Dabei werden Kreise durch einen linear forest mit vorgeschriebener Durchlaufungsreihenfolge der Komponenten aber ohne vorgeschriebene Durchlaufungsreihenfolge innerhalb der Komponenten untersucht.

4.2.1 Beweis Theorem 4.7

Sei G ein chordaler Graph G mit $\kappa(G) \geq 2k-3$ und $k \geq 3$. Mittels vollständiger Induktion nach $|V(G)|$ wird zunächst gezeigt, daß G k-vertex-edge-ordered ist. Gilt $|V(G)| = 2k-2$, so ist G vollständig und damit nichts zu beweisen. Somit gelte $|V(G)| \geq 2k-1$. Mit Lemma 2.1 folgt $Si(G) \neq \emptyset$. Seien $x \in Si(G)$ und

$G^{'} = G - \{x\}$. Es gilt $\kappa(G^{'}) \geq 2k-3$ und $|N_G(x)| \geq 2k-3$. Es genügt zu beweisen, daß für eine beliebige (G,k)-zulässige Injektion $f : \{1,2,\ldots,k\} \rightarrow V(G) \cup E(G)$ ein f-Kreis in G existiert. Gilt $W(f) \subseteq V(G[N_G(x) \cup \{x\}]) \cup E(G[N_G(x) \cup \{x\}])$, so folgt die Existenz eines f-Kreises unmittelbar. Somit kann

$$(\bigstar) \quad W(f) \setminus (V(G[N_G(x) \cup \{x\}]) \cup E(G[N_G(x) \cup \{x\}])) \neq \emptyset$$

angenommen werden.

Ein Knotenpunkt $u \in V(G)$ heißt *frei*, wenn $u \notin V(f)$ gilt und u nicht durch eine Kante markiert ist. Sei $F(G)$ die Menge der freien Knotenpunkte von G.

Im folgenden wird für alle möglichen Fälle eine $(G^{'},k)$-zulässige Injektion $f^{'} : \{1,2,\ldots,k\} \rightarrow V(G^{'}) \cup E(G^{'})$ angegeben, für welche mit der Induktionsvoraussetzung die Existenz eines $f^{'}$-Kreises in $G^{'}$ und wegen ihrer speziellen Wahl die Existenz eines f-Kreises in G folgt.

1. Fall:
Gilt $x \in F(G)$, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung mit der speziellen Wahl $f^{'}(i) = f(i)$ für alle $i \in \{1,\ldots,k\}$ trivialerweise die Existenz eines f-Kreises in G.

In den weiteren Fällen wird abkürzend lediglich die spezielle Wahl der Injektion $f^{'}$ angegeben. Desweiteren findet (ohne es in jedem Fall explizit zu erwähnen) die Eigenschaft $|N_G(x)| \geq 2k-3$ Anwendung.

2. Fall:
Gilt $x \in V(f)$ und wird x durch zwei Kanten $xy, xz \in E(G)$ markiert, dann kann o.B.d.A. $f(1) = x$, $f(2) = xy$ und $f(k) = xz$ angenommen werden. Mit $|N_G(x) \setminus \{y,z\}| \geq 2k-5$ folgt die Existenz eines Knotenpunktes $a \in F(G) \cap N_G(x)$.

$$f^{'}(i) = \begin{cases} a & \text{für} \quad i = 1, \\ ay & \text{für} \quad i = 2, \\ f(i) & \text{für} \quad 3 \leq i \leq k-1 \text{ und} \\ az & \text{für} \quad i = k. \end{cases}$$

3. Fall:
Gilt $x \in V(f)$ und wird x durch genau eine Kante $xy \in E(G)$ markiert, so kann o.B.d.A. $f(1) = x$ und $f(2) = xy$ angenommen werden. Mit $(\bigstar)$ folgt $F(G) \cap N_G(x) \neq \emptyset$. Sei $a \in F(G) \cap N_G(x)$.

$$f^{'}(i) = \begin{cases} a & \text{für} \quad i = 1, \\ ay & \text{für} \quad i = 2 \text{ und} \\ f(i) & \text{für} \quad 3 \leq i \leq k. \end{cases}$$

4. Fall:
Gilt $x \in V(f)$ und wird x durch keine Kante markiert, dann kann o.B.d.A. $f(1) = x$ vorausgesetzt werden.
4.1: Es existieren zwei Knotenpunkte $a, a^{'} \in F(G) \cap N_G(x)$.

$$f^{'}(i) \quad = \quad \begin{cases} aa^{'} & \text{für} \quad i = 1 \text{ und} \\ f(i) & \text{für} \quad 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Gilt $|N_G(x) \cap F(G)| \leq 1$, dann folgt die Existenz eines Knotenpunktes $y \in N_G(x)$, so daß entweder $y = f(j)$ mit $j \in \{2, k\}$ gilt oder y nur durch $f(j)$ mit $j \in \{2, k\}$ markiert ist. O.B.d.A gelte $f(2) = y$ oder $f(2) = yz \in E(G^{'})$.

4.2: Es existiere genau ein Knotenpunkt $a \in F(G) \cap N_G(x)$.

$$f^{'}(i) \quad = \quad \begin{cases} ay & \text{für} \quad i = 1 \text{ und} \\ f(i) & \text{für} \quad 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

4.3: Es gelte $N_G(x) \cap F(G) = \emptyset$.
Mit ($\bigstar$) folgt $f(2) = yz$. Damit existiert ein Knotenpunkt $u \in N_G(x) \setminus \{y\}$, so daß entweder $f(k) = u$ gilt oder u nur durch $f(k)$ markiert ist. (Man betrachte die Unterfälle $z \in N_G(x)$ und $z \notin N_G(x)$.)

$$f^{'}(i) \quad = \quad \begin{cases} uy & \text{für} \quad i = 1 \text{ und} \\ f(i) & \text{für} \quad 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

5. Fall:
Gilt $x \notin V(f)$ und wird x durch zwei Kanten $xy, xz \in E(G)$ markiert, so kann o.B.d.A. $f(1) = xy$ und $f(k) = xz$ angenommen werden.
5.1 : Es existiere ein Knotenpunkt $a \in N_G(x) \cap F(G)$.

$$f^{'}(i) \quad = \quad \begin{cases} ay & \text{für} \quad i = 1, \\ f(i) & \text{für} \quad 2 \leq i \leq k-1 \text{ und} \\ az & \text{für} \quad i = k. \end{cases}$$

5.2 : Es gelte $N_G(x) \cap F(G) = \emptyset$.
Somit folgt $y \neq f(2)$ und $z \neq f(k-1)$.

$$f^{'}(i) \quad = \quad \begin{cases} y & \text{für} \quad i = 1, \\ f(i) & \text{für} \quad 2 \leq i \leq k-1 \text{ und} \\ yz & \text{für} \quad i = k. \end{cases}$$

6. Fall:
Gilt $x \notin V(f)$ und wird x durch genau eine Kante $xy \in E(G)$ markiert, dann kann o.B.d.A. $f(1) = xy$ vorausgesetzt werden.
6.1 : Es existiere ein Knotenpunkt $a \in N_G(x) \cap F(G)$.

$$f'(i) \quad = \quad \begin{cases} ay & \text{für} \quad i = 1 \text{ und} \\ f(i) & \text{für} \quad 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Gilt $N_G(x) \cap F(G) = \emptyset$, so folgt $y \neq f(2)$ mit ($\bigstar$).

6.2 : Es gelte $N_G(x) \cap F(G) = \emptyset$ und y werde nur durch $f(1)$ markiert.
Damit folgt die Existenz eines Knotenpunktes $z \in N_G(x) \setminus \{y\}$, so daß entweder $z = f(j)$ mit $j \in \{2, k\}$ gilt oder z nur durch $f(j)$ mit $j \in \{2, k\}$ markiert ist. O.B.d.A gelte $f(2) = z$ oder $f(2) = zu \in E(G')$.

$$f'(i) \quad = \quad \begin{cases} yz & \text{für} \quad i = 1 \text{ und} \\ f(i) & \text{für} \quad 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

6.3 : Es gelte $N_G(x) \cap F(G) = \emptyset$ und y werde durch $f(1)$ und $f(2)$ markiert.
Damit folgt die Existenz eines Knotenpunktes $z \in N_G(x)$, so daß entweder $z = f(k)$ gilt oder z nur durch $f(k)$ markiert ist.

$$f'(i) \quad = \quad \begin{cases} yz & \text{für} \quad i = 1 \text{ und} \\ f(i) & \text{für} \quad 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Somit ist jeder chordale Graph G mit $\kappa(G) \geq 2k - 3$ k-vertex-edge-ordered und (a) bewiesen.

Sei $k \geq 3$. Angenommen, es existiere ein chordaler k-vertex-edge-ordered Graph G mit mindestens $2k-2$ Knotenpunkten und $\kappa(G) \leq 2k-4$. Der Graph G besitzt somit einen minimum Trenner $S \subsetneq V(G)$ mit $|S| = s \leq 2k-4$. Seien G_1 und G_2 zwei Komponenten von $G-S$. Aus der Chordalität von G folgt die Vollständigkeit von $G[S]$ (siehe beispielsweise [15], 116-117). Ferner seien $V(S) = \{v_1, \ldots, v_s\}$, $p = \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$, $u_1 \in V(G_1)$, $e_{i+1} = v_{2i-1}v_{2i}$ für alle $i \in \{1, \ldots, p\}$, $e_{p+2} = v_{s-1}v_s$, $u_2 \in V(G_2)$ und die Injektion f definiert durch $f(1) = u_1$, $f(j) = e_j$ für alle $j \in \{2, \ldots, p+2\}$ und $f(p+3) = u_2$. Wie man leicht sieht, gilt $p + 3 \leq k$. Desweiteren existiert kein Kreis in G, der die Knotenpunkte und Kanten aus $W(f)$ in der Reihenfolge $f(1), f(2), \ldots, f(p+3)$ durchläuft, im Widerspruch zur Annahme, daß G k-vertex-edge-ordered ist (siehe Lemma 4.5). $\blacksquare$

4.2.2 Beweis Theorem 4.9

Der Beweis des Theorems 4.9 erfolgt in drei Schritten.

(i) *Jeder chordale Graph G mit $\kappa(G) \geq 2k-1$ ist k-linked.*

Beweis (i):
Der Beweis der Aussage (i) erfolgt mittels vollständiger Induktion nach $|V(G)|$. Sei G ein chordaler Graph mit $\kappa(G) = 2k-1$. Gilt $|V(G)| = 2k$, so ist G vollständig und damit k-linked. Somit kann $|V(G)| \geq 2k+1$ angenommen werden. Mit Lemma 2.1 folgt $Si(G) \neq \emptyset$. Seien $x \in Si(G)$ und $G^{'} = G - \{x\}$. Es gilt $|N_G(x)| \geq 2k-1$ und $\kappa(G^{'}) \geq 2k-1$. Sei $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subseteq V(G)$ eine Menge von $2k$ Knotenpunkten. Es genügt zu zeigen, daß k paarweise disjunkte Wege $P_1, P_2, \ldots, P_k$ in G existieren, so daß für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ der Weg P_i die Knotenpunkte x_i und y_i verbindet. Ist $G[M]$ vollständig bzw. gilt $x \notin M$, so ist trivialerweise bzw. nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf $G^{'}$) nichts zu beweisen. Damit sei $G[M]$ nicht vollständig und es gelte $x \in M$. O.B.d.A. kann $x = x_1$ angenommen werden. Da $|N_G(x)| \geq 2k-1$ gilt und $G[M]$ nicht vollständig ist, existiert ein Knotenpunkt $x^{'} \in N_G(x) \setminus M$. Man setze $x_1^{'} = x^{'}$, $y_1^{'} = y_1$, $x_i^{'} = x_i$ und $y_i^{'} = y_i$ für alle $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt die Existenz von k paarweise disjunkten Wegen $P_1^{'}, P_2^{'}, \ldots, P_k^{'}$ in $G^{'}$, so daß für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ der Weg $P_i^{'}$ die Knotenpunkte $x_i^{'}$ und $y_i^{'}$ verbindet. Die Aussage (i) folgt unmittelbar mit $P_1 = P_1^{'} \cup \{xx^{'}\}$ und $P_i = P_i^{'}$ für alle $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$. □

Seien $x \in V(G)$ und $\bar{G}$ der Graph, der aus G durch Hinzufügen eines neuen Knotenpunktes $\bar{x}$, der Kante $x\bar{x}$ und aller Kanten $\bar{x}y$ mit $y \in N_G(x)$ entsteht. Der Graph $\bar{G}$ entsteht aus G durch *Duplikation von* x und der neue Knotenpunkt $\bar{x}$ wird als *Duplikat von* x bezeichnet.

Lemma 4.6.
Seien G ein k-linked Graph, $x \in V(G)$ und $\bar{G}$ der Graph, der aus G durch Duplikation von x entsteht. Dann ist auch $\bar{G}$ k-linked.

Beweis Lemma 4.6:
Seien $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subseteq V(\bar{G})$ eine Menge von $2k$ Knotenpunkten und $U = N_{\bar{G}}(x) \backslash \{\bar{x}\} = N_{\bar{G}}(\bar{x}) \backslash \{x\}$. Es genügt zu zeigen, daß k paarweise disjunkte Wege $P_1, P_2, \ldots, P_k$ in $\bar{G}$ existieren, so daß für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ der Weg P_i die Knotenpunkte x_i und y_i verbindet. Gilt $x \notin M$ oder $\bar{x} \notin M$, so ist wegen der k-linked Eigenschaft von G nichts zu beweisen. Somit gelte $x \in M$, $\bar{x} \in M$ und o.B.d.A $\bar{x} = x_1$. Da mit Lemma 4.3 jeder k-linked Graph $(2k-1)$-fach zusammenhängend ist, folgt $|U| \geq 2k-1$ und somit die Existenz eines Knotenpunktes $a \in U \setminus M$. Man setze $x_1^{'} = a$, $y_1^{'} = y_1$, $x_i^{'} = x_i$ und $y_i^{'} = y_i$ für alle $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$. Da G k-linked ist, folgt die Existenz von k paarweise disjunkten

Wegen $P_1^{'}, P_2^{'}, \ldots, P_k^{'}$ in G, so daß für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ der Weg $P_i^{'}$ die Knotenpunkte $x_i^{'}$ und $y_i^{'}$ verbindet. Die Aussage des Lemma 4.6 folgt unmittelbar mit $P_1 = P_1^{'} \cup \{\bar{x}a\}$ und $P_i = P_i^{'}$ für alle $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$. $\square$

(ii) Jeder k-linked Graph ($k \geq 2$) ist $\vec{k}$-vertex-edge-ordered.

Beweis (ii):
Seien G ein k-linked Graph, f eine (G, k)-zulässige Injektion und G^* der Untergraph von G mit $V(G^*) = V(f) \cup V(E(f))$ und $E(G^*) = E(f)$. Ferner seien $E^*(f)$ die Menge aller isolierten Kanten $e \in E(f)$ mit $V(e) \cap V(f) = \emptyset$ und ψ eine Funktion, die jeder Kante $e^* \in E^*(f)$ eine Richtung $\psi(e^*)$ zuordnet. Es genügt zu beweisen, daß ein (f, ψ)-Kreis C in G existiert.
Wie bereits erwähnt, ist G^* ein linear forest. Seien $\mathcal{P}$ die Menge der isolierten Knotenpunkte von G^*, $\mathcal{W}$ die Menge der Komponenten von G^*, die keine trivialen Wege sind, $V(\mathcal{W})$ die Menge aller in $\mathcal{W}$ enthaltenen Knotenpunkte, V_i die Menge aller innerer Knotenpunkte der Wege in $\mathcal{W}$ und V_r die Menge aller Endpunkte der Wege in $\mathcal{W}$. Mit $|\mathcal{P}| + |V(\mathcal{W})| - |\mathcal{W}| \leq k$ und $|V(\mathcal{W})| - |\mathcal{W}| = |V_i| + \frac{|V_r|}{2}$ folgt $2|\mathcal{P}| + 2|V_i| + |V_r| \leq 2k$. Seien $k^{'} = |\mathcal{P}| + |V_i| + \frac{|V_r|}{2}$ und $l = |\mathcal{P}| + |\mathcal{W}| = |\mathcal{P}| + \frac{|V_r|}{2}$.
Durch die (G, k)-zulässige Injektion f ist bereits in einem möglichen f-Kreis die Durchlaufungsreihenfolge der l Komponenten von G^* eindeutig bestimmt. Seien diese l Komponenten $K_1,\ldots,K_l$ gemäß dieser Durchlaufungsreihenfolge numeriert.
Für jede Komponente $K \in \{K_1,\ldots,K_l\}$, die kein isolierter Knotenpunkt aus $\mathcal{P}$ und keine Kante $e \in E^*(f)$ ist, wird durch f bereits die Durchlaufungsreihenfolge der Elemente dieser Komponente und damit die Durchlaufungsrichtung innerhalb dieser Komponente festgelegt. Mit ψ wird zusätzlich die Durchlaufungsrichtung von allen Kanten $e \in E^*(f)$ vorgeschrieben. Jeder nicht triviale Weg K_i besitzt damit bezüglich der Durchlaufungsrichtung in einem möglichen (f, ψ)-Kreis einen zuerst zu durchlaufenden Endpunkt a_i und einen zuletzt zu durchlaufenden Endpunkt b_i.
Der Graph $\tilde{G}$, der aus G durch Duplikation aller Knotenpunkte aus $\mathcal{P}$ und aller Knotenpunkte der nicht trivialen Wege in G^* entsteht, ist mit Lemma 4.6 ebenfalls k-linked.
Für jede Komponente K_i von G^*, die aus einem isolierten Knotenpunkt z besteht, seien $\bar{z}$ sein Duplikat in $\tilde{G}$ sowie $a_i = z$ und $b_i = \bar{z}$. Desweiteren seien in $\tilde{G}$ für $i \in \{1, \ldots, l\}$ die Knotenpunkte x_i und y_i definiert durch $x_1 = b_l$, $y_1 = a_1$, $x_{j+1} = b_j$ und $y_{j+1} = a_{j+1}$ mit $j \in \{1, \ldots, l-1\}$.
Es gilt $|V_i| = k^{'} - l$. Seien $V_i = \{x_{l+1}, \ldots, x_{k'}\}$ und $\bar{V}_i = \{y_{l+1}, \ldots, y_{k'}\}$, so daß für $i \in \{l+1, \ldots, k^{'}\}$ der Knotenpunkt $y_i \in V(\tilde{G})$ das Duplikat von x_i ist. Da $\tilde{G}$ k-linked ist und $k^{'} \leq k$ gilt, existieren somit in $\tilde{G}$ $k^{'}$ paarweise disjunkte Wege $P_1, \ldots, P_{k'}$, so daß für $i \in \{1 \ldots, k^{'}\}$ der Weg P_i die Knotenpunkte x_i und y_i verbindet. Wie man leicht sieht, folgt die Existenz eines (f, ψ)-Kreises C in G unmittelbar. $\square$

(*iii*) *Sei G ein chordaler $\vec{k}$-vertex-edge-ordered Graph mit mindestens $2k$ Knotenpunkten. Dann gilt $\kappa(G) \geq 2k-1$.*

Beweis (*iii*):
Angenommen, es existiere ein chordaler $\vec{k}$-vertex-edge-ordered Graph G mit mindestens $2k$ Knotenpunkten und $\kappa(G) \leq 2k-2$. Der Graph G besitzt somit einen minimum Trenner $S \subsetneq V(G)$ mit $|S| = s \leq 2k-2$. Seien G_1 und G_2 zwei Komponenten von $G - S$. Aus der Chordalität von G folgt wiederum die Vollständigkeit von $G[S]$. Ferner seien $V(S) = \{v_1, \ldots, v_s\}$, $p = \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$, $u_1 \in V(G_1)$ mit $e_1 = u_1 v_1 \in E(G)$, $e_{i+1} = v_{2i} v_{2i+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, p\}$, $u_2 \in V(G_2)$ mit $e_{p+2} = v_s u_2 \in E(G)$ und die Injektion f definiert durch $f(j) = e_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, p+2\}$. Wie man leicht sieht, gilt $p + 2 \leq k$. Weiterhin existiert kein f-Kreis in G, der die Kante e_1 in der Richtung von u_1 nach v_1, die Kante e_{i+1} in der Richtung von v_{2i} nach v_{2i+1} für alle $i \in \{1, \ldots, p\}$ und die Kante e_{p+2} in der Richtung von v_s nach u_2 durchläuft, im Widerspruch zur Annahme, daß G $\vec{k}$-vertex-edge-ordered ist (siehe Lemma 4.5). $\square$

Die Aussage von Theorem 4.9 folgt nun unmittelbar mit (*i*), (*ii*) und (*iii*). $\blacksquare$

Kapitel 5

Zusammenfassung und abschließende Bemerkungen

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Fragestellung, unter welchen Zusammenhangs- und Toughnessvoraussetzungen die Existenz eines Kreises durch vorgeschriebene Elemente (Knotenpunkte, Kanten, Wege) eines endlichen, schlichten und ungerichteten Graphen gesichert werden kann.

In Kapitel 2 wird zunächst auf den Fall eingegangen, daß alle Knotenpunkte eines Graphen in dem gesuchten Kreis enthalten sein sollen. Ein solcher Kreis ist damit ein Hamiltonkreis des Graphen. Das von CHVÁTAL eingeführte Toughnesskonzept liefert als notwendige Bedingung für die Existenz eines Hamiltonkreises in einem Graphen, daß der Graph 1-tough ist. Die Vermutung von CHVÁTAL, daß eine positive Zahl t_0 existiert, so daß jeder t-toughe Graph mit $t \geq t_0$ einen Hamiltonkreis besitzt, ist bis heute offen.
Für die Klasse der planaren Graphen und die Klasse der chordalen Graphen wurde diese Vermutung jedoch bestätigt. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, unter welchen Toughnessvoraussetzungen die Existenz eines Hamiltonkreises in speziellen chordalen Graphen (k-trees) und in speziellen planaren Graphen (sep-chordale planare Graphen) gesichert werden kann.
Durch eine Verallgemeinerung einer Beweisidee von BÖHME, HARANT und TKÁČ gelingt es zunächst, einen neuen und kürzeren Beweis eines bekannten Resultates von BROERSMA, XIONG und YOSHIMOTO (siehe Theorem 2.7) über die Existenz eines Hamiltonkreises in k-trees zu formulieren. Desweiteren wird für $k \geq 4$ eine obere Schranke für den shortness exponenten der Klasse aller 1-toughen k-trees hergeleitet (siehe Theorem 2.8). Offen bleibt, ob für $k \geq 4$ nicht hamiltonsche k-trees mit einer Toughness größer als eins existieren.
Die Aussage des Theorems 2.7 ist für $k = 3$ äquivalent zu dem Resultat von BÖHME, HARANT und TKÁČ, daß jeder chordale planare Graph mit einer Toughness größer als eins einen Hamiltonkreis besitzt. Im letzen Abschnitt des Kapitels 2 wird ein Konstruktionsprinzip für sep-chordale Polyedergraphen be-

wiesen und damit das Resultat von BÖHME, HARANT und TKÁČ auf sep-chordale planare Graphen verallgemeinert (siehe Theorem 2.10).

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Fragestellung, unter welchen Zusammenhangs- und Toughnessvoraussetzungen sich die Existenz eines Kreises durch eine vorgeschriebene Knotenpunktmenge $X \subseteq V(G)$ in einem Graphen G garantieren läßt. Dabei wird speziell auf die Fälle $|X| = \kappa(X)+2$ und $|X| = \kappa(X)+3$ eingegangen. Unter Verwendung eines Resultates von KELMANS und LOMONOSOV bezüglich A-Separatoren gelingt es, eine Toughnessbedingung ($\tau_X(G) > 1$) herzuleiten, die auch für $|X| = \kappa(X)+2$ die Existenz eines X-Kreises sichert (siehe Theorem 3.6). Es sei bemerkt, daß die Unabhängigkeit von A in der Definition des A-Separators nicht zwingend notwendig ist, sondern nur der Einfachheit halber vorausgesetzt wird (siehe [45]). Für den Fall $|X| = \kappa(X) + 3$ und $E(G[X]) = \emptyset$ existieren jedoch Graphen, die weder einen X-Kreis noch einen A-Separator ($A \subseteq X$) besitzen (siehe [45]). Die Fragestellung, ob Theorem 3.9 bei entsprechender Definition des A-Separators auch für $|X| = \kappa(X) + 3$ und $E(G[X]) \neq \emptyset$ seine Gültigkeit behält, konnte nicht geklärt werden.
Für $|X| = \kappa(X)+3$ gelingt es nur unter der zusätzlichen Bedingung $E(G[X]) \neq \emptyset$ eine Toughnessbedingung ($\tau_X(G) > \frac{\kappa(X)+1}{\kappa(X)}$) zu verifizieren, die die Existenz eines X-Kreises impliziert (siehe Theorem 3.7).

In Kapitel 4 werden als Verallgemeinerung der im Kapitel 3 betrachteten Problemstellung hinreichende Zusammenhangs- und Toughnessvoraussetzungen für die Existenz eines Kreises durch vorgeschriebene Elemente eines Graphen untersucht. Werden nur unabhängige Kanten vorgeschrieben, so korrespondiert diese Problemstellung mit der LOVÁSZ-WOODALL-Vermutung, welche von KAWARABAYASHI bewiesen wurde. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Mischresultaten, d.h. mit dem Fall, daß sowohl Knotenpunkte als auch Kanten vorgeschrieben werden.
Im ersten Abschnitt von Kapitel 4 werden hinreichende Zusammenhangs- und Toughnessvoraussetzungen für die Existenz eines Kreises durch einen vorgeschriebenen linear forest, welcher aus einer Menge X von isolierten Knotenpunkten und einer Menge von disjunkten nicht trivialen Wegen $\mathcal{P}$ besteht, untersucht. Aus Resultaten von HÄGGKVIST und THOMASSEN bzw. HARANT folgt die Existenz eines $(X \cup \mathcal{P})$-Kreises in G ohne zusätzliche Toughnessbedingung für $|X| + e(\mathcal{P}) \leq \kappa(X \cup V(\mathcal{P})) \geq 2$ und $|X| \geq 1$ (siehe Theorem 4.4). Mit einer zusätzlichen Toughnessvoraussetzung ($\tau_X(G) > \frac{\kappa(X \cup V(\mathcal{P}))}{|X|}$) kann die Existenz eines $(X \cup \mathcal{P})$-Kreises im Fall $|X| + e(\mathcal{P}) = \kappa(X \cup V(\mathcal{P})) + 1$ und $|X| \geq 4$ gesichert werden (siehe Theorem 4.5).

Im zweiten Abschnitt des Kapitels 4 werden Problemstellungen bezüglich der Existenz eines Kreises durch vorgeschriebene Knotenpunkte und vorgeschriebene

Kanten mit einer vorgeschriebenen Durchlaufungsreihenfolge untersucht. Dabei werden speziell chordale Graphen betrachtet. Es gelingt zu zeigen, daß jeder $(2k-3)$-fach zusammenhängende chordale Graph k-vertex-edge-ordered $(k \geq 3)$ und jeder $(2k-1)$-fach zusammenhängende chordale Graph $\vec{k}$-vertex-edge-ordered $(k \geq 2)$ ist (siehe Theorem 4.7 und Theorem 4.9). Als Folgerung erhält man, daß jeder $(2k-3)$-fach zusammenhängende chordale Graph k-ordered $(k \geq 3)$ ist, womit eine Vermutung von FAUDREE (siehe Vermutung 4) zumindest für chordale Graphen bestätigt wird (Korollar 4.8).

Algorithmische Aspekte wurden in der vorliegenden Arbeit nicht untersucht. Das liegt zum einen darin begründet, daß sowohl das Hamiltonkreis Problem ([24]) als auch das t-tough Problem ([2]) aus komplexitätstheoretischer Sicht schwere Probleme sind. Es sei jedoch erwähnt, daß der Beweis des Lemma 3.3 in [5] einen $\mathcal{O}(|V(G)|)$-Algorithmus liefert, der entweder die Wegemenge $\mathcal{R}$ für die gegebene Wegemenge $\mathcal{Q}$ liefert oder eine Knotenpunktmenge $S \subsetneq V(G)$ mit $|S| = s$ findet, die U und V trennt. Mit dem Beweis des Theorems 3.2 in [37] folgt damit:

Theorem 5.1. *(HARANT [37])*
Es existiert ein Polynomialzeitalgorithmus mit

- *EINGABE: Graph G, $X \subseteq V(G)$ und*
- *AUSGABE:*
  - *$S \subsetneq V(G)$ mit $|S| = |X| - 2$ und $\omega_X(G-S) \geq 2$ oder*
  - *$Y \subseteq V(G) \setminus \{X\}$ mit $|Y| = |X| - 1$ und eine Unterteilung des $K_{X,Y}$ als Untergraph von G oder*
  - *X-Kreis C in G.*

Es sei bemerkt, daß alle angeführten Beweise, die als Hilfsmittel lediglich Lemma 3.3 benutzen, somit auch entsprechende Polynomialzeitalgorithmen liefern. Aus der Herleitung des Theorems 3.3 ergibt sich beispielsweise:

Theorem 5.2. *(GERLACH und HARANT)*
Es existiert ein Polynomialzeitalgorithmus mit

- *EINGABE: Graph G, $X \subseteq V(G)$ und*
- *AUSGABE:*
  - *$S \subsetneq V(G)$ mit $|S| = |X| - 2$ und $\omega_X(G-S) \geq 2$ oder*
  - *$Y \subseteq V(G) \setminus \{X\}$ mit $|Y| = |X| - 1$ und $\omega_X(G-Y) = |X|$ oder*
  - *X-Kreis C in G.*

Kapitel 3 und Kapitel 4 der vorliegenden Arbeit beschäftigen sich, wie bereits erwähnt, mit der Fragestellung nach der Existenz eines Kreises durch einige vorgeschriebene Elemente eines Graphen. Problemstellungen, die nicht nur die Existenz, sondern auch die Länge eines solchen Kreises beinhalten, sind nicht Bestandteil dieser Arbeit. Diesbezüglich sei beispielsweise auf Resultate von GÖRING, HARANT, HEXEL und TUZA ([32]) bzw. HU, TIAN und WEI ([38]) verwiesen.

Für planare Graphen gelten die folgenden Theoreme.

Theorem 5.3. *(LOMONOSOV [45]), GÖRING und HARANT [30])*
Jeder Polyedergraph ist 5*-cyclable.*

Theorem 5.4. *(GODDARD [29])*
Jeder 4*-fach zusammenhängende maximal planare Graph ist* 4*-ordered.*

Wie in [45, 30] bzw. [29] ausgeführt wird, sind diese Resultate bestmöglich. Unbekannt ist, ob jeder 4-fach zusammenhängende maximal planare Graph auch 4-ordered hamiltonsch ist.

Sei G ein Graph. Ein Weg in G, der alle Knotenpunkte einer Knotenpunktmenge $X \subseteq V(G)$ enthält, wird X*-Weg* in G genannt. (Man beachte den Unterschied zur Definition eines H-Weges in [15].) Mit dem folgenden Lemma 5.1 lassen sich aus den aufgeführten Ergebnissen über Kreise durch vorgeschriebene Elemente eines Graphen ohne vorgeschriebene Durchlaufungsreihenfolge entsprechende Wege-Resultate herleiten.

Lemma 5.1. *(HARANT [37])*
Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ mit $\kappa(X) < \infty$. Der Graph G^* entstehe aus G durch Hinzufügen eines neuen Knotenpunktes x^* und aller Kanten x^*x mit $x \in V(G)$. Dann gilt $\kappa_G(X) + 1 = \kappa_{G^*}(X) = \kappa_{G^*}(X^*)$.

So gelang es HARANT beispielsweise zu beweisen:

Theorem 5.5. *(HARANT [37])*
Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ mit $\alpha(X) \leq \kappa(X) + 1 \geq 2$. Dann existiert ein X-Weg in G.

Diese Vorgehensweise soll im weiteren exemplarisch an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Theorem 5.6. *(GERLACH und HARANT)*
Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ mit $|X| = \kappa(X) + 2$ und $\kappa(X) \geq 2$. Gilt $\tau_X(G) > \frac{\kappa(X)}{\kappa(X)+2}$, dann existiert ein X-Weg in G.

Beweis Theorem 5.6:
Der Graph G^* entstehe aus G durch Hinzufügen eines neuen Knotenpunktes x^* und aller Kanten x^*x mit $x \in V(G)$. Mit Lemma 5.1 folgt $|X| = \kappa_G(X) + 2 = \kappa_{G^*}(X) + 1$ und $\kappa_{G^*}(X) \geq 3$. Angenommen, es gelte $\tau_X(G^*) < 1$. Sei $S^* \subseteq V(G^*)$ mit $\tau_X(G^*) = \frac{|S^*|}{\omega_X(G^*-S^*)} < 1$. Es folgt $|S^*| \leq \omega_X(G^* - S^*) - 1$ und $x^* \in S^*$. Sei $S = S^* \setminus \{x^*\}$. Trivialerweise gilt $\omega_X(G - S) = \omega_X(G^* - S^*) \leq |X|$ und somit $\tau_X(G) \leq \frac{|S|}{\omega_X(G-S)} = \frac{|S^*|-1}{\omega_X(G^*-S^*)} \leq \frac{\omega_X(G^*-S^*)-2}{\omega_X(G^*-S^*)} \leq \frac{|X|-2}{|X|} = \frac{\kappa_G(X)}{\kappa_G(X)+2}$, im Widerspruch zur Voraussetzung $\tau_X(G) > \frac{\kappa_G(X)}{\kappa_G(X)+2}$. Somit muß $\tau_X(G^*) \geq 1$ gelten. Mit Theorem 3.3 folgt die Existenz eines X-Kreises in G^* und damit die Existenz eines X-Weges in G. ■

Mit dieser geschilderten Vorgehensweise konnten für Wege durch vorgeschriebene Elemente eines Graphen mit vorgeschriebener Durchlaufungsreihenfolge keine Resultate aus den entsprechenden Kreisresultaten (zweiter Abschnitt des Kapitels 4) hergeleitet werden, da ähnliche Schlußweisen, wie sie beispielhaft im Beweis des Theorems 5.6 demonstriert wurden, nicht zum Erfolg führten.

Abschließend sei erwähnt, daß weitere Toughnesskonzepte existieren (siehe beispielsweise [14, 31, 40]). Die Beschränkung auf das ursprünglich Konzept nach CHVÁTAL sei damit begründet, daß dieses Konzept historisch gesehen am engsten mit der Hamiltonkreisproblematik verbunden ist.

Anhang A

Thesen

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Fragestellung, unter welchen Zusammenhangs- und Toughnessvoraussetzungen die Existenz eines Kreises durch vorgeschriebene Elemente (Knotenpunkte, Kanten, Wege) eines endlichen, schlichten und ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gesichert werden kann. Im folgenden sind die Hauptresultate der Arbeit aufgeführt, wobei wichtige Definitionen aufgeführt sind. Desweiteren wird die Numerierung der Theoreme aus der Arbeit übernommen.

Für einen Graphen G bezeichne $\omega(G)$ die Anzahl seiner Komponenten und $\kappa(G)$ seine *Zusammenhangszahl*.

Ein Kreis durch alle Knotenpunkte eines Graphen heißt *Hamiltonkreis*.

Ein zusammenhängender Graph G heißt *t-tough*, wenn $\omega(G - S) \leq \frac{|S|}{t}$ für jede Knotenpunktmenge $S \subsetneq V(G)$ mit $\omega(G - S) \geq 2$ gilt. Die *Toughness* $\tau(G)$ eines nicht vollständigen zusammenhängenden Graphen G ist die größte (rationale) Zahl t, so daß G t-tough ist. Ist G ein vollständiger Graph, so setzt man $\tau(G) = \infty$.

Die Länge eines längsten Kreises in einem Graphen G wird mit $circ(G)$ bezeichnet.

Der *shortness exponent* $\sigma(\Gamma)$ einer (unendlichen) Menge Γ von Graphen ist definiert durch:

$$\sigma(\Gamma) = \liminf_{G \in \Gamma} \left(\frac{\log(circ(G))}{\log(|V(G)|)} \right) \quad .$$

Gilt $\sigma(\Gamma) < 1$, so kann für einen Graphen $G \in \Gamma$ der Anteil der Knotenpunkte, die in einem längsten Kreis von G enthalten sind, bezogen auf die Gesamtanzahl der Knotenpunkte von G beliebig klein sein.

Ein Knotenpunkt $x \in V(G)$ eines Graphen G heißt *simplizialer Knotenpunkt* von G, wenn der von seinen Nachbarn in G induzierte Untergraph $G[N_G(x)]$ vollständig ist. Die Menge aller simplizialen Knotenpunkte eines Graphen G sei mit $Si(G)$ bezeichnet.

Eine lineare Anordnung $x_n x_{n-1} \cdots x_1$ der Knotenpunkte eines Graphen G heißt *perfekte Eliminationsanordnung* von G, wenn $x_n \in Si(H_n)$ mit $H_n = G$ und $x_i \in Si(H_i)$ mit $H_i = G - \{x_n, \ldots, x_{i+1}\}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ gilt.

Sei k eine positive natürliche Zahl. Ein Graph G mit mindestens k Knotenpunkten ist ein *k-tree*, wenn er eine perfekte Eliminationsanordnung $x_n x_{n-1} \cdots x_1$ besitzt, für welche die folgende Bedingung $(*)$ erfüllt ist:

$$(*) \qquad |N_{H_i}(x_i)| = k \textit{ für alle } i = k+1, \ldots, n \textit{ und } H_k \simeq K_k$$

Sei $k \geq 3$. Es ist bekannt, daß 1-toughe k-trees ohne Hamiltonkreis existieren. Das folgende Theorem zeigt, daß sogar der Anteil der Knotenpunkte, die in einem längsten Kreis eines 1-toughen k-trees G enthalten sind, bezogen auf die Gesamtanzahl der Knotenpunkte von G beliebig klein sein kann.

Theorem 2.8. *(GERLACH)*
Der shortness exponent der Klasse aller 1-toughen k-trees mit $k \geq 4$ ist höchstens $\frac{\log(3k-4)}{\log(3k-3)}$.

Ein Graph G heißt *chordal* bzw. *sep-chordal*, falls er keinen sehnenlosen Kreis einer Länge größer als drei bzw. falls er keinen sehnenlosen trennenden Kreis einer Länge größer als drei besitzt. Somit ist jeder chordale Graph auch sep-chordal. Es ist bekannt, daß jeder chordale planare Graph G mit mindestens drei Knotenpunkten und einer Toughness $\tau(G) > 1$ einen Hamiltonkreis besitzt. Theorem 2.10. verallgemeinert diese Aussage auf sep-chordale planare Graphen.

Theorem 2.10. *(GERLACH)*
Jeder sep-chordale planare Graph G mit mindestens drei Knotenpunkten und einer Toughness $\tau(G) > 1$ besitzt einen Hamiltonkreis.

Seien G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ eine Teilmenge seiner Knotenpunktmenge. Ein Kreis in G, der alle Knotenpunkte von X enthält, wird *X-Kreis* in G genannt.

Sei G ein Graph. Für eine Knotenpunktmenge $S \subsetneq V(G)$ bezeichne $\omega_X(G-S)$ die Anzahl der Komponenten des Graphen $G-S$, die jeweils mindestens einen Knotenpunkt aus X enthalten. Ist $G[X]$ kein vollständiger Untergraph von G, so existiert mindestens eine Knotenpunktmenge $S \subsetneq V(G)$ mit $\omega_X(G-S) \geq 2$.

In diesem Fall sei $\kappa(X)$ definiert als kleinste Kardinalität einer solchen Knotenpunktmenge S. Im Fall, daß $G[X]$ ein vollständiger Untergraph von G ist, setze man $\kappa(X) = \infty$.

Sei $t \in \mathbb{R}^+$. $X \subseteq V(G)$ heißt *t-tough in G*, falls $\omega_X(G - S) \leq \frac{|S|}{t}$ für jede Knotenpunktmenge $S \subsetneq V(G)$ mit $\omega_X(G - S) \geq 2$ gilt. Ist $G[X]$ kein vollständiger Untergraph von G, so sei $\tau_X(G)$ die größte (rationale) Zahl t, so daß X t-tough in G ist. Ist $G[X]$ vollständig, so setzt man $\tau_X(G) = \infty$.

Bekannterweise folgt die Existenz eines X-Kreises im Fall $|X| \leq \kappa(X)$ ohne zusätzliche Bedingung und im Fall $|X| = \kappa(X) + 1$ mit der zusätzlichen Voraussetzung $\tau_X(G) \geq 1$. Diesbezügliche Aussagen für $|X| = \kappa(X) + 2$ bzw. $|X| = \kappa(X) + 3$ liefern die folgenden Theoreme.

Theorem 3.5. *(GERLACH, GÖRING, HARANT und TKÁČ)*
Seien G ein Graph sowie $X \subseteq V(G)$ mit $|X| = \kappa(X) + 2$, $\kappa(X) \geq 3$ und $E(G[X]) \neq \emptyset$. Gilt $\tau_X(G) \geq 1$, dann existiert ein X-Kreis in G.

Theorem 3.6. *(GERLACH, GÖRING, HARANT und TKÁČ)*
Seien G ein Graph sowie $X \subseteq V(G)$ mit $|X| = \kappa(X) + 2$ und $\kappa(X) \geq 4$. Gilt $\tau_X(G) > 1$, dann existiert ein X-Kreis in G.

Theorem 3.7. *(GERLACH und HARANT)*
Seien G ein Graph sowie $X \subseteq V(G)$ mit $|X| = \kappa(X) + 3$, $\kappa(X) \geq 8$ und $E(G[X]) \neq \emptyset$. Gilt $\tau_X(G) > \frac{\kappa(X)+1}{\kappa(X)}$, dann existiert ein X-Kreis in G.

Für einen Weg P bezeichne $e(P)$ die Anzahl der Kanten von P. Darauf aufbauend sei $e(\mathcal{P}) = \sum\limits_{P \in \mathcal{P}} e(P)$ für eine Wegemenge $\mathcal{P}$ definiert.

Ein *linear forest* ist ein kreisloser Graph mit einer Maximalvalenz von höchstens zwei. Somit besteht ein linear forest nur aus disjunkten Wegen und isolierten Knotenpunkten.

Seien G ein Graph und L ein linear forest mit $V(L) \subseteq V(G)$ und $E(L) \subseteq E(G)$. Ein Kreis von G, der alle Knotenpunkte und alle Kanten von L enthält, heißt *L-Kreis* in G.

Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, $|X| \geq 1$ und $\mathcal{P}$ eine nichtleere Menge von disjunkten Wegen P in $G - X$, so daß jeder Weg P mindestens eine Kante enthält. Der Graph $X \cup \mathcal{P}$ entstehe durch die Vereinigung der Elemente aus X und der Elemente aus $\mathcal{P}$ (d.h. mögliche Kanten zwischen Knotenpunkten aus X gehören nicht zu $X \cup \mathcal{P}$). Durch Kombination zweier bekannter Resultate folgt für $|X| + e(\mathcal{P}) = \kappa(X \cup V(\mathcal{P}))$ die Existenz eines $(X \cup \mathcal{P})$-Kreises in G ohne zusätzliche Voraussetzung.

Theorem 4.5. *(GERLACH und HARANT)*
Seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, $|X| \geq 4$ und $\mathcal{P}$ eine nichtleere Menge von disjunkten Wegen P in $G - X$, so daß $|X| + e(\mathcal{P}) = \kappa(X \cup V(\mathcal{P})) + 1$ gilt und jeder Weg P mindestens eine Kante enthält. Gilt weiterhin $\tau_X(G) > \frac{\kappa(X \cup V(\mathcal{P}))}{|X|}$, dann existiert ein $(X \cup \mathcal{P})$-Kreis in G.

Sei $k \geq 1$. Ein Graph G heißt k-*linked*, wenn für jede Menge $\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k\}$ von $2k$ Knotenpunkten aus G eine Menge $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ von k disjunkten Wegen in G existiert, so daß für $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ der Weg P_i die Knotenpunkte x_i und y_i verbindet.

Sei $k \geq 2$. Ein Graph G heißt k-*ordered*, wenn für jede Injektion $f : \{1, 2, \ldots, k\} \rightarrow V(G)$ ein Kreis C existiert, der die k Knotenpunkte aus {f(1),f(2),...,f(k)} in der Reihenfolge $f(1), f(2), \ldots, f(k)$ durchläuft.

Diese k-ordered Eigenschaft eines Graphen wird im folgenden verallgemeinert. Die diesbezüglich in der Arbeit enthaltenen Resultate beziehen sich somit auf neue Problemstellungen.

Seien G ein Graph und $f : \{1, 2, \ldots, k\} \rightarrow V(G) \cup E(G)$ eine Injektion mit $W(f) = \{f(1), f(2), \ldots, f(k)\}$, $V(f) = V(G) \cap W(f)$ und $E(f) = E(G) \cap W(f)$. Ein Knotenpunkt $x \in V(G)$ heißt *markiert durch die Kante* e, falls $e \in E(f)$ gilt und die Kante e mit x inzidiert. Die Injektion f ist (G, k)-*zulässig*, falls sie für jeden Knotenpunkt $x \in V(G)$ die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(*i*) *Für jeden Knotenpunkt $x \in V(f)$, der durch eine Kante e markiert ist, gilt $|f^{-1}(x) - f^{-1}(e)| = 1$ oder $|f^{-1}(x) - f^{-1}(e)| = k - 1$.*

(*ii*) *Für jeden Knotenpunkt $x \notin V(f)$, der durch zwei verschiedene Kanten e und $e^{'}$ markiert ist, gilt $|f^{-1}(e) - f^{-1}(e^{'})| = 1$ oder $|f^{-1}(e) - f^{-1}(e^{'})| = k - 1$.*

Sei f eine (G, k)-zulässige Injektion. Ein Kreis, der die Knotenpunkte und Kanten von $W(f)$ in der Reihenfolge $f(1), f(2), \ldots, f(k)$ durchläuft, wird als f-*Kreis* in G bezeichnet.

Sei $k \geq 2$. Ein Graph G heißt k-*vertex-edge-ordered*, falls für jede (G, k)-zulässige Injektion f ein f-Kreis existiert.

Theorem 4.7. *(BÖHME, GERLACH und STIEBITZ)*
Sei $k \geq 3$. Dann gilt:

(a) Jeder chordale Graph G mit $\kappa(G) \geq 2k-3$ ist k-vertex-edge-ordered.

(b) Ein chordaler Graph G mit mindestens $2k-2$ Knotenpunkten ist genau dann k-vertex-edge-ordered, wenn $\kappa(G) \geq 2k-3$ gilt.

Seien G ein Graph und f eine (G,k)-zulässige Injektion. Ferner sei G^* der Untergraph von G mit $V(G^*) = V(f) \cup V(E(f))$ und $E(G^*) = E(f)$. Natürlich ist G^* ein linear forest. Wie man leicht sieht, wird in jeder Komponente K^* von G^*, die kein isolierter Knotenpunkt und keine isolierte Kante e^* mit $V(e^*) \cap V(f) = \emptyset$ ist, durch die Injektion f für alle Kanten $e \in E(K^*)$ ihre Durchlaufungsrichtung in einem f-Kreis festgelegt.

Seien $E^*(f)$ die Menge aller isolierten Kanten $e^* \in E(f)$ mit $V(e^*) \cap V(f) = \emptyset$ und ψ eine Funktion, die jeder Kante $e^* \in E^*(f)$ eine Richtung $\psi(e^*)$ zuordnet. Ein f-Kreis, der jede Kante $e^* \in E^*(f)$ in der Richtung $\psi(e^*)$ durchläuft, wird als *(f,ψ)-Kreis* in G bezeichnet.

Ein Graph G heißt *$\vec{k}$-vertex-edge-ordered*, wenn er für jede (G,k)-zulässige Injektion f und jede Funktion ψ, die jeder Kante $e^* \in E^*(f)$ eine Richtung $\psi(e^*)$ zuordnet, einen (f,ψ)-Kreis besitzt.

Theorem 4.9. *(BÖHME, GERLACH und STIEBITZ)*
Sei $k \geq 2$. Für einen chordalen Graphen G mit mindestens $2k$ Knotenpunkten sind die folgenden drei Aussagen (a), (b) und (c) äquivalent:

(a) G ist $(2k-1)$-fach zusammenhängend.

(b) G ist k-linked.

(c) G ist $\vec{k}$-vertex-edge-ordered.

Anhang B

Veröffentlichungen des Autors

Bisherige Veröffentlichungen (Stand Juni 2004)

1. A note on domination in bipartite graphs, (mit J. Harant), *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 22 (2002), 229-231.

2. Toughness and hamiltonicity of a class of planar graphs, akzeptiert im *Sonderband Discrete Mathematics anläßlich des 10. Workshops „Cycles and Colourings“*, September 2001 Stara Lesna, Slowakei.

3. On cycles through specified vertices, (mit F. Göring, J. Harant und M. Tkáč), eingereicht bei *Discrete Mathematics*.

4. On cycles through a set of specified vertices, (mit J. Harant), *Studies of the University of Zilina (Slovakia), Mathematical Series*, Vol. 16 (2003) 35-46.

5. On a cycle through a specified linear forest of a graph, (mit J. Harant), eingereicht zum *Sonderband Discrete Mathematics anläßlich des 12. Workshops „Cycles and Colourings“*, September 2003 Stara Lesna, Slowakei.

Anhang C

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders danke ich Herrn Prof. Jochen Harant und Herrn Dr. Thomas Böhme. Ohne die Zusammenarbeit mit ihnen wäre diese Arbeit sicherlich nie entstanden. Desweiteren danke ich meinen Eltern und Verena für die Unterstützung, die sie mir in den vergangenen Jahren gewährt haben.

Literaturverzeichnis

[1] D.Bauer, H.J. Broersma, H.J. Veldman, Not every 2-tough graph is hamiltonian, *Discrete Appl. Math.* 99 (2000) 317-321.

[2] D.Bauer, L. Hakimi, E. Schmeichel, Recognizing tough graphs is NP-hard, *Discrete Appl. Math.* 28 (1990) 191-195.

[3] D. Bauer, G.Y. Katona, D. Kratsch, H.J. Veldman, Chordality and 2-factors in tough graphs, *Discrete Appl. Math.* 99 (2000) 323-329.

[4] J.C. Bermond, Hamiltonian graphs, L. Beinecke and R.J. Wilson, eds., Selected topics in graph theory, Academic, London and New York, 1978, pp. 127-167.

[5] T. Böhme, F. Göring, J. Harant, Menger's Theorem, *Journal of Graph Theory* 37 (2001) 35-36.

[6] T. Böhme, J. Harant, M. Tkáč, More than one tough chordal planar graphs are hamiltonian, *Journal of Graph Theory* 32 (1999) 405-410.

[7] B. Bollobas, C. Thomassen, Highly linked graphs, *Combinatorics* 16 (1996) 313-320.

[8] H. Broersma, H. Li, J. Li, F. Tian, H.J. Veldman, Cycles through subsets with large degree sums, *Discrete Mathematics* 171 (1997) 43-54.

[9] H.J. Broersma, L. Xiong, K. Yoshimoto, Toughness and hamiltonicity in k-trees, *Memorandum No. 1576* (University of Twente, March 2001).

[10] G. Chen, R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson, L. Lesniak, F. Pfender, Linear forests and ordered cycles, eingereicht bei *Discussiones Mathematicae Graph Theory.*

[11] G. Chen, M.S. Jacobson, A.E. Kézdy, J. Lehel, Tough enough chordal graphs are hamiltonian, *Networks* 31 (1998) 29-38.

[12] G. Chen, X. Yu, Long Cycles in 3-connected graphs, *J. Combin. Theory B* 86(2) (2002) 80-99.

[13] V. Chvátal, Tough graphs and hamiltonian circuits, *Discrete Mathematics* 5 (1973) 215-228.

[14] P.Dankelmann, T. Niessen, I. Schiermeyer, On Path-Tough Graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 7(4) 1994 571-584.

[15] R. Diestel, Graphentheorie (zweite Auflage), Springer, Heidelberg (2000).

[16] M.B. Dillencourt, An upper bound on the shortness exponent of 1-tough, maximal planar graphs, *Discrete Mathematics* 90 (1991) 93-97.

[17] G.A.Dirac, Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.* 3 (1952) 69-81.

[18] G.A.Dirac, In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen, *Math. Nachr.* 22 (1960) 61-85.

[19] G.A. Dirac, On rigid circuit graphs, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 25 (1961) 71-76.

[20] M.N. Ellingham, X. Zha, Toughness, trees, and k-walks, *Journal of Graph Theory* 33 (2000) 125-137.

[21] H. Enomoto, B. Jackson, P. Katarinis, A. Saito, Toughness and the existence of k-factors, *Journal of Graph Theory* 9 (1985) 87-95.

[22] R.J. Faudree, Survey on results on k-ordered graphs, *Discrete Mathematics* 229 (2001) 73-87.

[23] E. Flandrin, H. Li, A. Marczyk, M. Woźniak, A generalization of Dirac's theorem on cycles through k vertices in k-connected graphs, Preprint.

[24] M. Garey, D. Johnson, Computers and Intractability, Freeman, (1979).

[25] T. Gerlach, Toughness and hamiltonicity of a class of planar graphs, akzeptiert im *Sonderband Discrete Mathematics anläßlich des 10. Workshops „Cycles and Colourings"*, September 2001 Stara Lesna, Slowakei.

[26] T. Gerlach, F. Göring, J. Harant, M. Tkáč, On cycles through specified vertices, eingereicht bei *Discrete Mathematics.*

[27] T. Gerlach, J. Harant, On cycles through a set of specified vertices, *Studies of the University of Zilina (Slovakia), Mathematical Series*, Vol. 16 (2003) 35-46.

[28] T. Gerlach, J. Harant, On a cycle through a specified linear forest of a graph, eingereicht zum *Sonderband Discrete Mathematics anläßlich des 12. Workshops „Cycles and Colourings"*, September 2003 Stara Lesna, Slowakei.

[29] W. Goddard, 4-connected maximal planar graphs are 4-ordered, *Discrete Mathematics* 257 (2002) 405-410.

[30] F.Göring, J.Harant, On two-regular subgraphs forcing a cycle through specified vertices, eingereicht bei *Discrete Mathematics.*

[31] F.Göring, G. Y. Katona, Local topolgical Toughness, eingereicht bei *Discrete Mathematics.*

[32] F.Göring, J.Harant, E.Hexel, Zs.Tuza, On short cycles through prescribed vertices of a graph, eingereicht zum *Sonderband Discrete Mathematics anläßlich des 10. Workshops „Cycles and Colourings“*, September 2001 Stara Lesna, Slowakei.

[33] R.J. Gould, Advances on the Hamiltonian Problem - A survey, *Graphs and Combinatorics* 19 (2003) No.1 7-52.

[34] B. Grünbaum, H. Walther, Shortness exponents of families of graphs, *J. Combin. Theory* 14 (1973) 364-385.

[35] R. Häggkvist, C. Thomassen, Circuits through specified edges, *Discrete Mathematics* 41 (1982) 29-34.

[36] J. Harant, Toughness and nonhamiltonicity of polyhedral graphs, *Discrete Mathematics* 113 (1993) 249-253.

[37] J. Harant, On paths and cycles through specified vertices, akzeptiert im *Sonderband Discrete Mathematics anläßlich des 10. Workshops „Cycles and Colourings“*, September 2001 Stara Lesna, Slowakei.

[38] Z. Hu, F. Tian, B. Wei, Long cycles through a linear forest, *J. Combin. Theory Ser.* B 82 (2001) 67-80.

[39] M. A. Jung, Eine Verallgemeinerung des n-fachen Zusammenhangs für Graphen, *Math. Ann* 187 (1970) 95-103.

[40] G. Y. Katona, Toughness and edge-toughness, *Discrete Mathematics* 164 (1997) 187-196.

[41] K. Kawarabayashi, One or two disjoint Circuits cover independent edges, *J. Combin. Theory Ser.* B 84 (2002) 1-44.

[42] K. Kawarabayashi, A. Kostochka, G. Yu, On sufficient degree conditions for a graph to be k-linked, Preprint.

[43] A. K. Kelmans, M. V. Lomonosov, When m vertices in a k-connected graph cannot be walked round along a simple cycle, *Discrete Mathematics* 38 (1982) 317-322.

[44] D. G. Larman, P. Mani, On the existence of certain configurations within graphs and the 1-skeletons of polytopes, *Proc. London Math. Soc.* 20 (1970) 144-160.

[45] M. V. Lomonosov, Cycles Through Prescribed Elements in a Graph,*Paths, flows, and VLSI-layout* 215-234, Algorithms and Combinatorica **9**, Springer, Berlin, 1990

[46] L. Lovász, Problem 5, *Period. Math. Hungar.*(1974) 82.

[47] M.M. Matthews, D.P. Sumner, Hamiltonian results in $K_{1,3}$-free graphs, *Journal of Graph Theory* 1 (1984) 139-146.

[48] K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fundam. Math.* 10 (1927) 96-115.

[49] J.W. Moon, L. Moser, Simple paths on polyhedra, *Pacific J. Math.* 13 (1963) 629-631.

[50] L. Ng, M. Schultz, k-ordered hamiltonian graphs, *Journal of Graph Theory* 24 (1997) 45-57.

[51] T. Nishizeki, A 1-tough nonhamiltonian maximal planar graph, *Discrete Mathematics* 30 (1980) 305-307.

[52] P.J. Owens, Non-Hamiltonian maximal planar graphs with high toughness, *Tatra Mt. Math. Publ.* 18 (1999) 89-103.

[53] D.P. Sanders, On paths in planar graphs, *Journal of Graph Theory* 24 (1997) 341-345.

[54] M. Tkáč, On the shortness exponent of 1-tough, maximal planar graphs, *Discrete Mathematics* 154 (1996) 321-328.

[55] R. Thomas, P. Wollan, An Improved Linear Edge Bound For Graph Linkage, Preprint.

[56] W.T. Tutte, A theorem on planar graphs, *Trans Amer Math Soc* 82 (1956) 99-116.

[57] M.E. Watkins, D.M. Mesner, Cycles and connectivity in graphs, *Can. J. Math.* 19 (1967) 1319-1328.

[58] H. Whitney, A theorem on graphs, *Ann. Math.* 32 (1931) 378-390.

[59] D. R. Woodall, Circuits containing specified edges, *J. Combin. Theory Ser.* B 22 (1977) 274-278.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Ilmenau, den 13.01.2004

Tobias Gerlach