

**Die Maclaurin-Ellipsoide in  
post-Newtonscher Näherung beliebig  
hoher Ordnung**

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomischen  
Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Diplom-Physiker David Petroff  
geboren am 10. Dezember 1973 in Toronto, Kanada

Gutachter

1. Prof. Dr. Jürgen Ehlers
2. Prof. Dr. Reinhard Meinel
3. Prof. Dr. Gerhard Schäfer

Tag des Rigorosums: 6. Oktober 2003

Tag der öffentlichen Verteidigung: 27. November 2003

# Inhaltsverzeichnis

<b>Notation</b>	<b>iii</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2 Die erste post-Newton'sche Näherung</b>	<b>4</b>
2.1 Die erweiterte Poisson-Gleichung . . . . .	4
2.1.1 Die Gegenbauer-Polynome . . . . .	5
2.1.2 Entwicklung und Lösung der Differentialgleichung . . . . .	6
2.2 Die Feldgleichungen . . . . .	10
2.3 Zur iterativen Lösung der Feldgleichungen . . . . .	13
2.3.1 Der Entwicklungsparameter . . . . .	13
2.3.2 Der Newton'sche Schritt . . . . .	14
2.3.3 Die erste post-Newton'sche Ordnung . . . . .	16
<b>3 Weitere Ordnungen der post-Newton'schen Näherung</b>	<b>23</b>
3.1 Rekursionsverfahren zur Bestimmung der metrischen Funktionen . . . . .	23
3.1.1 Die neuen Koordinaten . . . . .	23
3.1.2 Darstellung der Feldgleichungen . . . . .	24
3.2 Eigenschaften des Verfahrens . . . . .	26
3.2.1 Vorkommende Ordnungen von $\epsilon$ . . . . .	26
3.2.2 Polynomialstruktur . . . . .	27
3.2.3 Spiegelsymmetrie . . . . .	28
3.3 Bestimmung der Oberfläche . . . . .	28
3.4 Das vollständige Rekursionsverfahren . . . . .	30
3.5 Singularitäten im Parameterraum . . . . .	30
3.5.1 Säkulare Instabilitäten der Maclaurin-Lösung . . . . .	31
3.5.2 Bestimmung der Singularitäten . . . . .	33

---

<b>4</b>	<b>Untersuchung der ersten vier post-Newtonschen Ordnungen</b>	<b>37</b>
4.1	Bezeichnung der Ordnungen . . . . .	37
4.2	Überprüfung der Näherung . . . . .	38
4.3	Die volle Lösung bis zur ersten Ordnung . . . . .	39
4.4	Physikalische Parameter . . . . .	46
4.4.1	Einführung der physikalischen Größen . . . . .	46
4.4.2	Entwicklung der physikalischen Größen . . . . .	48
4.5	Bedeutung der Singularitäten . . . . .	49
4.6	Gültigkeit der Näherung . . . . .	56
4.6.1	Das AKM-Verfahren . . . . .	56
4.6.2	Die Padé-Näherung . . . . .	56
4.6.3	Vergleich mit numerischen Ergebnissen . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>72</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Die Funktionen <math>g_l^m(\psi)</math> und <math>h_l^m(\psi)</math></b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>Physikalische Parameter in tabellierter Form</b>	<b>82</b>
	<b>Ehrenwörtliche Erklärung</b>	<b>89</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>90</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>91</b>

## Notation

Die wichtigsten Größen, die in dieser Arbeit verwendet werden, sind in folgender Tabelle aufgelistet. Die Seitenzahl verweist auf die Stelle, an der die jeweilige Größe eingeführt wird.

Die Gravitationskonstante  $G$  wird in dieser Arbeit gleich eins gesetzt. Bei den numerischen und graphischen Auswertung von Konfigurationen in Abschnitt 4.6.3 werden die Lichtgeschwindigkeit  $c$  und Massendichte  $Q$  ebenfalls gleich eins gesetzt.

Bezeichnung	Beschreibung	Seite
$\Delta_m$	erweiterter Laplace-Operator	4
$\Omega$	Winkelgeschwindigkeit	11
$\tilde{\Omega}$	dimensionslose Winkelgeschwindigkeit	11
$\Omega_N$	Winkelgeschwindigkeit der Newtonschen Lösung	16
$\beta$	Abkürzung: $\beta := \operatorname{arccot}(\xi_s)$	39
$\gamma$	Konstante (verwandt mit dem Oberflächenpotential $e^{V_0}$ und der polaren Rotverschiebung $Z_p$ )	12
$\varepsilon$	relativistischer Entwicklungsparameter	14
$\zeta$	Zylinder- bzw. Lewis-Papapetrou-Koordinate $\zeta = 0$ : Äquatorebene	4 bzw. 10
$\eta$	abgeplattete Ellipsoid-Koordinate $\eta = \text{Konstante}$ : Hyperbel	4
$\lambda$	metrische Funktion	10
$\mu$	metrische Funktion	10
$\nu$	metrische Funktion	10
$\xi$	abgeplattete Ellipsoid-Koordinate $\xi = \text{Konstante}$ : Ellipse	4
$\xi_{2l}^*$	singuläre Stellen der PN-Entwicklung und Bifurkationspunkte der Maclaurin-Lösung	32
$\xi_s$	Oberfläche des Maclaurin-Ellipsoids und Parameter der PN-Entwicklung, $\psi = \xi_s$ ist Oberfläche der relativistischen Konfiguration	4

Bezeichnung	Beschreibung	Seite
$\rho$	Zylinder- bzw. Lewis-Papapetrou-Koordinate $\rho = 0$ : Rotationsachse	4 bzw. 10
$\chi$	Abkürzung: $\chi := \operatorname{arccot}(\psi)$	39
$\psi$	oberflächenangepaßte Koordinate	23
$\omega$	metrische Funktion	10
$\tilde{\omega}$	dimensionslose metrische Funktion	11
$B_k$	Oberflächenfunktionen (Abweichung von der Ellipsoidgestalt)	23
$C_n^\lambda$	Gegenbauer-Polynom	5
$E_b$	Bindungsenergie	46
$G_{2l}$	Funktion deren Nullstellen Bifurkationspunkte sind	32
$J$	Drehimpuls	46
$K_l^m$	Normierungskonstanten	6
$M$	Gesamtmasse	47
$M_0$	Ruhemasse	46
$P$	Druck	10
$P_z$	Zentraldruck	47
$Q$	Massendichte	10
$S_{jk}$	Oberflächenkonstanten	23
$Z_p$	polare Rotverschiebung	47
$a_0$	Brennpunkt des Maclaurin-Ellipsoids und Parameter der PN-Entwicklung	4
$e^{V_0}$	Oberflächenpotential im mitrotierenden Bezugssystem, verwandt mit der polaren Rotverschiebung	47
$g_l^m$	„erste“ Lösung der Gegenbauer-Differentialgleichung	6
$h_l^m$	„zweite“ Lösung der Gegenbauer-Differentialgleichung	7
$k_m$	Abkürzung	9
$r_p/r_{\tilde{a}}$	Koordinatenradienverhältnis	47

# 1 Einführung

Alle 1,337 Sekunden, mit erstaunlicher Regelmäßigkeit, empfangen Bell und Hewish im Jahre 1967 ein starkes Radiosignal [15]. Im darauffolgenden Jahr erfolgte die Beobachtung von zwei Radioquellen mit Perioden von nur 89 bzw. 33 ms [17, 32]. Innerhalb kürzester Zeit konnten die Theoretiker Pacini und Gold [27, 28, 12] eindeutig zeigen, daß die Quellen dieser Radiosignale Neutronensterne sind<sup>1</sup>. Kein anderes Objekt könnte Pulse mit solch kurzer Periodendauer erzeugen und die Verlangsamung dieser Periode weist eindeutig auf die Rotation eines Neutronensternes hin, statt der anfangs ebenfalls in Betracht gezogenen Schwingung von Weißen Zwergen.

Spätestens seit der Entdeckung von Neutronensternen fällt der Allgemeinen Relativitätstheorie die Aufgabe zu, rotierende Körper mit extrem hoher Dichte zu modellieren. Hier hat man es mit einem globalen Problem zu tun, in das eine Zustandsgleichung im Inneren des Sternes und Anschlußbedingungen auf der Oberfläche eingehen. Ein idealisiertes Modell hatte Chandrasekhar schon 1967 in der ersten post-Newtonschen (PN-) Ordnung hergeleitet [7]. Bardeen lieferte drei Jahre später [6] mit seinen kompakten und eleganten Methoden weitere Ergebnisse dazu. Dieses Modell beschreibt einen Stern mit konstanter Dichte, der axialsymmetrisch und stationär ist. Seitdem hat sich vieles getan: Computerprogramme wurden entwickelt, die die vollen Einstein-Gleichungen behandeln können, Schwingungsmoden und andere zeitliche Abläufe wurden berechnet und von Seiten der Teilchenphysik kommen immer neue Beschreibungen für Materie unter extremen Bedingungen.

In dieser Arbeit nehmen wir noch einmal das idealisierte Modell unter die Lupe und setzen Axialsymmetrie, Stationarität und konstante Dichte voraus. Die naheliegende Frage lautet „Warum will man dieses idealisierte Modell weiterentwickeln, wenn inzwischen realistischere Modelle numerisch behandelt werden können?“ Die Antwort lautet, daß die Weiterentwicklung dieses Modells trotzdem lohnenswert ist, weil sie es ermöglicht: (1) die Gültigkeit und Konvergenz der PN-Näherung zu untersuchen, (2) hilfreiche, ergänzende Informationen für numerische Berechnungen zu liefern und (3) Vermutungen zu überprüfen, die Relevanz für die volle analytische Relativitätstheorie haben.

---

<sup>1</sup>Eine Übersicht über diese produktive Phase der Neutronensternphysik findet man in [18].

**Zur PN-Näherung:** Die post-Newtonsche Näherung ist das meist verwendete analytische Werkzeug in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Nichtsdestotrotz kann man nicht immer verlässliche Aussagen zu ihrer Gültigkeit oder ihrer Konvergenz treffen. Nur selten besteht die Möglichkeit, höhere Ordnungen einer PN-Näherung explizit zu berechnen. Das idealisierte Modell bietet diese seltene Gelegenheit.

Für eine starr rotierende Staubscheibe (ein Grenzfall des hier betrachteten Modells) bietet sich nicht nur diese Möglichkeit, sondern auch die eines Vergleichs [29] mit hochgenauen Werten, die aus der analytisch bekannten Lösung [22, 23, 24, 25] kommen. Hierfür zeigt es sich, daß die PN-Näherung in hoher Ordnung selbst stark relativistische Konfigurationen sehr genau erfassen kann. In dieser Arbeit soll für den allgemeineren Fall des idealisierten Modells ein ähnlicher Vergleich unternommen werden, um die Gültigkeitsbereiche und Konvergenz der PN-Näherung zu untersuchen. Als Vergleichswerte dienen dabei numerische Ergebnisse [1, 2] mit zwölfstelliger Genauigkeit.

**Zur Numerik:** Sternmodelle in der Relativitätstheorie werden aufgrund ihrer Komplexität mit wenigen Ausnahmen numerisch berechnet. Deshalb ist es wichtig überprüfen zu können, wie verlässlich die zugehörigen Programme sind. Die hier erarbeitete PN-Näherung liefert Kenntnisse über den Grenzfall steifer Zustandsgleichungen in der Nähe der Newtonschen Lösung, der als ein Prüfstein für die Numerik dienen kann.

Bei numerischer Arbeit kann man nicht immer zwischen der Physik und der Numerik unterscheiden. Wenn man beispielsweise mit einem numerischen Programm zur Berechnung von Neutronensternen Probleme hat, in ein bestimmtes Gebiet des gewählten Parameterraumes vorzudringen, ist nicht unbedingt klar, ob dies aus physikalischen oder numerischen Gründen passiert. Eine analytische Arbeit vermittelt ein besseres Verständnis für den Parameterraum und kann Licht auf solche Unklarheiten werfen.

**Zur analytischen Relativitätstheorie:** Es besteht in absehbarer Zeit keine Hoffnung, daß ein realistisches Sternmodell in voller Strenge berechnet werden kann. Bis auf wenige Ausnahmen basieren jegliche analytisch durchführbare Arbeiten auf vereinfachten Modellen und Näherungsmethoden. Mit Hilfe der PN-Näherung kann man interessante und physikalisch relevante Aussagen treffen und Vermutungen aufstellen. In erster Ordnung konnte Bardeen [6] beispielsweise Aussagen bezüglich eines Bifurkationspunktes treffen und Vermutungen für das weitere Verhalten äußern, welche<sup>2</sup> „durch das Fortsetzen der PN-Näherung für höhere

---

<sup>2</sup>„... should be tested... by going to higher order of the relativistic expansion.“

Ordnungen überprüft werden sollten.“ Dies soll in der vorliegenden Arbeit durchgeführt werden.

Mit dieser Zielsetzung wird in dieser Arbeit das Modell eines axialsymmetrischen, stationären Körpers mit konstanter Dichte in post-Newtonscher Näherung behandelt. In Kapitel 2 wird zunächst das nötige mathematische Werkzeug entwickelt und in erster Ordnung auf die Feldgleichungen angewandt. Am Ende von Kapitel 2 werden die Probleme, die sich in höheren Ordnungen ergeben, aufgezeigt. In Kapitel 3 wird ein Weg zur Bewältigung dieser Probleme erarbeitet und ein rekursives Verfahren zur Berechnung einer beliebigen Ordnung der PN-Näherung vorgestellt. Anschließend werden Eigenschaften der Lösung präsentiert und insbesondere eine Formel zur Bestimmung der vorhandenen singulären Stellen im Parameterraum hergeleitet. In Kapitel 4 wird die volle Lösung bis zur ersten PN-Ordnung explizit angegeben und die Richtigkeit der ersten vier PN-Ordnungen überprüft. Physikalische Parameter zur Beschreibung eines Sternes werden eingeführt und ihre PN-Näherung aufgestellt. Anschließend werden die singulären Stellen bezüglich ihrer physikalischen Bedeutung diskutiert. Am Ende dieser Arbeit untersuchen wir die Gültigkeit der PN-Näherung in vierter Ordnung durch einen Vergleich mit hochgenauen numerischen Werten.

## 2 Die erste post-Newtonsche Näherung

### 2.1 Die erweiterte Poisson-Gleichung

In diesem Abschnitt wollen wir das mathematische Werkzeug entwickeln, das wir dann benutzen werden, um die Einsteinschen Feldgleichungen zu behandeln. Da wir mittels der post-Newtonschen Näherung einen Körper beschreiben, dessen Newtonscher Grenzfall ein rotierendes Ellipsoid darstellt, werden wir die dimensionslosen abgeplatteten Ellipsoidkoordinaten  $\xi$  und  $\eta$  verwenden, um die vorkommenden Gleichungen und Funktionen so einfach wie möglich zu gestalten. Hier und im Folgenden berücksichtigen wir die vorausgesetzte Axialsymmetrie und arbeiten deshalb nur mit zwei räumlichen Koordinaten. In Abhängigkeit von den Zylinderkoordinaten  $\rho$  und  $\zeta$  sind die Ellipsoidkoordinaten durch

$$\rho = a_0 \sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \quad \text{und} \quad \zeta = a_0 \xi \eta, \quad \xi \geq 0, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (2.1)$$

definiert. Konstante  $\xi$ -Linien sind Ellipsen, und Linien mit konstantem  $\eta$  sind Hyperbeln, beide mit der Brennweite  $a_0$  (siehe Abb. 2.1).

Wir verwenden diese Koordinaten bei der Herleitung einer Erweiterung des Poisson-Integrals für die erweiterte Poisson-Gleichung  $\Delta_m \phi = F$ , die bei den Einsteinschen Feldgleichungen eine wesentliche Rolle spielen wird. Bringt man nämlich die Differentialgleichung für eine metrische Funktion  $\phi = \phi(\xi, \eta)$  in die Form

$$\Delta_m \phi = F,$$

so taucht auf der rechten Seite ein Quellterm  $F = F(\xi, \eta)$  auf, der nach einer geeigneten Entwicklung die Anwendung des erweiterten Poisson-Integrals zuläßt. In  $\xi$ - $\eta$ -Koordinaten lautet diese Gleichung mit der Notation  $\phi_{,\xi} := \partial\phi/\partial\xi$

$$[(1 + \xi^2)\phi_{,\xi\xi} + (1 - \eta^2)\phi_{,\eta\eta} + m\xi\phi_{,\xi} - m\eta\phi_{,\eta}] / a_0^2(\xi^2 + \eta^2) = F. \quad (2.2)$$

Der Operator  $\Delta_m$ , der durch Gl. (2.2) definiert ist, wird für  $m = 2$  zum Laplace-Operator.

Bei der Herleitung des erweiterten Poisson-Integrals für  $\phi$  zeigt sich, daß die Eigenfunktionen der zu lösenden (separierten) partiellen Differentialgleichung Gegenbauer-Polynome sind.

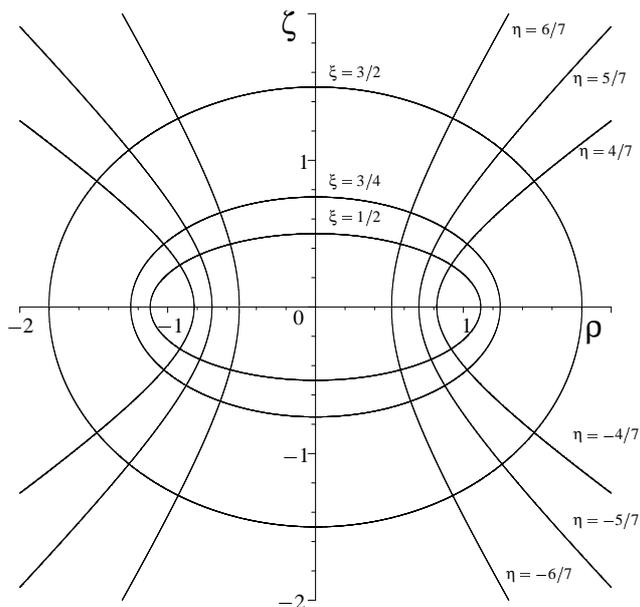


Abbildung 2.1: Eine Darstellung der abgeplatteten Ellipsoidkoordinaten für  $a_0 = 1$ . Konstante  $\xi$ -Linien sind Ellipsen, und konstante  $\eta$ -Linien sind Hyperbeln, jeweils mit den Brennpunkten  $a_0$  und  $-a_0$ .

Dabei muß  $\phi$  im Unendlichen ( $\xi \rightarrow \infty$ ) verschwinden und regulär sein, d. h., als Taylor-Reihe in  $1/\xi$  entwickelbar sein.

### 2.1.1 Die Gegenbauer-Polynome

Die Gegenbauer-Polynome  $C_n^\lambda(t)$ , auch ultrasphärische Polynome genannt, bilden einen vollständigen, orthogonalen Satz von Funktionen. Sie genügen der Differentialgleichung

$$(t^2 - 1)y_{,tt} + (2\lambda + 1)ty_{,t} - n(2\lambda + n)y = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \lambda > -1/2 \quad (2.3)$$

und sind gemäß

$$C_n^\lambda(1) = \binom{2\lambda + n - 1}{n} \lambda \neq 0$$

$$C_0^0(1) = 1, \quad C_n^0(1) = \frac{2}{n}$$

normiert. Die Gewichtsfunktion dieser Polynome ist  $(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$  und deren Orthogonalitätsrelationen lauten

$$K_l^m \int_{-1}^1 C_k^{\frac{m-1}{2}}(t) C_l^{\frac{m-1}{2}}(t) (1-t^2)^{\frac{m}{2}-1} dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l \end{cases} \quad (2.4)$$

mit

$$\begin{aligned} K_l^m &= \frac{l! \left(l + \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]^2}{\pi 2^{2-m} \Gamma(m-1+l)} \quad \text{für } m > 1 \\ K_l^1 &= \frac{l^2}{2\pi} \quad \text{für } l > 0 \quad \text{und} \\ K_0^1 &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß man für  $\lambda = 1/2$  die Legendre-Polynome erhält und für  $\lambda = 0$  bzw.  $\lambda = 1$  die Tschebysheff-Polynome erster bzw. zweiter Art.

### 2.1.2 Entwicklung und Lösung der Differentialgleichung

Ein Separationsansatz für  $\phi$  führt umgehend auf zwei Gegenbauer-Differentialgleichungen der Form Gl. (2.3). Dies legt nahe, das Potential  $\phi$  nach Gegenbauer-Polynomen zu entwickeln. Da wir von den Orthogonalitätsrelationen Gebrauch machen wollen, entwickeln wir nach der „Winkelkoordinate“  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{l=0}^{\infty} f_l^m(\xi) C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta) \quad \text{und} \\ a_0^2(\xi^2 + \eta^2)F &= \sum_{l=0}^{\infty} G_l^m(\xi) C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta), \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Setzt man die so entwickelten Funktionen in Gl. (2.2) ein, so bekommt man nach einem Koeffizientenvergleich die Differentialgleichung

$$(1 + \xi^2) f_{l,\xi\xi}^m + m\xi f_{l,\xi}^m - l(m+l-1) f_l^m = G_l^m. \quad (2.6)$$

Die dazu gehörende homogene Gleichung ist die Gegenbauer-Differentialgleichung (2.3) mit  $m = 2\lambda + 1$  und  $i\xi = t$ , für die das Gegenbauer-Polynom

$$g_l^m(\xi) := C_l^{\frac{m-1}{2}}(i\xi) \quad (2.7)$$

als Lösung angegeben werden kann. Eine zweite, linear unabhängige Lösung,<sup>1</sup> so gewählt, daß sie im Unendlichen verschwindet, ist dann

$$h_l^m(\xi) := g_l^m(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi'}{(g_l^m(\xi'))^2 E(\xi')}, \quad (l, m) \neq (0, 1)$$

mit

$$E(\xi) := \exp \left( \int_0^{\xi} \frac{m\xi'}{1 + (\xi')^2} d\xi' \right) = (1 + \xi^2)^{m/2}$$

und

$$h_0^1(\xi) := \operatorname{arsinh}(\xi).$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (2.6) lautet dementsprechend (siehe z.B. [16] S. 117)

$$\begin{aligned} f_l^m(\xi) &= h_l^m(\xi) \int_{c_l^m}^{\xi} (1 + (\xi')^2)^{\frac{m}{2}-1} G_l^m(\xi') g_l^m(\xi') d\xi' \\ &\quad - g_l^m(\xi) \int_{d_l^m}^{\xi} (1 + (\xi')^2)^{\frac{m}{2}-1} G_l^m(\xi') h_l^m(\xi') d\xi' \\ &=: h_l^m(\xi) I_l^m(\xi) - g_l^m(\xi) J_l^m(\xi), \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei die konstanten Integrationsgrenzen  $c_l^m$  und  $d_l^m$  noch zu bestimmen sind.<sup>2</sup>

*Bestimmung von  $c_l^m$ :* In Ellipsoidkoordinaten ist das Potential bei  $\xi = 0$  nur dann eindeutig, wenn  $\phi(0, \eta) = \phi(0, -\eta)$  gilt. Für ungerades  $l$  folgt daraus mit Gl. (2.5), daß  $f_l^m(0) = 0$  gilt, weil  $C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta)$  eine ungerade Funktion ist. Durch die Wahl  $c_l^m = 0$  wird  $f_l^m(0) = 0$  für ungerades  $l$  gewährleistet. Die Forderung  $\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=0^+} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=0^-}$  ist der Bedingung  $\frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\xi, \eta) \Big|_{\xi=0} =$

<sup>1</sup>Siehe Anhang A für eine Liste dieser Funktionen.

<sup>2</sup>Wegen der Symmetrie zwischen den Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  (die Transformation  $\xi' = i\eta$ ,  $\eta' = -i\xi$  führt die homogene Version von Gl. (2.2) in sich selbst über) kommt es, daß die allgemeine Lösung Gegenbauer-Polynome mit dem Argument  $i\xi$  enthält.

$-\frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\xi, -\eta)|_{\xi=0}$  gleichbedeutend. Also muß

$$\frac{d}{d\xi} f_l^m(\xi)|_{\xi=0} = 0 \quad \text{für gerades } l \quad (2.9)$$

gelten da  $C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta)$  nun eine gerade Funktion ist. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} f_l^m(\xi)|_{\xi=0} &=: \dot{f}_l^m(0) \\ &= \dot{h}_j^m(0) I_l^m(0) - \dot{g}_j^m(0) J_l^m(0) + h_j^m(0) \dot{I}_l^m(0) - g_j^m(0) \dot{J}_l^m(0) \\ &= \dot{h}_j^m(0) I_l^m(0) - \dot{g}_j^m(0) J_l^m(0) \\ &= \dot{h}_j^m(0) I_l^m(0), \end{aligned}$$

ist Gl. (2.9) immer erfüllt für  $c_l^m = 0$ .

*Bestimmung von  $d_l^m$ :* Alle physikalisch relevante Quellterme  $G_l^m(\xi)$  streben mindestens so stark wie  $1/\xi$  gegen null und besitzen keine Pole. Für solche Quellterme sind die Integrale von Gl. (2.8) nicht divergent. Für den ersten Term aus Gl. (2.8) folgt für den Fall  $(l, m) \neq (0, 1)$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} h_l^m(\xi) I_l^m(\xi) = 0$$

(zur Erinnerung: Die  $h_l^m(\xi)$  sind so konstruiert, daß sie im Unendlichen verschwinden). Für den Fall  $(l, m) = (0, 1)$  erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} h_l^m(\xi) I_l^m(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \operatorname{arsinh}(\xi) \int_0^\xi \frac{G_0^1(\xi')}{\sqrt{1 + (\xi')^2}} d\xi' \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \operatorname{arsinh}(\xi) \int_0^\xi \frac{d}{d\xi'} \left[ \sqrt{1 + (\xi')^2} f_0^1(\xi') \right] d\xi' \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \operatorname{arsinh}(\xi) \sqrt{1 + \xi^2} \dot{f}_0^1(\xi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei man Gl. (2.9) benutzt, um von Zeile 2 auf Zeile 3 zu kommen sowie das Verhalten von  $G_l^m(\xi)$  im Unendlichen für den Schritt von Zeile 3 auf Zeile 4.

Für den zweiten Term aus Gl. (2.8) gilt für den Fall  $l = 0$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} g_l^m(\xi) J_l^m(\xi) = 0, \quad (2.10)$$

wenn man  $d_l^m = \infty$  setzt.

Für den Fall  $l \neq 0$  kann man bei der Wahl von  $d_l^m = \infty$  die Regel von de l'Hospital anwenden und erhält

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} g_l^m(\xi) J_l^m(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{J_l^m(\xi)}{\frac{1}{g_l^m(\xi)}} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{(J_l^m(\xi))'}{\left(\frac{1}{g_l^m(\xi)}\right)'}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Annahme, daß  $G_l^m$  im Unendlichen mindestens so stark wie  $1/\xi$  gegen null strebt, folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} g_l^m(\xi) J_l^m(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{(1 + \xi^2)^{\frac{m}{2}-1} G_l^m(\xi) h_l^m(\xi)}{\left(\frac{1}{g_l^m(\xi)}\right)'} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit folgt aus Gl. (2.8) für die Wahl  $d_l^m = \infty$ , daß  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} f_l^m(\xi) = 0$  gilt.

Die Konstanten  $c_l^m = 0$  und  $d_l^m = \infty$  führen also auf ein Potential, das regulär ist und für  $\xi \rightarrow \infty$  zu null wird.

Aus der Entwicklung (2.5) von  $F$  folgt unter Verwendung von Gl. (2.4)

$$G_l^m(\xi) = a_0^2 K_l^m \int_1^1 F(\xi, \eta) (1 - \eta^2)^{\frac{m}{2}-1} (\xi^2 + \eta^2) d\eta. \quad (2.11)$$

Wir führen die Funktionen

$$k_m(\xi, \eta) := [(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)]^{\frac{m}{2}-1} (\xi^2 + \eta^2)$$

ein und bekommen als Lösung für die erweiterte Poisson-Gleichung  $\Delta_m \phi = F$  in abgeplatteten

Ellipsoidkoordinaten

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) = a_0^2 \sum_{l=0}^{\infty} K_l^m C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta) \\ \left[ h_l^m(\xi) \int_0^{\xi} \int_{-1}^1 g_l^m(\xi') C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta') F(\xi', \eta') k_m(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \right. \\ \left. + g_l^m(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \int_{-1}^1 h_l^m(\xi') C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta') F(\xi', \eta') k_m(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

In dem nächsten Abschnitt wollen wir die Feldgleichungen für das zu betrachtende Problem in eine Form bringen, die die Anwendung von Gl. (2.12) zuläßt.

## 2.2 Die Feldgleichungen

Das Linienelement einer stationären, axialsymmetrischen Raumzeit, das eine ideale Flüssigkeit mit rein azimuthaler Bewegung beschreibt, läßt sich in Lewis-Papapetrou-Koordinaten in die Form

$$ds^2 = e^{2\mu} (d\rho^2 + d\zeta^2) + \rho^2 e^{2\lambda} (d\varphi - \omega dt)^2 - c^2 e^{2\nu} dt^2 \quad (2.13)$$

bringen. Die metrischen Funktionen  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\omega$  und  $\nu$  hängen nur von  $\rho$  und  $\zeta$  ab und werden null im räumlichen Unendlichen, wenn man, wie bei uns, eine asymptotisch flache Raumzeit fordert. Der Energieimpulstensor für eine ideale Flüssigkeit mit dem Druck  $P$  und der Massendichte  $Q$  (d. h. mit der Energiedichte  $Qc^2$ ) ist

$$T_{\alpha\beta} = (Qc^2 + P) u_{\alpha} u_{\beta} + g_{\alpha\beta} P.$$

Die Vierergeschwindigkeit  $u_{\alpha}$  hat die Komponenten

$$(u_{\alpha}) = (u_{\rho}, u_{\zeta}, u_{\varphi}, u_t) = \left( 0, 0, \frac{\rho \nu e^{\lambda}}{\sqrt{c^2 - \nu^2}}, \frac{-\rho \nu \omega e^{\lambda} - c^2 e^{\nu}}{c \sqrt{c^2 - \nu^2}} \right),$$

wobei

$$\nu := \rho(\Omega - \omega) e^{\lambda - \nu} \quad (2.14)$$

die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens gemessen von einem „lokal nichtrotierenden Beobachter“ und

$$\Omega := \frac{d\phi}{dt}$$

die Koordinatenwinkelgeschwindigkeit sind. In dieser Arbeit wird eine starr rotierende Flüssigkeit mit konstanter Massendichte betrachtet. Also ist  $Q$  eine positive Konstante und  $\Omega$  eine Konstante, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit als nichtnegative Konstante gewählt wird.

Wir definieren die dimensionslosen Größen

$$\tilde{\omega} := \frac{\omega}{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} := \frac{a_0 \Omega}{c} \quad \text{und} \quad \tilde{v} := \frac{v}{c} \quad (2.15)$$

( $a_0$  wurde in Gl. (2.1) eingeführt) sowie den Operator

$$\mathcal{L}(\phi, \chi) := [(1 + \xi^2)\phi_{,\xi}\chi_{,\xi} + (1 - \eta^2)\phi_{,\eta}\chi_{,\eta}] / a_0^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Aus den Einsteinschen Feldgleichungen bekommen wir für die metrischen Funktionen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta_2 v = \frac{4\pi e^{2\mu}}{c^4} \left[ \frac{1 + \tilde{v}^2}{1 - \tilde{v}^2} (Qc^2 + P) + 2P \right] - \mathcal{L}(v, v + \lambda) \\ + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}^2 (1 + \xi^2) (1 - \eta^2) e^{2\lambda - 2v} \mathcal{L}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}), \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$\Delta_3(\lambda + v) = \frac{16\pi e^{2\mu}}{c^4} P - \mathcal{L}(v + \lambda, v + \lambda), \quad (2.16b)$$

$$\Delta_4 \tilde{\omega} = \frac{-16\pi(1 - \tilde{\omega})e^{2\mu}}{c^4(1 - \tilde{v}^2)} (Qc^2 + P) - \mathcal{L}(\tilde{\omega}, 3\lambda - v) \quad (2.16c)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta_1 \mu = \frac{-4\pi e^{2\mu}}{c^4} (Qc^2 + P) + \mathcal{L}(v, \lambda) \\ + \frac{1}{4} (1 + \xi^2) (1 - \eta^2) e^{2\lambda - 2v} \mathcal{L}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) \\ + \frac{1}{a_0^2(\xi^2 + \eta^2)} (\xi v_{,\xi} - \eta v_{,\eta}), \end{aligned} \quad (2.16d)$$

wobei die Gravitationskonstante  $G$  gleich eins gesetzt wurde. Diese Gleichungen leitet man

aus folgenden Kombinationen des Ricci-Tensors ab:

Gl. (2.16a)  $\iff$

Gl. (2.16c) zusammen mit

$$e^{2\mu-2\nu}(aR_{33} + bR_{34} + R_{44}) + c^2(R_{11} + R_{22}) - c^2 e^{2\mu} R = \frac{-16\pi e^{2\mu}}{c^2} P$$

Gl. (2.16b)  $\iff$

$$R_{11} + R_{22} - e^{2\mu} R = \frac{-16\pi e^{2\mu}}{c^4} P$$

Gl. (2.16c)  $\iff$

$$\frac{a_0 \omega}{c} R_{33} + R_{34} = \frac{8\pi e^{\lambda+\nu} \rho \nu}{a_0 c^3 (c^2 - v^2)} (Qc^2 + P)$$

Gl. (2.16d)  $\iff$

$$c^2 e^{2\nu-2\mu} (R_{11} + R_{22}) + f R_{33} + 2\omega R_{34} + R_{44} = \frac{-8\pi e^{2\nu}}{c^2} (Qc^2 + P),$$

wobei  $f$  durch die Gleichung

$$c^2 e^{2\nu-2\mu} (g_{11} + g_{22}) + f g_{33} + 2\omega g_{34} + g_{44} = 0$$

und  $a$  und  $b$  durch die Gleichungen

$$a g_{33} + b g_{34} + g_{44} = 0 \quad \text{und} \quad a u_3^2 + b u_3 u_4 + u_4^2 = 0$$

festgelegt werden. Bei den Gln. (2.16) kann man formal  $Q$  und  $P$  gleich null für das Außenfeld setzen.

Man sieht an den Feldgleichungen, daß die Kombination  $\nu + \lambda$  anstelle von  $\lambda$  in manchen Gleichungen benutzt wird (siehe insbesondere Gl. (2.16b)). Ferner ist es bekannt [33], daß  $\mu$  aus der Metrik (2.13) über ein Linienintegral bestimmt werden kann. So besteht unsere Hauptaufgabe in der Bestimmung der drei metrischen Funktionen  $\nu$ ,  $\lambda$  (bzw.  $\nu + \lambda$ ) und  $\tilde{\omega}$  sowie der Bestimmung der Oberfläche. Die Gleichung

$$(1 + P/Qc^2) \sqrt{1 - \tilde{v}^2} e^\nu = \text{Konstante} =: 1 - \gamma \quad (2.17)$$

für hydrostatisches Gleichgewicht bekommt man aus den Feldgleichungen (bzw.  $T^\alpha_{\beta;\alpha} = 0$ ). Dies benutzt man, um die freie Oberfläche zu finden, indem man fordert, daß der Druck  $P$  auf der Oberfläche verschwindet.

## 2.3 Zur iterativen Lösung der Feldgleichungen

Am Ende von Abschnitt 2.1.2 kündigten wir an, die Feldgleichungen mit Hilfe von Gl. (2.12) lösen zu wollen. In der Tat haben wir Gleichungen für die vier metrischen Funktionen erhalten, welche die Form  $\Delta_m \phi = F$  annehmen. Leider kann aber die Lösung, welche in Gl. (2.12) steht, nicht verwendet werden, da die Quelle  $F$  unbekannte Funktionen enthält. So wollen wir eine genäherte Lösung zu diesem gekoppelten nicht-linearen Differentialgleichungssystem suchen. Man könnte zum Beispiel diese (oder äquivalente) Gleichungen numerisch lösen. Genau dies wurde von Ansorg, Kleinwächter und Meinel gemacht und ihre Methoden sowie die hochgenauen Ergebnisse sind in [1,2] beschrieben (siehe auch Abschnitt 4.6.1). Hier wird ein anderer Weg beschritten. Die post-Newtonsche Entwicklung wird durchgeführt und zu hoher Ordnung explizit gelöst.

### 2.3.1 Der Entwicklungsparameter

Im Jahre 1742 veröffentlichte Maclaurin *A Treatise on Fluxions* [19] und begann damit die Untersuchungen, die zeigen würden, daß rotierende Ellipsoide mit konstanter Massendichte eine Lösung der Newtonschen Feldgleichung und gleichzeitig der hydrostatischen Gleichgewichtsgleichung sind. Solche Körper, deren zwei Grenzfälle eine Scheibe bzw. eine Kugel sind, wurden nach ihm „Maclaurin-Ellipsoide“ genannt. Diese Ellipsoide sind durch drei Parameter beschrieben, wovon zwei nur der Skalierung dienen. In dieser Arbeit sind die gewählten Skalierungsparameter die Massendichte  $Q$  und die Brennweite  $a_0$ . Der verbleibende, „echte“ Parameter ist der  $\xi$ -Wert,  $\xi_s$ , der die Oberfläche des Sterns beschreibt. Nützliche Relationen zwischen der Exzentrizität  $e$ , den polaren bzw. äquatorialen Radien  $r_p$  bzw.  $r_{\text{ä}}$  und den oben genannten geometrischen Parametern sind

$$a_0 = \sqrt{r_{\text{ä}}^2 - r_p^2}, \quad \xi_s = \frac{r_p}{\sqrt{r_{\text{ä}}^2 - r_p^2}} \quad \text{und} \quad e = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_s^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{r_p}{r_{\text{ä}}}\right)^2}.$$

Die hier gesuchte PN-Näherung der Maclaurin-Ellipsoide legt fest, auf welche Weise die relativistischen Körper mit den Newtonschen zusammenhängen. D. h. der gesuchte PN-Ausdruck hängt von den Größen ab, die die Maclaurin-Ellipsoide beschreiben. So braucht man einen dimensionslosen Entwicklungsparameter, der von  $Q$ ,  $a_0$  und  $\xi_s$  abhängt und proportional  $1/c^2$  ist. Wir übernehmen im wesentlichen den Parameter von Bardeen<sup>3</sup> und definieren unseren

<sup>3</sup>Wir benutzen die Wurzel des in [6] eingeführten Parameters  $\beta$ , um ausschließlich ganzzahlige Indizes zu erhalten.

relativistischen Parameter  $\varepsilon$  durch

$$\varepsilon^2 := \frac{8\pi G}{3c^2} Q a_0^2 \xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2} \equiv \frac{8\pi}{3c^2} Q a_0^2 \xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2}. \quad (2.18)$$

Im Kugelgrenzfall wird  $\xi_s$  unendlich, aber  $a_0 \xi_s$  bleibt endlich, weshalb auch  $\varepsilon$  endlich und ungleich null für einen nicht verschwindenden Körper ist. Auch im Scheibengrenzfall, bei dem  $\xi_s$  gegen null strebt, bleibt  $\varepsilon$  endlich und ungleich null, da die Massendichte unendlich wird. In diesem Fall bleibt jedoch  $Q \xi_s$  endlich und ungleich null.<sup>4</sup>

Die dimensionslose Form der metrischen Funktionen und vorkommenden Konstanten wird nach diesem Parameter gemäß

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{n=2}^{\infty} \nu_n \varepsilon^n & \lambda &= \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \varepsilon^n & \tilde{\omega} &= \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{\omega}_n \varepsilon^n \\ \mu &= \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n \varepsilon^n & \gamma &= \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n \varepsilon^n & \tilde{\Omega} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_n \varepsilon^n \end{aligned} \quad (2.19)$$

entwickelt. Die Summe für  $\lambda$ ,  $\tilde{\omega}$  und  $\mu$  fängt bei 2 an, da diese metrischen Funktionen keinen Newtonschen Beitrag haben dürfen. Der metrische Koeffizient  $e^\nu$  wird im Linienelement (siehe Gl. (2.13)) mit  $c^2$  multipliziert, weshalb der Newtonsche Beitrag  $\nu_2$  (und nicht  $\nu_0$ ) ist. Durch einen Koeffizientenvergleich in Gl. (2.17) sieht man, daß  $\gamma_0 = 0$  gilt, und die Definition von  $\tilde{\Omega}$  aus Gl. (2.15) zeigt uns, daß diese Summe mit  $n = 1$  anfängt. Alle anderen Größen, wie z.B.  $\tilde{\nu}$ ,  $P$  oder die Gesamtmasse können als Funktionen von denen aus Gl. (2.19) aufgefaßt werden, weshalb eine entsprechende Entwicklung nach  $\varepsilon$  schon impliziert ist.

### 2.3.2 Der Newtonsche Schritt

Entwickelt man die Einsteinschen Feldgleichungen (2.16) nach  $\varepsilon$ , so sieht man, daß quadratische Terme in den Feldfunktionen von der Ordnung  $\varepsilon^4$  sind und keinen Beitrag zur ersten Entwicklungsordnung liefern. Für  $\nu$  bekommt man die erwartete Newtonsche Gleichung

$$\Delta_2 \nu_2^i = \frac{4\pi}{\varepsilon^2 c^2} Q = \frac{3}{2a_0^2 \xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2}} \quad (2.20a)$$

im Innenraum und

$$\Delta_2 \nu_2^a = 0 \quad (2.20b)$$

<sup>4</sup>Diesen Zusammenhang zwischen  $\xi_s$  und  $Q$  gewinnt man z.B. aus der Formel für die Masse  $M = \frac{4}{3}\pi a_0^3 Q \xi_s (1 + \xi_s^2)$ , wenn man fordert, daß die Masse endlich bleiben sollte.

im Außenraum. Wir wissen, daß die Maclaurin-Lösung die Gestalt eines Ellipsoids hat und definieren dementsprechend den Inneneraum durch die Gleichung  $\xi < \xi_s$ . Gleichungen (2.20) wollen wir mit dieser Definition mittels Gl. (2.12) lösen. Wenn die Quelle ein Polynom in  $\eta$  ist, sorgt die Orthogonalität der Gegenbauer-Polynome dafür, daß die Summe abbricht. Bei Gl. (2.20a) hat man eine Konstante als Quelle (also ein Polynom nullten Grades), weshalb man zwei Beiträge zur Summe von Gl. (2.12) enthält.<sup>5</sup> Die Lösung dieser Gleichungen lautet

$$\begin{aligned} v_2^i = & -\frac{1}{2\xi_s \sqrt{1+\xi_s^2}} \\ & \left\{ \left[ \xi_s (1+\xi_s^2) h_0^2(\xi_s) + \frac{1}{2}(\xi_s^2 - \xi^2) \right] C_0^{1/2}(\eta) \right. \\ & + \left[ -\xi_s (1+\xi_s^2) g_2^2(\xi) h_0^2(\xi_s) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{3} \left( (3\xi_s^2 + 2) g_2^2(\xi) + 1 \right) \right] C_2^{1/2}(\eta) \right\} \end{aligned} \quad (2.21a)$$

im Innenraum ( $\xi < \xi_s$ ) und

$$v_2^a = \frac{-\sqrt{1+\xi_s^2}}{2} \left( h_0^2(\xi) C_0^{1/2}(\eta) - h_2^2(\xi) C_2^{1/2}(\eta) \right) \quad (2.21b)$$

im Außenraum. Man kann schnell kontrollieren, daß die Übergangsbedingungen  $v_2^i(\xi_s, \eta) = v_2^a(\xi_s, \eta)$  und  $\dot{v}_2^i(\xi_s, \eta) = \dot{v}_2^a(\xi_s, \eta)$  mit  $\dot{v} = dv/d\xi$  erfüllt sind. Der Druck verschwindet auf der Oberfläche  $\xi = \xi_s$ , wenn die Konstanten  $\tilde{\Omega}_1$  und  $\gamma_2$  den Gleichungen

$$\tilde{\Omega}_1 = -\frac{3}{2\sqrt{1+\xi_s^2}} h_2^2(\xi_s) \quad (2.22a)$$

und

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{1+\xi_s^2}}{2} \left( h_0^2(\xi_s) - h_2^2(\xi_s) \right) \quad (2.22b)$$

genügen. In Abb. 2.2 ist die dimensionslose, Newtonsche Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_N := \tilde{\Omega}_1 c \varepsilon / a_0$  über dem Radienverhältnis  $r_p/r_{\bar{a}} = \xi_s / \sqrt{1+\xi_s^2}$  aufgetragen. Zusammen beschreiben die Gln. (2.21) und (2.22) die komplette (Newtonsche) Maclaurin-Lösung.

<sup>5</sup>Man beachte, daß das Volumenelement  $\xi^2 + \eta^2$  dafür sorgt, daß das erweiterte Poisson-Integral ein Polynom vom Grade  $n+2$  liefert, wenn die Quelle ein Polynom  $n$ -ten Grades ist.

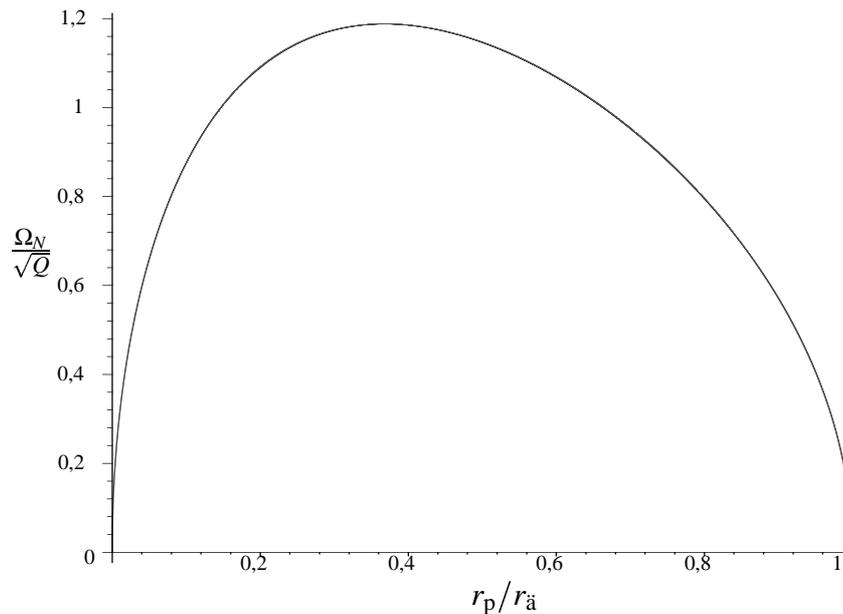


Abbildung 2.2: Die dimensionslose Bildung  $\Omega_N/\sqrt{Q}$  aufgetragen über dem Radienverhältnis  $r_p/r_{\ddot{a}}$ , wobei  $\Omega_N := \tilde{\Omega}_1 c \varepsilon / a_0$  die Newtonsche Winkelgeschwindigkeit ist.

### 2.3.3 Die erste post-Newtonsche Ordnung

In diesem Abschnitt wollen wir kurz die Bardeensche Herleitung [6] des ersten post-Newtonschen Korrekturterms beschreiben. Die Probleme, die schon bei der nächsten Ordnung auftauchen, werden anschließend diskutiert, und in dem nächsten Abschnitt wird ein Verfahren zu deren Bewältigung vorgestellt.

#### Die Bardeensche Methode

Wenn man sich ins „Relativistische“ begibt, kann man nicht wie im Newtonschen Fall die richtige Oberflächengestalt einfach erraten. Hier hat man es mit einer freien Oberfläche zu tun, die bestimmt wird durch die Bedingung, daß  $P$  auf der Oberfläche verschwindet. Ist die gesuchte Oberfläche durch die Gleichung  $\xi = \xi_o(\eta) = \xi_s + a_2(\eta) \varepsilon^2$  definiert, so kann man

$$a_2 = q(\eta) \sum_{n=0}^{\infty} S_n C_n^{1/2}(\eta) \quad (2.23)$$

setzen, wobei die noch zu bestimmende Funktion  $q(\eta)$  nur dazu dient, die Entwicklung handhabbarer zu machen.

Diese neue Oberfläche spielt allerdings bei den Funktionen  $\lambda_2$ ,  $\tilde{\omega}_2$  und  $\mu_2$  noch keine Rolle.

Aus Gl. (2.16b) folgt

$$\Delta_3(\lambda_2 + v_2) = 0$$

im Innen- und Außenraum, und man kann sofort die Lösung  $\lambda_2 = -v_2$  aufschreiben. Für  $\mu_2$  bekommt man aus Gl. (2.16d) die Gleichungen

$$\Delta_1 \mu_2^i = -\frac{3}{2a_0^2 \xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2}} + \frac{1}{a_0^2 (\xi^2 + \eta^2)} \left( \xi v_{2,\xi}^i - \eta v_{2,\eta}^i \right)$$

und

$$\Delta_1 \mu_2^a = \frac{1}{a_0^2 (\xi^2 + \eta^2)} \left( \xi v_{2,\xi}^a - \eta v_{2,\eta}^a \right).$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß  $\mu_2 = -v_2$  Lösung dieser Gleichung ist, indem man dies einsetzt und

$$\Delta_2 v_2^i = \frac{3}{2a_0^2 \xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2}}$$

sowie

$$\Delta_2 v_2^a = 0$$

in Übereinstimmung mit Gln. (2.20) erhält. Die Entwicklung von Gl. (2.16c) ergibt

$$\Delta_4 \tilde{\omega}_2^i = \frac{-6}{a_0^2 \xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2}}$$

und

$$\Delta_4 \tilde{\omega}_2^a = 0,$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2^i = & \frac{1}{5 \xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2}} \\ & \left\{ \left[ 6 \xi_s \left( 1 + \xi_s^2 \right)^2 h_0^4(\xi_s) + 3 \left( \xi_s^2 - \xi^2 \right) \right] C_0^{3/2}(\eta) \right. \\ & + \left[ - \xi_s \left( 1 + \xi_s^2 \right)^2 g_2^4(\xi) h_0^4(\xi_s) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{15} \left( (5 \xi_s^2 + 4) g_2^4(\xi) + 6 \right) \right] C_2^{3/2}(\eta) \right\} \end{aligned} \quad (2.24a)$$

und

$$\tilde{\omega}_2^a = \frac{6}{5} \left( 1 + \xi_s^2 \right)^{3/2} \left( h_0^4(\xi) C_0^{3/2}(\eta) - h_2^4(\xi) C_2^{3/2}(\eta) \right). \quad (2.24b)$$

Was noch übrig bleibt, um die erste Ordnung der PN-Näherung zu erhalten, ist die Bestimmung von  $v_4$  und den Konstanten  $S_i$ , nachdem  $q(\eta)$  gewählt wird.

Den post-Newtonschen Korrekturterm  $v_4$  kann in zwei Schritten ausgerechnet werden. In einem ersten Schritt rechnet man mit der post-Newtonschen Quelle, aber dafür mit der alten Oberfläche  $\xi = \xi_s$ . In einem zweiten Schritt berechnet man den Beitrag, den die alte Quelle bei der neuen Oberfläche liefert. Im Wesentlichen besteht der zweite Schritt darin, die Beziehung

$$\int_a^{\xi_s + a_2 \varepsilon^2} f(\xi) d\xi = \int_a^{\xi_s} f(\xi) d\xi + a_2 f(\xi_s) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

zu verwenden. Bei dem Integranden  $f(\xi)$  kann das Volumenelement  $(\xi^2 + \eta^2)$  ausgeklammert werden. Nach Anwendung der obigen Gleichung wird dies für den Koeffizienten von  $\varepsilon^2$  zu einem Faktor  $(\xi_s^2 + \eta^2)$ . Dies legt nahe, die freie Funktion  $q(\eta)$  aus Gl. (2.23) gleich  $1/(\xi_s^2 + \eta^2)$  zu setzen. Macht man dies und fordert, daß  $P(\xi_o, \eta) = 0$  bis zur Ordnung  $\varepsilon^2$  gilt, so findet man nach einem Koeffizientenvergleich in  $\eta$ , daß die  $S_n$  aus Gl. (2.23) nur für  $n$  gerade und  $n < 5$  verschieden von null sind. So hat man aus der Bedingung verschwindenden Drucks auf der Oberfläche drei Gleichungen, aber die fünf Unbekannten  $S_0, S_2, S_4, \gamma_4$  und  $\tilde{\Omega}_3$  noch zu bestimmen. Die zwei fehlenden Gleichungen entsprechen der Wahl von zwei Parametern, die die relativistische Konfiguration bei vorgegebener Massendichte festlegen. Bardeen entschied sich dafür, die baryonische Masse  $M_0$  und den Drehimpuls  $J$  „festzuhalten“. Das heißt, er hat

die Konstanten so bestimmt, daß bei den Entwicklungen

$$M_0 = m_0 + m_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad \text{und} \quad J = j_0 + j_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

$m_2$  und  $j_2$  null sind. Wie Bardeen in [6] selbst betonte, ist diese Wahl wesentlich anders als die von Chandrasekhar [7], der das Koordinatenvolumen fixierte. Wenn man die PN-Näherung nur als eine Näherung zu den vollen Einstein-Gleichungen betrachtet, dann ist es nicht von Bedeutung, ob man die Formeln herleitet, indem man Bedingungen an koordinatenabhängige oder -unabhängige Größen stellt. Wenn man aber die PN-Terme als (relativistische) Korrekturterme zu einer Newtonschen Lösung versteht, dann muß man spezifizieren, welche Lösung gemeint ist. Betrachtet man zum Beispiel einen Maclaurin-Körper in erster post-Newtonscher Näherung mit Ruhemasse  $M_0$ , Drehimpuls  $J$ , Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und Koordinatenvolumen  $V$ , so kann man dies als Korrektur zu einer Newtonschen Maclaurin-Lösung mit Masse  $M_0$  und Drehimpuls  $J$  sehen oder mit Masse  $M_0$  und Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  oder mit Drehimpuls  $J$  und Koordinatenvolumen  $V$ . Welcher Vergleichskörper gewählt wird, ist nur eine Frage der Konvention. Bei dem obigen Beispiel wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die Vergleichskörper dieselbe Zustandsgleichung und dieselbe Massendichte besitzen. Selbst dies ist nur eine Frage der Konvention.

### Schwierigkeiten bei den höheren Ordnungen

Auf Seite 18 fand die veränderte Oberfläche Erwähnung, ohne daß die Problematik, die damit verbunden ist, diskutiert wurde. Man muß bei der PN-Näherung berücksichtigen, daß bei den Integrationsgrenzen in Gl. (2.12) die Oberfläche eine Funktion von  $\eta$  ist. Interessiert man sich für das Potential  $\phi$  an dem Punkt  $(\xi_a, \eta_a)$ , dann hat man besondere Schwierigkeiten zu überwinden, wenn dieser Punkt sich in der Nähe der Oberfläche befindet, also für  $\xi_a = \xi_s + \alpha \varepsilon^2$ . Um diesen Fall zu untersuchen, wollen wir das  $\eta$ -Intervall  $[-1, 1]$  in zwei Untermengen von Intervallen trennen (siehe Abb. 2.3). Die eine Menge,  $\eta_u$ , beschreibt den Teil der gesuchten Oberfläche, der unterhalb von dem uns interessierenden Wert  $\xi_a$  liegt. Diese wird durch

$$\eta_u := \bigcup [\eta_i, \eta_j]$$

definiert, wobei die Vereinigung über alle  $\eta_1$  und  $\eta_2$  läuft, die den Eigenschaften

$$\eta_j > \eta_i, \quad \xi_o(\eta_i) = \xi_o(\eta_j) = \xi_a, \quad \forall \eta \in ]\eta_1, \eta_2[: \quad \xi_o(\eta) < \xi_a$$

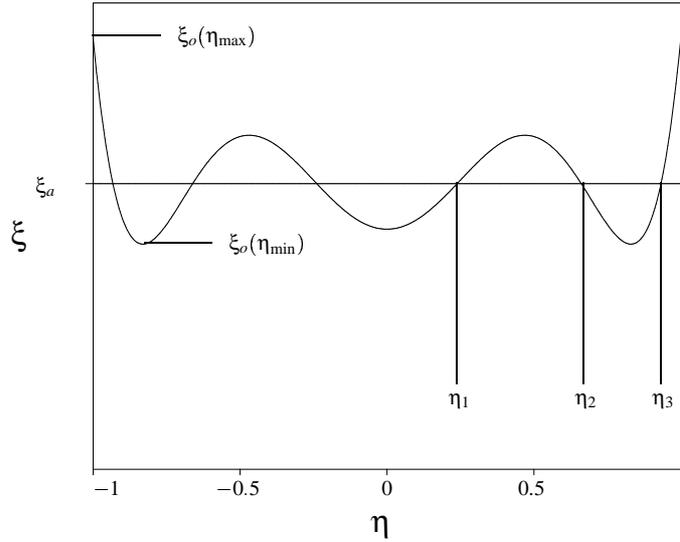


Abbildung 2.3: Eine mögliche Oberfläche  $\xi = \xi_o(\eta)$  und der Wert  $\xi = \xi_a$ . Bei diesem Beispiel gelten  $\eta_u = [-\eta_3, -\eta_2] \cup [-\eta_1, \eta_1] \cup [\eta_2, \eta_3]$  und  $\eta_o = [-1, -\eta_3] \cup [-\eta_2, -\eta_1] \cup [\eta_1, \eta_2] \cup [\eta_3, 1]$ .

genügen. Entsprechend wird  $\eta_o$  für den Teil oberhalb von  $\xi_s$  definiert. Mit der Bezeichnung  $F_l^i$  für die Quelle (samt der zugehörigen Polynome und Gewichtsfunktionen) im Innenraum und  $F_l^a$  im Außenraum (die hier nicht von  $\varepsilon$  abhängen sollten)<sup>6</sup> läßt sich  $\phi$  als

$$\begin{aligned} \phi(\xi_a, \eta_a) = & a_0^2 \sum_{l=0}^{\infty} K_l^m C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta_a) \\ & \left[ h_l^m(\xi_a) \int_{\eta_u}^{\xi_o(\eta')} \int_0^{\xi_o(\eta')} g_l^m(\xi') F_l^i(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right. \\ & + h_l^m(\xi_a) \int_{\eta_u}^{\xi_a} \int_{\xi_o(\eta')}^{\xi_a} g_l^m(\xi') F_l^a(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ & + g_l^m(\xi_a) \int_{\eta_u}^{\infty} \int_{\xi_a}^{\infty} h_l^m(\xi') F_l^a(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ & + h_l^m(\xi_a) \int_{\eta_o}^{\xi_a} \int_0^{\xi_a} g_l^m(\xi') F_l^i(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ & \left. + g_l^m(\xi_a) \int_{\eta_o}^{\xi_a} \int_{\xi_a}^{\xi_o(\eta')} h_l^m(\xi') F_l^i(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right] \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Das eigentliche  $\phi$  läßt sich als Summe von Termen schreiben, bei denen die Quelle nicht von  $\varepsilon$  abhängt.

$$+ g_l^m(\xi_a) \int_{\eta_o} \int_{\xi_o(\eta')}^{\infty} h_l^m(\xi') F_l^a(\xi', \eta') d\xi' d\eta']$$

schreiben. Schreibt man wieder  $\dot{f} = \frac{df}{f\xi}$  für die Ableitung nach  $\xi$ , so ergibt die Entwicklung nach  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \phi(\xi_a, \eta_a) = & a_0^2 \sum_{l=0}^{\infty} K_l^m C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta_a) \\ & \left\{ \left[ h_l^m(\xi_s) \int_{\eta_u} \int_0^{\xi_s} g_l^m(\xi') F_l^i(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right. \right. \\ & + g_l^m(\xi_s) \int_{\eta_u} \int_{\xi_s}^{\infty} h_l^m(\xi') F_l^a(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ & + h_l^m(\xi_s) \int_{\eta_o} \int_0^{\xi_s} g_l^m(\xi') F_l^i(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ & \left. \left. + g_l^m(\xi_s) \int_{\eta_o} \int_{\xi_s}^{\infty} h_l^m(\xi') F_l^a(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right] \varepsilon^0 \right. \\ & + \alpha \left[ \dot{h}_l^m(\xi_s) \int_{\eta_u} \int_0^{\xi_s} g_l^m(\xi') F_l^i(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right. \\ & + \dot{g}_l^m(\xi_s) \int_{\eta_u} \int_{\xi_s}^{\infty} h_l^m(\xi') F_l^a(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ & + \dot{h}_l^m(\xi_s) \int_{\eta_o} \int_0^{\xi_s} g_l^m(\xi') F_l^i(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ & \left. \left. + \dot{g}_l^m(\xi_s) \int_{\eta_o} \int_{\xi_s}^{\infty} h_l^m(\xi') F_l^a(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right] \varepsilon^2 \right. \\ & + g_l^m(\xi_s) h_l^m(\xi_s) \left[ \int_{\eta_u} a_2(\eta') (F_l^i(\xi_s, \eta') - F_l^a(\xi_s, \eta')) d\eta' \right. \\ & \left. \left. + \int_{\eta_o} a_2(\eta') (F_l^i(\xi_s, \eta') - F_l^a(\xi_s, \eta')) d\eta' \right] \varepsilon^2 \right\} + O(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_0^2 \sum_{l=0}^{\infty} K_l^m C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta_a) \\
&\quad \left\{ \left[ h_l^m(\xi_s) \int_{-1}^1 \int_0^{\xi_s} g_l^m(\xi') F_l^i(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g_l^m(\xi_s) \int_{-1}^1 \int_{\xi_s}^{\infty} h_l^m(\xi') F_l^a(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right] \varepsilon^0 \right. \\
&\quad \left. + \alpha \left[ h_l^m(\xi_s) \int_{-1}^1 \int_0^{\xi_s} g_l^m(\xi') F_l^i(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g_l^m(\xi_s) \int_{-1}^1 \int_{\xi_s}^{\infty} h_l^m(\xi') F_l^a(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right] \varepsilon^2 \right. \\
&\quad \left. + g_l^m(\xi_s) h_l^m(\xi_s) \int_{-1}^1 a_2(\eta') (F_l^i(\xi_s, \eta') - F_l^a(\xi_s, \eta')) d\eta' \varepsilon^2 \right\} + O(\varepsilon^4) \\
&=: \sigma(\xi_s, \eta_a) + \alpha \sigma'(\xi_s, \eta_a) \varepsilon^2 + a_0^2 \sum_{l=0}^{\infty} K_l^m C_l^{\frac{m-1}{2}}(\eta_a) \\
&\quad \left[ g_l^m(\xi_s) h_l^m(\xi_s) \int_{-1}^1 a_2(\eta') (F_l^i(\xi_s, \eta') - F_l^a(\xi_s, \eta')) d\eta' \varepsilon^2 \right] \quad (2.25) \\
&\quad + O(\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

Das Symbol  $\sigma(\xi, \eta)$  in Gl. (2.25) steht für das Potential, das sich bei der (Newtonschen) Oberfläche  $\xi = \xi_s$  ergibt.

Wesentlich an dieser Formel ist, daß keine Integrale über  $\eta_u$  oder  $\eta_o$  auftreten. Diese wichtige Eigenschaft gilt allerdings nur bis zur ersten Ordnung. Bei späteren Ordnungen treten Ableitungen von den Funktionen  $g_l^m$  und  $h_l^m$  auf, und die Vorfaktoren vor den Integralen über  $\eta_u$  stimmen nicht mehr mit denen vor den  $\eta_o$ -Integralen überein. Um das Potential bei höheren Ordnungen auszurechnen, müßte man  $\eta_u$  und  $\eta_o$  für beliebiges  $\xi$  bestimmen.<sup>7</sup> Ferner weiß man von vornherein, daß die Summe in Gl. (2.12) nicht abbricht, da die Orthogonalitätsrelation nicht verwendet werden kann.

<sup>7</sup>Explizit heißt dies, daß man die Gleichung  $\xi_o(\eta) - \xi = 0$  für  $\eta \in [-1, 1]$  lösen müsste. Diese Gleichung kann nur dann streng gelöst werden, wenn  $\xi_o(\eta) = q(\eta) \sum_{n=0}^{\infty} S_n C_n^{1/2}(\eta)$  nach wenigen Termen abbricht.

## 3 Weitere Ordnungen der post-Newtonschen Näherung

### 3.1 Rekursionsverfahren zur Bestimmung der metrischen Funktionen

Um höhere Ordnungen der PN-Näherung zu erhalten, die noch dazu „handhabbar“ sind, müssen zwei Bedingungen erfüllt werden: erstens müssen die Integrale in  $\eta$  von  $-1$  bis  $1$  laufen, damit die Orthogonalitätsrelationen der Gegenbauer-Polynome anwendbar sind und zweitens müssen die Summen sowohl bei der gesuchten Oberfläche als auch bei der Integrationsformel Gl. (2.12) abbrechen. Dies wollen wir erreichen, indem wir neue Koordinaten einführen, die die Feldgleichungen in eine andere, aber verwandte Form bringen und indem wir einen anderen Ansatz als Bardeen für die Oberfläche machen.

#### 3.1.1 Die neuen Koordinaten

Sei

$$\xi_o(\eta) = \xi_s \left( 1 + \sum_{j=0}^{l_k} \sum_{k=2}^{\infty} S_{jk} C_j^{1/2}(\eta) \epsilon^k \right) \equiv \xi_s \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k(\eta) \epsilon^k \right) \quad (3.1)$$

die gesuchte Oberfläche.<sup>1</sup> Wesentlich bei diesem Ansatz für die Oberfläche ist, daß in jeder Ordnung, die Oberfläche ein Polynom in  $\eta$  ist (d. h. die  $l_k$  sollen endlich sein). In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, daß dies zu einer konsistenten Lösung führt, und die  $l_k$  werden bestimmt.

Es werden jetzt Koordinaten eingeführt, die  $\xi_o(\eta)$  auf eine Koordinatenlinie abbilden und damit den Querschnitt des Sternes auf ein Rechteck (siehe Abb. 3.1). Seien

---

<sup>1</sup>Es ist unwesentlich, nach welchen Gegenbauer-Polynomen von  $\eta$  die Funktion  $\xi_o(\eta)$  entwickelt wird. Offensichtlich kann eine Abbruchsbedingung für die Summe nicht von dieser Wahl abhängen. Bei der Bestimmung der Konstanten  $S_{jk}$  ist es am bequemsten, den Druck  $P(\xi_s, \eta)$  nach denselben Polynomen zu entwickeln, die für die Entwicklung von  $\xi_o$  gewählt wurden.

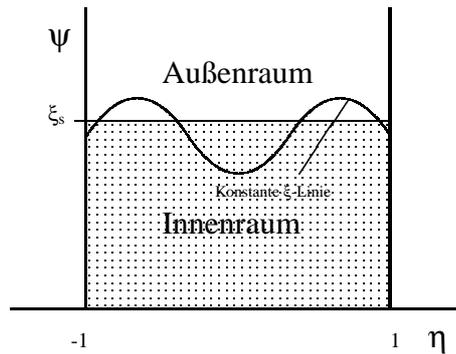


Abbildung 3.1: Eine Darstellung vom Querschnitt des Sternes in den neuen Koordinaten  $\psi$  und  $\eta$ . In diesen Koordinaten ist die gesuchte Oberfläche des Körpers die Linie  $\psi = \xi_s$ . Man vergleiche im Gegensatz hierzu Abb. 2.3.

$$\psi := \xi \left( 1 + \sum_{j=0}^{l_k} \sum_{k=2}^{\infty} S_{jk} C_j^{1/2}(\eta) \varepsilon^k \right)^{-1} = \frac{\xi \xi_s}{\xi_o(\eta)} \quad (3.2)$$

$$\eta' := \eta$$

die neuen Koordinaten. Offensichtlich beschreibt  $\psi = \xi_s$  die Oberfläche, und die Punkte  $\xi = 0$  und  $\xi = \infty$  entsprechen den Punkten  $\psi = 0$  und  $\psi = \infty$ . Im Folgenden wird der Strich an der Koordinate  $\eta$  weggelassen.

### 3.1.2 Darstellung der Feldgleichungen

Schreibt man den Operator  $\Delta_m$  in den neuen Koordinaten  $\psi$  und  $\eta$ , so bekommt man einen komplizierten Ausdruck, der von  $\varepsilon$  und den zu bestimmenden Konstanten  $S_{jk}$  abhängt. Zur nullten Ordnung in  $\varepsilon$  stimmt  $\Delta_m \phi(\psi, \eta)$  allerdings genau mit der linken Seite von Gl. (2.2) überein, wenn  $\xi$  durch  $\psi$  ersetzt wird. Man erhält den Differentialoperator

$$\mathcal{D}_m := \left( (1 + \psi^2) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + (1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + m\psi \frac{\partial}{\partial \psi} - m\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) / a_0^2(\psi^2 + \eta^2).$$

Da  $\psi$  und  $\xi$  bis zur nullten Ordnung in  $\varepsilon$  identisch sind, gilt auch

$$\Delta_m = \mathcal{D}_m + O(\varepsilon^2) =: \mathcal{D}_m + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \mathcal{A}_{m,i}.$$

Wir schreiben die Differentialgleichung  $\Delta_m \phi = F$  aus Abschnitt 2.1 in der Form

$$\mathcal{D}_m \phi = \mathcal{D}_m \phi - \Delta_m \phi + F = - \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \mathcal{A}_{m,i} \phi + F.$$

Setzt man die Entwicklungen  $\phi = \sum_{i=2}^{\infty} \phi_i \varepsilon^i$  und  $F = \sum_{i=2}^{\infty} F_i \varepsilon^i$  ein, so bekommt man die Differentialgleichung

$$\mathcal{D}_m \phi_i = - \sum_{j=2}^{i-2} \mathcal{A}_{m,j} \phi_{i-j} + F_i =: \tilde{F}_i \quad (3.3)$$

für  $\phi_i$ . Sucht man für diese Differentialgleichung eine Lösung in der Form des erweiterten Poisson-Integrals, so findet man, daß die Herleitung aus Abschnitt 2.1.2 in  $\psi$ - $\eta$ -Koordinaten unverändert übernommen werden kann. Auch in den neuen Koordinaten führt eine Entwicklung nach Gegenbauer-Polynomen mit dem Argument  $\eta$  auf eine Gegenbauer-Differentialgleichung mit den Lösungen  $g_l^m(\psi)$  und  $h_l^m(\psi)$ . Auch hier kommt man auf die allgemeine Lösung Gl. (2.8) mit  $\psi$  statt  $\xi$  und kann analoge Argumente zur Bestimmung der Konstanten verwenden.<sup>2</sup> So kommt es schlußendlich, daß die Lösung von Gl. (3.3) für das Potential  $\phi_i$  genau durch Gl. (2.12) gegeben wird, wenn man  $F$  durch  $\tilde{F}_i$  und  $\xi$  durch  $\psi$  ersetzt.

Wie bei den alten Koordinaten hängt die rechte Seite von Gl. (3.3) nur von  $\phi_{i-j}$ ,  $j > 0$  ab und ermöglicht damit ein rekursives Verfahren zur Bestimmung der  $\phi_i$ . Es folgt aus Gln. (2.16a–2.16c), daß die metrischen Funktionen  $\nu$ ,  $\lambda$  und  $\tilde{\omega}$  in beliebiger Reihenfolge bestimmt werden können, da die metrischen Funktionen auf der rechten Seite der Gleichungen entweder quadratisch auftauchen oder mit Potenzen von  $\varepsilon$  multipliziert werden. Die verbleibende Gleichung für  $\mu_i$ , Gl. (2.16d), kann gelöst werden, nachdem  $\nu_i$  schon bekannt ist.

Alternativ dazu wird  $\mu_i$  in dieser Arbeit mit Hilfe eines Linienintegrals bestimmt. Aus den Feldgleichungen  $R_{12} = 0$  und  $R_{11} - R_{22} = 0$  bekommt man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} (\mu - \lambda)_{,\zeta} &= (\nu + \lambda)_{,\zeta\rho} + \nu_{,\rho} \nu_{,\zeta} + \lambda_{,\rho} \lambda_{,\zeta} - \mu_{,\zeta} (\nu + \lambda)_{,\rho} \\ &- \mu_{,\rho} (\nu + \lambda)_{,\zeta} - \frac{\tilde{\Omega}^2 \rho^2 e^{2\lambda-2\nu}}{2a_0^2} \tilde{\omega}_{,\zeta} \tilde{\omega}_{,\rho} \end{aligned} \quad (3.4a)$$

<sup>2</sup>Dies beruht im wesentlichen darauf, daß  $\psi = 0$  auf  $\xi = 0$  führt und das asymptotische Verhalten bezüglich beider Koordinaten einander entspricht.

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}(\mu-\lambda)_{,\rho} &= \frac{1}{2} [(v+\lambda)_{,\rho\rho} - (v+\lambda)_{,\zeta\zeta}] + \frac{1}{2} (v_{,\rho}{}^2 + \lambda_{,\rho}{}^2 - v_{,\zeta}{}^2 + \lambda_{,\zeta}{}^2) \\ &\quad - (\mu_{,\rho}(v+\lambda)_{,\rho} - \mu_{,\zeta}(v+\lambda)_{,\zeta}) - \frac{\tilde{\Omega}^2 \rho^2 e^{2\lambda-2v}}{4a_0^2} (\tilde{\omega}_\rho^2 - \tilde{\omega}_\zeta^2). \end{aligned} \quad (3.4b)$$

Mit Hilfe der Transformation

$$f_{,\eta} = a_0 \xi f_{,\zeta} - a_0^2 \eta (1 + \xi^2) \frac{f_{,\rho}}{\rho} \quad (3.5)$$

für ein beliebiges  $f = f(\rho, \zeta)$  bekommt man eine Gleichung für  $(\mu - \lambda)_{,\eta}$ , die dann in  $\psi$ - $\eta$ -Koordinaten transformiert werden kann.<sup>3</sup> Um  $\mu - \lambda$  zu erhalten, integrieren wir über  $\eta$

$$\mu - \lambda = \int_1^\eta (\mu - \lambda)_{,\eta'} d\eta', \quad (3.6)$$

wobei die untere Integrationsgrenze aus  $\lim_{\eta \rightarrow 1} (\mu - \lambda) = 0$  folgt, siehe beispielsweise Gln. (22) und (23) aus [20]. Mit Hilfe der Gln. (3.4–3.6) wird  $\mu_i$  nun berechnet.

## 3.2 Eigenschaften des Verfahrens

### 3.2.1 Vorkommende Ordnungen von $\varepsilon$

Bei der in Gl. (2.19) definierten Entwicklung der metrischen Funktionen kommen nur gerade Potenzen von  $\varepsilon$  vor. Bei der Entwicklung von  $\tilde{\Omega}$  (und daher auch von  $\tilde{v}$ ) kommen hingegen nur ungerade Potenzen vor. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Feldgleichungen (2.16). An den Quellen dieser Gleichungen sieht man, daß ein Potential  $\phi_{2i+1}$  entweder durch einen Term  $\phi_{2j+1}$  ( $j < i$ ) oder einen Term  $\tilde{\Omega}_{2j-2}$  entstehen kann. Sei  $\tilde{\Omega}_{2j-2}$  der erste gerade Term. So gilt für den Druck die Gleichung

$$P_{2j-1}(\psi, \eta) = \tilde{v}_1 \tilde{v}_{2j-2} = [(1 + \psi^2)(1 - \eta^2)]^2 \tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_{2j-2}.$$

Die Forderung  $P_{2j-1}(\xi_s, \eta) = 0$  führt zu dem Schluß, daß  $\tilde{\Omega}_{2j-2} = 0$  gelten muß. Somit ist  $\tilde{\Omega}_{2j}$  identisch null für  $j \in \mathbb{N}_0$ . Die Erzeugung eines Potentials  $\phi_{2i+2}$  durch ein ungerades  $\phi_{2j+1}$  ist ausgeschlossen, da  $\phi_1 = 0$  ist.

<sup>3</sup>In den  $\psi$ - $\eta$ -Koordinaten mit  $\psi = \xi \xi_s / \xi_o(\eta)$ ,  $\tilde{\eta} = \eta$ , gilt  $f_{,\eta} = -\psi \xi_o' / \xi_o + f_{,\tilde{\eta}}$ . Dies muß berücksichtigt werden bei Anwendung von Gl. (3.5) in den neuen Koordinaten.

Aus Gl. (2.17) an der Stelle des Nordpols folgt, daß

$$e^{v(\xi_s, 1)} = 1 - \gamma \quad (3.7)$$

gilt und, daß daher auch nur gerade Potenzen in der Entwicklung von  $\gamma$  vorkommen.

### 3.2.2 Polynomialstruktur

In Abschnitt 3.1 erwähnten wir, daß eine Darstellung der Potentiale gesucht wird, bei der keine unendlichen Summen auftreten. Diese Bedingung wird realisiert, falls zwei Kriterien erfüllt sind. Erstens muß der Integrand aus dem erweiterten Poisson-Integral geteilt durch die Gewichtsfunktion der zugehörigen Gegenbauer-Polynome ein Polynom in  $\eta$  sein. Zweitens muß das Verschwinden des Druckes auf der Oberfläche mit einer abbrechenden Reihe für die Oberflächengestalt verträglich sein.

Wie man aus Gln. (2.21) und (2.24) und  $-v_2 = \lambda_2 = \mu_2$  entnimmt, ist  $\phi_2$  ein Polynom in  $\eta$ , wobei  $\phi$  eine beliebige metrische Funktion darstellt. Angenommen, daß die Funktionen  $\phi_{i-k}$  für  $k < i$  Polynome in  $\eta$  sind. Wir wollen zeigen, unter welcher Bedingung  $\phi_{i+2}$  auch ein solches Polynom ist.  $\tilde{F}_i$  aus Gl. (3.3) ist ein Polynom in den metrischen Funktionen  $\phi_{i-k}$  und ihren partiellen Ableitungen und daher auch ein Polynom in  $\eta$ . Der Operator  $\mathcal{A}_{m,j}$  ( $j \leq i$ ) ist eine Summe von Termen der Art

$$f(\psi, \eta, B_p(\eta), B_p'(\eta), B_p''(\eta)) \frac{\partial^l}{\partial \psi^n \partial \eta^{l-n}}$$

mit  $l = 0, 1, 2$ ,  $n \leq l$  und  $p \leq j$ . Die Annahme, daß  $\phi_{i-k}$  ein Polynom in  $\eta$  ist, impliziert, daß auch  $B_{i-k-2}(\eta)$  ein Polynom ist. Damit kann für  $p \leq i-2$  gezeigt werden, daß  $f$  rationale Funktionen mit dem Nenner  $(\psi^2 + \eta^2)^q$ ,  $q \in \mathbb{N}_0$  sind. Da das Potential  $\phi_i$  regulär sein muß, müssen sich die Terme mit  $q \neq 0$  im Nenner wegheben. Für den verbleibenden Fall  $p = i$  tritt in  $\mathcal{A}_{m,i}$  nur der Term

$$B_i'' \psi (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \psi} + 2B_i' \psi \left[ (1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \psi} \right] + 2B_i \left[ \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \psi^2 \Delta_m \right] \quad (3.8)$$

auf. Es folgt daraus, daß  $\phi_{i+2}$  ein Polynom in  $\eta$  ist, wenn  $B_i$  ein solches Polynom ist. In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, daß dies mit der Oberflächenbedingung verträglich ist.

### 3.2.3 Spiegelsymmetrie

Die Funktionen  $\phi_2$  sind nicht nur Polynome in  $\eta$ , sondern auch gerade Funktionen davon. Die Differentialoperatoren  $\mathcal{D}_m$  und  $\mathcal{A}_{m,l}$  beinhalten erste Ableitungen nach  $\eta$ , die mit einem Faktor  $\eta$  multipliziert werden, sowie zweite Ableitungen multipliziert mit  $(1 - \eta^2)$ . Wenn solche Terme auf gerade Funktionen wirken, entstehen wiederum gerade Funktionen. Die restlichen Terme der Operatoren beinhalten Oberflächenterme  $B_l$  und Ableitungen davon. Aus der Oberflächenbedingung folgt, daß  $B_l$  gerade Funktionen von  $\eta$  sind. Da in  $\mathcal{A}_{m,l}$  die ersten Ableitungen von  $B_l$  mit ungeraden Termen und die zweiten Ableitungen mit geraden Termen multipliziert werden, bekommt man als Quelle für  $\phi_4$  gerade Funktionen in  $\eta$ . Die Orthogonalitätsrelationen der Gegenbauer-Polynome führen dazu, daß  $\phi_4$  gerade Funktionen von  $\eta$  sind. Dies setzt sich in höheren Ordnungen fort, so daß jede metrische Funktion  $\phi_i$  ein gerades Polynom in  $\eta$  ist. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Form der Oberfläche, die hier gewählt wurde. Physikalisch bedeutet dies, daß jede axialsymmetrische, stationäre, relativistische Lösung konstanter Dichte, die stetig mit dem Maclaurin-Ellipsoid zusammenhängt, Spiegelsymmetrie bezüglich der Äquatorebene besitzt.

## 3.3 Bestimmung der Oberfläche

Unter Verwendung von Gln. (2.14), (2.15) und (2.17) kann man eine Gleichung für den Druck in  $i$ -ter Ordnung in Abhängigkeit von  $S_{ji}$ ,  $\tilde{\Omega}_{i+1}$  und  $\gamma_{i+2}$  herleiten. Man entwickelt den Druck nach  $\eta$  (der Ausdruck ist ein gerades Polynom  $i$ -ten Grades in  $\eta$ ) und setzt die Koeffizienten für  $\psi = \xi_s$  gleich null, um  $S_{ji}$  und  $\tilde{\Omega}_{i+1}$  bzw.  $\gamma_{i+2}$  zu bestimmen (die noch unbestimmte Konstante kann beliebig gewählt werden, siehe Abschnitt 4.2 und Tabelle 4.4).

Für die Überlegungen im Abschnitt 3.5.2 wird es günstig sein eine Formulierung für den Druck zu benutzen, die die Abhängigkeit von  $S_{ji}$  hervorhebt. Wir schreiben

$$P_i(\psi, \eta) = A \left( -v_{i+2}(\psi, \eta) + \tilde{\Omega}_1^2 (1 - \eta^2) \psi^2 B_i(\eta) + a_i(\psi, \eta) \right)$$

für den Druck auf, wobei  $A$  eine Konstante ist und die Funktion  $a_i(\psi, \eta)$  von den metrischen Funktionen  $\phi_j$ ,  $j \leq i$ , aber nicht von der unbekanntenen Oberfläche abhängt. Die Bedingung, daß der Druck auf der Oberfläche verschwindet, lautet

$$\tilde{\Omega}_1^2 (1 - \eta^2) \xi_s^2 B_i(\eta) = v_{i+2}(\xi_s, \eta) - a_i(\xi_s, \eta).$$

Die explizite  $B_i$ -Abhängigkeit von  $v_{i+2}$  entnimmt man dem Operator aus Gl. (3.8) angewandt

auf  $v_2$ . Wir werden die Integrale, die aus Gl. (2.12) zur Bestimmung von  $v_{i+2}$  kommen, nicht auswerten, um eine Integrodifferentialgleichung für  $B_i$  zu erhalten, die in eine Integralgleichung umgeformt werden kann, indem Relationen zwischen den Gegenbauer-Polynomen und ihren Ableitungen verwendet werden. Diese Integralgleichung lautet

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_1^2(1-\eta^2)\xi_s^2 B_i(\eta) &= -\sum_{l=0}^{\infty} K_l^2 C_l^{1/2}(\eta) \int_{-1}^1 C_l^{1/2}(\tilde{\eta}) B_i(\tilde{\eta}) \\
&\left\{ h_l^2(\xi_s) \int_0^{\xi_s} g_l^2(\psi) \left[ 2\tilde{\eta}\psi(\dot{v}_2^i)' - \psi(1-\tilde{\eta}^2)(\dot{v}_2^i)'' + 2\dot{v}_2^i \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3\psi^2}{\xi_s\sqrt{1+\xi_s^2}} - l(l+1)\psi\dot{v}_2^i \right] d\psi \right. \\
&\quad \left. + g_l^2(\xi_s) \int_{\xi_s}^{\infty} h_l^2(\psi) \left[ 2\tilde{\eta}\psi(\dot{v}_2^a)' - \psi(1-\tilde{\eta}^2)(\dot{v}_2^a)'' + 2\dot{v}_2^a \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - l(l+1)\psi\dot{v}_2^a \right] d\psi \right\} d\tilde{\eta} + b_i(\eta) \\
&=: \sum_{l=0}^{\infty} K_l^2 C_l^{1/2}(\eta) \int_{-1}^1 f_l(\tilde{\eta}) B_i(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} + b_i(\eta) \tag{3.9}
\end{aligned}$$

und ist eine Fredholmsche Gleichung zweiter Art. Die Funktion  $b_i(\eta)$  besteht aus  $a_i$  plus dem Anteil von  $v_{i+2}$ , der nicht von  $B_i$  abhängt, und ist ein bekanntes Polynom der Ordnung  $i+2$  in  $\eta$ . Die Funktion  $f_l(\eta)$  besteht aus dem Gegenbauer-Polynom  $C_l^{1/2}(\eta)$  multipliziert mit einem Polynom zweiten Grades. Deshalb bekommt man eine konsistente Lösung dieser Gleichung, wenn man  $B_i(\eta)$  als Polynom  $i$ -ten Grades ansetzt (in Gl. (3.1) gilt also  $l_k = k$ ). Darüberhinaus weiß man, daß  $B_i(\eta)$  eine gerade Funktion ist. Vergleicht man die Koeffizienten von  $C_l^{1/2}$ , so bekommt man ein lineares algebraisches Gleichungssystem mit  $i+2$  Gleichungen, um die  $i+1$  Konstanten  $S_{0i} \dots S_{ii}$  zu bestimmen (bei dieser Aufzählung werden die trivialen Gleichungen für ungerades  $i$  mitgezählt). Zusätzlich erhält man eine Gleichung, die entweder zur Bestimmung von  $\gamma_{i+2}$  oder von  $\tilde{\Omega}_{i+1}$  verwendet werden kann, wie ausführlicher in Abschnitt 4.2 diskutiert wird. Es ergibt sich, daß die rechte Seite von Gl. (3.9) in Übereinstimmung mit Gl. (3.7) für  $\eta = 1$  verschwindet.

### 3.4 Das vollständige Rekursionsverfahren

Nachdem im letzten Abschnitt die Konsistenz des Oberflächenansatzes (3.1) gezeigt wurde, ist das Verfahren für eine beliebige PN-Ordnung gesichert. Den Induktionsbeweis, der dies belegt, wollen wir kurz skizzieren.

Die erste PN-Ordnung gilt natürlich als Induktionsanfang. Sei die  $(i - 1)$ -te PN-Ordnung der PN-Näherung bekannt. Im Einklang mit der ersten Ordnung seien die metrischen Funktionen Polynome  $(i - 1)$ -ter Ordnung in  $\eta^2$ . Ferner sollten sich diese Funktionen für  $\psi \rightarrow \infty$  (oder äquivalenterweise  $\xi \rightarrow \infty$ ) wie  $v = O(1/\psi)$ ,  $\mu = O(1/\psi)$ ,  $\lambda + v = O(1/\psi^2)$  und  $\tilde{\omega} = O(1/\psi^3)$  verhalten. So sind die (asymptotischen) Voraussetzungen aus Abschnitt 2.1.2 erfüllt, und das erweiterte Poisson-Integral kann in der angegebenen Form verwendet werden. Die Feldgleichungen (2.16) garantieren, daß dieses asymptotische Verhalten in  $i$ -ter PN-Ordnung beibehalten wird. Da die Ordnung in  $\eta$  mit der in  $\varepsilon$  sowohl bei den metrischen Funktionen als auch bei der Koordinatentransformation (3.2) übereinstimmt, sorgen die Orthogonalitätsrelationen der Gegenbauerpolynome beim erweiterten Poisson-Integral dafür, daß die metrischen Funktionen in  $i$ -ter PN-Ordnung Polynome  $i$ -ter Ordnung in  $\eta^2$  sind. Diese Eigenschaft wurde bereits in Abschnitt 3.2.2 diskutiert. Die Konstanten können (bis auf eine beliebige Vorgabe) aus der Oberflächenbedingung bestimmt werden und die  $i$ -te PN-Ordnung ist somit vollständig gelöst.<sup>4</sup> Damit sind die Einstein-Gleichungen in  $i$ -ter Ordnung, d. h.

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + O(\varepsilon^{2i+2})$$

explizit gelöst.

### 3.5 Singularitäten im Parameterraum

Der Koeffizientenvergleich aus Gl. (3.9) für  $C_l^{1/2}(\eta)$  ergibt

$$\int_{-1}^1 C_l^{1/2}(\tilde{\eta}) \left[ \xi_s^2 \tilde{\Omega}_1^2(1 - \tilde{\eta}^2) - \bar{f}_l(\tilde{\eta}) \right] B_l(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} = \int_{-1}^1 C_l^{1/2}(\tilde{\eta}) b_l(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}$$

mit

$$\bar{f}_l(\eta) := f_l(\eta) / C_l^{1/2}(\eta).$$

---

<sup>4</sup>Es könnte sein, daß Integrale über  $\psi$  aus dem erweiterten Poisson-Integral nicht explizit zu lösen sind, aber dies wäre ein technisches und kein prinzipielles Problem.

Wenn man  $B_i = \sum_{k=0}^i S_{ki} C_k^{1/2}(\eta)$  aus Gl. (3.1) einsetzt, bekommt man für  $l = i + 1$  die Gleichung

$$S_{ii} \int_{-1}^1 C_{i+2}^{1/2}(\tilde{\eta}) C_i^{1/2}(\tilde{\eta}) \tilde{\eta}^2 \left[ \xi_s^2 \tilde{\Omega}_1^2 - q_{i+2} \right] d\tilde{\eta} = \int_{-1}^1 C_{i+2}^{1/2}(\tilde{\eta}) b_i(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}, \quad (3.10)$$

wobei  $q_{i+2}$  durch

$$\tilde{f}_{i+2}(\eta) = \sum_{n=0}^1 \tilde{q}_{2n, i+2} \eta^{2n}, \quad q_{i+2} := \tilde{q}_{2, i+2}$$

definiert wird. Division durch die Konstante  $\alpha_i := \int_{-1}^1 C_{i+2}^{1/2}(\tilde{\eta}) C_i^{1/2}(\tilde{\eta}) \tilde{\eta}^2 d\tilde{\eta}$  ergibt

$$\left[ \xi_s^2 \tilde{\Omega}_1^2 - q_{i+2} \right] S_{ii} = \alpha_i^{-1} \int_{-1}^1 C_{i+2}^{1/2}(\tilde{\eta}) b_i(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} =: t_i(\xi_s) \quad (3.11)$$

$\Leftrightarrow$

$$S_{ii} = \frac{t_i(\xi_s)}{\xi_s^2 \tilde{\Omega}_1^2 - q_{i+2}}. \quad (3.12)$$

Wir werden in Abschnitt 3.5.2 die Nullstellen des Nenners von Gl. (3.12) bestimmen, um zu zeigen, daß die  $S_{ii}$  singular werden an den Stellen  $\xi_{i+2}^*$ , die mit dem Anfang der marginalen säkularen Instabilität der Maclaurin-Lösung zusammenhängen. Zunächst aber folgt ein kurzer Diskurs über diese Instabilitäten.

### 3.5.1 Säkulare Instabilitäten der Maclaurin-Lösung

In einer ausführlichen Arbeit aus dem Jahre 1885 studierte Poincaré [30] Gleichgewichtsfiguren mit starrer Rotation und konstanter Dichte und deren (säkulare) Stabilität. Insbesondere berechnete er bis zur zweiten Ordnung die Änderung der Energie bei Deformation der Oberflächengestalt. Er konzentrierte sich hauptsächlich auf die zweite harmonische, nicht-axialsymmetrische Störungsmoden. Chandrasekhar [7, 8], untersuchte hingegen unter anderem die vierte axialsymmetrische Mode und lieferte einen Zahlenwert für die Exzentrizität ab der eine Instabilität einsetzt. Bardeen [6] leitete die Formeln zur Bestimmung der marginalen säkularen bzw. dynamischen Instabilität her. Hachisu und Eriguchi [13] verallgemeinerten seine Gleichungen für beliebige Störungsmoden. Numerische Ergebnisse [11, 3] bestätigen, daß die Lösungen dieser Gleichungen die Bifurkationspunkte der Maclaurin-Kurve darstellen.

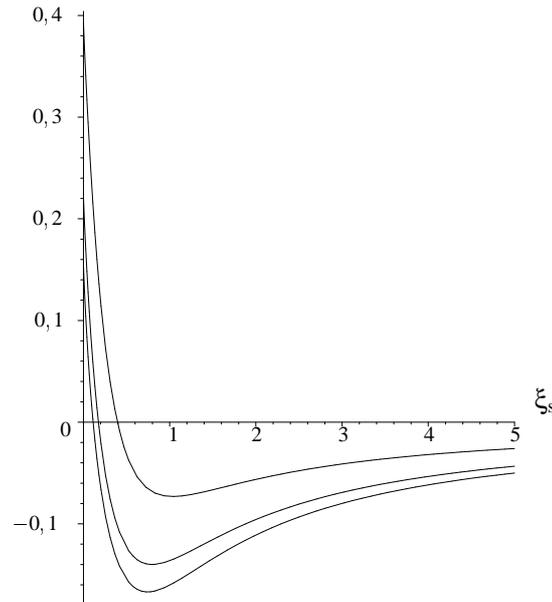


Abbildung 3.2: Der Verlauf der linken Seite von Gl. (3.13) für  $l = 1$  (obere Kurve),  $l = 2$  (mittlere Kurve) und  $l = 3$  (untere Kurve). Für jedes  $l$  gibt es genau ein  $\xi_{2l}^*$ , das eine Lösung von Gl. (3.13) ist. Die Lösungen häufen sich bei  $\xi_s = 0$ .

Mit Hilfe einer Variationsrechnung konnte Bardeen [5] den Energieunterschied zwischen einem starr und einem differentiell rotierenden Körper in zweiter Ordnung angeben. Die Nullpunkte des Energieunterschieds treten an den Stellen  $\xi_{2l}^*$ ,  $l \geq 2$ , auf, welche Lösungen der Gleichung

$$G_{2l}(\xi_s) := g_{2l}^2(\xi_s) h_{2l}^2(\xi_s) - \xi_s (1 - \xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s)) = 0 \quad (3.13)$$

sind. Ab diesen Stellen setzen säkulare Instabilitäten für die Maclaurin-Ellipsoide ein. Es gibt für jedes  $l$  genau eine Lösung dieser Gleichung (siehe Abb. 3.2). Die ersten fünf numerischen Werte für  $\xi_{2l}^*$ , die zugehörigen Exzentrizitäten  $e_{2l}^* := 1/\sqrt{1 + (\xi_{2l}^*)^2}$  sowie die zugehörigen Newtonschen Radienverhältnisse sind in Tabelle 3.1 zu finden.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>An der Stelle  $\xi_2^*$  wird  $\Omega_N/\sqrt{Q}$  (siehe Abb. 2.2) maximal. Die PN-Entwicklung wird an dieser Stelle für die Wahl  $\tilde{\Omega}_i = 0$ ,  $i > 1$  singular. Da diese Wahl natürlich nicht zwingend ist, spricht Bardeen in [6] von einer „künstlichen Singularität“ („artificial singularity“) bei  $\xi_2^*$ .

$l$	$\xi_{2l}^*$	$e_{2l}^*$	$r_p/r_{\text{ä}}$
1	0,39536467	0,92995569	0,36767162
2	0,17383011	0,98522554	0,17126187
3	0,11230482	0,99375285	0,11160323
4	0,08303471	0,99657034	0,08274493
5	0,06588682	0,99783651	0,06574427

Tabelle 3.1: Die ersten fünf numerischen Werte für die Lösung von Gl. (3.13).

### 3.5.2 Bestimmung der Singularitäten

Für eine beliebige Funktion  $f = f(\psi)$  führen wir die Notation  $\bar{f} := f(\psi = \xi_s)$  ein und schreiben  $q_{2k}$  aus Gl. (3.12) als Summe von zwei Integralen<sup>6</sup>

$$q_{2k} = \frac{3\sqrt{1 + \xi_s^2}}{2} \left( \bar{h}_{2k}^2 \int_0^{\xi_s} g_{2k}^2 V_{2k} d\psi + \bar{g}_k^2 \int_{\xi_s}^{\infty} h_{2k}^2 W_{2k} d\psi \right)$$

mit

$$V_{2k} := \left( 3 \operatorname{arccot}(\xi_s)(1 + \xi_s^2) - \frac{1}{\xi_s}(2 + 3\xi_s^2) \right) \left( \frac{1}{2}(2k+3)(2k-2)\psi^2 - 1 \right)$$

und

$$W_{2k} := 3 \operatorname{arccot}(\psi) (k(2k+1) - 3\psi^2 + 1) - \frac{\psi(3\psi^2 + 2)k(2k+1)}{(1 + \psi^2)} - \frac{\psi(9\psi^4 + 18\psi^2 + 11)}{(1 + \psi^2)^2}.$$

Wir wollen zeigen, daß

$$\tilde{\Omega}_1^2 \xi_s^2 - q_{2k} = \frac{3}{2\sqrt{1 + \xi_s^2}} \left( \bar{g}_k^2 \bar{h}_{2k}^2 - \xi_s(1 - \xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s)) \right) \quad (3.14)$$

<sup>6</sup>Wir erinnern daran, daß  $i$  aus Gl. (3.12) gerade ist und dürfen deshalb  $q_{2k}$  anstatt  $q_k$  schreiben.

gilt. Da das zweite Integral (über  $W_{2k}$ ) nicht einfach zu lösen ist, formen wir obige Gleichung um und erhalten

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left[ \frac{\bar{h}_{2k}^2}{\bar{g}_{2k}} \int_0^{\xi_s} g_{2k}^2 V_{2k} d\psi + \int_{\xi_s}^{\infty} h_{2k}^2 W_{2k} d\psi \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left[ \frac{-2\tilde{\Omega}_1^2 \xi_s^2}{\bar{g}_{2k}^3 \sqrt{1+\xi_s^2}} + \frac{\bar{h}_{2k}^2}{(1+\xi_s^2)} - \frac{\xi_s (1 - \xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s))}{\bar{g}_{2k} (1+\xi_s^2)} \right] \\
&\iff \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left[ \frac{\bar{h}_{2k}^2}{\bar{g}_{2k}} \int_0^{\xi_s} g_{2k}^2 V_{2k} d\psi \right] - \bar{h}_{2k}^2 \bar{W}_{2k} \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left[ \frac{-2\tilde{\Omega}_1^2 \xi_s^2}{\bar{g}_{2k}^3 \sqrt{1+\xi_s^2}} + \frac{\bar{h}_{2k}^2}{(1+\xi_s^2)} - \frac{\xi_s (1 - \xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s))}{\bar{g}_{2k} (1+\xi_s^2)} \right]. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Hier dürfen wir uns auf die Ableitung nach  $\xi_s$  beschränken, denn beide Seiten von Gl. (3.14) verschwinden für  $\xi_s \rightarrow \infty$  und unterscheiden sich also nicht um eine Konstante bezüglich  $\xi_s$ . Mit partieller Integration bekommt man

$$\begin{aligned}
I_{2k} := \int_0^{\xi_s} g_{2k}^2 V_{2k} d\psi &= \bar{\alpha}_{2k} \left[ -(3\xi_s^2 + 1) + k(2k+1)\xi_s^2 \right] \\
&\quad + (2k+3)(2k-2)(\bar{\delta}_{2k} - \bar{\beta}_{2k}\xi_s),
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\alpha_{2k} &:= \int_0^{\psi} g_{2k}^2(\psi') d\psi' = \frac{-1}{2k} (\psi g_{2k}^2 + i g_{2k+1}^2), \\
\beta_{2k} &:= \int_0^{\psi} \alpha_{2k}(\psi') d\psi' = \frac{1}{2k(2k-1)(k+1)} \left[ (k(1+\psi^2) + \psi^2) g_{2k}^2 + i\psi g_{2k+1}^2 \right] \\
&\quad + \frac{(-1)^{k+1} \Gamma(k - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(k+2)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta_{2k} &:= \int_0^\psi \beta_{2k}(\psi') d\psi' \\ &= \frac{-[(k(1+\psi^2)(1+2k) + 3\psi^2 - 1)(\psi g_{2k}^2 + i g_{2k+1}^2) + 4k(1+\psi^2)\psi g_{2k}^2]}{4k(k^2-1)(2k-1)(2k+3)} \\ &\quad + \frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k-\frac{1}{2})\psi}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+2)}.\end{aligned}$$

Wenn  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  und  $\delta_{2k}$  eingesetzt werden, erhält man

$$I_{2k} = \frac{-\xi_s^2}{2k} (2k+1) (\xi_s \bar{g}_k^2 + i \bar{g}_{k+1}^2) - \xi_s (1 + \xi_s^2) \bar{g}_k^2.$$

Unter Verwendung der Wronski-Determinante

$$h_{2k}^2 \frac{d}{d\psi} g_{2k}^2 - g_{2k}^2 \frac{d}{d\psi} h_{2k}^2 = \frac{1}{1+\psi^2}$$

kann man die linke Seite von Gl. (3.15) multipliziert mit  $(\bar{g}_k^2)^2 (1 + \xi_s^2)^2$  in der Form

$$\begin{aligned}(\bar{g}_k^2)^2 (1 + \xi_s^2)^2 &\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left[ \frac{\bar{h}_{2k}^2}{\bar{g}_k^2} I_{2k} \right] - \bar{h}_{2k}^2 \bar{W}_{2k} \right\} \\ &= -\bar{h}_{2k}^2 [(2k+3)\xi_s (\bar{g}_k^2)^2 + i(2k+1) \bar{g}_k^2 \bar{g}_{k+1}^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} [3\xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s)(1 + \xi_s^2) - 3\xi_s^2 - 2] \\ &\quad \left[ (2k\xi_s^2 + 2 + 3\xi_s^2) \bar{g}_k^2 + i(2k+1)\xi_s \bar{g}_{k+1}^2 \right]\end{aligned}\tag{3.16}$$

schreiben. Für die rechte Seite von Gl. (3.15) multipliziert mit dem Faktor  $\left[ \bar{g}_k^2 (1 + \xi_s^2) \right]^2$  erhält man

$$\begin{aligned}(\bar{g}_k^2)^2 (1 + \xi_s^2)^2 &\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left[ \frac{-2\tilde{\Omega}_1^2 \xi_s^2}{\bar{g}_k^2 3\sqrt{1+\xi_s^2}} + \frac{\bar{h}_{2k}^2}{(1+\xi_s^2)} - \frac{\xi_s (1 - \xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s))}{\bar{g}_k^2 (1 + \xi_s^2)} \right] \right\} \\ &= -\bar{h}_{2k}^2 [(2k+3)\xi_s (\bar{g}_k^2)^2 + i(2k+1) \bar{g}_k^2 \bar{g}_{k+1}^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} [3\xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s)(1 + \xi_s^2) - 3\xi_s^2 - 2] \\ &\quad \left[ (2k\xi_s^2 + 2 + 3\xi_s^2) \bar{g}_k^2 + i(2k+1)\xi_s \bar{g}_{k+1}^2 \right].\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt worden, daß Gl. (3.14) gilt.

Die Funktion  $t_i(\xi_s)$  aus Gl. (3.12) wird nicht null<sup>7</sup> an der Stelle  $\xi_i^*$ . Dagegen zeigt der Vergleich mit Gl. (3.13), daß der Nenner von Gl. (3.14) gerade an dieser Stelle null wird. Demzufolge wächst  $S_{ii}$  unbeschränkt (wird also singular). Die anderen  $S_{ji}$  werden durch das lineare algebraische Gleichungssystem, das sich aus Gl. (3.9) ergibt, bestimmt. Es folgt daraus, daß alle  $S_{ji}$ ,  $j \leq i$  einen Pol erster Ordnung an der Stelle  $\xi_{i+2}^*$  besitzen. Sie besitzen aber auch Pole an den Stellen  $\xi_{k+2}^*$  für  $k < i$ . Diese Pole sind aber nicht erster Ordnung, da die Terme  $S_{lk}$  in der Quelle der erweiterten Poisson-Gleichung und dadurch auch in  $b_i$  vorkommen. Die Ordnung dieser Pole, das Verhalten der Konstanten in der Nähe einer Singularität und die physikalische Bedeutung davon werden anhand konkreter Beispiele in Abschnitt 4.5 behandelt, nachdem wir die PN-Näherung bis zur vierten Ordnung diskutiert haben.

---

<sup>7</sup>Aus Gl. (3.11) wird plausibel, daß  $t_i$  und  $\xi_s^2 \tilde{\Omega}_1^2 - q_{i+2}$  nicht gleichzeitig null werden können. Wenn beide Seiten von Gl. (3.11) verschwinden würden, so würde eine beliebige Abweichung gegenüber der Oberfläche der letzten Ordnung von der Form  $S_{ii} C_i^{1/2}(\eta)$  zu einer konsistenten neuen Lösung führen. Nur an der Stelle  $\xi_{i+2}^*$  im Parameterraum würde die hydrostatische Gleichung nicht vorschreiben, wie sich die Materie im Stern verteilen muß, um auf eine stationäre Lösung zu führen.

## 4 Untersuchung der ersten vier post-Newtonschen Ordnungen

Mit Hilfe der im letzten Kapitel vorgestellten Methoden wurden die Newtonsche Lösung und die ersten vier post-Newtonschen Ordnungen explizit berechnet. Diese Ergebnisse werden in diesem Kapitel verwendet, um die physikalischen Eigenschaften des Sternmodells zu studieren, um die Konvergenz der PN-Näherung „experimentell“ zu untersuchen und um einen Vergleich mit numerischen Ergebnissen anzustellen. Wegen der extremen Länge der Ausdrücke<sup>1</sup> in den höheren Ordnungen werden explizite Formeln nur bis zur ersten Ordnung angegeben. Informationen über die höheren Ordnungen entnimmt man den Tabellen aus Anhang B.

### 4.1 Bezeichnung der Ordnungen

Die Bezeichnung der Ordnungen erfolgt gemäß dem in [21] S. 1077 verwendeten Standard. Bei der Entwicklung der Metrik redet man von der „ $n$ -ten PN-Näherung“, wenn  $g_{44}$  bis zur Ordnung  $(v/c)^{2n+2}$ ,  $g_{i4}$  bis  $(v/c)^{2n+1}$  und die anderen metrischen Funktionen bis zur Ordnung  $(v/c)^{2n}$  entwickelt werden. Die Entwicklung von  $g_{i4}$ , also „Mischtermen“ von Raum und Zeit, darf nur ungerade Potenzen in  $v/c$  enthalten, da diese Funktionen unter Zeitumkehr  $t \mapsto -t$  das Vorzeichen ändern müssen (siehe z.B. [35] S. 214). Es kommen aber nur gerade Potenzen bei  $\tilde{\omega} = \omega/\Omega$  vor (siehe Abschnitt 3.2.1), da das Vorzeichen von  $\Omega$  sich bei Zeitumkehr auch ändert. In dieser Arbeit beinhaltet die  $n$ -te PN-Näherung deshalb  $v$  und  $\gamma$  bis zur Ordnung  $\varepsilon^{2n+2}$ ,  $\tilde{\Omega}$  bis  $\varepsilon^{2n+1}$  und  $\lambda$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $\mu$  und die Oberflächenfunktionen  $S_{ij}$  bis  $\varepsilon^{2n}$ .

Demzufolge ist mit der „nullten“, „Newtonschen“ oder „Maclaurin-Lösung“ diejenige aus Abschnitt 2.3.2 gemeint, bei der nur  $v_2$ ,  $\gamma_2$  und  $\tilde{\Omega}_1$  auftreten. Hingegen ist mit dem „Newtonschen Grenzfall“ der Fall gemeint, bei dem die Newtonsche mit der relativistischen Lösung übereinstimmt. Streng genommen ist dies nur für verschwindende Masse (also für den leeren Raum) der Fall. Mathematisch erhält man diesen Grenzfall für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Wenn man  $Q$  vorgibt und endliche Ausdehnung (d. h.  $\xi_s$  endlich) fordert, dann werden  $a_0 \rightarrow 0$  und  $\gamma \rightarrow 0$  und für die physikalischen Größen aus Abschnitt 4.4.1 werden  $M \rightarrow 0$ ,  $M_0 \rightarrow 0$ ,  $J \rightarrow 0$ ,  $P_z \rightarrow 0$  und  $Z_p \rightarrow 0$ .

---

<sup>1</sup>In „Maple internal format“ sind die metrischen Funktionen in zweiter Ordnung etwa 130kB und in vierter Ordnung schon ca. 20MB lang.

Die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und das Radienverhältnis  $r_p/r_a$  können alle Newtonschen Werte annehmen, aber verlieren in dem vollzogenen Limes jede physikalische Bedeutung. In der Nähe des Newtonschen Grenzfalles, also für  $\varepsilon \ll 1$ , stellt die Newtonsche Lösung eine gute Näherung zur relativistischen Lösung dar.

## 4.2 Überprüfung der Näherung

Die Ergebnisse wurden in  $\psi$ - $\eta$ -Koordinaten mit den Computerprogrammen Maple und Mathematica berechnet. Die Potentiale  $v$ ,  $\lambda$  und  $\tilde{\omega}$  bestimmten wir durch Lösung der erweiterten Poisson-Gleichung und  $\mu$  mittels eines Linienintegrals über  $\eta$ . Die Konstanten  $S_{ji}$  und  $\tilde{\Omega}_{i+1}$  gewannen wir aus dem Gleichungssystem (3.9). Statt  $\tilde{\Omega}_{i+1}$  hätte man bei Bedarf genauso  $\gamma_{i+2}$  bestimmen können. Will man beispielsweise den Drehimpuls über der Gesamtmasse bei festgehaltenem  $\gamma$  auftragen, so bestimmt man  $\tilde{\Omega}_{i+1}$  und benutzt die Freiheit für die Wahl von  $\gamma$ , um  $\gamma_j = 0$  für  $j > 2$  festzulegen und damit das Festhalten von  $\gamma$  zu erleichtern. Will man aber diesen Graph bei festgehaltenem  $\tilde{\Omega}$  zeichnen, so ist es am einfachsten,  $\gamma$  zu bestimmen und  $\tilde{\Omega}_k = 0$  für  $k > 1$  zu setzen. Der Einfluß dieser Wahlmöglichkeit auf die PN-Näherung wird in Kapitel 4.6.3 untersucht.

Die Gültigkeit der hier bestimmten metrischen Funktionen ist mehrfach abgesichert:

- Es wurde überprüft, daß die metrischen Funktionen Lösungen der (in das Maple Programm eingeflossenen) Feldgleichungen sind. Kontrolliert wurde auch, daß die Potentiale und ihre Normalenableitungen am Rande des Sternes stetig übergehen und regulär sind sowie das richtige asymptotische Verhalten haben.
- Es wurde gezeigt, daß die metrischen Funktionen im Scheibengrenzfall<sup>2</sup> mit denen aus [29] übereinstimmen.
- Die Gesamtmasse und der Drehimpuls können zum einen durch Integrieren über den Körper und zum anderen über das Fernfeld bestimmt werden, siehe Gln. (4.1–4.6). Bei dem ersten Rechenweg fließen alle vier metrischen Funktionen  $\phi^i$  mit ein und bei dem zweiten  $v^a$  und  $\tilde{\omega}^a$ . Die Übereinstimmung der beiden Rechenwege wurde explizit bis zur vierten Ordnung für die Gesamtmasse und bis zur dritten Ordnung (siehe Fußnote 7, S. 47) für den Drehimpuls nachgeprüft.
- Letztlich zeigt der Vergleich mit numerischen Werten (siehe Abschnitt 4.6.3) die klare Tendenz, gegen die richtige Lösung zu laufen.

<sup>2</sup>In diesem Grenzfall geht  $\xi_s \rightarrow 0$  und die Massendichte verhält sich wie  $Q \propto 1/\xi_s$ , siehe Fußnote 4 auf Seite 14.

### 4.3 Die volle Lösung bis zur ersten Ordnung

Wir geben die Terme  $\phi_2$  explizit in  $\psi$ - $\eta$ -Koordinaten an. Diese können unter Verwendung von Anhang A mit der Darstellung in  $\xi$ - $\eta$ -Koordinaten aus Kapitel 2.3 verglichen werden.<sup>3</sup> Man bekommt mit den Abkürzungen

$$\beta := \operatorname{arccot}(\xi_s) \text{ und } \chi := \operatorname{arccot}(\psi)$$

$$\begin{aligned} v_2^i &= \frac{-\sqrt{1+\xi_s^2}}{2} \left( \beta + \frac{(\xi_s^2 - \psi^2)}{2\xi_s(1+\xi_s^2)} \right) C_0^{1/2}(\eta) \\ &\quad + \frac{\sqrt{1+\xi_s^2}}{4} \left( -(1+3\psi^2)\beta + \frac{2\psi^2 + 3\psi^2\xi_s^2 + \xi_s^2}{\xi_s(1+\xi_s^2)} \right) C_2^{1/2}(\eta), \end{aligned}$$

$$v_2^a = \frac{-1}{2} \sqrt{1+\xi_s^2} \chi C_0^{1/2}(\eta) + \frac{\sqrt{1+\xi_s^2}}{4} (3\psi - (1+3\psi^2)\chi) C_2^{1/2}(\eta),$$

$$\lambda_2^i = \mu_2^i = -v_2^i,$$

$$\lambda_2^a = \mu_2^a = -v_2^a,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2^i &= \frac{3(1+\xi_s^2)^{3/2}}{5} \left( \beta - \frac{\psi^2 + \xi_s^4}{\xi_s(1+\xi_s^2)^2} \right) C_0^{3/2}(\eta) + \frac{(1+\xi_s^2)^{3/2}}{20} \left( 3(5\psi^2 + 1)\beta \right. \\ &\quad \left. - \frac{8\psi^2 + 3\xi_s^4 + 15\psi^2\xi_s^4 + 5\xi_s^2 + 25\psi^2\xi_s^2}{\xi_s(1+\xi_s^2)^2} \right) C_2^{3/2}(\eta) \end{aligned}$$

und

$$\tilde{\omega}_2^a = \frac{3(1+\xi_s^2)^{3/2}}{5} \left( \chi - \frac{\psi}{1+\psi^2} \right) C_0^{3/2}(\eta)$$

<sup>3</sup>Da  $\xi = \psi$  bis zur ersten Ordnung in  $\varepsilon$  gilt, müssen die Ausdrücke für  $\phi_2$  hier mit denen aus Kapitel 2.3 übereinstimmen, wenn man  $\psi$  durch  $\xi$  ersetzt.

$$+ \frac{3(1 + \xi_s^2)^{3/2}}{20} \left( (5\psi^2 + 1)\chi - \frac{\psi(15\psi^2 + 13)}{1 + \psi^2} \right) C_2^{3/2}(\eta).$$

Hier verwenden wir die bereits eingeführte Bezeichnung  $\phi^i$  für eine Funktion im Innenraum ( $\psi < \xi_s$ ) und  $\phi^a$  für eine im Außenraum ( $\psi \geq \xi_s$ ). Die Funktionen sind alle stetig, also gilt  $\phi^i = \phi^a$  am Rande des Sternes ( $\psi = \xi_s$ ). Die metrischen Funktionen  $\phi_2$  sind Polynome zweiter Ordnung in  $\eta$ , wie auch aus den Überlegungen von Kapitel 3.2.2 folgt. Die Koeffizienten dieser Polynome hängen von  $\psi$  ab und haben die Form  $R_1(\psi)\operatorname{arccot}(\psi) + R_2(\psi)$ , wobei  $R_i$  rationale Funktionen von  $\psi$  sind. In Tabelle 4.1 sieht man was die  $\phi_j^a$  ( $j = 2, 4, 6$ ) für eine Struktur haben. Dabei sind die Koeffizienten von  $\operatorname{arccot}(\psi)^n$ , wo möglich, faktorisiert in Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, so daß Zähler und Nenner eines rationalen Ausdruckes keine gemeinsamen Nullstellen haben (d. h. in Normalform sind). Die nicht rationalen Ausdrücke sind ebenfalls mit elementaren Funktionen<sup>4</sup> darstellbar. Diese Terme beinhalten Potenzen von  $\delta := \sqrt{1 + \psi^2}$ , welche bei den Funktionen  $h_j^3$  vorkommen (siehe Anhang A). So hat beispielsweise der Koeffizient von  $(\operatorname{arccot}\psi)^0$  für die Funktion  $\mu_4^a$  (vgl. Spalte 1, Zeile 8 aus Tabelle 4.1) die Struktur  $(P_{11} + P_6\delta^5 + P_4\delta^7)/(P_2\delta^5)$ , wobei  $P_i$  ein Polynom  $i$ -ten Grades in  $\psi$  ist. Im Innenraum haben die metrischen Funktionen eine bemerkenswert einfache Struktur: Die  $\phi_j^i$  sind nicht nur gerade Polynome  $j$ -ten Grades in  $\eta$ , sondern auch in  $\psi$ .

Zur Beschreibung der ersten PN-Ordnung fehlen noch die Funktion  $v_4$  und die Oberflächenkonstanten sowie  $\tilde{\Omega}_3$  und  $\gamma_4$ . Wir werden  $\tilde{\Omega}_3$  und die Oberflächenkonstanten in Abhängigkeit von  $\gamma_4$  bestimmen und dürfen  $\gamma_4$  frei wählen. In den  $\psi$ - $\eta$ -Koordinaten enthält die Quelle der Poisson-Gleichung für  $v_4$ , und daher auch  $v_4$  selbst, eben diese Konstanten.<sup>5</sup> Für  $v_4$  bekommt man

$$\begin{aligned} v_4^i = & \left[ - \frac{3(1 + 3\xi_s^2 - 5\psi^2\xi_s^2 - 3\psi^2 + 15\eta^2\psi^2\xi_s^2 + 3\eta^2\xi_s^2 + 9\eta^2\psi^2 + \eta^2)\beta}{8\sqrt{1 + \xi_s^2}} \right. \\ & \left. + \frac{3(-\xi_s^2 + 3\eta^2\xi_s^2 - 5\psi^2\xi_s^2 + 15\eta^2\psi^2\xi_s^2 + 4\eta^2\psi^2)}{8\sqrt{1 + \xi_s^2}\xi_s} \right] S_{02} \\ & + \left[ -3(11 - 2136\eta^2\psi^2\xi_s^2 - 108\eta^2\xi_s^2 + 140\psi^2\xi_s^2 - 348\eta^2\psi^2 \right. \\ & \left. - 2268\xi_s^4\psi^2\eta^2 - 3150\eta^2\xi_s^4\psi^4 + 270\psi^4\xi_s^2 + 315\xi_s^4\psi^4 \right] \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Unter elementaren Funktionen verstehen wir die trigonometrischen, hyperbolischen und Exponentialfunktionen mit ihren Inversen.

<sup>5</sup>Dies ist bei den  $\xi$ - $\eta$ -Koordinaten nicht der Fall. Dort gehen die Oberflächenkonstanten in erster Ordnung nur durch die Integrationsgrenzen in die Funktion ein.

Funktion	Koeffizienten von			
	$(\operatorname{arccot}\psi)^0$	$(\operatorname{arccot}\psi)^1$	$(\operatorname{arccot}\psi)^2$	$(\operatorname{arccot}\psi)^3$
$v_2^a$	$P_1$	$P_2$	0	0
$\lambda_2^a + v_2^a$	0	0	0	0
$\tilde{\omega}_2^a$	$P_3/P_2$	$P_2$	0	0
$\mu_2^a$	$P_1$	$P_2$	0	0
$v_4^a$	$P_5/P_2$	$P_4$	0	0
$\lambda_4^a + v_4^a$	0	0	0	0
$\tilde{\omega}_4^a$	$P_7/P_4$	$P_6/P_2$	$P_4$	0
$\mu_4^a$	$K$	$P_4$	$P_4$	0
$v_6^a$	$K$	$K$	$P_6$	0
$\lambda_6^a + v_6^a$	$K$	0	0	0
$\tilde{\omega}_6^a$	$K$	$K$	$P_8/P_2$	$P_6$
$\mu_6^a$	$K$	$K$	$P_6$	0

Tabelle 4.1: Die Struktur der metrischen Funktionen im Außenraum bis  $\phi_6$ . Die Bezeichnung  $P_i$  steht für ein Polynom  $i$ -ten Grades in  $\psi$  und  $K$  für eine nicht-rationale Funktion von  $\psi$ .

$$\begin{aligned}
& + 126\psi^2\xi_s^4 - 18\xi_s^2 + 30\psi^2 - 21\xi_s^4 + 27\psi^4 + 2\eta^2 + 27\eta^4 \\
& - 126\xi_s^4\eta^2 + 3675\eta^4\xi_s^4\psi^4 + 3150\eta^4\psi^2\xi_s^4 + 2988\eta^4\psi^2\xi_s^2 \\
& + 3150\eta^4\psi^4\xi_s^2 + 315\eta^4\xi_s^4 + 270\eta^4\xi_s^2 + 558\eta^4\psi^2 \\
& - 2700\eta^2\psi^4\xi_s^2 + 315\eta^4\psi^4 - 270\eta^2\psi^4) \beta / (256\sqrt{1+\xi_s^2}) \\
& + 3(-3150\eta^2\xi_s^4\psi^4 + 165\psi^4\xi_s^2 + 315\xi_s^4\psi^4 + 315\eta^4\xi_s^4 + 165\eta^4\xi_s^2 \\
& + 192\eta^4\psi^2 - 1380\eta^2\psi^2\xi_s^2 - 1650\eta^2\psi^4\xi_s^2 - 2268\xi_s^4\psi^2\eta^2 \\
& - 66\eta^2\xi_s^2 + 98\psi^2\xi_s^2 - 64\eta^2\psi^2 + 126\psi^2\xi_s^4 - 11\xi_s^2 \\
& + 3675\eta^4\xi_s^4\psi^4 + 3150\eta^4\psi^2\xi_s^4 - 21\xi_s^4 - 126\xi_s^4\eta^2 \\
& + 1938\eta^4\psi^2\xi_s^2 + 1925\eta^4\psi^4\xi_s^2) / (256\sqrt{1+\xi_s^2\xi_s}) \Big] S_{22} \\
& + \left[ \frac{9(1-\psi^2+\eta^2+3\eta^2\psi^2)\sqrt{1+\xi_s^2}\beta}{8} \right. \\
& \left. - \frac{9(-\xi_s^2-\psi^2\xi_s^2+2\eta^2\psi^2+3\eta^2\psi^2\xi_s^2+\eta^2\xi_s^2)}{8\sqrt{1+\xi_s^2\xi_s}} \right] \gamma_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ 21(1 + \xi_s^2)^{(3/2)} \left( -\xi_s^2 - 6\eta^2 \xi_s^2 - 108\eta^2 \psi^2 \xi_s^2 + 6\psi^2 \xi_s^2 + 15\psi^4 \xi_s^2 \right. \right. \\
& + 15\eta^4 \xi_s^2 + 175\eta^4 \psi^4 \xi_s^2 - 150\eta^2 \psi^4 \xi_s^2 + 150\eta^4 \psi^2 \xi_s^2 - 90\eta^2 \psi^4 \\
& + 10\psi^2 + 90\eta^4 \psi^2 - 84\eta^2 \psi^2 + 105\eta^4 \psi^4 + 9\psi^4 - 10\eta^2 + 9\eta^4 - 7 \left. \right) \beta / 256 \\
& - 7 \left( -612\eta^2 \psi^2 \xi_s^2 - 324\xi_s^6 \psi^2 \eta^2 - 66\eta^2 \xi_s^2 + 66\psi^2 \xi_s^2 \right. \\
& - 96\eta^2 \psi^2 - 792\xi_s^4 \psi^2 \eta^2 - 1020\eta^2 \xi_s^4 \psi^4 + 18\xi_s^6 \psi^2 + 69\psi^4 \xi_s^2 \\
& + 102\xi_s^4 \psi^4 + 45\xi_s^6 \psi^4 + 60\psi^2 \xi_s^4 + 21\xi_s^2 + 6\xi_s^4 - 3\xi_s^6 - 18\xi_s^6 \eta^2 \\
& - 60\xi_s^4 \eta^2 + 1190\eta^4 \xi_s^4 \psi^4 + 1020\eta^4 \psi^2 \xi_s^4 + 690\eta^4 \psi^2 \xi_s^2 \\
& + 805\eta^4 \psi^4 \xi_s^2 + 102\eta^4 \xi_s^4 + 69\eta^4 \xi_s^2 + 96\eta^4 \psi^2 - 690\eta^2 \psi^4 \xi_s^2 \\
& + 128\eta^4 \psi^4 - 96\eta^2 \psi^4 + 525\eta^4 \xi_s^6 \psi^4 + 450\eta^4 \xi_s^6 \psi^2 \\
& \left. - 450\eta^2 \xi_s^6 \psi^4 + 45\eta^4 \xi_s^6 \right) / \left( 256 \sqrt{1 + \xi_s^2 \xi_s} \right) \Big] \tilde{\Omega}_1^2 \\
& - 45(1 + \xi_s^2) \left( 25 - 216\eta^2 \psi^2 \xi_s^2 - 12\eta^2 \xi_s^2 + 12\psi^2 \xi_s^2 + 12\eta^2 \psi^2 \right. \\
& - 324\xi_s^4 \psi^2 \eta^2 - 450\eta^2 \xi_s^4 \psi^4 + 30\psi^4 \xi_s^2 + 45\xi_s^4 \psi^4 + 18\psi^2 \xi_s^4 \\
& - 2\xi_s^2 - 22\psi^2 - 3\xi_s^4 + 9\psi^4 + 22\eta^2 + 9\eta^4 - 18\xi_s^4 \eta^2 \\
& + 525\eta^4 \xi_s^4 \psi^4 + 450\eta^4 \psi^2 \xi_s^4 + 300\eta^4 \psi^2 \xi_s^2 + 350\eta^4 \psi^4 \xi_s^2 \\
& + 45\eta^4 \xi_s^4 + 30\eta^4 \xi_s^2 + 90\eta^4 \psi^2 - 300\eta^2 \psi^4 \xi_s^2 + 105\eta^4 \psi^4 \\
& \left. - 90\eta^2 \psi^4 \right) \beta^2 / 1024 + 15 \left( -324\eta^2 \psi^2 \xi_s^2 - 972\xi_s^6 \psi^2 \eta^2 + 6\eta^2 \xi_s^2 \right. \\
& - 6\psi^2 \xi_s^2 + 48\eta^2 \psi^2 - 1296\xi_s^4 \psi^2 \eta^2 - 1800\eta^2 \xi_s^4 \psi^4 + 54\xi_s^6 \psi^2 \\
& + 57\psi^4 \xi_s^2 + 180\xi_s^4 \psi^4 + 135\xi_s^6 \psi^4 + 72\psi^2 \xi_s^4 - 39\xi_s^2 - 12\xi_s^4 - 9\xi_s^6 \\
& - 54\xi_s^6 \eta^2 - 72\xi_s^4 \eta^2 + 2100\eta^4 \xi_s^4 \psi^4 + 1800\eta^4 \psi^2 \xi_s^4 \\
& + 570\eta^4 \psi^2 \xi_s^2 + 665\eta^4 \psi^4 \xi_s^2 + 180\eta^4 \xi_s^4 + 57\eta^4 \xi_s^2 + 48\eta^4 \psi^2 \\
& - 570\eta^2 \psi^4 \xi_s^2 + 80\eta^4 \psi^4 - 48\eta^2 \psi^4 + 1575\eta^4 \xi_s^6 \psi^4 \\
& + 1350\eta^4 \xi_s^6 \psi^2 - 1350\eta^2 \xi_s^6 \psi^4 + 135\eta^4 \xi_s^6 \left. \right) \beta / (512\xi_s) \\
& - 15 \left( -96\eta^2 \psi^2 \xi_s^2 - 1944\xi_s^6 \psi^2 \eta^2 - 972\xi_s^8 \psi^2 \eta^2 - 1116\xi_s^4 \psi^2 \eta^2 \right. \\
& - 1470\eta^2 \xi_s^4 \psi^4 + 54\xi_s^8 \psi^2 + 108\xi_s^6 \psi^2 + 135\xi_s^8 \psi^4 + 147\xi_s^4 \psi^4 \\
& + 270\xi_s^6 \psi^4 + 78\psi^2 \xi_s^4 + 3\xi_s^4 - 9\xi_s^8 - 18\xi_s^6 - 108\xi_s^6 \eta^2 - 54\xi_s^8 \eta^2 \\
& - 78\xi_s^4 \eta^2 + 1715\eta^4 \xi_s^4 \psi^4 + 1470\eta^4 \psi^2 \xi_s^4 + 96\eta^4 \psi^2 \xi_s^2 \\
& \left. + 160\eta^4 \psi^4 \xi_s^2 + 147\eta^4 \xi_s^4 - 96\eta^2 \psi^4 \xi_s^2 + 32\eta^4 \psi^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3150\eta^4\xi_s^6\psi^4 + 2700\eta^4\xi_s^6\psi^2 - 2700\eta^2\xi_s^6\psi^4 + 270\eta^4\xi_s^6 \\
& + 135\eta^4\xi_s^8 + 1350\eta^4\xi_s^8\psi^2 + 1575\eta^4\xi_s^8\psi^4 - 1350\eta^2\xi_s^8\psi^4 \\
& / \left( 1024\xi_s^2(1+\xi_s^2) \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
v_4^a = & \left[ -\frac{3(1+3\xi_s^2-5\psi^2\xi_s^2-3\psi^2+15\eta^2\psi^2\xi_s^2+3\eta^2\xi_s^2+9\eta^2\psi^2+\eta^2)\chi}{8\sqrt{1+\xi_s^2}} \right. \\
& \left. + \frac{3(-5\psi^2\xi_s^2-3\psi^2+15\eta^2\psi^2\xi_s^2+9\eta^2\psi^2-1+13\eta^2\xi_s^2-3\xi_s^2+7\eta^2)\psi}{8(\psi^2+1)\sqrt{1+\xi_s^2}} \right] S_{02} \\
& + \left[ -3 \left( 11 - 2136\eta^2\psi^2\xi_s^2 - 108\eta^2\xi_s^2 + 140\psi^2\xi_s^2 \right. \right. \\
& - 348\eta^2\psi^2 - 2268\xi_s^4\psi^2\eta^2 - 3150\eta^2\xi_s^4\psi^4 + 270\psi^4\xi_s^2 \\
& + 315\xi_s^4\psi^4 + 126\psi^2\xi_s^4 - 18\xi_s^2 + 30\psi^2 - 21\xi_s^4 + 27\psi^4 + 2\eta^2 \\
& + 27\eta^4 - 126\xi_s^4\eta^2 + 3675\eta^4\xi_s^4\psi^4 + 3150\eta^4\psi^2\xi_s^4 \\
& + 2988\eta^4\psi^2\xi_s^2 + 3150\eta^4\psi^4\xi_s^2 + 315\eta^4\xi_s^4 + 270\eta^4\xi_s^2 \\
& + 558\eta^4\psi^2 - 2700\eta^2\psi^4\xi_s^2 + 315\eta^4\psi^4 - 270\eta^2\psi^4 \left. \right) \chi / \left( 256\sqrt{1+\xi_s^2} \right) \\
& + 3\psi \left( -11 - 3936\eta^2\psi^2\xi_s^2 - 1108\eta^2\xi_s^2 + 320\psi^2\xi_s^2 \right. \\
& - 528\eta^2\psi^2 - 4368\xi_s^4\psi^2\eta^2 - 3150\eta^2\xi_s^4\psi^4 + 270\psi^4\xi_s^2 \\
& + 315\xi_s^4\psi^4 + 336\psi^2\xi_s^4 + 18\xi_s^2 + 48\psi^2 + 21\xi_s^4 + 27\psi^4 - 130\eta^2 \\
& + 357\eta^4 - 1218\xi_s^4\eta^2 + 3675\eta^4\xi_s^4\psi^4 + 5600\eta^4\psi^2\xi_s^4 \\
& + 5088\eta^4\psi^2\xi_s^2 + 3150\eta^4\psi^4\xi_s^2 + 1925\eta^4\xi_s^4 + 1842\eta^4\xi_s^2 \\
& \left. + 768\eta^4\psi^2 - 2700\eta^2\psi^4\xi_s^2 + 315\eta^4\psi^4 - 270\eta^2\psi^4 \right) \\
& / \left( 256(\psi+1)\sqrt{1+\xi_s^2} \right) \left. \right] S_{22} \\
& + \left[ \frac{9\sqrt{1+\xi_s^2}(1-\psi^2+\eta^2+3\eta^2\psi^2)\chi}{8} - \frac{9(-1+3\eta^2)\psi\sqrt{1+\xi_s^2}}{8} \right] \gamma_2 \\
& + \left[ 21(1+\xi_s^2)^{(3/2)}(-\xi_s^2-6\eta^2\xi_s^2-108\eta^2\psi^2\xi_s^2+6\psi^2\xi_s^2+15\psi^4\xi_s^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 15\eta^4 \xi_s^2 + 175\eta^4 \psi^4 \xi_s^2 - 150\eta^2 \psi^4 \xi_s^2 + 150\eta^4 \psi^2 \xi_s^2 - 90\eta^2 \psi^4 \\
& + 10\psi^2 + 90\eta^4 \psi^2 - 84\eta^2 \psi^2 + 105\eta^4 \psi^4 + 9\psi^4 - 10\eta^2 + 9\eta^4 \\
& - 7)\chi / 256 - 7\psi(1 + \xi_s^2)^{(3/2)}(21 + 3\xi_s^2 - 162\eta^2 - 174\eta^2 \xi_s^2 \\
& + 45\psi^2 \xi_s^2 + 27\psi^2 + 275\eta^4 \xi_s^2 + 165\eta^4 + 525\eta^4 \psi^2 \xi_s^2 \\
& + 315\eta^4 \psi^2 - 450\eta^2 \psi^2 \xi_s^2 - 270\eta^2 \psi^2) / 256 \Big] \tilde{\Omega}_1^2 \\
& + \left[ -45(1 + \xi_s^2) \left( 25 - 216\eta^2 \psi^2 \xi_s^2 - 12\eta^2 \xi_s^2 + 12\psi^2 \xi_s^2 + 12\eta^2 \psi^2 \right. \right. \\
& - 324\xi_s^4 \psi^2 \eta^2 - 450\eta^2 \xi_s^4 \psi^4 + 30\psi^4 \xi_s^2 + 45\xi_s^4 \psi^4 + 18\psi^2 \xi_s^4 \\
& - 2\xi_s^2 - 22\psi^2 - 3\xi_s^4 + 9\psi^4 + 22\eta^2 + 9\eta^4 - 18\xi_s^4 \eta^2 \\
& + 525\eta^4 \xi_s^4 \psi^4 + 450\eta^4 \psi^2 \xi_s^4 + 300\eta^4 \psi^2 \xi_s^2 + 350\eta^4 \psi^4 \xi_s^2 \\
& + 45\eta^4 \xi_s^4 + 30\eta^4 \xi_s^2 + 90\eta^4 \psi^2 - 300\eta^2 \psi^4 \xi_s^2 + 105\eta^4 \psi^4 \\
& \left. \left. - 90\eta^2 \psi^4 \right) \chi / 1024 + 15\psi(1 + \xi_s^2)(9\xi_s^4 + 135\psi^2 \xi_s^4 - 522\xi_s^4 \eta^2 \right. \\
& + 1575\eta^4 \psi^2 \xi_s^4 + 825\eta^4 \xi_s^4 - 1350\xi_s^4 \psi^2 \eta^2 + 90\psi^2 \xi_s^2 \\
& + 1050\eta^4 \psi^2 \xi_s^2 + 6\xi_s^2 + 550\eta^4 \xi_s^2 - 900\eta^2 \psi^2 \xi_s^2 - 348\eta^2 \xi_s^2 - 75 \\
& \left. + 165\eta^4 + 315\eta^4 \psi^2 + 27\psi^2 - 270\eta^2 \psi^2 + 126\eta^2) / 1024 \right] \beta \\
& + 45\xi_s \left( -1 - 6\eta^2 + 15\eta^4 + 6\psi^2 - 108\eta^2 \psi^2 + 15\psi^4 + 150\eta^4 \psi^2 \right. \\
& \left. + 175\eta^4 \psi^4 - 150\eta^2 \psi^4 \right) (3\xi_s^2 + 1) (1 + \xi_s^2) \chi / 1024 - 15\psi \xi_s \\
& (525\eta^4 \psi^2 + 3 + 275\eta^4 - 450\eta^2 \psi^2 - 174\eta^2 + 45\psi^2) (3\xi_s^2 + 1) \\
& (1 + \xi_s^2) / 1024.
\end{aligned}$$

Die Konstanten ergeben sich als

$$\begin{aligned}
S_{22} &= \frac{1}{2} (1 + \xi_s^2)^{(3/2)} \left( 288\xi_s \beta - 45\beta^2 + 408\beta \xi_s^3 - 54\beta^2 \xi_s^4 + 1575\beta^2 \xi_s^8 \right. \\
& - 378\beta^2 \xi_s^2 + 1710\beta^2 \xi_s^6 - 3150\xi_s^7 \beta - 2370\xi_s^5 \beta - 179\xi_s^2 \\
& \left. + 1575\xi_s^6 + 660\xi_s^4 \right) / \left( 3330\beta \xi_s^4 - 1965\xi_s^3 + 732\beta \xi_s^2 \right. \\
& \left. - 357\xi_s - 5075\xi_s^5 - 3675\xi_s^7 + 3675\beta \xi_s^8 + 6300\beta \xi_s^6 + 27\beta \right), \\
S_{02} &= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{1 + \xi_s^2} \gamma_4}{-5\xi_s^3 - 3\xi_s + 6\beta \xi_s^2 + 5\beta \xi_s^4 + \beta} + \frac{1}{8} (1 + \xi_s^2)^{(3/2)} \left( -340200\xi_s^{13} \beta^2 \right. \\
& \left. + 2583\xi_s \beta^2 + 808515\beta \xi_s^{10} + 340200\beta \xi_s^{12} + 345105\xi_s^{12} \beta^3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 151443\xi_s^8\beta^3 - 877221\xi_s^9\beta^2 + 113400\xi_s^{14}\beta^3 - 171\beta^3 \\
& - 113400\xi_s^{11} - 23193\xi_s^4\beta^3 + 8961\xi_s^3\beta^2 - 8316\xi_s^6\beta^3 \\
& - 921915\xi_s^{11}\beta^2 + 373842\xi_s^{10}\beta^3 - 39594\xi_s^5\beta^2 - 341478\xi_s^7\beta^2 \\
& - 5742\xi_s^2\beta^3 - 231705\xi_s^9 - 57727\xi_s^5 - 167337\xi_s^7 \\
& + 670716\beta\xi_s^8 + 251962\beta\xi_s^6 - 9735\xi_s^3 + 2747\beta\xi_s^2 \\
& + 51060\beta\xi_s^4) / \left( (-5\xi_s^3 - 3\xi_s + 6\beta\xi_s^2 + 5\beta\xi_s^4 + \beta) \right. \\
& \left. (3330\beta\xi_s^4 - 1965\xi_s^3 + 732\beta\xi_s^2 - 357\xi_s - 5075\xi_s^5 - 3675\xi_s^7 \right. \\
& \left. + 3675\beta\xi_s^8 + 6300\beta\xi_s^6 + 27\beta) \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_3 = & \frac{1}{3} \frac{(9\beta\xi_s^4 - 9\xi_s^3 + 10\beta\xi_s^2 - 7\xi_s + \beta)\sqrt{6}\gamma_4}{(-5\xi_s^3 - 3\xi_s + 6\beta\xi_s^2 + 5\beta\xi_s^4 + \beta)(1 + \xi_s^2)^{(3/4)}\sqrt{6\beta\xi_s^2 - 6\xi_s + 2\beta}} \\
& - \frac{3}{32} \left( -19224\xi_s^6 + 126264\xi_s^{10} + 226800\xi_s^{14} + 351585\xi_s^{12} \right. \\
& - 5007\xi_s^4 + 1053792\xi_s^{10}\beta^4 + 1322748\xi_s^{12}\beta^4 + 1271904\xi_s^{14}\beta^4 \\
& + 594966\xi_s^8\beta^4 + 3120\xi_s^2\beta^4 + 226800\xi_s^{18}\beta^4 + 100200\beta^2\xi_s^4 \\
& + 1257552\beta^2\xi_s^8 + 2357810\beta^2\xi_s^{10} - 6024\beta\xi_s^3 - 41412\xi_s^5\beta \\
& - 179184\xi_s^7\beta - 529624\xi_s^9\beta - 907200\beta^3\xi_s^{17} - 1348296\beta\xi_s^{11} \\
& + 468346\beta^2\xi_s^6 - 279592\beta^3\xi_s^5 + 39132\xi_s^4\beta^4 + 805185\xi_s^{16}\beta^4 \\
& + 206496\xi_s^6\beta^4 + 3589704\beta^2\xi_s^{12} - 1859940\xi_s^{13}\beta \\
& + 3470310\beta^2\xi_s^{14} - 907200\xi_s^{15}\beta + 1360800\beta^2\xi_s^{16} \\
& + 9486\beta^2\xi_s^2 - 40284\beta^3\xi_s^3 - 3639576\beta^3\xi_s^{13} - 2104536\beta^3\xi_s^9 \\
& - 3130996\beta^3\xi_s^{11} - 1704\beta^3\xi_s - 2767140\beta^3\xi_s^{15} - 19938\xi_s^8 \\
& \left. - 994188\beta^3\xi_s^7 + 81\beta^4 \right) \sqrt{3}\sqrt{2}(1 + \xi_s^2)^{(1/4)} / \left( (3330\beta\xi_s^4 \right. \\
& - 1965\xi_s^3 + 732\beta\xi_s^2 - 357\xi_s - 5075\xi_s^5 - 3675\xi_s^7 + 3675\beta\xi_s^8 \\
& \left. + 6300\beta\xi_s^6 + 27\beta)(-5\xi_s^3 - 3\xi_s + 6\beta\xi_s^2 + 5\beta\xi_s^4 + \beta) \right. \\
& \left. \sqrt{6\beta\xi_s^2 - 6\xi_s + 2\beta} \right).
\end{aligned}$$

Der Faktor  $(3330\beta\xi_s^4 \dots)$  im Nenner der drei Konstanten ist proportional zu  $G_4(\xi_s)$  aus Gl. (3.13) und hat also eine Nullstelle bei  $\xi_s = \xi_s^*$ . Der Faktor  $(-5\xi_s^3 \dots)$  im Nenner von  $S_{02}$

und  $\tilde{\Omega}_3$  hat dagegen keine Nullstelle.

## 4.4 Physikalische Parameter

Sämtliche Informationen, die notwendig sind, um das Modell eines Sternes vollständig zu beschreiben sind in den vier metrischen Funktionen und zwei Konstanten  $\Omega$  und  $\gamma$  enthalten. Diese Funktionen sind aber recht kompliziert und für die physikalische Intuition nicht leicht zugänglich. Deshalb wollen wir in diesem Abschnitt einige physikalische und zum Teil beobachtbare Größen einführen, mit denen wir die Sterne charakterisieren können. Nachdem Gleichungen für diese Größen angegeben werden, folgen die entsprechenden PN-Entwicklungen bis  $O(\varepsilon^4)$ .

### 4.4.1 Einführung der physikalischen Größen

Die Ruhemasse des Sternes  $M_0$  definiert man als ein Integral über das Sterninnere:<sup>6</sup>

$$M_0 := 2\pi Q a_0^3 \int_{-1}^1 \int_0^{\xi_s} \frac{e^{\lambda+2\mu}}{\sqrt{1-\tilde{v}^2}} \left[ (\psi \xi_o(\eta)/\xi_s)^2 + \eta^2 \right] \xi_o(\eta)/\xi_s d\psi d\eta. \quad (4.1)$$

Den Ausdruck  $\left[ (\psi \xi_o(\eta)/\xi_s)^2 + \eta^2 \right] \xi_o(\eta)/\xi_s d\psi d\eta$  erhält man, wenn die Koordinatentransformation aus Gl. (3.1) auf das Volumenelement  $(\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta$  angewandt wird. Der Drehimpuls  $J$  ist

$$J = 2\pi Q a_0^4 c \int_{-1}^1 \int_0^{\xi_s} \frac{\tilde{\Omega}(1-\gamma)(1-\tilde{\omega})e^{3\lambda-2\nu+2\mu}}{(1-\tilde{v}^2)^{3/2}} [1 + (\psi \xi_o(\eta)/\xi_s)^2] (1-\eta^2) \left[ (\psi \xi_o(\eta)/\xi_s)^2 + \eta^2 \right] \xi_o(\eta)/\xi_s d\psi d\eta. \quad (4.2)$$

Die Bindungsenergie wird durch

$$E_b = \gamma M_0 c^2 - 2\tilde{\Omega}c/a_0 J - 4\pi a_0^3 \int_{-1}^1 \int_0^{\xi_s} P e^{\nu+\lambda+2\mu} \left[ (\psi \xi_o(\eta)/\xi_s)^2 + \eta^2 \right] \xi_o(\eta)/\xi_s d\psi d\eta \quad (4.3)$$

<sup>6</sup>Obwohl untere Indizes in dieser Arbeit meist die PN-Ordnung bezeichnen, sind wir zuversichtlich, daß die weit verbreitete Bezeichnung  $M_0$  für Ruhemasse keine Verwirrung stiften wird.

gegeben und die Gesamtmasse  $M$  durch

$$M = M_0 - E_b/c^2. \quad (4.4)$$

Die so eingeführten Größen wurden in [6] verwendet, können aber wahlweise für  $M$  und  $J$  auch durch Gleichungen aus dem Fernfeld ersetzt werden. Die Formel

$$c^2 \lim_{r \rightarrow \infty} (rv) = -M$$

mit  $r^2 = \rho^2 + \zeta^2 = a_0^2(1 + \xi^2 - \eta^2)$  schreibt sich als

$$M = \frac{-8\pi Q a_0^3 \sqrt{1 + \xi_s^2} \xi_o(\eta)}{3\varepsilon^2} \lim_{\psi \rightarrow \infty} (\psi v) \quad (4.5)$$

in den  $\psi$ - $\eta$ -Koordinaten. Ähnlich bekommt man

$$J = \frac{8 a_0^5 \tilde{\Omega}(\xi_o(\eta))^3}{9 \xi_s^3 \varepsilon^3} \left( \pi Q \xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2} \right)^{3/2} \lim_{\psi \rightarrow \infty} (\psi^3 \tilde{\omega}) \quad (4.6)$$

für den Drehimpuls. Man kann also Gln. (4.5) und (4.6) als Definitionsgleichungen für  $M$  und  $J$  betrachten und Gl. (4.3) als die Definition für die Bindungsenergie.<sup>7</sup> Diese unterschiedlichen Möglichkeiten bieten eine Kontrolle für die Gültigkeit der Lösung (vgl. S. 38).

Die anderen physikalischen Größen, die uns interessieren werden, sind Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ , Zentraldruck

$$P_z := P(\psi = 0, \eta = 1),$$

Koordinatenradienverhältnis von polarem zu äquatorialem Radius

$$r_p/r_{\text{ä}} := \xi_o(\eta = 1) / \sqrt{1 + (\xi_o(\eta = 0))^2} \quad (4.7)$$

und die polare Rotverschiebung

$$Z_p := e^{-v(\psi=\xi_s, \eta=1)} - 1 \equiv e^{-V_0} - 1 = \gamma/(1 - \gamma). \quad (4.8)$$

Diese letzte Gleichung für die polare Rotverschiebung folgt aus Gl. (2.17), wenn man berück-

---

<sup>7</sup>Im Gegensatz zu der Bestimmung von  $J_n$  über den Innenraum, braucht man einen Term  $(n+2)$ -ter Ordnung, nämlich  $\tilde{\omega}_{n+2}^a$ , um mittels Gl. (4.6)  $J_n$  bestimmen zu können.

sichtigt, daß  $\tilde{v} = 0$  auf der Achse ( $\eta = 1$ ) und  $P = 0$  auf der Oberfläche ( $\psi = \xi_s$ ) gelten.

#### 4.4.2 Entwicklung der physikalischen Größen

Wenn man Gln. (4.1), (4.2) und (4.4) bzw. Gln. (4.1), (4.5) und (4.6) nach  $\epsilon$  entwickelt, erhält man für die ersten Terme:

$$\frac{M_0}{a_0^3 Q} = \frac{4}{3} \pi \xi_s (1 + \xi_s^2) + \left[ \frac{8}{15} \pi \xi_s S_{22} + \frac{4}{3} \pi \xi_s (3 \xi_s^2 + 1) S_{02} \right. \\ \left. + \frac{4}{15} \pi \xi_s (1 + \xi_s^2)^2 \tilde{\Omega}_1^2 + \frac{12}{5} \pi \xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s) (1 + \xi_s^2)^{(3/2)} \right] \epsilon^2 + O(\epsilon^4),$$

$$\frac{M}{a_0^3 Q} = \frac{4}{3} \pi \xi_s (1 + \xi_s^2) + \left[ \frac{8}{15} \pi \xi_s S_{22} + \frac{4}{3} \pi \xi_s (3 \xi_s^2 + 1) S_{02} \right. \\ \left. + \frac{28}{15} \pi \xi_s (1 + \xi_s^2)^2 \tilde{\Omega}_1^2 - 4 \pi \xi_s (1 + \xi_s^2) \gamma_2 \right. \\ \left. + 4 \pi \xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s) (1 + \xi_s^2)^{(3/2)} \right] \epsilon^2 + O(\epsilon^4)$$

und

$$\frac{J}{a_0^5 Q^{3/2}} = \sqrt{6 \pi \xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2}} \left\{ \frac{16}{45} \pi \tilde{\Omega}_1 \xi_s (1 + \xi_s^2)^2 \right. \\ \left. + \left[ -\frac{16}{315} \pi \tilde{\Omega}_1 \xi_s (7 \xi_s^2 - 1) (1 + \xi_s^2) S_{2,2} \right. \right. \\ \left. + \frac{16}{45} \pi \tilde{\Omega}_1 \xi_s (5 \xi_s^2 + 1) (1 + \xi_s^2) S_{0,2} + \frac{16}{45} \pi \xi_s (1 + \xi_s^2)^2 \tilde{\Omega}_3 \right. \\ \left. - \frac{16}{45} \pi \tilde{\Omega}_1 \xi_s (1 + \xi_s^2)^2 \gamma_2 + \frac{32}{105} \pi \xi_s (1 + \xi_s^2)^3 \tilde{\Omega}_1^3 \right. \\ \left. + \left( -\frac{4}{35} \pi \xi_s (1 + \xi_s^2)^{(5/2)} (5 \xi_s^2 - 9) \operatorname{arccot}(\xi_s) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{7} \pi \xi_s^2 (1 + \xi_s^2)^{(5/2)} \right) \tilde{\Omega}_1 \right] \epsilon^2 \left. \right\} + O(\epsilon^4).$$

Die Entwicklung von Gl. (4.3) bzw. von der Bindungsenergie aus Gl. (4.4) zusammen mit  $M$  aus dem Fernfeld ergibt

$$\frac{E_b}{a_0^3 Q c^2} = \left[ 4 \pi \xi_s (1 + \xi_s^2) \gamma_2 - \frac{8}{5} \pi \xi_s (1 + \xi_s^2)^2 \tilde{\Omega}_1^2 \right.$$

$$-\frac{8}{5}\pi\xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s) (1 + \xi_s^2)^{(3/2)} \Big] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Die rechte Seite dieser Formel beinhaltet kein Absolutglied, da bei der linken Seite durch  $c^2$  geteilt wurde. Für den Zentraldruck, das Radienverhältnis und die Rotverschiebung bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{P_z}{Q^2 a_0^2 \pi} = & -\frac{8}{3}\xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2} \gamma_2 + 2\xi_s (1 + \xi_s^2) \operatorname{arccot}(\xi_s) \\ & + \left[ \left( 2\xi_s (3\xi_s^2 + 1) \operatorname{arccot}(\xi_s) - 2\xi_s^2 \right) S_{02} \right. \\ & + \left( \frac{1}{4}\xi_s (21\xi_s^4 + 18\xi_s^2 + 5) \operatorname{arccot}(\xi_s) - \frac{1}{4}\xi_s^2 (21\xi_s^2 + 11) \right) S_{22} \\ & - \frac{8}{3}\xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2} \gamma_4 - 8\xi_s (1 + \xi_s^2) \operatorname{arccot}(\xi_s) \gamma_2 \\ & + \left( -\frac{7}{4}\xi_s (\xi_s - 1) (\xi_s + 1) (1 + \xi_s^2)^2 \operatorname{arccot}(\xi_s) + \frac{7}{4}\xi_s^2 (1 + \xi_s^2)^2 \right) \tilde{\Omega}_1^2 \\ & + \frac{3}{16} (1 + \xi_s^2)^{(3/2)} (15\xi_s^4 + 10\xi_s^2 + 39) \xi_s \operatorname{arccot}(\xi_s)^2 \\ & \left. - \frac{15}{8} (1 + \xi_s^2)^{(3/2)} (3\xi_s^2 + 1) \xi_s^2 \operatorname{arccot}(\xi_s) + \frac{45}{16} \xi_s^3 (1 + \xi_s^2)^{(3/2)} \right] \varepsilon^2 \\ & + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

$$\frac{r_p}{r_{\text{ä}}} = \frac{\xi_s}{\sqrt{1 + \xi_s^2}} + \left[ \frac{1}{2} \frac{\xi_s (3\xi_s^2 + 2) S_{2,2}}{(1 + \xi_s^2)^{(3/2)}} + \frac{\xi_s S_{0,2}}{(1 + \xi_s^2)^{(3/2)}} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

und

$$Z_p = \gamma_2 \varepsilon^2 + [\gamma_4 + \gamma_2^2] \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6).$$

## 4.5 Bedeutung der Singularitäten

In Abschnitt 3.5 zeigten wir, daß die  $i$ -te PN-Näherung einen Pol erster Ordnung an der Stelle  $\xi_{2i+2}^*$  besitzt. Dort erwähnten wir, daß die  $i$ -te Ordnung auch Pole höherer Ordnung an den Stellen  $\xi_{2j+2}^*$ ,  $j < i$  besitzt. In Abb. 4.1 ist  $1/S_{24}$  über  $\xi_s$  aufgetragen. Man sieht, daß  $1/S_{24}$  eine einfache Nullstelle bei  $\xi_6^*$  und eine Nullstelle höherer und ungerader Ordnung bei  $\xi_4^*$  hat. Die Singularität bei  $\xi_{2j+2}^*$ ,  $j \geq 1$ , ist erster Ordnung für die  $j$ -te Ordnung der PN-Näherung und erhöht sich um eine Ordnung für jede Ordnung der Näherung. Dies kommt daher, daß

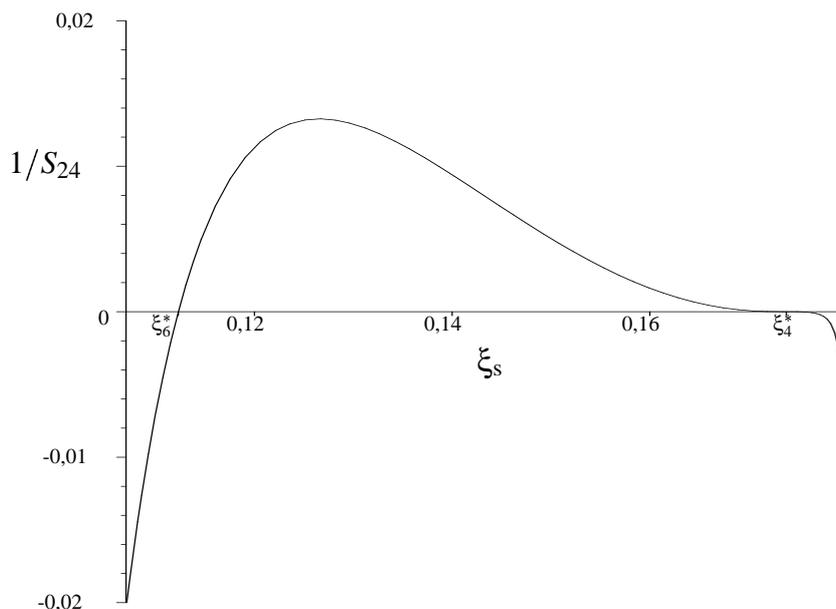


Abbildung 4.1: Die Inverse der Oberflächenkonstante  $S_{24}$  aufgetragen über  $\xi_s$ . Es ist deutlich zu erkennen, daß  $S_{24}$  einen einfachen Pol bei  $\xi_s = \xi_6^*$  und einen Pol höherer Ordnung bei  $\xi_s = \xi_4^*$  besitzt.

bei dem rekursiven Verfahren zur Bestimmung von  $S_{lj}$  die früheren Ordnungen samt ihrer Singularitäten im Parameterraum in die Bestimmungsgleichung einfließen. So kommt es, daß  $v_8^i$  beispielsweise einen Term mit  $S_{24}$  besitzt. Die Funktion  $b_i$  aus Gl. (3.9) enthält also auch diesen Term und sorgt dafür, daß die dritte Ordnung der PN-Näherung einen Pol zweiter Ordnung an der Stelle  $\xi_6^*$  besitzt. Die Singularität bei  $\xi_4^*$  hingegen ist von der Ordnung  $2j - 1$  für die  $j$ -te Ordnung der PN-Näherung. Dies kommt daher, daß  $v_{j+2}^i$  nicht nur einen Term mit  $S_{l,j-2}$ , sondern auch mit  $S_{l,j-2}S_{k2}$  besitzt. Demzufolge ist in Abb. 4.1 die Nullstelle bei  $\xi_4^*$  eine Nullstelle dritter Ordnung. Tabelle 4.2 zeigt das hier geschilderte singuläre Verhalten mit wachsender Ordnung der Näherung.

In Tabelle 4.2 ist auch zu erkennen, daß genau die ersten  $l$  Oberflächenkoeffizienten die Singularität höchster Ordnung bei  $\xi_{2l}^*$  besitzen. Beispielsweise ist der Pol von  $S_{0i}$  und  $S_{2i}$  an der Stelle  $\xi_4^*$  immer von höheren Ordnung als der von  $S_{6i}$ . Dies ist eine Konsequenz der Orthogonalitätsrelationen der Legendre-Polynome und sorgt dafür, daß die PN-Näherung ähnliche Eigenschaften in der Nähe von  $\xi_{2l}^*$  aufweist, wie eine axialsymmetrische, harmonische Oberflächenstörung mit der Mode  $2l$ . In Abb. 4.3 findet man Konfigurationen die stark an solche Störungen erinnern.

Die Singularitäten der PN-Näherung bedeuten, daß es im  $\xi_s$ - $\varepsilon$ -Parameterraum keine post-Newtonischen Lösungen an den Stellen  $\xi_{2l}^*$  gibt. Bei Annäherung an diese Stellen, schrumpft der Konvergenzradius ( $\varepsilon_{\max}$ ) und erreicht Null an der Stelle selbst. Dies ist besonders über-

PN-Ordnung	Konstante	Ordnung des Pols bei $\xi_k^*$			
		$\xi_4^*$	$\xi_6^*$	$\xi_8^*$	$\xi_{10}^*$
1	$S_{02}$	1	—	—	—
	$S_{22}$	1	—	—	—
	$\tilde{\Omega}_3$	1	—	—	—
2	$S_{04}$	3	1	—	—
	$S_{24}$	3	1	—	—
	$S_{44}$	2	1	—	—
	$\tilde{\Omega}_5$	3	1	—	—
3	$S_{06}$	5	2	1	—
	$S_{26}$	5	2	1	—
	$S_{46}$	4	2	1	—
	$S_{66}$	3	1	1	—
	$\tilde{\Omega}_7$	5	2	1	—
4	$S_{08}$	7	3	2	1
	$S_{28}$	7	3	2	1
	$S_{48}$	6	3	2	1
	$S_{68}$	5	2	2	1
	$S_{88}$	4	2	1	1
	$\tilde{\Omega}_9$	7	3	2	1

Tabelle 4.2: Die Ordnung des Pols an der Stelle  $\xi_k^*$  für verschiedene Ordnungen der PN-Näherung.

raschend, da man an diesen Stellen in der Newtonschen Theorie eine wohl definierte Lösung erhält.<sup>8</sup> Diese Aussage scheint im Widerspruch zum Beweis aus [14] zu stehen, der die Existenz von stationären, axialsymmetrischen, relativistischen Lösungen in der Nähe von einer Newtonschen Lösung sichert. Die Arbeit beruht auf einer Rahmentheorie [10], die sowohl die Allgemeine Relativitätstheorie als auch die Newton-Cartan-Theorie beinhaltet. Bei dem Beweis werden aber einschränkende Annahmen für die Zustandsgleichung gemacht, die für den hier vorliegenden Fall konstanter Dichte nicht erfüllt sind.

Betrachtet man eine dimensionslose Größe wie den Rotationsparameter  $R := J^2/M_0^{10/3}$ , so werden ihre Entwicklungskoeffizienten  $R = \sum_{i=0}^{\infty} R_i \varepsilon^i$  nur von  $\xi_s$  abhängen. Wenn diese Größe ein Absolutglied besitzt, so weiß man, daß die PN-Näherung singularär wird für alle  $R_0(\xi_{2l}^*)$ . Ferner gibt es aus der PN-Näherung Hinweise dafür, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(\xi_4^*)}{G_4(\xi_4^*) R_{n+2}(\xi_4^*)} =: d$  (siehe Gl. 3.13 für die Definition von  $G_4$ ) eine endliche Zahl ist. Vermutlich könnte man mit wenigen zusätzlichen PN-Ordnungen  $d$  erraten<sup>9</sup> und daraus den Konvergenzradius der PN-Näherung um den Punkt  $R_0(\xi_{2l}^*)$  bestimmen.

Wenn man Konfigurationen mit streng positivem, vorgegebenem  $M$  oder  $e^{V_0}$  betrachtet, so findet man, daß die PN-Näherung in der Nähe von  $\xi_{2l}^*$  divergiert. In Abb. 4.2 sieht man beispielsweise, daß der Wert für  $\Omega$  divergiert, wenn man sich der Stelle  $\xi_4^*$  nähert. Die Größe  $\Omega$  divergiert gegen  $+\infty$  auf einer Seite der singulären Stelle und gegen  $-\infty$  auf der anderen Seite, da Gl. (3.13) ihr Vorzeichen wechselt (vgl. Abb. 3.2). Der Vorzeichenwechsel zwischen der dritten und vierten Ordnung kommt daher, daß  $\tilde{\Omega}_7$  und  $\tilde{\Omega}_9$  verschiedene Vorzeichen haben (siehe Tabelle B.1 aus Anhang B).

Aus dem Verlauf der Kurven in Abb. 4.2 kann man auch entnehmen, daß man umso näher an die Stelle  $\xi_{2l}^*$  kommt, je dichter der vorgegebener Wert von  $e^{V_0}$  an dem Newtonschen Grenzfall  $e^{V_0} = 1$  ist. Der „Knick“ in der Kurve wird demzufolge immer schärfer. Dies kommt daher, daß bei Annäherung an eine singuläre Stelle die höheren Ordnungen der PN-Näherung, welche Singularitäten höherer Ordnung besitzen, einen immer wichtigeren Beitrag zum Verhalten der Lösung leisten.

Die Maclaurin-Lösung weist den Beginn einer Instabilität an den Stellen  $\xi_{2l}^*$  auf, die auch Bifurkationspunkte der Newtonschen Lösung sind. Bei der PN-Näherung erahnt man an die-

<sup>8</sup>Die Maclaurin-Lösung kann in dem  $\xi_s$ - $\varepsilon$ -Paramterraum diskutiert werden. In diesem Paramterraum dient allerdings  $\varepsilon$  nur der Skalierung.

<sup>9</sup>Diese Vermutung basiert darauf, daß

$$\frac{R_2(\xi_4^*)}{G_4(\xi_4^*) R_4(\xi_4^*)} = 2 \frac{R_4(\xi_4^*)}{G_4(\xi_4^*) R_6(\xi_4^*)} = \frac{5}{4} \frac{R_6(\xi_4^*)}{G_4(\xi_4^*) R_8(\xi_4^*)}$$

gilt. Hätte man einige weitere Koeffizienten, so könnte man die  $n$ -Abhängigkeit des Faktors vor dem Bruch bestimmen und dadurch auch  $d$ .

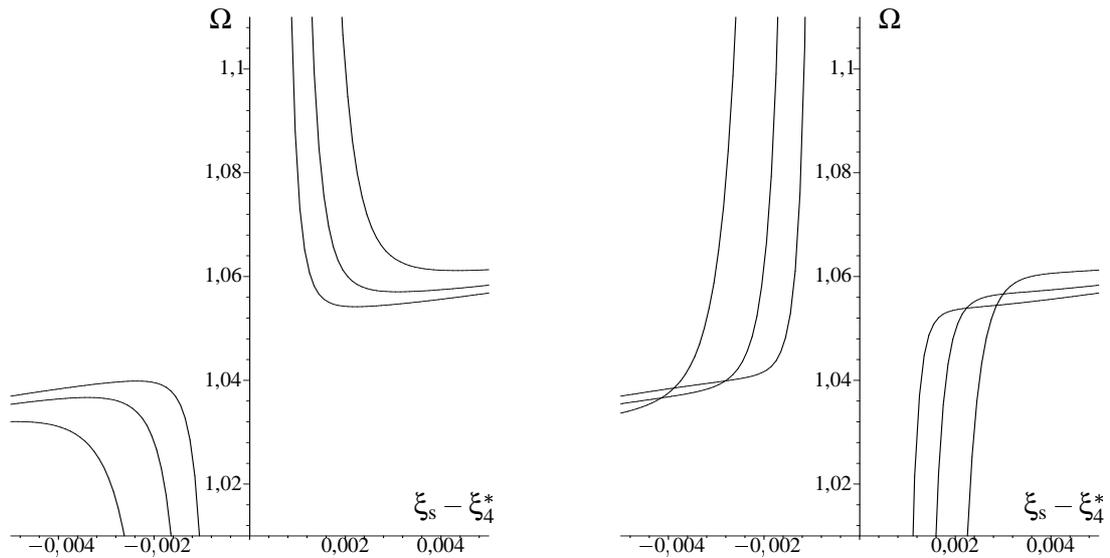


Abbildung 4.2: Das Verhalten von  $\Omega$  in der Nähe der Stelle  $\xi_4^*$  laut der dritten Ordnung (links) und der vierten Ordnung (rechts). Vorgegeben wurden  $e^{V_0} = 0,9995$  (innere Kurven),  $e^{V_0} = 0,999$  (mittlere Kurven) und  $e^{V_0} = 0,998$  (äußere Kurven).

sen Stellen auch eine Bifurkation. Bei dem Übergang von  $\xi_s > \xi_4^*$  zu  $\xi_s < \xi_4^*$  wechselt die Gestalt des Sternes von konvex zu konkav. Dieser Wechsel erfolgt, wenn  $d\xi_o(\eta)/d\eta|_{\eta=1}$  das Vorzeichen wechselt. Die Änderung des Vorzeichens bei der linken Seite von Gl. (3.13) verursacht einen Wechsel beim Vorzeichen von  $S_{k,2l-2}$ . Dadurch wechselt auch das Vorzeichen von  $d\xi_o(\eta)/d\eta|_{\eta=1}$  in jeder Ordnung der PN-Näherung, da die Singularitäten immer mit ungeraden Potenzen auftreten (siehe Tab. 4.2). Um die Stellen  $\xi_{2l}^*$ ,  $l > 2$ , ist das Verhalten komplizierter, da dieser Wechsel nur in jeder zweiten Ordnung der Näherung auftritt und mehr Wissen über die Konvergenz der Näherung erfordert. In jeder Ordnung sind die Singularitäten bei  $\xi_{2l}^*$  alternierend gerade und ungerade mit fortlaufendem  $l$ . Dadurch läßt sich vermuten, daß die „Bifurkationskörper“, die mit diesen Stellen verbunden sind, abwechselnd konkav und konvex sind. Numerische Rechnungen aus [3] bestätigen, daß es im Newtonschen Fall ein solches Verhalten gibt und zeigen ferner, daß die Bifurkationskörper von  $\xi_{2l}^*$  konvex für ungerades  $l$  und konkav für gerades  $l$  sind.

In Abb. 4.3 sind meridionale Querschnitte in  $\rho$ - $\zeta$ -Koordinaten von Konfigurationen in der Nähe von  $\xi_4^*$ ,  $\xi_6^*$ ,  $\xi_8^*$  und  $\xi_{10}^*$  dargestellt. Um die Abweichungen von der Ellipsoidgestalt zu verdeutlichen, wurden Werte von  $\xi_s$  gewählt bei denen die PN-Näherung in höheren Ordnungen divergiert. In dieser Abbildung findet man eine bildliche Darstellung des vermuteten Verhaltens. Die Bifurkationssequenzen laufen abwechselnd mit fortlaufendem  $l$  gegen Ringe ohne bzw. mit Zentralkörper, da die Singularitäten von den Oberflächenkonstanten  $S_{ik}$  an den Stellen  $\xi_{2l}^*$  abwechselnd gerader und ungerader Ordnung sind. Ferner besitzen genau  $S_{0k} \dots S_{2j,k}$

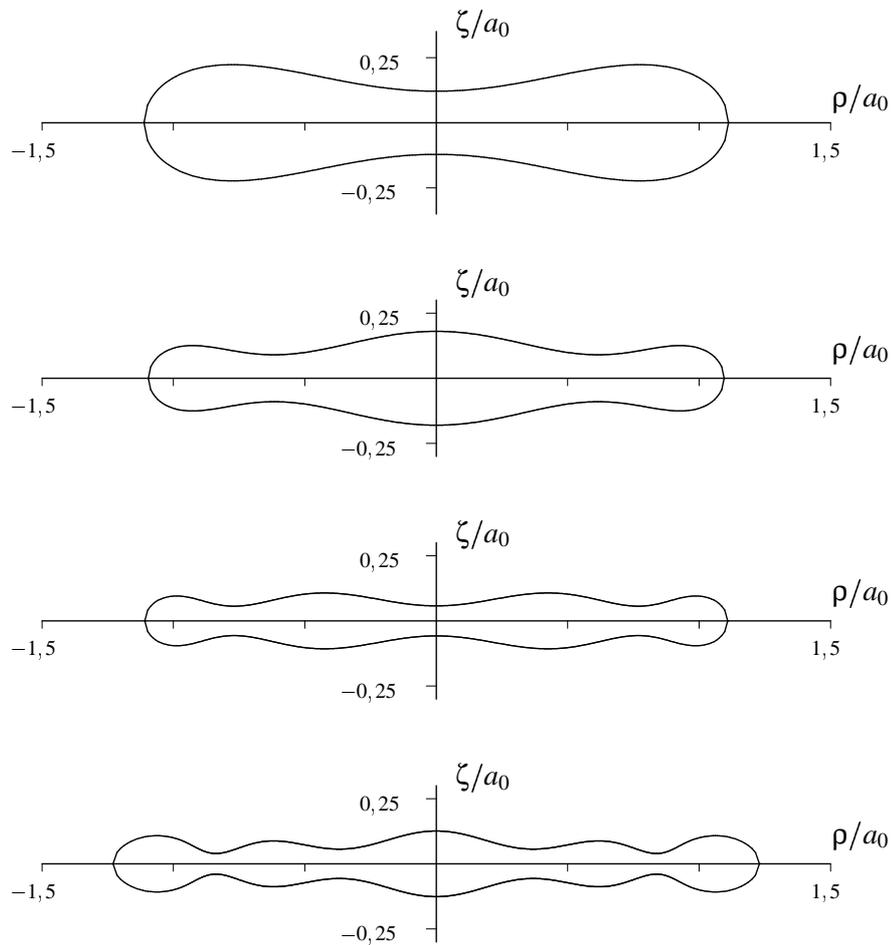


Abbildung 4.3: Meridionale Querschnitte von Konfigurationen in der Nähe von Singularitäten in vierter PN-Ordnung. Alle Konfigurationen wurden mit  $a_0 = 0.04$  gerechnet. Die obere hat den Wert  $\xi_s = \xi_4^* - 3,5 \times 10^{-3}$ , die nächste  $\xi_s = \xi_6^* - 2,5 \times 10^{-5}$ , die übernächste  $\xi_s = \xi_8^* - 10^{-7}$  und die untere den Wert  $\xi_s = \xi_{10}^* - 10^{-13}$ .

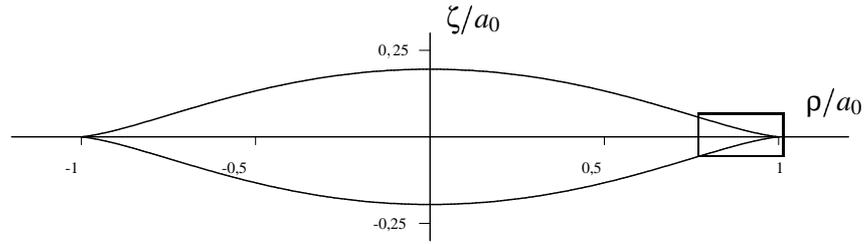


Abbildung 4.4: Meridionaler Querschnitt von einer Konfiguration in der Nähe von  $\xi_4^*$  in vierter PN-Ordnung. Hier ist  $a_0 = 0,04$  und  $\xi_s = \xi_4^* + 4,45 \times 10^{-3}$ .

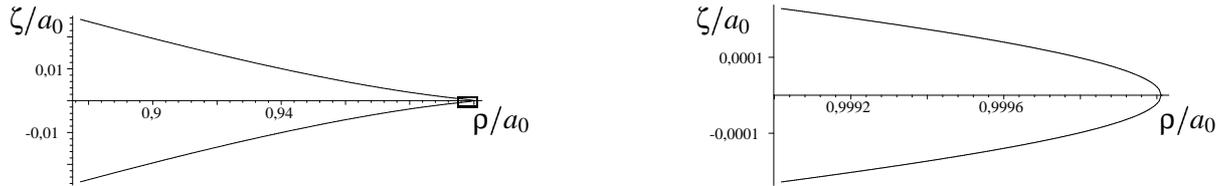


Abbildung 4.5: Zwei Vergrößerungen von Abb. 4.4.

die Singularität höchster Ordnung an der Stelle  $\xi_{2j+2}$  (vgl. Tabelle 4.2). Deshalb haben die  $\xi_{2l}^*$ -Sequenzen, genau  $l - 1$  Rillen.

In Abb. 4.4 ist der meridionale Querschnitt einer Konfiguration auf der anderen Seite von  $\xi_4^*$  abgebildet. Diese Konfiguration zeigt das typische Merkmal eines Körpers an der „mass-shedding“ Grenze. Dies ist die Grenze bei der die Ableitung des Druckes am Äquator verschwindet und die Materie anfängt sich vom Körper zu lösen. In diesem Grenzfall bildet sich eine Spitze am Äquator des Sternes, wie etwa in Abb. 4.4. Streng genommen kann die PN-Näherung endlicher Ordnung diese Spitze an nicht-singulären Stellen im Parameterraum nicht wiedergeben, da die Ableitung der Oberflächenfunktion  $\xi_o(\eta)$  an der Stelle  $\eta = 0$  immer existiert und gleich null ist. In Abb. 4.4 und bei den in Abb. 4.5 dargestellten Vergrößerungen davon, sieht man allerdings, daß eine Spitze mit wenigen Termen der PN-Ordnung sich in guter Näherung bildet.

Bei vorgegebenem  $e^{V_0}$  kann man sich mit wachsendem  $l$  der Stelle  $\xi_{2l}^*$  immer mehr annähern, da die Singularität erst in der  $(l - 1)$ -ten Ordnung auftritt. So kommt es, daß sich nicht-divergierende Lösungen zwischen zwei singulären Stellen ergeben. Im Scheibengrenzfall existiert eine analytische, relativistische Lösung [22, 23, 24, 25] obwohl man sich am Häufungspunkt der Singularitäten befindet. Dieser Grenzfall ist im  $\xi_s$ - $a_0$ -Parameterraum von der PN-Lösung für einen ausgedehnten Körper durch unendlich viele Gebiete getrennt. Von einem zum nächsten Gebiet gelangt man nicht, ohne daß die PN-Näherung singulär wird. In der Nähe einer singulären Stelle ist es besonders interessant, daß sich die Relativitätstheorie bemerkbar macht – daß also die Abweichungen von der Maclaurin-Lösung groß sind, ohne daß der relativistische Parameter groß wird.

## 4.6 Gültigkeit der Näherung

### 4.6.1 Das AKM-Verfahren

Die nach den Autoren Ansorg, Kleinwächter und Meinel genannte AKM-Methode ist ein spektrales Vielbereichsverfahren („multi-domain spectral method“) zur Berechnung von stark relativistischen Sternmodellen. Bei vorgegebener Zustandsgleichung kann man eine axialsymmetrische, stationäre Konfiguration aus den Einstein-Gleichungen hochgenau numerisch bestimmen. Die Methode teilt den Raum in mehrere Gebiete auf, so daß der unbekannte Rand des Sternes am Rande eines Gebietes liegt. Diese Gebiete werden auf Kreuzprodukte von Intervallen abgebildet, ähnlich wie bei der Definition der Koordinaten  $\psi$  und  $\eta$  aus Kapitel 3.1.1. Die Feldgrößen sowie die unbekannte Oberfläche werden nach Tschebyscheff-Polynomen entwickelt, damit die Feldgleichungen als algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten aufgeschrieben werden kann. Dieses enorme nicht-lineare System wird schließlich mit der Newton-Raphson Methode gelöst (eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens sowie Ergebnisse seiner Anwendung findet man in [1, 2]). Für die vorliegende Arbeit ist wesentlich, daß man beinahe Maschinengenauigkeit mit der AKM-Methode erreichen kann, und daß alle hier angegebenen numerisch berechneten Ziffern stimmen.

### 4.6.2 Die Padé-Näherung

Mit der PN-Näherung versucht man die metrischen Funktionen, die aus den vollen Einstein-Gleichungen entstehen würden, als abgebrochene Potenzreihe darzustellen. Oft wäre eine andere Darstellung der Funktion günstiger, aber man ist in diesem Fall dadurch beschränkt, daß nur die Koeffizienten dieser Potenzreihe bekannt sind.

Durch die Padé-Näherung wird eine abgebrochene Potenzreihe als rationale Funktion dargestellt. Die Padé-Näherung  $\mathcal{P}_k^l$  der Reihe  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$  definiert man als

$$\mathcal{P}_k^l := \frac{\sum_{i=0}^l b_i x^i}{\sum_{i=0}^k c_i x^i}, \quad k + l = n,$$

wobei die Taylor-Entwicklung für  $\mathcal{P}_k^l$  bis zur Ordnung  $x^n$  mit der ursprünglichen Reihe übereinstimmen sollte. So bekommt man  $n + 1$  Gleichungen zur Bestimmung der  $n + 2$  Koeffizienten  $b_i$  und  $c_i$ . Durch eine zusätzliche Wahl wie etwa  $c_0 = 1$  hat man ein konsistentes algebraisches Gleichungssystem zu lösen. In Abb. 4.6 sieht man, daß die Funktion  $f(x) =$

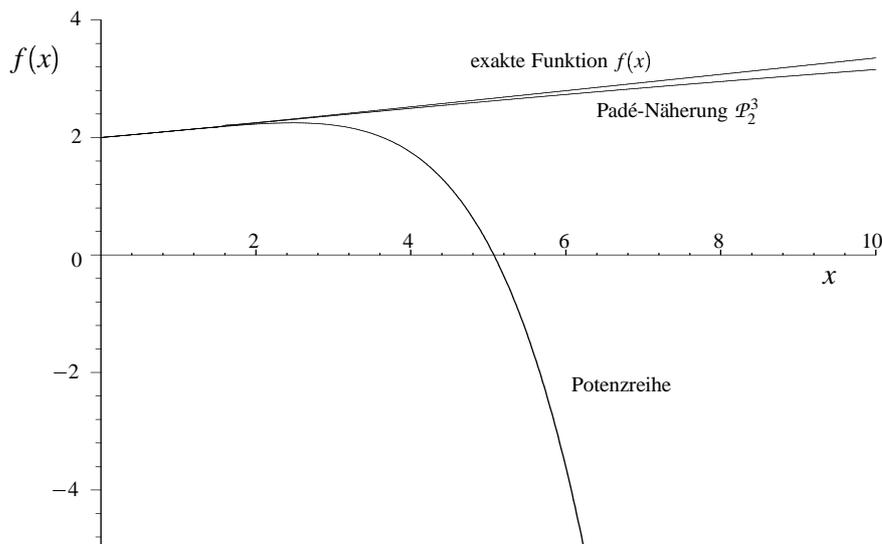


Abbildung 4.6: Ein Beispiel für die Güte der Padé-Näherung. Dargestellt ist die Funktion

$f(x) = \left[7 + (1+x)^{4/3}\right]^{1/3}$  und ihre Näherungen als Potenzreihe und mit der Padé-Näherung. Siehe Text für nähere Erläuterungen.

$\left[7 + (1+x)^{4/3}\right]^{1/3}$  auf dem Intervall  $x \in [0, 10]$  viel besser durch

$$\mathcal{P}_2^3 = \frac{2(8748 - 1458x - 2511x^2 - 173x^3)}{27(324 - 72x - 91x^2)} \quad (4.9)$$

als durch die Potenzreihe

$$f(x) \approx 2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{81}x^2 - \frac{49}{8748}x^3 + \frac{175}{78732}x^4 - \frac{3059}{2834352}x^5$$

genähert wird (das hier gebrachte Beispiel kommt aus [31] § 5.12).

Ein Beispiel für die Verbesserung, die diese Näherung für die PN-Entwicklung der Staub-scheibenlösung bringt, findet man in Tabelle II aus [29]. In [9] wird die Bedeutung der Padé-Näherung für die PN-Entwicklung ausführlicher diskutiert.

### 4.6.3 Vergleich mit numerischen Ergebnissen

Bei dem hier betrachteten Modell sind wir in der selten günstigen Lage, im Besitz eines hochgenauen numerischen Verfahrens zu sein. Dadurch ist es möglich, Aussagen über die Güte und die Konvergenz der Näherung zu treffen, die sonst unmöglich wären. Erschwert ist allerdings der Vergleich von zwei Konfigurationen dadurch, daß eine Konfiguration bei vorgegebener Dichte zwar durch die Vorgabe von zwei Parametern spezifiziert wird, aber nicht

Größe	OPN	1PN	2PN	3PN	4PN	Numerik
$e^{V_0}$	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993
$\Omega$	0,874	0,874	0,874	0,874	0,874	0,874
$M (\times 10^{-4})$	2,5985	2,587293	2,58734703	2,587347358	2,5873473589	2,5873473589
$M_0 (\times 10^{-4})$	2,5985	2,596758	2,59675670	2,596756729	2,5967567307	2,5967567307
$P_z (\times 10^{-3})$	2,7775	2,808223	2,80827428	2,808272555	2,8082725305	2,8082725304
$J (\times 10^{-7})$	1,7186	1,711281	1,71121993	1,711219934	1,7112199430	1,7112199432
$\frac{r_p}{r_a} (\times 10^{-1})$	7,5393	7,556173	7,55616026	7,556158988	7,5561589691	7,5561589689
$e^{V_0}$	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993
$\Omega$	0,874	0,874	0,874	0,874	0,874	0,874
$M (\times 10^{-4})$	3,0037	3,00375	3,003889	3,0038913	3,00389080	3,00389085
$M_0 (\times 10^{-4})$	3,0037	3,00898	3,009137	3,0091402	3,00913965	3,00913971
$P_z (\times 10^{-4})$	4,3102	4,26199	4,265490	4,2652638	4,26528131	4,26520117
$J (\times 10^{-7})$	8,4379	8,45902	8,459790	8,4598183	8,45981435	8,45981471
$\frac{r_p}{r_a} (\times 10^{-2})$	9,9557	9,86477	9,871419	9,8709437	9,87098303	9,87098031

Tabelle 4.3: Werte für physikalische Größen von zwei Konfigurationen mit identisch vorgegebenem  $e^{V_0}$  und  $\Omega$ . Die Bezeichnung OPN steht für die Maclaurin-Lösung, 1PN für die erste PN-Näherung usw. Bei der PN-Näherung wurde  $\gamma_i = 0$  für  $i > 2$  gesetzt. Oben bekommt man  $\varepsilon \approx 0,11$  und unten  $\varepsilon \approx 0,082$ .

eindeutig. Bei der Vorgabe von  $e^{V_0}$  nahe bei eins beispielsweise befindet man sich in der Nähe der Maclaurin-Kurve. Ein Blick auf Abb. 2.2, S. 16 zeigt, daß die Vorgabe von  $\Omega$  als zweitem Parameter auf zwei Lösungen mit unterschiedlichem Radienverhältnis  $r_p/r_a$  führt.

Ein Beispiel von einer solchen mehrdeutigen Parametervorgabe kann der Tabelle 4.3 entnommen werden. In dieser Tabelle und im weiteren Verlauf des Kapitels wird  $Q = c = 1$  gesetzt. Einige physikalische Größen von zwei Konfigurationen mit identischen (vorgegebenen)  $\Omega$  und  $e^{V_0}$  sind in verschiedener Ordnung der PN-Näherung tabelliert. Deutlich zu sehen ist die Konvergenz gegen die numerische Lösung. Bei dem stark abgeflachten Körper ( $r_p/r_a \approx 0,1$ ) ist die Konvergenz etwas schlechter, aber man erreicht immerhin bei den meisten Größen etwa 7 Stellen Genauigkeit, obwohl diese Konfiguration zwischen  $\xi_6^*$  und  $\xi_8^*$  liegt.<sup>10</sup> Eine Darstellung von der Oberfläche dieser zwei Konfigurationen findet man in Abb. 4.7.

Um sicher zu sein, daß die richtige numerische Konfiguration als Vergleichssterne gewählt wurde, muß eine Folge von numerischen Lösungen beinahe bis zum Newtonschen Grenzfall erzeugt werden. In diesem Grenzfall kann man prüfen, ob die numerische Lösung gegen die Maclaurin-Lösung konvergiert und, falls ja, einer eindeutigen PN-Lösung zuordnen. Wenn keine der physikalischen Größen in dieser Folge numerischer Lösungen Unstetigkeiten auf-

<sup>10</sup>Bei  $\xi_6^*$  hat das Maclaurin-Ellipsoid ein Radienverhältnis von rund 0,11 und bei  $\xi_8^*$  von rund 0,08.

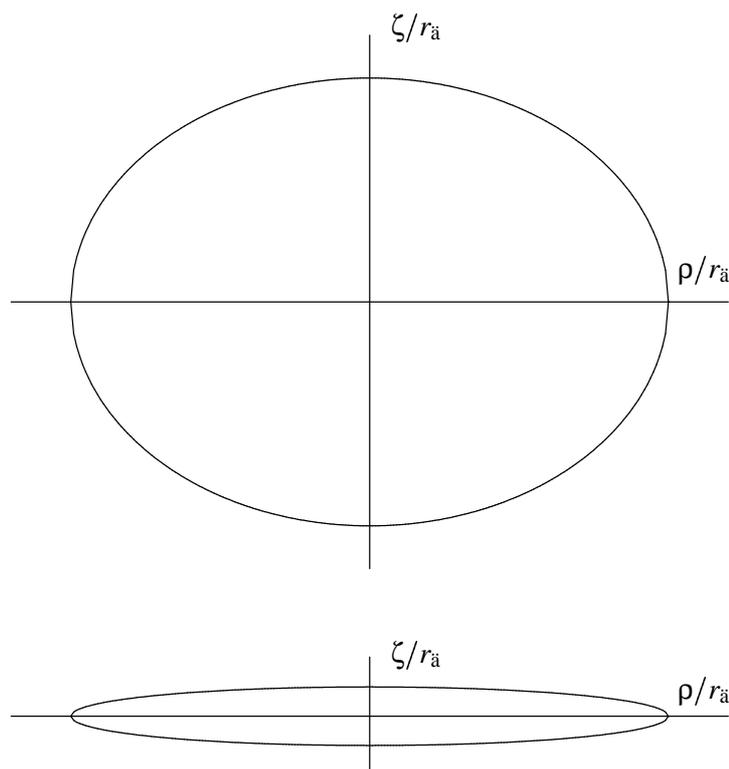


Abbildung 4.7: Meridionale Querschnitte von den zwei Konfigurationen aus Tabelle 4.3.

weist, weiß man, welche Maclaurin-Konfiguration die PN-Konfiguration erzeugt und so kann man sicher sein, daß die richtigen Vergleichskonfigurationen gewählt wurden. Fehlt einem diese Folge von Lösungen (falls zum Beispiel Werte aus einer Veröffentlichung mit der PN-Näherung verglichen werden), so bleibt eine gewisse Unsicherheit über die Richtigkeit des Vergleichs unvermeidbar.

Tabelle 4.3 wurde mit der Wahl  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$  erstellt. Wie diese Wahl die Konvergenz der PN-Näherung beeinflusst kann Tabelle 4.4 entnommen werden. In dieser Tabelle sieht man, daß die Wahl  $\tilde{\Omega}_i = 0$ ,  $i > 1$  zu den größten relativen Fehlern von 0,14% bei der dortigen Konfiguration führt. Auch die Wahl  $(r_p/r_{\ddot{a}})_i = 0$ ,  $i > 0$  führt zu verhältnismäßig großen relativen Fehlern.

Anhand von Abbildungen 4.9–4.14 sieht man, daß diese Eigenschaft erhalten wird, auch wenn man sich vom Newtonschen Grenzfall entfernt. Bei diesen und allen folgenden Farbabbildungen wird die Farbenzuordnung aus Abb. 4.8 verwendet. In Abb. 4.9 ist der relative Fehler der Gesamtmasse,  $|\frac{\Delta M}{M}|$ , über  $\gamma$  dargestellt. Der Punkt  $\gamma = 0$  entspricht dem Newtonschen Grenzfall. Dort fällt der relative Fehler aller Ordnungen auf null ab. Die Kurven laufen bis etwa  $\gamma = 0,6$ , d. h. bis zu einer polaren Rotverschiebung von etwa  $Z_p = 1,5$ . Man sieht eine Verbesserung mit zunehmender PN-Ordnung beim linken sowie beim rechten Bild. Der relative Fehler bei der Wahl von  $\gamma_{i+1} = 0$ ,  $i > 1$  (rechtes Bild) ist um zwei Größenordnungen

Numerischer Wert	Relativer Fehler für alternative PN-Näherungen ( $i > 0$ )				
	$\gamma_{i+2} = 0$	$M_i = 0$	$\tilde{\Omega}_{i+1} = 0$	$J_i = 0$	$(r_p/r_a)_i = 0$
$e^{V_0} = 0,95$	—	$7,6 \times 10^{-9}$	—	$1,4 \times 10^{-8}$	—
$\Omega = 0,874$	—	—	—	—	$2,2 \times 10^{-5}$
$M = 0,004808 \dots$	$3,2 \times 10^{-8}$	—	$3,6 \times 10^{-5}$	$8,6 \times 10^{-7}$	$2,7 \times 10^{-5}$
$M_0 = 0,004936 \dots$	$1,0 \times 10^{-7}$	$4,0 \times 10^{-7}$	$2,9 \times 10^{-4}$	$4,5 \times 10^{-7}$	$4,1 \times 10^{-5}$
$P_z = 0,02151 \dots$	$1,2 \times 10^{-6}$	$3,6 \times 10^{-7}$	$7,7 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^{-7}$	$2,2 \times 10^{-4}$
$J = 0,00002272 \dots$	$1,2 \times 10^{-6}$	$1,8 \times 10^{-6}$	$1,4 \times 10^{-3}$	—	$3,9 \times 10^{-4}$
$\frac{r_p}{r_a} = 0,7659 \dots$	$4,3 \times 10^{-7}$	$3,1 \times 10^{-7}$	$3,0 \times 10^{-5}$	$1,8 \times 10^{-7}$	—

Tabelle 4.4: Der relative Fehler von verschiedenen physikalischen Größen einer Konfiguration in vierter PN-Ordnung für verschieden gewähltes  $\gamma_i$ ,  $i > 2$ . Die Überschrift von Spalten 2–6 zeigen an, welche Gleichung jeweils erfüllt wird. Ein Strich bedeutet, daß diese physikalische Größe vorgegeben ist.

	Maclaurin-Lösung (türkis)
	erste PN-Näherung (blau)
	zweite PN-Näherung (magenta)
	dritte PN-Näherung (orange)
	vierte PN-Näherung (rot)
	Padé-Näherung angewandt auf die vierte PN-Näherung (grün)
	numerische Lösung (schwarz)

Abbildung 4.8: Farbenzuordnung für Abbildungen 4.9–4.22.

kleiner als bei  $\tilde{\Omega}_i = 0$  (linkes Bild). Der relative Fehler erreicht in dem rechten Bild nur rund 1% in der vierten PN-Ordnung. Die Padé-Näherung<sup>11</sup> bringt in diesem Fall keine Verbesserung gegenüber der vierten Ordnung.

Abb. 4.10 zeigt den relativen Fehler von der Ruhemasse  $M_0$  aufgetragen über  $\gamma$ . Dieser relative Fehler ist viel geringer als bei der Gesamtmasse. Beim linken Bild sieht man besonders deutlich, daß hier die erste PN-Näherung zu kleineren relativen Fehlern führt, wenn man weit weg von dem Newtonschen Grenzfall ist. Obwohl die höheren Ordnungen immer eine Verbesserung in der Nähe dieses Grenzfalls bringen, können sie zu einer Verschlechterung weiter weg davon führen. In Abb. 4.11 wird dies anhand eines einfachen Beispiels verdeutlicht. Die Funktion  $f(x) = [7 + (1+x)^{4/3}]^{1/3}$  aus Abschnitt 4.6.2 entwickelten wir um den Punkt  $x = 0$ . Dargestellt ist der relative Fehler von dieser Entwicklung in verschiedenen Ordnungen. So wie in Abb. 4.10 liefert auch hier die erste Ordnung eine bessere Darstellung der Funktion  $f(x)$  ab

<sup>11</sup>Wenn von der Padé-Näherung die Rede ist, ist immer die Wahl  $\mathcal{P}_2^6$  gemeint, angewandt auf die vierte PN-Ordnung. Diese Wahl hat sich als günstig erwiesen

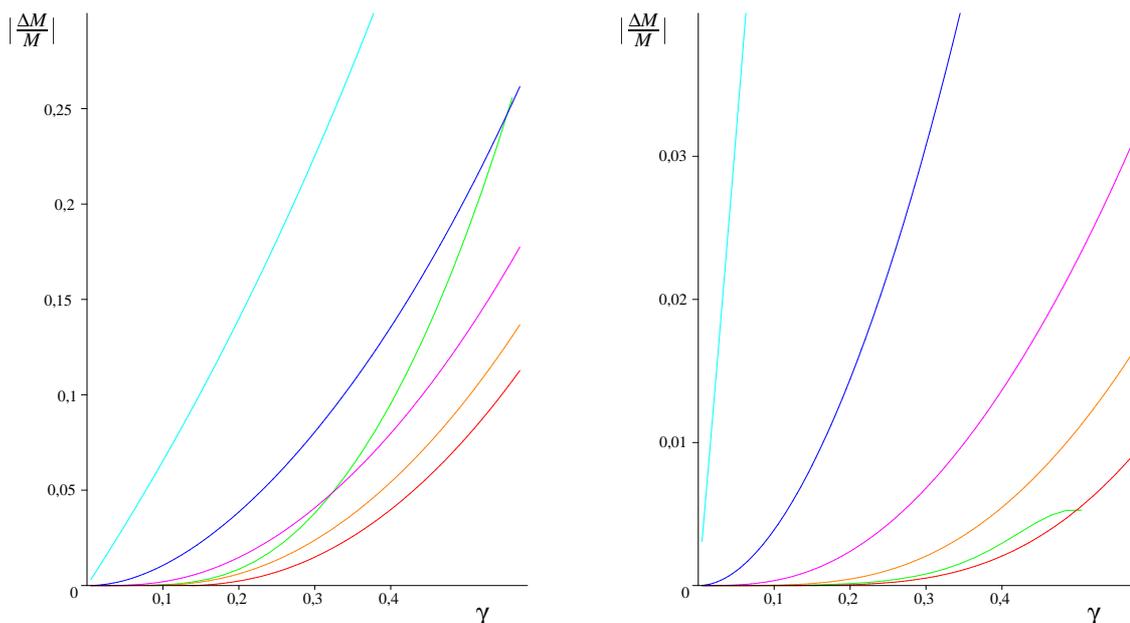


Abbildung 4.9: Relativer Fehler von  $M$  aufgetragen über  $\gamma$  für Konfigurationen mit  $\Omega = 0,874$ . Links ist die PN-Näherung mit  $\tilde{\Omega}_i = 0$ ,  $i > 1$ , abgebildet und rechts mit  $\gamma_{i+1} = 0$ . Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

der Stelle  $x \approx 2$  als die zweite, dritte und vierte Ordnungen. Im Gegensatz zu Abb. 4.10 bringt die Padé-Näherung in Abb. 4.11 in diesem Intervall von  $x$  eine Verbesserung gegenüber der Potenzreihen.

In den Abbildungen 4.12 und 4.13 sind die relativen Fehler von Zentraldruck und Radienverhältnis über  $\gamma$  aufgetragen. Mit zunehmender Ordnung der Näherung nimmt der relative Fehler ab und die Padé-Näherung bringt eine weitere Verbesserung besonders für den Zentraldruck auf der linken Seite von Abb. 4.13. Auf der rechten Seite dieser Abbildungen haben die Kurven der PN-Näherung einen charakteristischen Verlauf. Ein Graph des Radienverhältnisses, aufgetragen über  $\gamma$ , würde zeigen, daß die PN-Kurven sich auf einer Seite der tatsächlichen Kurve befinden, jeweils bis hin zu einem Punkt bei dem sie diese Kurven schneiden. Ab diesem Punkt läuft die genäherte Kurve dann rasch von der richtigen weg. Ermutigend ist es für die PN-Näherung, daß dieser Überschneidungspunkt mit wachsender Ordnung sich schnell von dem Newtonschen Grenzfall entfernt. So findet man hier einen Hinweis dafür, daß die PN-Näherung in hoher Ordnung selbst stark relativistische Konfigurationen behandeln kann.

Abb. 4.14 stellt den Verlauf des relativen Fehlers des Drehimpulses in Abhängigkeit von  $\gamma$  dar. Die linke Seite von dieser Abbildung ähnelt stark der linken Seite von Abb. 4.10. Die Padé-Näherung (grüne Kurve) auf der rechten Seite gibt den richtigen Verlauf des Drehimpulses bemerkenswert genau wieder. Man erkennt aber auch, daß die grüne Kurve eine Singularität etwa bei  $\gamma = 0,15$  besitzt. Bei einer rationalen Näherungsmethode wie der Padé-Näherung

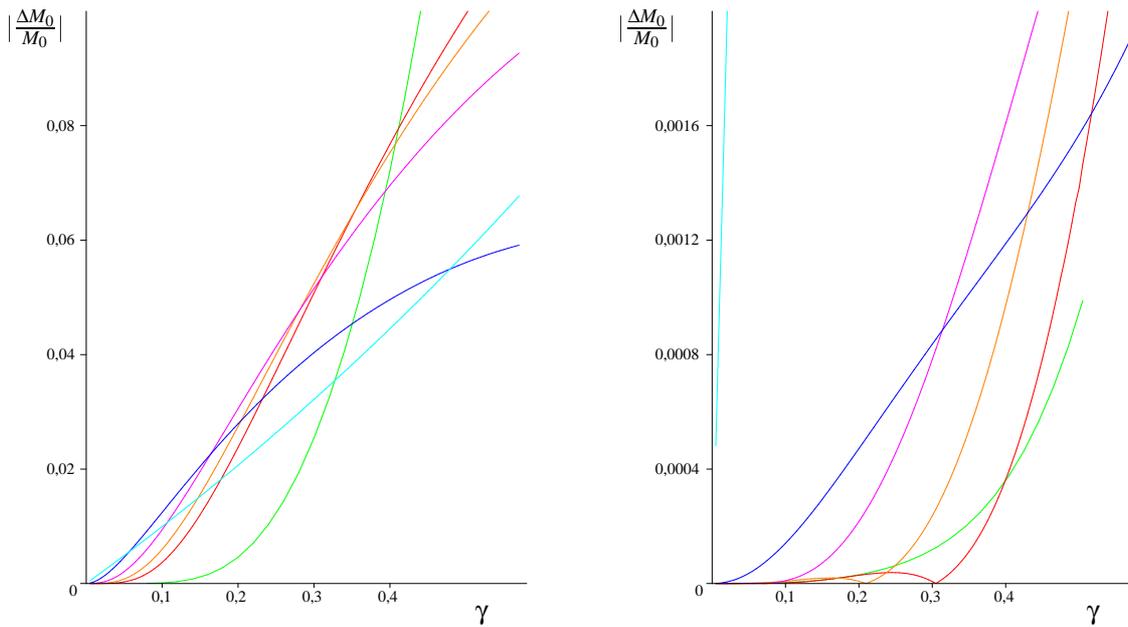


Abbildung 4.10: Relativer Fehler von  $M_0$  aufgetragen über  $\gamma$  für Konfigurationen mit  $\Omega = 0,874$ . Links ist die PN-Näherung mit  $\tilde{\Omega}_i = 0, i > 1$ , abgebildet und rechts mit  $\gamma_{i+1} = 0$ . Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

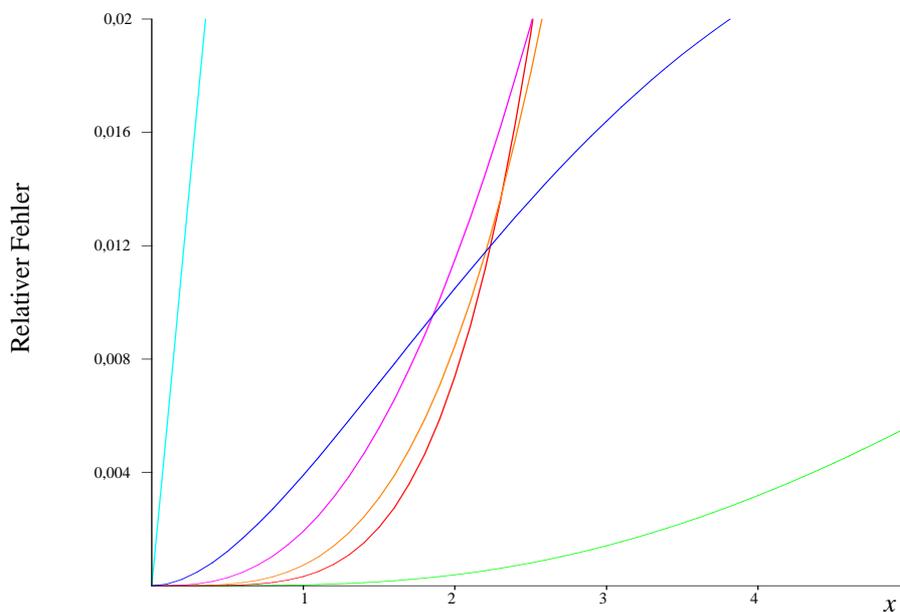


Abbildung 4.11: Der relative Fehler von unterschiedlichen Ordnungen der Potenzreihenentwicklung von  $f(x) = [7 + (1+x)^{4/3}]^{1/3}$  sowie von der Padé-Näherung (vgl. Abb. 4.6). Die Ordnungen in dieser Abbildung sind durch dieselben Farben gekennzeichnet wie in Abb. 4.8.

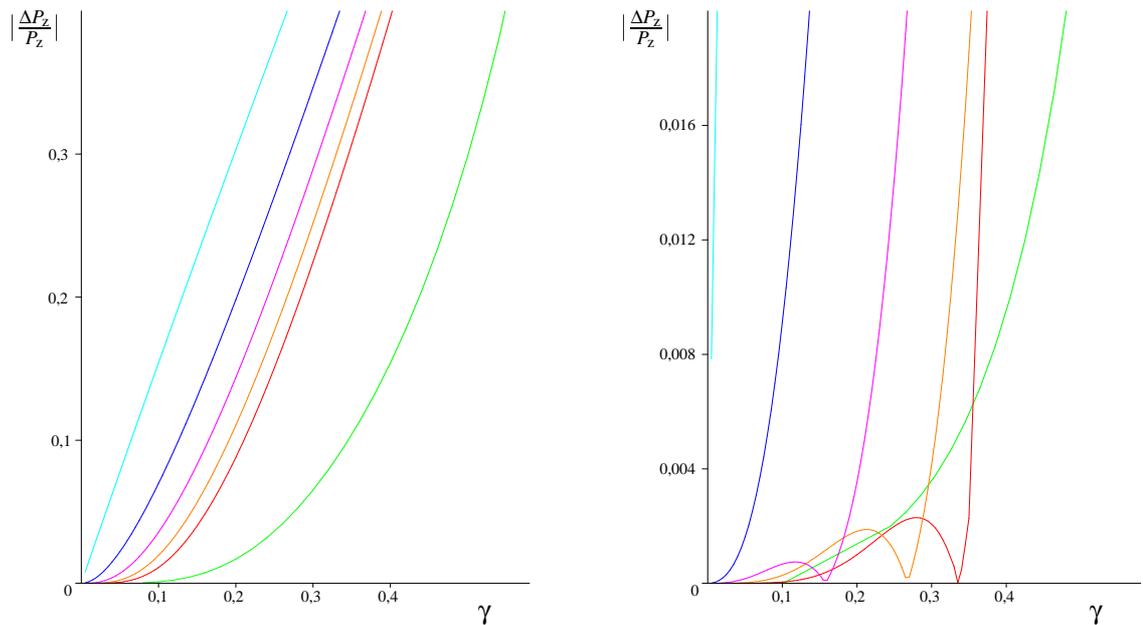


Abbildung 4.12: Relativer Fehler von  $P_z$  aufgetragen über  $\gamma$  für Konfigurationen mit  $\Omega = 0,874$ . Links ist die PN-Näherung mit  $\tilde{\Omega}_i = 0$ ,  $i > 1$ , abgebildet und rechts mit  $\gamma_{i+1} = 0$ . Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

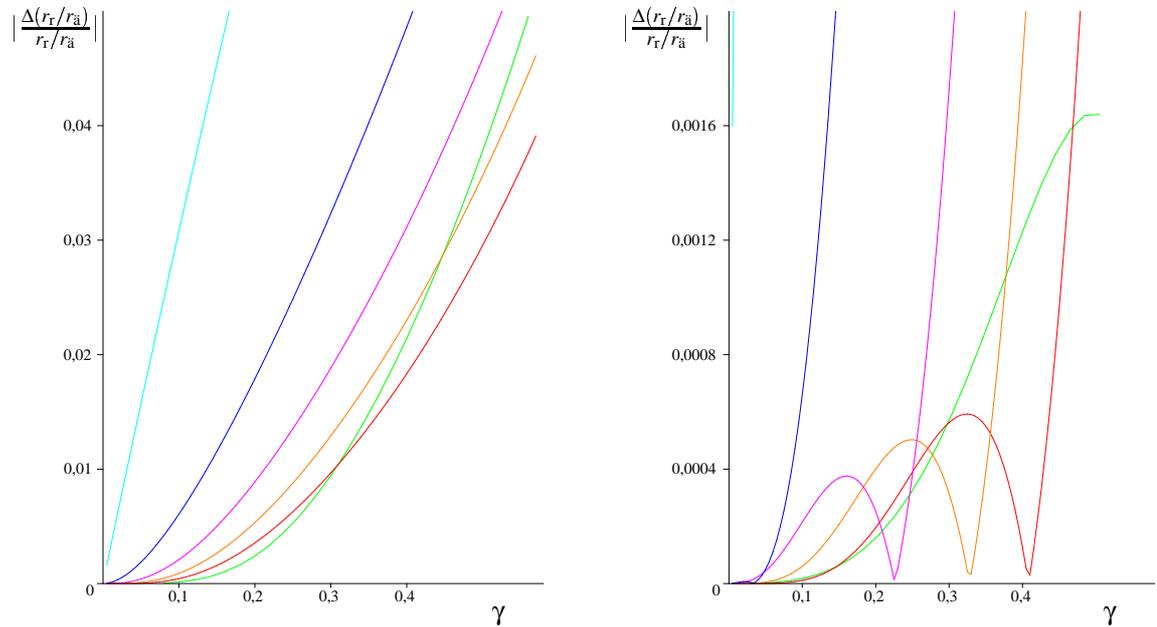


Abbildung 4.13: Relativer Fehler von  $r_p/r_a$  aufgetragen über  $\gamma$  für Konfigurationen mit  $\Omega = 0,874$ . Links ist die PN-Näherung mit  $\tilde{\Omega}_i = 0$ ,  $i > 1$ , abgebildet und rechts mit  $\gamma_{i+1} = 0$ . Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

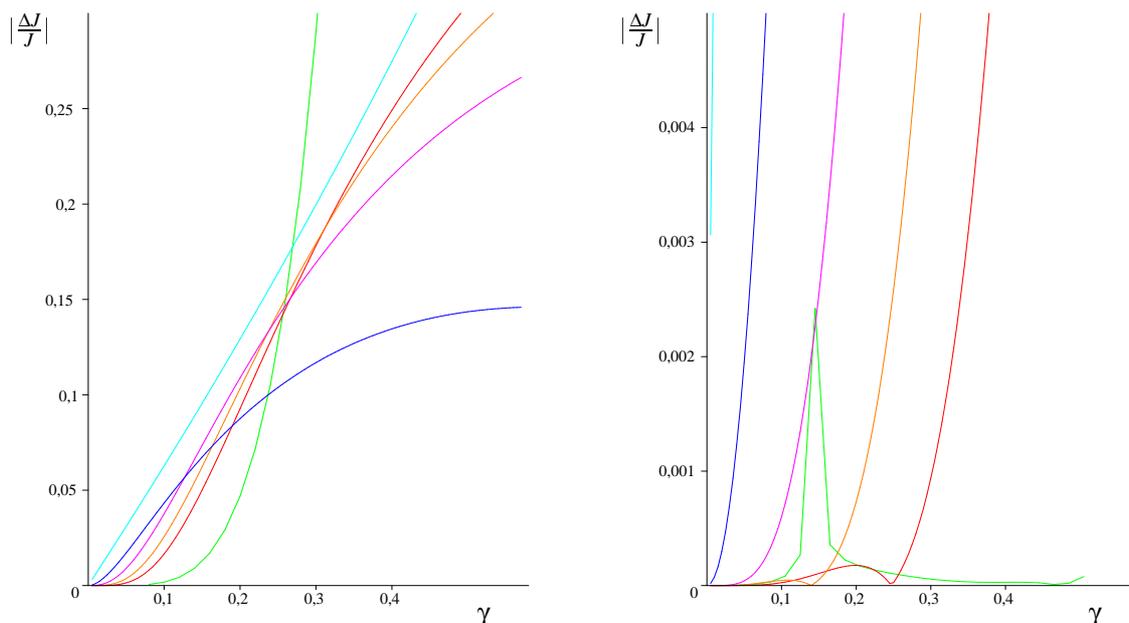


Abbildung 4.14: Relativer Fehler von  $J$  aufgetragen über  $\gamma$  für Konfigurationen mit  $\Omega = 0,874$ . Links ist die PN-Näherung mit  $\tilde{\Omega}_i = 0, i > 1$ , abgebildet und rechts mit  $\gamma_{i+1} = 0$ . Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

kann es zu Singularitäten in dem zu untersuchenden Bereich kommen, welche Artefakte der rationalen Funktion und nicht der zu approximierenden Funktion sind. Oft kann man diese Singularität beheben, indem man andere Ordnungen für die Polynome der rationalen Funktion wählt (ein anderes  $k-l$ -Paar aus Abschnitt 4.6.2). Ansonsten kann man über die singulare Stelle interpolieren. Dies wurde in Abb. 4.6 gemacht, um die Singularität von Gl. (4.9) bei  $x = \frac{18(-2+\sqrt{95})}{91} \approx 1,53$  zu überbrücken.

Anhand des Verlaufes des Drehimpulses  $J$  wollen wir auf eine mögliche Gefahr der PN-Näherung aufmerksam machen. In Abb. 4.15 ist der Drehimpuls über der Gesamtmasse aufgetragen für Konfigurationen mit  $\Omega = 0,874$ . Wie bei den vorangegangenen Abbildungen wurde die PN-Näherung mit  $\tilde{\Omega}_i = 0, i > 1$  für die linke Seite genommen und mit  $\gamma_{i+1} = 0$  für die rechte Seite.

Angenommen man wäre nicht im Besitz von zuverlässigen numerischen Werten und hätte nur die Version der PN-Näherung mit  $\tilde{\Omega}_i = 0, i > 0$ . So hätte man die linke Seite von Abb. 4.15 ohne schwarze Kurve erzeugen können. Man hätte sich leicht überzeugen können, daß die PN-Näherung gut konvergiert und, daß die tatsächliche Kurve nahe bei der vierten Ordnung liegt (rote Kurve). Man wäre davon ausgegangen, daß die Padé-Näherung (grüne Kurve) hier keine Verbesserung bringt.

Die rechte Seite von Abb. 4.15 und der Ausschnitt davon in Abb. 4.16 zeigen dahingegen wie gut die PN-Näherung hoher Ordnung selbst in einem hoch relativistischen Bereich sein

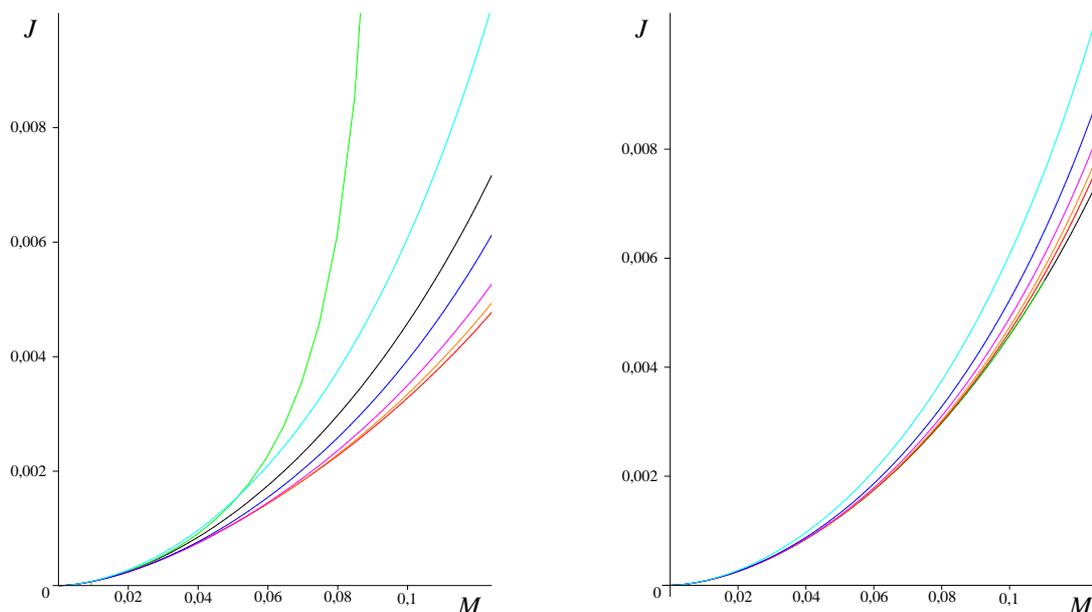


Abbildung 4.15: Der Drehimpuls  $J$  aufgetragen über der Gesamtmasse  $M$  für Konfigurationen mit  $\Omega = 0,874$ . Links ist die PN-Näherung mit  $\tilde{\Omega}_i = 0$ ,  $i > 1$ , abgebildet und rechts mit  $\gamma_{i+1} = 0$ . Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

kann. Hier bringt die Padé-Näherung eine starke Verbesserung, und man sieht in Abb. 4.16, daß die grüne Kurve durch alle numerisch ausgerechneten schwarzen Kreuze läuft, obwohl die Gesamtmasse schon den Wert  $M = 0,1$  erreicht.

Die Beispiele über die Verlässlichkeit der PN-Näherung in diesem Abschnitt haben sich ausschließlich auf Konfigurationen mit vorgegebener Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 0,874$  konzentriert. Es stellt sich die Frage, wie das Verhalten der PN-Näherung von der Winkelgeschwindigkeit abhängt. Die Abbildungen 4.17–4.18 zeigen die relativen Fehler von einigen physikalischen Größen in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem vorgegebenen Wert von  $e^{V_0} = 0,6$ . Der relative Fehler von  $M$  steigt mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit, hat aber eine Steigung, die mit wachsender Ordnung geringer wird. Beim Drehimpuls bleiben die Kurven bis zu einer Wert von etwa  $\Omega = 0,9$  relativ flach und die zweite bis vierte Ordnungen laufen fast parallel zueinander. Der Einfluß der Winkelgeschwindigkeit auf den relativen Fehler von Ruhemasse und Radienverhältnis ist viel größer, nimmt jedoch mit der Ordnung der Näherung ab. Ab dem oben genannten Wert von etwa  $\Omega = 0,9$  nehmen die relativen Fehler von diesen Größen stark zu aber bleiben noch lange unter einem Prozent. Daß die PN-Näherung die Tendenz zeigt, bei hohem  $\Omega$  schlechter zu werden, wird nicht groß überraschen, da solche Konfiguration auch relativistischer werden und Oberflächen besitzen, die weniger glatt sind. Am bemerkenswertesten bei Abbildungen 4.17 und 4.18 ist, wie gut die

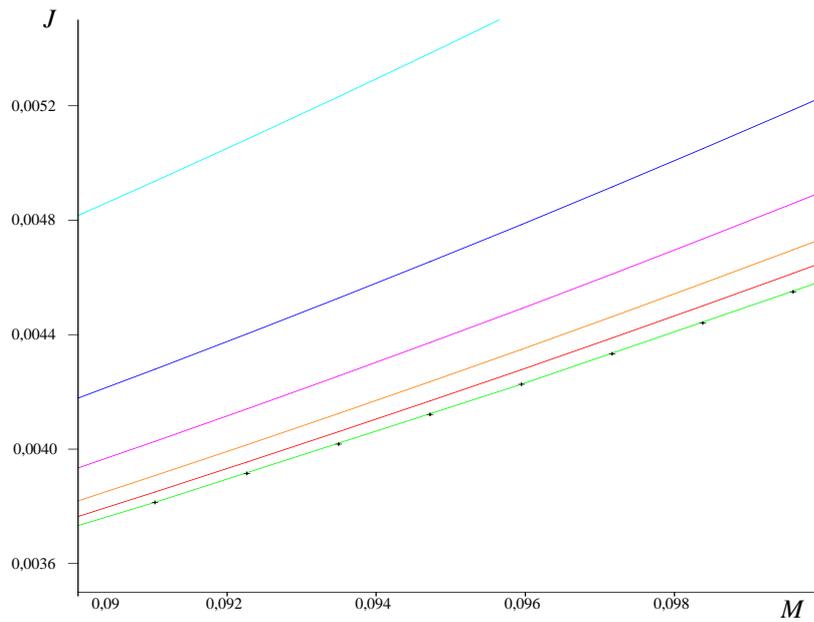


Abbildung 4.16: Ausschnitte von der rechten Seite von Abb. 4.15 für Konfigurationen mit  $\Omega = 0,874$  und  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ . Die schwarzen Kreuze sind numerisch bestimmte Werte und die Bedeutung der verschiedenen Kurven ist in Abb. 4.8 erklärt.

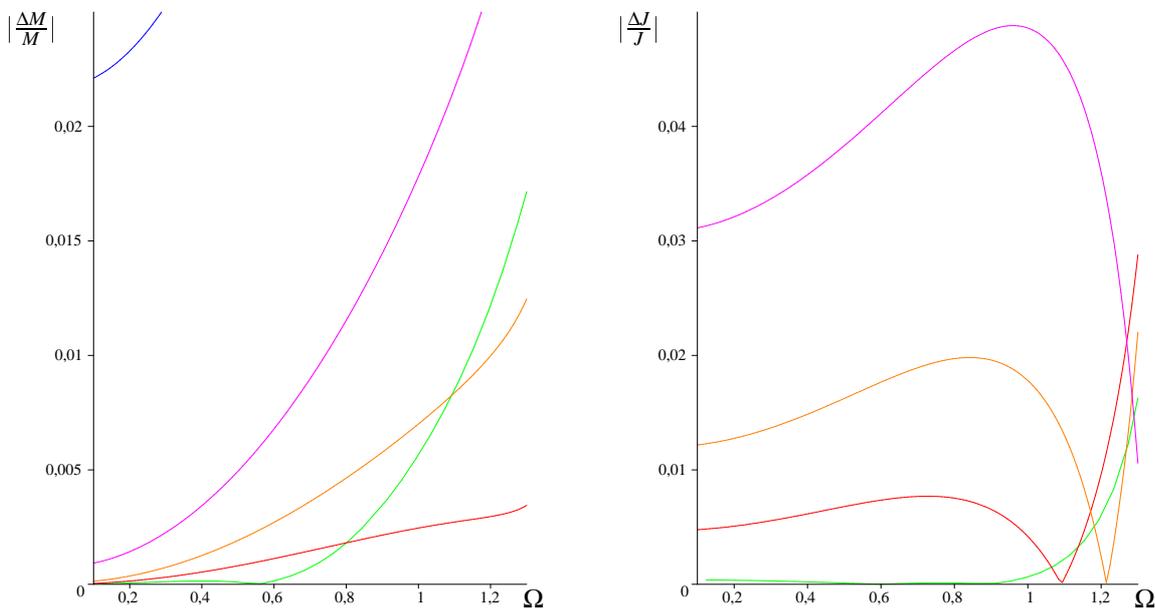


Abbildung 4.17: Relativer Fehler von  $M$  aufgetragen über  $\Omega$  (links) und  $J$  aufgetragen über  $\Omega$  (rechts) für Konfigurationen mit  $e^{V_0} = 0,6$ . Die PN-Näherung mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ , wurde verwendet. Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

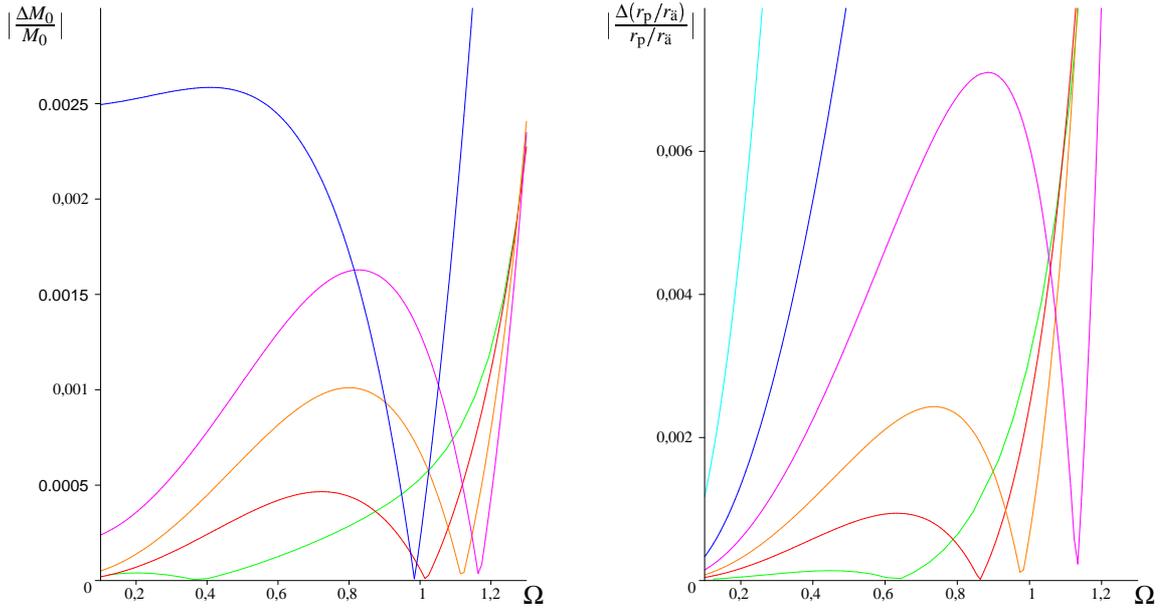


Abbildung 4.18: Relativer Fehler von  $M_0$  aufgetragen über  $\Omega$  (links) und  $r_p/r_a$  aufgetragen über  $\Omega$  (rechts) für Konfigurationen mit  $e^{V_0} = 0,6$ . Die PN-Näherung mit  $\gamma_i = 0, i > 2$ , wurde verwendet. Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

Padé-Näherung bei kleinem  $\Omega$  ist. In Tabelle 4.5 findet man als Beispiel numerische Werte für physikalische Größen in verschiedener Ordnung und mit der Padé-Näherung, verglichen mit numerischen Werten für eine Konfiguration mit  $\Omega = 0,3$  und  $e^{V_0} = 0,7$ .

Für die vorgegebene Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 0,3$  sind in den Abbildungen 4.19–4.21 die relativen Fehler von repräsentativen physikalischen Größen in Abhängigkeit von  $\gamma$  abgebildet. Bei allen Größen nimmt der relative Fehler mit zunehmender Ordnung ab. Der Verlauf von Kurven, die auf null abfallen um dann rasch zu steigen, welcher bei dem oben betrachtenden Fall  $\Omega = 0,874$  zu beobachten ist, ist hier nicht vorhanden. Hier ist zu beachten, wie groß der Wert von  $\gamma$  wird, bevor die Kurven anfangen deutlich zu steigen und wie klein die relativen Fehler insgesamt sind. Der relative Fehler des Druckes auf der linken Seite von Abb. 4.20 wird bei großem  $\gamma$  sehr groß, aber kann durch die Padé-Näherung kleiner gehalten werden. Auf der rechten Seite von Abb. 4.21 sieht man den Verlauf von  $E_b$  mit zunehmender Gesamtmasse. Die numerische Kurve (schwarze Kreuze) wird selbst bei hoch relativistischen Konfigurationen in dritter Ordnung extrem gut approximiert. Bei relativ geringen Winkelgeschwindigkeiten ermittelt die PN-Näherung in höherer Ordnung den richtigen qualitativen Verlauf von allen physikalischen Größen.

Bislang verglichen wir PN-Konfigurationen mit hochgenauen numerischen Ergebnissen. Als abschließender Vergleich findet man in Tabelle 4.6 die Einordnung dieser Näherung in

Größe	0PN	1PN	2PN	3PN	4PN	Padé	Numerik
$e^{V_0}$	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
$\Omega$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
$M (\times 10^{-2})$	7,94	6,17	6,244	6,2490	6,25013	6,25055	6,25070
$M_0 (\times 10^{-2})$	7,94	7,60	7,589	7,5864	7,58590	7,58554	7,58553
$P_z (\times 10^{-1})$	1,47	2,14	2,434	2,5627	2,61841	2,66099	2,66064
$J (\times 10^{-4})$	6,90	6,34	6,141	6,0744	6,05313	6,04321	6,04352
$\frac{r_p}{r_{\text{ai}}} (\times 10^{-1})$	9,73	9,79	9,801	9,8041	9,80538	9,80606	9,80628
$\xi_s$	4,21	6,33	7,038	7,2524	7,31442	7,33965	—
$\varepsilon (\times 10^{-1})$	7,68	7,72	7,723	7,7242	7,72453	7,72467	—

Tabelle 4.5: Werte für repräsentative Größen in verschiedener PN-Näherung, wobei 0PN die Maclaurin-Lösung kennzeichnet. Die PN-Näherung mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ , wurde hier verwendet und die Padé-Näherung wurde auf die vierte Ordnung der PN-Näherung angewandt.

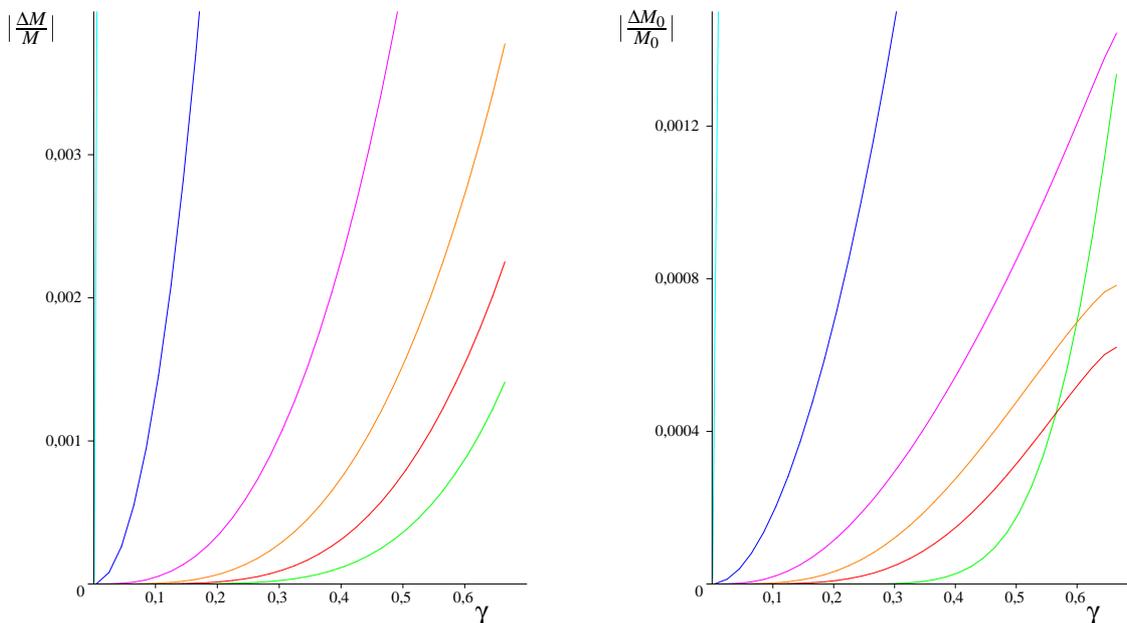


Abbildung 4.19: Relativer Fehler von  $M$  (links) und  $M_0$  (rechts) aufgetragen über  $\gamma$  für Konfigurationen mit  $\Omega = 0,3$ . Die PN-Näherung mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$  wurde hier verwendet. Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

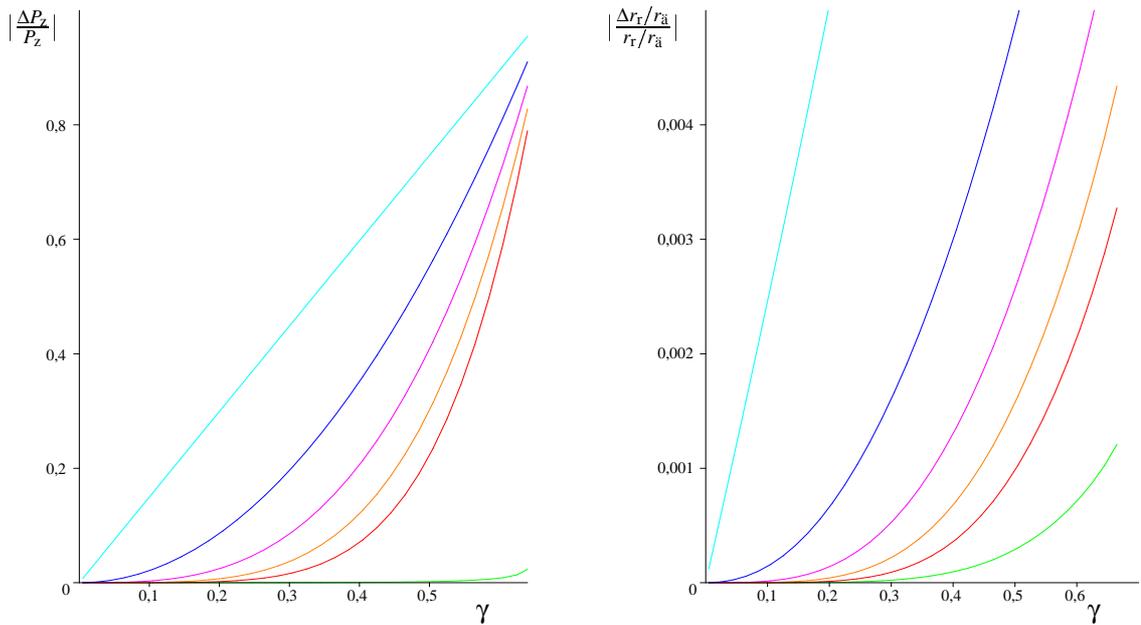


Abbildung 4.20: Relativer Fehler von  $P_z$  (links) und  $r_r/r_a$  (rechts) aufgetragen über  $\gamma$  für Konfigurationen mit  $\Omega = 0,3$ . Die PN-Näherung mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$  wurde hier verwendet. Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

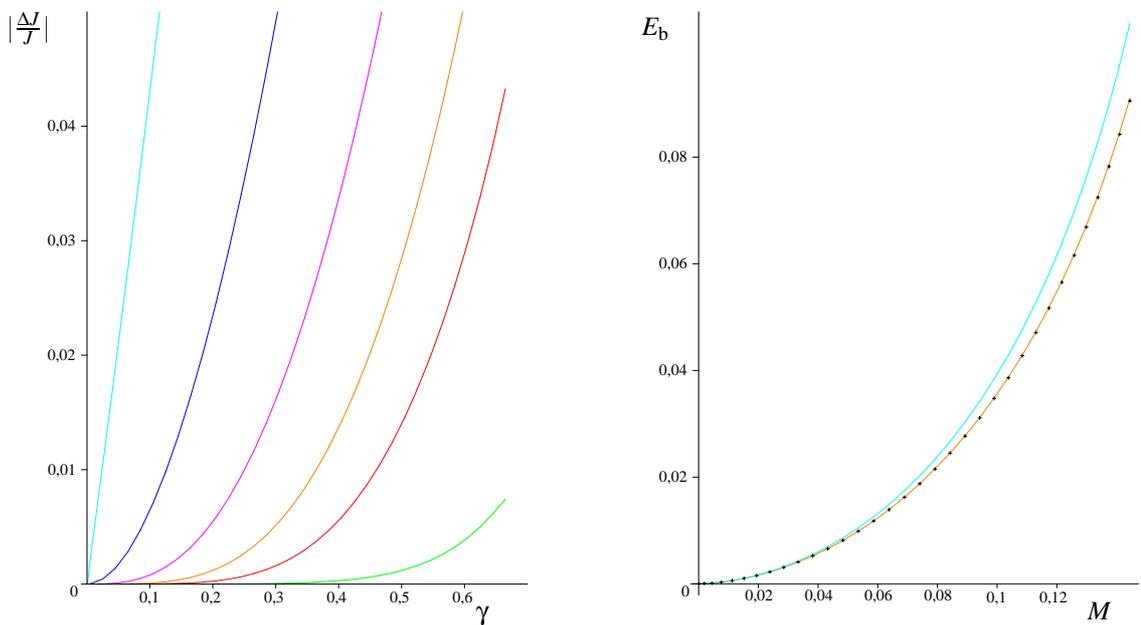


Abbildung 4.21: Links ist der relative Fehler von  $J$  über  $\gamma$  aufgetragen und rechts die Bindungsenergie über der Gesamtmasse. Für beide Abbildungen ist  $\Omega = 0,3$  festgehalten und die PN-Näherung mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ , wurde hier verwendet. Für die Bedeutung der verschiedenen Kurven siehe Abb. 4.8.

Größe	AKM-Wert	Relativer Fehler					
		Lorene/ rotstar	SF (260 × 400)	SF (70 × 200)	BGSM	KEH	PN
$P_z$	1	—	—	—	—	—	4%
$\frac{r_p}{r_a}$	0,7	—	—	—	0,1%	—	4%
$\Omega$	1,41170848318	0,0009%	0,03%	0,3%	1%	1%	—
$M$	0,135798178809	0,02%	0,002%	0,2%	0,9%	2%	3%
$M_0$	0,186338658186	0,02%	0,02%	0,3%	1%	0,2%	0,1%
$J$	0,0140585992949	0,002%	0,04%	0,05%	2%	2%	3%
$Z_p$	1,70735395213	0,001%	0,04%	0,01%	2%	6%	—

Tabelle 4.6: Relativer Fehler für einige physikalische Größen relativ zu den hochgenauen Werten des AKM-Programms. Die Spalten mit den Überschriften Lorene/rotstar, SF (260 × 400), SF (70 × 200), BGSM und KEH sind mit Werten aus verschiedenen numerischen Programmen erstellt (siehe [34] für genauere Angaben). Die Spalte mit der Überschrift PN ist mit Werten aus der PN-Näherung in vierter Ordnung mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ , erstellt. Der zugehörige Wert des relativistischen Parameters ist  $\varepsilon \approx 1,1$

einem etwas breiteren numerischen Umfeld.<sup>12</sup> Tabelle 4.6 basiert auf Tabelle 2 aus [34], §2.7. Jede von den mit der AKM-Methode erzeugten Ziffern ist gültig und ermöglicht also die Ermittlung des relativen Fehlers. Für genauere Angaben zu den tabellierten numerischen Programmen (Spalten 3–7) siehe [34]. Die achte Spalte mit der Überschrift PN ist mit Werten aus der vierten PN-Näherung mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ , erstellt. Bemerkenswert ist, daß die relativen Fehler der PN-Näherung von derselben Größenordnung sind wie die von den numerischen Programmen BGSM und KEH, obwohl die Konfiguration hochrelativistisch ist und eine hohe Winkelgeschwindigkeit besitzt. In Abb. 4.22 sieht man die Oberfläche des Sterns in meridionalem Querschnitt. Das  $a_0$ - $\xi_s$ -Paar, das man in vierter PN-Ordnung erhält, wenn  $\Omega$  und  $Z_p$  vorgegeben werden, wurde verwendet, um die PN-Kurven zu erstellen. Die türkisfarbende Ellipse erhält man aus der Maclaurin-Lösung und die blaue Kurve aus der ersten PN-Ordnung. Schon bei der zweiten Ordnung liegt die Kurve so nahe bei der vierten Ordnung, daß die zweite und dritte Ordnungen der Übersichtlichkeit halber weggelassen sind. Beeindruckend genau gibt die vierte Ordnung die richtige Oberfläche des Sternes wieder.

<sup>12</sup>Es ist angebracht, daran zu erinnern, daß die hier aufgeführten Referenzprogramme – im Gegensatz zu der hier entwickelten PN-Näherung – in der Lage sind, andere Zustandsgleichungen zu behandeln.

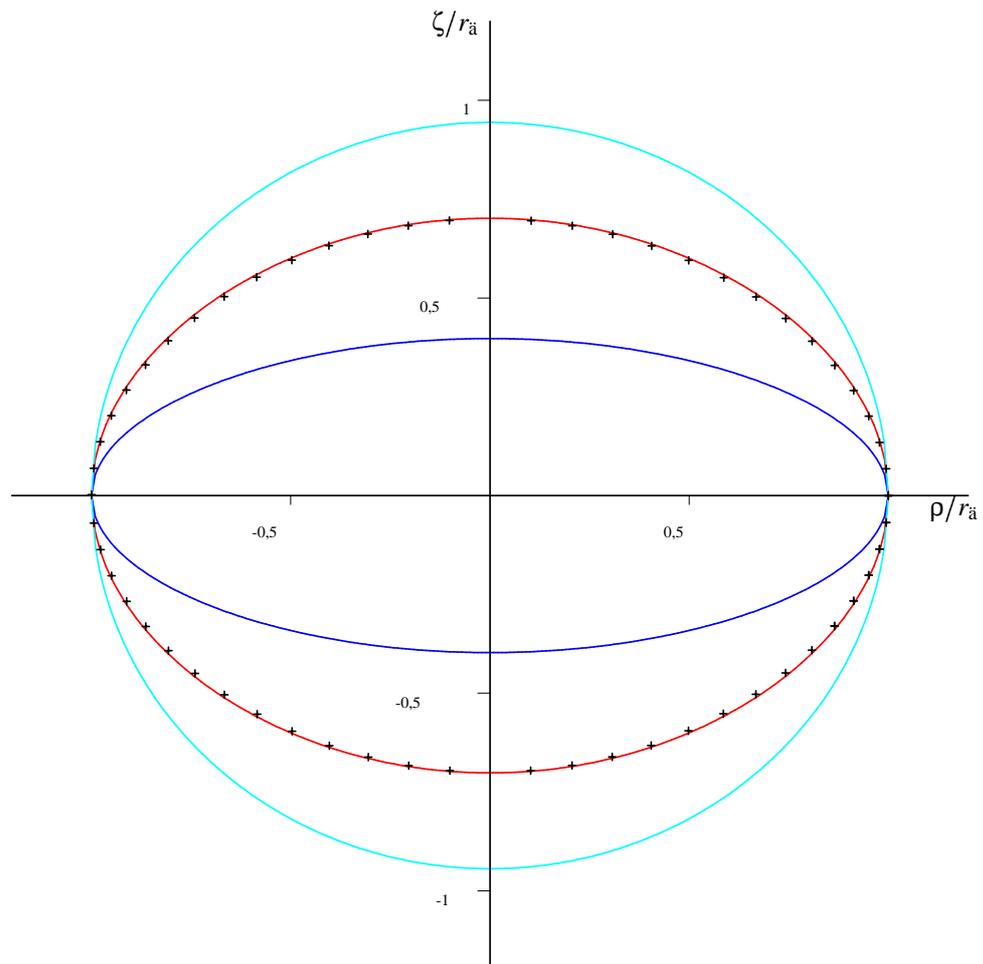


Abbildung 4.22: Meridionaler Querschnitt der Konfiguration aus Tabelle 4.6 in verschiedenen PN-Ordnungen bei festgehaltenem  $a_0$  und  $\xi_s$ . Die schwarzen Kreuze stellen numerische Werte dar. Siehe Abb. 4.8 für die Bedeutung der verschiedenen Farben.

## 5 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit entwickelten wir ein rekursives Verfahren zur Berechnung einer beliebigen Ordnung der post-Newtonschen (PN-) Näherung für das Modell stationärer, axial-symmetrischer Flüssigkeitskörper konstanter Dichte. Dies wurde im wesentlichen durch drei Schritte ermöglicht: Zum einen führten wir oberflächenangepaßte Koordinaten ein, damit alle vorkommenden Integrale über  $\eta$  auf dem Intervall  $\eta \in [-1, 1]$  stetige Integranden besitzen und somit die Anwendung der Orthogonalitätsrelationen der Gegenbauer-Polynome erlauben. Zum anderen brachten wir die Feldgleichungen in die Form einer erweiterten Poisson-Gleichung mit einer Quelle, die in jeder Ordnung des relativistischen Parameters nur aus bekannten Funktionen besteht. Zuletzt erkannten wir, daß das erweiterte Poisson-Integral in den neuen Koordinaten unverändert übernommen werden kann und fanden damit eine explizite Darstellung der metrischen Funktionen in analytischen Ausdrücken.

Im Besitz dieses rekursiven Schemas konnten Aussagen von Relevanz für die analytische Relativitätstheorie getroffen werden. Unter der Annahme, daß die PN-Näherung konvergiert, konnten wir zeigen, daß jeder stationäre, axialsymmetrische, relativistische Flüssigkeitskörper mit konstanter Dichte, der mit der Maclaurin-Lösung stetig zusammenhängt, Spiegelsymmetrie um die Äquatorebene  $\zeta = 0$  besitzt. Ferner bewiesen wir, daß die PN-Näherung  $n$ -ter Ordnung am Bifurkationspunkt  $\xi_{2n+2}^*$  der Newtonschen Lösung einen Pol erster Ordnung im Parameterraum besitzt. Darüberhinaus gaben wir das weitere Verhalten der PN-Näherung an den singulären Stellen an und zeigten, daß sich ausgehend von den Bifurkationspunkten ring- bzw. linsenförmige Konfigurationen mit unterschiedlich vielen Rillen entwickeln.

Das hier erarbeitete rekursive Verfahren benutzten wir, um die ersten vier Ordnungen der PN-Näherung explizit auszurechnen. Alle vorkommenden Größen sind Ausdrücke in elementaren Funktionen, und die metrischen Funktionen im Innenraum sind sogar Polynome in  $\eta^2$  und  $\psi^2$ . Diese einfache Struktur läßt hoffen, daß sich eine analytische Lösung dahinter verbirgt, wie sie bislang nur im Scheibengrenzfall bekannt ist.

Der Vergleich zwischen der PN-Näherung in vierter Ordnung und hochgenauen numerischen Daten zeigt, daß die Güte der Näherung stark von der Wahl der Konstanten  $\gamma_i$  abhängt. Wählt man  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ , so kann man in vierter Ordnung selbst stark relativistische Konfigurationen zuverlässig berechnen. Bei einer Rotverschiebung von  $Z_p \approx 2$  liegen typische relative Fehler für physikalische Größen unter 1%. Meist bringt die Padé-Näherung eine deutliche

Verbesserung.

In seiner Arbeit [7] schrieb Chandrasekhar, daß die freie Wahl, die man bezüglich des Maclaurin-Vergleichskörpers hat, „offensichtlich keinen physikalischen Inhalt“ besitzt. Er legte „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ eine Konstante fest, „um [eine eindeutige] post-Newtonische Maclaurin-Sequenz zu entwerfen.“<sup>1</sup> In der vorliegenden Arbeit zeigten wir, daß diese freie Wahl, die der eben erwähnten Wahl der Konstanten  $\gamma_i$  entspricht, einen großen Einfluß auf die Eigenschaften der PN-Näherung, wie beispielsweise ihre Konvergenz, hat. Dies macht auf die Empfindlichkeit der PN-Näherung auch gegenüber Änderungen nichtphysikalischer Natur aufmerksam. Andererseits zeigten wir, daß die PN-Näherung bei einer günstigen Wahl des Vergleichskörpers sehr gut konvergieren kann und selbst stark relativistische Konfigurationen mit hoher Genauigkeit modellieren kann.

---

<sup>1</sup> „clearly no physical content“, „without any loss of generality“, „for the purposes of delineating [a unique] post-Newtonian Maclaurin sequence.“

## Literaturverzeichnis

- [1] M. Ansorg, A. Kleinwächter & R. Meinel, *Highly Accurate Calculation of Rotating Neutron Stars*, *Astron. & Astrophys.*, **381** L49 (2002).
- [2] M. Ansorg, A. Kleinwächter & R. Meinel, *Highly Accurate Calculation of Rotating Neutron Stars: Detailed Description of the Numerical Methods*, *Astron. & Astrophys.*, **405** 711 (2003).
- [3] M. Ansorg, A. Kleinwächter & R. Meinel, *Uniformly Rotating Axisymmetric Fluid Configurations Bifurcating from Highly Flattened Maclaurin Spheroids*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **339** 515 (2003).
- [4] W. Baade & F. Zwicky, *On Super-novae*, *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, **20** 254 (1934).
- [5] J.M. Bardeen, *A Variational Principle for Rotating Stars in General Relativity*, *Astroph. J.*, **162** 71 (1970).
- [6] J.M. Bardeen, *A Reexamination of the Post-Newtonian Maclaurin Spheroids*, *Astroph. J.*, **167** 425 (1971).
- [7] S. Chandrasekhar, *The Post-Newtonian Effects of General Relativity on the Equilibrium of Uniformly Rotating Bodies II. The Deformed Figures of the Maclaurin Spheroids*, *Astroph. J.*, **147** 334 (1967).
- [8] S. Chandrasekhar, *The Virial Equations of the Fourth Order*, *Astroph. J.*, **152** 293 (1968).
- [9] T. Damour, B.R. Iyer & B.S. Sathyaprakash, *Improved Filters for Gravitational Waves from Inspiralling Compact Binaries*, *Phys. Rev. D*, **57** 885 (1998).
- [10] J. Ehlers, *Über den Newtonschen Grenzwert der Einsteinschen Gravitationstheorie*, aus *Grundlagenprobleme der modernen Physik*, 65–84, Bibliographisches Institut, Mannheim (1981).
- [11] Y. Eriguchi & I. Hachisu, *New Equilibrium Sequences Bifurcating from Maclaurin Sequence*, *Prog. Theor. Phys.*, **67** 844 (1982).

- [12] T. Gold, *Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources*, Nature, **218** 731 (1968).
- [13] I. Hachisu & Y. Eriguchi, *Bifurcation Points on the Maclaurin Sequence*, Publ. Astron. Soc. Japan, **36** 497 (1984).
- [14] U. Heilig, *On the Existence of Rotating Stars in General Relativity*, Commun. Math. Phys., **166** 457 (1995).
- [15] A. Hewish, S.J. Bell, J.D.H. Pilkington, P.F. Scott & R.A. Collins, *Observation of a Pulsating Radio Source*, Nature, **217** 709 (1968).
- [16] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1956).
- [17] M.I. Large, A.F. Vaughan & B.Y. Mills *A Pulsar Supernova Association?*, Nature, **220** 340 (1968).
- [18] A.G. Lyne & F. Graham-Smith, *Pulsars*, Johann Ambrosius Barth, Leipzig (1990).
- [19] C. Maclaurin *A Treatise on Fluxions. In two volumes*, William Baynes & William Davis, London 2<sup>nd</sup> edition (1801).
- [20] R. Meinel, *Black Holes: A Physical Route to the Kerr Metric*, Annalen Phys. **11** 509 (2002).
- [21] C.W. Misner, K.S. Thorne & J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, New York (1973).
- [22] G. Neugebauer & R. Meinel, *The Einsteinian Gravitational Field of the Rigidly Rotating Disk of Dust*, Astrophys. J. **414** L97 (1993).
- [23] G. Neugebauer & R. Meinel, *General Relativistic Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust: Axis Potential, Disk Metric, and Surface Mass Density*, Phys. Rev. Lett. **73** 2166 (1994).
- [24] G. Neugebauer & R. Meinel, *General Relativistic Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust: Solution in Terms of Ultraelliptic Functions*, Phys. Rev. Lett. **75** 3046 (1995).
- [25] G. Neugebauer & R. Meinel, *Progress in Relativistic Gravitational Theory using the Inverse Scattering Method*, J. Math. Phys, gr-qc 0304086 (2003).

- [26] J. Oppenheimer & G.M. Volkoff, On Massive Neutron Cores, *Phys. Rev.*, **55** 374 (1939).
- [27] F. Pacini, *Energy Emission from a Neutron Star*, *Nature*, **216** 567 (1967).
- [28] F. Pacini, *Rotating Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants*, *Nature*, **219** 145 (1968).
- [29] D. Petroff & R. Meinel, *Post-Newtonian Approximation of the Rigidly Rotating Disc of Dust to Arbitrary Order*, *Phys. Rev. D*, **63** 064012 (2001).
- [30] H. Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, *Acta mathematica*, **7** 259 (1885).
- [31] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling & B.P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (1990).
- [32] J.H. Staelin, E.C. Reifstein, *Pulsating Radio Sources near the Crab Nebula*, *Science*, **162** 1481 (1968).
- [33] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers & E. Herlt, *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*, zweite Ausgabe, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [34] N. Stergioulas, *Rotating Stars in Relativity*, *Living Rev. Relativity* [Online-Veröffentlichung]: Zugriff am 21.06.2003, <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-3> (2003).
- [35] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York (1978).

## A Die Funktionen $g_l^m(\psi)$ und $h_l^m(\psi)$

$$g_0^2 = 1$$

$$g_2^2 = -\frac{3\psi^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$g_4^2 = \frac{35}{8}\psi^4 + \frac{15}{4}\psi^2 + \frac{3}{8}$$

$$g_6^2 = -\frac{231}{16}\psi^6 - \frac{315}{16}\psi^4 - \frac{105}{16}\psi^2 - \frac{5}{16}$$

$$g_8^2 = \frac{6435}{128}\psi^8 + \frac{3003}{32}\psi^6 + \frac{3465}{64}\psi^4 + \frac{315}{32}\psi^2 + \frac{35}{128}$$

$$g_{10}^2 = -\frac{46189}{256}\psi^{10} - \frac{109395}{256}\psi^8 - \frac{45045}{128}\psi^6 - \frac{15015}{128}\psi^4 - \frac{3465}{256}\psi^2 - \frac{63}{256}$$

$$g_{12}^2 = \frac{676039}{1024}\psi^{12} + \frac{969969}{512}\psi^{10} + \frac{2078505}{1024}\psi^8 + \frac{255255}{256}\psi^6 + \frac{225225}{1024}\psi^4 + \frac{9009}{512}\psi^2 + \frac{231}{1024}$$

$$h_0^2 = \operatorname{arccot}(\psi)$$

$$h_2^2 = \frac{3\psi}{2} + \left(-\frac{3\psi^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \operatorname{arccot}(\psi)$$

$$h_4^2 = -\frac{35\psi^3}{8} - \frac{55\psi}{24} + \left(\frac{35}{8}\psi^4 + \frac{15}{4}\psi^2 + \frac{3}{8}\right) \operatorname{arccot}(\psi)$$

$$h_6^2 = \frac{231\psi^5}{16} + \frac{119\psi^3}{8} + \frac{231\psi}{80} + \left( -\frac{231}{16}\psi^6 - \frac{315}{16}\psi^4 - \frac{105}{16}\psi^2 - \frac{5}{16} \right) \operatorname{arccot}(\psi)$$

$$h_8^2 = -\frac{6435\psi^7}{128} - \frac{9867\psi^5}{128} - \frac{4213\psi^3}{128} - \frac{15159\psi}{4480} + \left( \frac{6435}{128}\psi^8 + \frac{3003}{32}\psi^6 + \frac{3465}{64}\psi^4 + \frac{315}{32}\psi^2 + \frac{35}{128} \right) \operatorname{arccot}(\psi)$$

$$h_{10}^2 = \frac{46189\psi^9}{256} + \frac{70499\psi^7}{192} + \frac{157157\psi^5}{640} + \frac{26741\psi^3}{448} + \frac{61567\psi}{16128} + \left( -\frac{46189}{256}\psi^{10} - \frac{109395}{256}\psi^8 - \frac{45045}{128}\psi^6 - \frac{15015}{128}\psi^4 - \frac{3465}{256}\psi^2 - \frac{63}{256} \right) \operatorname{arccot}(\psi)$$

$$h_{12}^2 = -\frac{676039\psi^{11}}{1024} - \frac{5143775\psi^9}{3072} - \frac{3917667\psi^7}{2560} - \frac{1548989\psi^5}{2560} - \frac{887107\psi^3}{9216} - \frac{995215\psi}{236544} + \left( \frac{676039}{1024}\psi^{12} + \frac{969969}{512}\psi^{10} + \frac{2078505}{1024}\psi^8 + \frac{255255}{256}\psi^6 + \frac{225225}{1024}\psi^4 + \frac{9009}{512}\psi^2 + \frac{231}{1024} \right) \operatorname{arccot}(\psi)$$

$$g_0^3 = 1$$

$$g_2^3 = -4\psi^2 - 1$$

$$g_4^3 = 16\psi^4 + 12\psi^2 + 1$$

$$g_6^3 = -64\psi^6 - 80\psi^4 - 24\psi^2 - 1$$

$$g_8^3 = 256\psi^8 + 448\psi^6 + 240\psi^4 + 40\psi^2 + 1$$

$$g_{10}^3 = -1024\psi^{10} - 2304\psi^8 - 1792\psi^6 - 560\psi^4 - 60\psi^2 - 1$$

$$g_{12}^3 = 4096\psi^{12} + 11264\psi^{10} + 11520\psi^8 + 5376\psi^6 + 1120\psi^4 + 84\psi^2 + 1$$

$$h_0^3 = 1 - \frac{\psi}{\sqrt{1+\psi^2}}$$

$$h_2^3 = -\frac{4\psi^2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\frac{4}{3}\psi^3 + \psi}{\sqrt{\psi^2+1}}$$

$$h_4^3 = \frac{16\psi^4}{5} + \frac{12\psi^2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{-\frac{16}{5}\psi^5 - 4\psi^3 - \psi}{\sqrt{\psi^2+1}}$$

$$h_6^3 = -\frac{64\psi^6}{7} - \frac{80\psi^4}{7} - \frac{24\psi^2}{7} - \frac{1}{7} + \frac{\frac{64}{7}\psi^7 + 16\psi^5 + 8\psi^3 + \psi}{\sqrt{\psi^2+1}}$$

$$h_8^3 = \frac{256\psi^8}{9} + \frac{448\psi^6}{9} + \frac{80\psi^4}{3} + \frac{40\psi^2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{-\frac{256}{9}\psi^9 - 64\psi^7 - 48\psi^5 - \frac{40}{3}\psi^3 - \psi}{\sqrt{\psi^2+1}}$$

$$h_{10}^3 = -\frac{1024\psi^{10}}{11} - \frac{2304\psi^8}{11} - \frac{1792\psi^6}{11} - \frac{560\psi^4}{11} - \frac{60\psi^2}{11} - \frac{1}{11} + \frac{\frac{1024}{11}\psi^{11} + 256\psi^9 + 256\psi^7 + 112\psi^5 + 20\psi^3 + \psi}{\sqrt{\psi^2+1}}$$

$$h_{12}^3 = \frac{4096\psi^{12}}{13} + \frac{11264\psi^{10}}{13} + \frac{11520\psi^8}{13} + \frac{5376\psi^6}{13} + \frac{1120\psi^4}{13} + \frac{84\psi^2}{13} + \frac{1}{13}$$

$$+ \frac{-\frac{4096}{13}\psi^{13} - 1024\psi^{11} - 1280\psi^9 - 768\psi^7 - 224\psi^5 - 28\psi^3 - \psi}{\sqrt{\psi^2 + 1}}$$

$$g_0^4 = 1$$

$$g_2^4 = -\frac{15\psi^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$g_4^4 = \frac{315}{8}\psi^4 + \frac{105}{4}\psi^2 + \frac{15}{8}$$

$$g_6^4 = -\frac{3003}{16}\psi^6 - \frac{3465}{16}\psi^4 - \frac{945}{16}\psi^2 - \frac{35}{16}$$

$$g_8^4 = \frac{109395}{128}\psi^8 + \frac{45045}{32}\psi^6 + \frac{45045}{64}\psi^4 + \frac{3465}{32}\psi^2 + \frac{315}{128}$$

$$g_{10}^4 = -\frac{969969}{256}\psi^{10} - \frac{2078505}{256}\psi^8 - \frac{765765}{128}\psi^6 - \frac{225225}{128}\psi^4 - \frac{45045}{256}\psi^2 - \frac{693}{256}$$

$$g_{12}^4 = \frac{16900975}{1024}\psi^{12} + \frac{22309287}{512}\psi^{10} + \frac{43648605}{1024}\psi^8 + \frac{4849845}{256}\psi^6 \\ + \frac{3828825}{1024}\psi^4 + \frac{135135}{512}\psi^2 + \frac{3003}{1024}$$

$$h_0^4 = \frac{1}{2} \operatorname{arccot}(\psi) - \frac{\psi}{2(\psi^2 + 1)}$$

$$h_2^4 = \left(-\frac{5\psi^2}{8} - \frac{1}{8}\right) \operatorname{arccot}(\psi) + \frac{(15\psi^2 + 13)\psi}{24(\psi^2 + 1)}$$

$$h_4^4 = \left(\frac{21}{16}\psi^4 + \frac{7}{8}\psi^2 + \frac{1}{16}\right) \operatorname{arccot}(\psi) - \frac{(315\psi^4 + 420\psi^2 + 113)\psi}{240(\psi^2 + 1)}$$

$$h_6^4 = \left( -\frac{429}{128}\psi^6 - \frac{495}{128}\psi^4 - \frac{135}{128}\psi^2 - \frac{5}{128} \right) \operatorname{arccot}(\psi) + \frac{(15015\psi^6 + 27335\psi^4 + 14273\psi^2 + 1873)\psi}{4480(\psi^2 + 1)}$$

$$h_8^4 = \left( \frac{2431}{256}\psi^8 + \frac{1001}{64}\psi^6 + \frac{1001}{128}\psi^4 + \frac{77}{64}\psi^2 + \frac{7}{256} \right) \operatorname{arccot}(\psi) - \frac{(765765\psi^8 + 1771770\psi^6 + 1369368\psi^4 + 393030\psi^2 + 30563)\psi}{80640(\psi^2 + 1)}$$

$$h_{10}^4 = \left( -\frac{29393}{1024}\psi^{10} - \frac{62985}{1024}\psi^8 - \frac{23205}{512}\psi^6 - \frac{6825}{512}\psi^4 - \frac{1365}{1024}\psi^2 - \frac{21}{1024} \right) \operatorname{arccot}(\psi) + \frac{(101846745\psi^{10} + 286140855\psi^8 + 292726434\psi^6 + 131225094\psi^4 + 24057605\psi^2 + 1237955)\psi}{(3548160(\psi^2 + 1))}$$

$$h_{12}^4 = \left( \frac{185725}{2048}\psi^{12} + \frac{245157}{1024}\psi^{10} + \frac{479655}{2048}\psi^8 + \frac{53295}{512}\psi^6 + \frac{42075}{2048}\psi^4 + \frac{1485}{1024}\psi^2 + \frac{33}{2048} \right) \operatorname{arccot}(\psi) - \frac{(8365982625\psi^{12} + 27663515880\psi^{10} + 35214724545\psi^8 + 21539963016\psi^6 + 6412737331\psi^4 + 819429520\psi^2 + 29970795)\psi}{(92252160(\psi^2 + 1))}$$

## B Physikalische Parameter in tabellierter Form

Dieser Anhang enthält Tabellen, mit numerischen Werten für die Koeffizienten von der Entwicklung der in Abschnitt 4.4.1 eingeführten physikalischen Größen für verschiedene Werte von  $\xi_s$ . In allen Tabellen wurde  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$  gewählt. So gilt

$$\gamma = \gamma_2 \varepsilon^2 = \frac{3}{4} \sqrt{1 + \xi_s^2} \left( \operatorname{arccot}(\xi_s)(1 + \xi_s^2) - \xi_s \right) \varepsilon^2.$$

Aus Gl. (2.18) folgt

$$a_0^2 = \frac{3c^2}{8\pi Q \xi_s \sqrt{1 + \xi_s^2}} \varepsilon^2.$$

Wenn man beispielsweise die Konfiguration mit  $\xi_s = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,7$  in zweiter PN-Näherung ausrechnen will, so bekommt man mit  $Q = c = 1$  aus den Tabellen und obigen Formeln

$$a_0 \approx 0,32346$$

$$e^{V_0} = 1 - \gamma \approx 0,63681$$

$$\Omega = \tilde{\Omega}/a_0 \approx \frac{1}{a_0} \left( 0,54175 \varepsilon + 0,26458 \varepsilon^3 - 0,32261 \varepsilon^5 \right) \approx 1,285$$

$$M \approx (2,6180 - 1,3693 \varepsilon^2 + 1,7071 \varepsilon^4) a_0^3 \approx 0,07976$$

$$M_0 \approx (2,6180 - 0,58922 \varepsilon^2 + 0,99562 \varepsilon^4) a_0^3 \approx 0,08692$$

$$P_z \approx (0,87655 - 0,29553 \varepsilon^2 - 0,21693 \varepsilon^4) a_0^2 \approx 0,07111$$

$$J \approx (1,5346 + 1,0605 \varepsilon^2 + 0,24311 \varepsilon^4) a_0^5 \approx 0,007480$$

$$\frac{r_p}{r_{\ddot{a}}} \approx (0,44721 - 0,55974 \varepsilon^2 - 0,23039 \varepsilon^4) \approx 0,2283.$$

$\xi_s$	Koeffizienten von $\varepsilon^i$ für die dimensionlose Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\Omega}$				
	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^7$	$\varepsilon^9$
0,00	1,0854019	-0,95903173	-0,21316642	-0,09051296	-0,04918981
0,01	1,0716302	-0,92995651	-0,19734833	-0,11039829	-0,03104705
0,02	1,0579561	-0,90160729	-0,18278329	-0,12768605	-0,01297664
0,03	1,0443818	-0,8741343	-0,16911244	-0,14231975	0,00475476
0,04	1,0309094	-0,84772939	-0,15613789	-0,15411481	0,02219393
0,05	1,0175410	-0,82264177	-0,14417187	-0,16467618	0,01858310
0,06	1,0042785	-0,7992021	-0,13496336	-0,19414756	-1,0164212
0,07	0,99112387	-0,77786047	-0,13435142	-0,44265195	24,323369
0,08	0,97807889	-0,75924895	-0,16091713	-5,9366901	413,17220
0,09	0,96514535	-0,74428879	-0,28117178	12,104546	-22,734741
0,10	0,95232494	-0,73438506	-0,8296993	31,560268	-462,39599
0,11	0,93961928	-0,73180435	-8,5365954	809,03790	-58587,792
0,12	0,92702988	-0,74047382	5,2676596	10,231313	2190,3915
0,13	0,91455822	-0,76787434	4,9354647	-55,887234	1224,6781
0,14	0,90220565	-0,83029178	7,3381300	-134,37904	3062,2576
0,15	0,88997346	-0,97129085	14,854009	-437,85365	15041,748
0,16	0,87786287	-1,3603363	49,619624	-3139,3425	234545,37
0,17	0,865875	-3,9363526	1171,2187	-606631,48	3,87526090 $\times 10^8$
0,18	0,85401088	1,9317681	-11,780334	2884,4373	-326822,46
0,19	0,84227147	0,57651868	13,454904	127,48863	100,77384
0,20	0,83065764	0,27773007	6,1769373	69,330710	524,99073
0,30	0,72155838	0,09314481	-0,2608214	1,6431116	5,7294717
0,40	0,62537562	0,1993343	-0,43302451	0,15006752	1,3582894
0,50	0,54174791	0,26458306	-0,32260971	-0,27140215	0,58262038
0,60	0,46979598	0,28819495	-0,17835186	-0,34929691	0,09017830
0,70	0,40833633	0,28520112	-0,06646413	-0,28550798	-0,13370899
0,80	0,35606582	0,26835131	0,00483724	-0,19391875	-0,17918978
0,90	0,3116946	0,24576778	0,04504743	-0,11763146	-0,15297576
1,00	0,27402709	0,22194776	0,06517545	-0,06422083	-0,11177801
1,10	0,2420016	0,19912131	0,07339547	-0,02967889	-0,07575039
1,20	0,21470198	0,17824581	0,07493751	-0,00829155	-0,04899455
1,30	0,19135249	0,15961339	0,07292802	0,00454162	-0,0304128
1,40	0,17130433	0,14319157	0,06916914	0,01198574	-0,01789323
1,50	0,15401892	0,1288049	0,06467418	0,01608587	-0,00957769
1,60	0,13905099	0,11622792	0,05999884	0,01812893	-0,00409702
1,70	0,12603306	0,10523057	0,05543697	0,01891680	-0,00050821
1,80	0,11466173	0,09559856	0,05113403	0,01894809	0,00182048
1,90	0,10468625	0,08714120	0,04715237	0,01853317	0,00330817
2,00	0,09589882	0,07969281	0,04350861	0,0178655	0,00423273

Tabelle B.1: Entwicklungskoeffizienten von  $\tilde{\Omega}$  für verschiedene Werte von  $\xi_s$  mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ .

$\xi_s$	Koeffizienten von $\varepsilon^i$ für die Gesamtmasse $M$				
	$\varepsilon^0$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^8$
0,00	0	0	0	0	0
0,01	0,04189209	0,04246214	0,04840595	0,05310172	0,06138033
0,02	0,08380931	0,08115227	0,09502374	0,09931087	0,1165261
0,03	0,1257768	0,11627705	0,14034491	0,13816091	0,16779538
0,04	0,16781969	0,14806521	0,18487986	0,1690188	0,2181801
0,05	0,20996311	0,17677919	0,22928743	0,19157084	0,27677559
0,06	0,25223219	0,2027326	0,27473656	0,21060612	0,5979699
0,07	0,29465207	0,22631723	0,32398279	0,28537561	-6,0060957
0,08	0,33724788	0,24804689	0,38498653	2,0152694	-124,06068
0,09	0,38004475	0,26863219	0,48597184	-3,9985889	-0,15355203
0,10	0,42306781	0,28911548	0,77113254	-11,621492	155,23679
0,11	0,4663422	0,31113215	4,1859186	-339,22981	24417,212
0,12	0,50989305	0,33746264	-1,8588230	-10,933727	-1022,9939
0,13	0,5537455	0,37333934	-1,7708758	21,555107	-531,17370
0,14	0,59792467	0,43007081	-3,0839441	61,463611	-1420,9588
0,15	0,6424557	0,5377904	-7,4131614	226,89235	-7777,7392
0,16	0,68736372	0,81351169	-28,767430	1830,3581	-136275,58
0,17	0,73267386	2,5952925	-770,75767	398608,22	-2,54467540 $\times 10^8$
0,18	0,77841126	-1,4529533	11,397074	-2110,8820	244860,84
0,19	0,82460105	-0,51954369	-10,093076	-89,164129	226,04238
0,20	0,87126836	-0,3180264	-4,8968261	-57,161748	-380,38457
0,30	1,3697344	-0,37666528	0,81904278	-2,7961160	-9,8763842
0,40	1,9435987	-0,82904344	1,5102380	-0,6053959	-3,4289311
0,50	2,6179939	-1,3693167	1,7070560	0,53885692	-2,1926160
0,60	3,4180528	-1,9472924	1,6481885	1,2005744	-0,98288389
0,70	4,3689082	-2,5527128	1,4829837	1,4507518	-0,00014983
0,80	5,4956927	-3,1933102	1,3002647	1,4514458	0,57039853
0,90	6,8235392	-3,8834294	1,1398464	1,3414215	0,81909493
1,00	8,3775804	-4,6386450	1,0140861	1,1999932	0,88499186
1,10	10,182949	-5,4737714	0,92337032	1,0630189	0,86508412
1,20	12,264778	-6,4024064	0,86407489	0,94327903	0,81216639
1,30	14,648199	-7,4370306	0,83193824	0,84322071	0,75142342
1,40	17,358347	-8,5892485	0,82324479	0,76132333	0,69360857
1,50	20,420352	-9,8700213	0,83510223	0,69491426	0,64259313
1,60	23,859349	-11,289852	0,86539261	0,64129035	0,59918663
1,70	27,700470	-12,858921	0,91263339	0,59809715	0,56295176
1,80	31,968847	-14,587185	0,97583498	0,56340574	0,53302851
1,90	36,689613	-16,484440	1,0543810	0,53567923	0,50848981
2,00	41,887902	-18,560374	1,1479349	0,51370787	0,48848149

Tabelle B.2: Entwicklungskoeffizienten von  $\frac{M}{a_0^3 Q}$  für verschiedene Werte von  $\xi_s$  mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ .

Koeffizienten von $\varepsilon^i$ für die Ruhemasse $M_0$					
$\xi_s$	$\varepsilon^0$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^8$
0,00	0	0	0	0	0
0,01	0,04189209	0,05245596	0,06452339	0,07673604	0,09064350
0,02	0,08380931	0,10138291	0,12467777	0,14552079	0,17045889
0,03	0,1257768	0,14697999	0,1810503	0,20649775	0,24117379
0,04	0,16781969	0,18946928	0,23424172	0,25967447	0,30478958
0,05	0,20996311	0,22910739	0,28499562	0,30546133	0,36899426
0,06	0,25223219	0,26620288	0,33455944	0,34955489	0,68695096
0,07	0,29465207	0,30114322	0,38575957	0,4525081	-5,9229587
0,08	0,33724788	0,3344386	0,44661698	2,2159335	-123,76573
0,09	0,38004475	0,36679666	0,5454014	-3,7541975	-0,6779804
0,10	0,42306781	0,39925742	0,82632859	-11,306658	154,00435
0,11	0,4663422	0,43345453	4,2348294	-338,55795	24389,392
0,12	0,50989305	0,47216724	-1,8183462	-10,679058	-1027,1961
0,13	0,5537455	0,52062728	-1,7412446	21,991097	-535,19617
0,14	0,59792467	0,59014308	-3,0682419	62,144578	-1430,4764
0,15	0,6424557	0,71084828	-7,4164107	228,15983	-7811,5324
0,16	0,68736372	0,99975724	-28,802435	1834,1087	-136523,76
0,17	0,73267386	2,7949289	-770,92714	398680,63	-2,54506740 $\times 10^8$
0,18	0,77841126	-1,2397211	11,483888	-2103,2027	244823,57
0,19	0,82460105	-0,29250893	-10,086248	-86,857421	270,08015
0,20	0,87126836	-0,07698001	-4,9219300	-55,908647	-364,07926
0,30	1,3697344	0,01672239	0,56758844	-2,1242466	-9,5006993
0,40	1,9435987	-0,25789658	1,0217665	0,07622924	-2,9245661
0,50	2,6179939	-0,58921661	0,99559791	1,0782019	-1,3199037
0,60	3,4180528	-0,92033156	0,74161054	1,5062120	0,04353243
0,70	4,3689082	-1,2337985	0,40781773	1,5054690	0,95554101
0,80	5,4956927	-1,5299374	0,07578544	1,2771041	1,3384899
0,90	6,8235392	-1,8155767	-0,22248284	0,97101036	1,3676277
1,00	8,3775804	-2,0987311	-0,48106395	0,66449818	1,2237982
1,10	10,182949	-2,3866409	-0,70436865	0,38738975	1,0182639
1,20	12,264778	-2,6853269	-0,89947761	0,14629252	0,80533928
1,30	14,648199	-2,9996963	-1,0731453	-0,06144076	0,60709587
1,40	17,358347	-3,3337847	-1,2309272	-0,24120271	0,43012826
1,50	20,420352	-3,6909893	-1,3771251	-0,39850746	0,27444199
1,60	23,859349	-4,0742533	-1,5149872	-0,53811594	0,13764981
1,70	27,700470	-4,4862014	-1,6469456	-0,66387001	0,01679751
1,80	31,968847	-4,9292361	-1,7748240	-0,7787784	-0,09091482
1,90	36,689613	-5,4056047	-1,8999983	-0,88516836	-0,18789822
2,00	41,887902	-5,9174456	-2,0235176	-0,98483424	-0,27614163

Tabelle B.3: Entwicklungskoeffizienten von  $\frac{M_0}{a_0^3 Q}$  für verschiedene Werte von  $\xi_s$  mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ .

$\xi_s$	Koeffizienten von $\varepsilon^i$ für den Zentralruck $P_z$				
	$\varepsilon^0$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^8$
0,00	0	0	0	0	0
0,01	0,00061857	-0,00172000	0,00162459	-0,00077003	0,00044127
0,02	0,00243630	-0,00686564	0,00710374	-0,00491391	0,00493335
0,03	0,00539833	-0,01545281	0,01766303	-0,01697127	0,02537089
0,04	0,00945262	-0,02755907	0,03514794	-0,04585596	0,09808811
0,05	0,01454978	-0,04334499	0,06242121	-0,11038522	0,34561893
0,06	0,02064301	-0,06308734	0,10409423	-0,25635755	1,3551282
0,07	0,02768796	-0,08723187	0,16798563	-0,63884234	4,1589896
0,08	0,03564262	-0,11648064	0,26842379	-3,0575859	120,34604
0,09	0,04446728	-0,15194212	0,43563224	0,41855319	20,090197
0,10	0,05412437	-0,19540392	0,75876395	-2,5871083	4,3812886
0,11	0,06457839	-0,24986232	2,3812791	-100,52138	7005,1522
0,12	0,07579584	-0,32064223	0,88116263	-29,802523	-234,29858
0,13	0,08774509	-0,41805092	2,3107894	-34,315938	388,81769
0,14	0,10039634	-0,5647382	5,0552036	-87,445248	1669,9741
0,15	0,11372151	-0,82158864	12,978500	-348,51779	11069,532
0,16	0,12769416	-1,4259431	52,306181	-3108,6680	224222,47
0,17	0,14228943	-5,0951044	1490,6987	-762280,11	4,84805780 $\times 10^8$
0,18	0,15748397	3,0709510	-44,367825	4384,7277	-570869,92
0,19	0,17325585	1,1138325	19,748422	63,519803	-3223,0377
0,20	0,18958447	0,63815819	11,158362	84,961966	91,304718
0,30	0,3798125	-0,11854446	1,3921945	5,7408680	18,408063
0,40	0,61093217	-0,28101446	0,41114756	2,7524237	4,7395486
0,50	0,8765547	-0,29553405	-0,21692694	1,7597087	3,1658578
0,60	1,1744310	-0,19762251	-0,64456449	0,84355303	2,7155097
0,70	1,5044260	-0,01447731	-0,86930239	0,02192268	1,9510756
0,80	1,8673640	0,23179265	-0,92120251	-0,58277995	1,0264413
0,90	2,2644107	0,52592119	-0,84400036	-0,95208863	0,2108996
1,00	2,6967662	0,85851446	-0,67570587	-1,1260297	-0,39050992
1,10	3,1655292	1,2242483	-0,44338108	-1,1551896	-0,78090453
1,20	3,6716491	1,6203250	-0,16452438	-1,0815067	-1,0002778
1,30	4,2159215	2,0454170	0,15012064	-0,93498189	-1,0911717
1,40	4,7990015	2,4990135	0,49416461	-0,73571739	-1,0879378
1,50	5,4214241	2,9810379	0,86390299	-0,49678082	-1,0156282
1,60	6,0836241	3,4916304	1,2572490	-0,22655363	-0,89172864
1,70	6,7859549	4,0310276	1,6730773	0,06961668	-0,72822437
1,80	7,5287040	4,5994981	2,1108281	0,38832489	-0,53328772
1,90	8,3121058	5,1973091	2,5702700	0,72740591	-0,31249925
2,00	9,1363524	5,8247100	3,0513580	1,0854878	-0,06968863

Tabelle B.4: Entwicklungskoeffizienten von  $\frac{P_z}{a_0^2 Q^2}$  für verschiedene Werte von  $\xi_s$  mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ .

Koeffizienten von $\varepsilon^i$ für den Drehimpuls $J$					
$\xi_s$	$\varepsilon^0$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^8$
0,00	0	0	0	0	0
0,01	0,00519817	0,01064142	0,01709874	0,02545363	0,03580801
0,02	0,01452484	0,02955774	0,04621122	0,06832484	0,09446591
0,03	0,02637109	0,05341626	0,08104960	0,11945215	0,16152228
0,04	0,04014030	0,08105972	0,11900741	0,17572839	0,23030652
0,05	0,05548233	0,11191984	0,15848091	0,23645053	0,2981537
0,06	0,07216065	0,14575859	0,19860914	0,30636975	0,52287242
0,07	0,09000348	0,18260101	0,23993267	0,43348251	-4,1934547
0,08	0,10888064	0,22274743	0,28745884	1,8835269	-96,001495
0,09	0,12869081	0,26685311	0,36460134	-2,9069282	-1,4043833
0,10	0,14935376	0,3161068	0,60538199	-9,8156498	137,90767
0,11	0,17080538	0,37259919	3,8855222	-326,89627	23595,306
0,12	0,19299422	0,44011835	-2,1803366	-9,1109666	-1078,5552
0,13	0,21587897	0,52604717	-2,3712087	28,000940	-642,86950
0,14	0,23942672	0,64663729	-4,3174390	82,390748	-1873,3462
0,15	0,26361148	0,84557362	-10,556837	317,16019	-10852,688
0,16	0,28841317	1,2930930	-41,568836	2647,8340	-197589,40
0,17	0,31381674	3,9378673	-1128,4291	585246,47	-3,73910890 $\times 10^8$
0,18	0,33981149	-1,9051257	7,2345391	-2888,5244	340738,03
0,19	0,36639046	-0,4890684	-17,726915	-178,76932	-44,181794
0,20	0,39355005	-0,13577661	-9,2222335	-105,05367	-807,13712
0,30	0,69802485	0,52311868	-0,57132492	-4,7290425	-21,880756
0,40	1,0714436	0,79662582	0,05656033	-1,1626724	-5,0786338
0,50	1,5346441	1,0605245	0,24310865	-0,220009	-1,5315446
0,60	2,1149817	1,3709717	0,30021959	0,05678398	-0,10285
0,70	2,8447368	1,7637678	0,33048771	0,03348169	0,45890186
0,80	3,7607272	2,2682180	0,38836636	-0,11923423	0,53433897
0,90	4,9043081	2,9119034	0,50500367	-0,30541288	0,35919637
1,00	6,3214817	3,7232237	0,70019629	-0,47535233	0,07990005
1,10	8,0630209	4,7327036	0,98941174	-0,60511924	-0,22477905
1,20	10,184575	5,9736140	1,3874168	-0,68287074	-0,51722445
1,30	12,746756	7,4822472	1,9099198	-0,70137912	-0,78102489
1,40	15,815199	9,2980323	2,5742218	-0,65447365	-1,0093842
1,50	19,460609	11,463577	3,3994232	-0,53552549	-1,1992419
1,60	23,758798	14,024683	4,4064527	-0,33688721	-1,3485367
1,70	28,790709	17,030343	5,6180320	-0,04974338	-1,4550308
1,80	34,642430	20,532741	7,0586270	0,33587825	-1,5158600
1,90	41,405215	24,587246	8,7544002	0,8310431	-1,5274045
2,00	49,175489	29,252409	10,733173	1,4478377	-1,4852922

Tabelle B.5: Entwicklungskoeffizienten von  $\frac{J}{a_0^5 Q^{3/2}}$  für verschiedene Werte von  $\xi_s$  mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ .

$\xi_s$	Koeffizienten von $\varepsilon^i$ für das Radienverhältnis $r_p/r_{\dot{a}}$				
	$\varepsilon^0$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^8$
0,00	0	0	0	0	0
0,01	0,00999995	-0,02602989	0,02202631	-0,01047418	0,00897031
0,02	0,01999600	-0,05311731	0,05132736	-0,03924064	0,04708946
0,03	0,02998651	-0,08135889	0,08911485	-0,09392366	0,14546497
0,04	0,03996804	-0,11089284	0,13723154	-0,18817272	0,37882528
0,05	0,04993762	-0,14191637	0,19853676	-0,3488407	0,96345183
0,06	0,05989229	-0,17471238	0,27760603	-0,63830148	2,8459464
0,07	0,06982913	-0,20969134	0,38211536	-1,2643965	7,3313198
0,08	0,07974522	-0,24746	0,52597493	-4,6830624	172,58895
0,09	0,08963770	-0,28893904	0,73832306	0,09914477	26,066958
0,10	0,09950372	-0,33557622	1,1055791	-3,4554085	2,2631308
0,11	0,10934048	-0,38975965	2,7622215	-101,28858	6954,7987
0,12	0,11914522	-0,45569145	1,2805118	-31,530651	-198,73051
0,13	0,12891523	-0,54145696	2,6523173	-35,509464	406,54300
0,14	0,13864784	-0,66476338	5,1130909	-83,609450	1581,1100
0,15	0,14834045	-0,87312659	11,844410	-307,65212	9693,8945
0,16	0,1579905	-1,3516343	43,829227	-2561,5455	183953,19
0,17	0,16759549	-4,2188500	1173,6956	-598387,12	3,80304840 $\times 10^8$
0,18	0,177153	2,1418255	-41,159648	3581,7333	-454958,98
0,19	0,18666065	0,61071792	12,872215	12,113393	-2462,2706
0,20	0,19611614	0,2351988	7,1665406	44,350811	-72,324822
0,30	0,28734789	-0,37867602	0,98503149	1,8025725	5,8931889
0,40	0,37139068	-0,51715828	0,52418984	0,79232382	0,41160951
0,50	0,4472136	-0,5597459	0,23038891	0,69014814	0,07257866
0,60	0,51449576	-0,55020825	0,02038324	0,53356119	0,27891669
0,70	0,57346234	-0,51417099	-0,10821692	0,34347031	0,34737635
0,80	0,62469505	-0,46755319	-0,17463699	0,18619835	0,29128276
0,90	0,66896473	-0,41919642	-0,20141601	0,07879986	0,20314523
1,00	0,70710678	-0,37342997	-0,20570353	0,01287290	0,12721316
1,10	0,73994007	-0,33202671	-0,19838512	-0,0247471	0,07303315
1,20	0,76822128	-0,29543502	-0,18575195	-0,04470894	0,03751262
1,30	0,79262399	-0,26347544	-0,17123161	-0,05416609	0,01524089
1,40	0,81373347	-0,23570866	-0,15659797	-0,05756331	0,00167726
1,50	0,83205029	-0,21161961	-0,14270895	-0,05756365	-0,00636027
1,60	0,8479983	-0,19070359	-0,12992949	-0,05573405	-0,01094845
1,70	0,86193422	-0,17250244	-0,11836672	-0,05298648	-0,01340201
1,80	0,87415728	-0,15661589	-0,10799852	-0,04984618	-0,01454328
1,90	0,88491822	-0,14270141	-0,09874277	-0,04661101	-0,01488493
2,00	0,89442719	-0,13046906	-0,09049408	-0,04344527	-0,01474681

Tabelle B.6: Entwicklungskoeffizienten von  $r_p/r_{\dot{a}}$  für verschiedene Werte von  $\xi_s$  mit  $\gamma_i = 0$ ,  $i > 2$ .

## Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder andere Personen) in Anspruch genommen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die geltende Promotionsordnung der Physikalisch-Astronomischen Fakultät ist mir bekannt.

Ich versichere ehrenwörtlich, daß ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Jena, den 21. Dezember 2003

David Petroff

## Danksagung

Sehr herzlich möchte ich mich bei Prof. Reinhard Meinel für seine Hilfe bei der Auswahl des Themas und für die Betreuung dieser Arbeit bedanken. Von seiner stetigen Bereitschaft zur Diskussion, seinen klaren und präzisen Erklärungen, vor allem aber von seiner Fähigkeit, mir mit Augenmaß Freiraum zu lassen und gleichzeitig Grenzen zu setzen, habe ich sehr profitiert. Mein Dank gilt auch Dr. Marcus Ansorg für unsere zahlreichen, ergiebigen Diskussionen, seine Anleitung bei der Verwendung des AKM-Computerprogramms sowie für seine große Hilfsbereitschaft. Für sein Interesse an das Thema und die sehr freundlichen und hilfreichen Diskussionen bedanke ich mich bei Prof. Jürgen Ehlers. Dr. Andreas Kleinwächter, Thomas Fischer und Michael Brüggemann danke ich für die sehr angenehme und produktive Zusammenarbeit und Konrad Schöbel darüber hinaus für das Durchlesen dieser Arbeit. Bei allen Mitarbeitern des Theoretisch-Physikalischen Instituts bedanke ich mich für die freundliche und aufgeschlossene Arbeitsatmosphäre.

Meinen Freunden Ulrike Ragwitz, Mario Ragwitz und Erik Essers habe ich nicht nur für das sorgfältige Korrekturlesen und die vielen Verbesserungsvorschläge zu danken, sondern besonders dafür, daß ich mir ihrer Unterstützung immer sicher sein konnte. Meinem Vater danke ich herzlich für sein Dasein trotz großer Entfernung. Ein ganz besonderes Dankeschön geht an meine Freundin Katrin Oehler für die Durchsicht dieser Arbeit und vor allem für ihre Geduld, Aufmunterung und Liebe.

# Lebenslauf

## Angaben zur Person

Name: Petroff, David  
geboren am 10. Dezember 1973 in Toronto, Kanada  
Staatsangehörigkeit: kanadisch  
Anschrift: Herderstr. 14 07743 Jena

## Schulbildung

09/1979–08/1987 Associated Hebrew School  
09/1987–02/1992 Community Hebrew Academy of Toronto  
01/1991–08/1991 Speziialschule für Naturwissenschaften, Ontario Science Centre  
Science School  
02/1992 Schulabschluß, Ontario Secondary School Diploma

## Hochschulausbildung

09/1992–08/1997 Studium der Physik und der englischen Literatur an der University of Waterloo, Kanada  
09/1995–12/1995 Auslandssemester an der University of Sussex, England  
08/1997 Abschlüsse in Physik und englischer Literatur (Bachelor of Science, Honours Physics und Bachelor of Arts, Honours English Literature)  
09/1997–06/2000 Studium der Physik an der Universität Karlsruhe (TH)  
06/1999–06/2000 externe Diplomarbeit an der Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Thema: Das Gravitationsfeld einer rotierenden Scheibe in post-Newtonscher Entwicklung beliebig hoher Ordnung  
Betreuer: Prof. Dr. Reinhard Meinel  
06/2000 Abschluß als Diplom-Physiker  
seit 06/2000 Promotion an der Friedrich-Schiller-Universität Jena in theoretischer Physik