Leichte Teilgraphen in Polyedergraphen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt
der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Ilmenau

von
Dipl.-Math. Igor Fabrici
aus Košice

Gutachter: Prof. Dr. Dr. h. c. Hansjoachim Walther, TU Ilmenau
Prof. Dr. Heiko Harborth, TU Braunschweig
Prof. Dr. Ingo Schiermeyer, TU Bergakademie Freiberg

Tag der Einreichung: 10. August 2001
Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 7. Mai 2002
Verfahrensnummer: N 240

An dieser Stelle möchte ich allen denjenigen, die zu dieser Arbeit (direkt oder indirekt) beigetragen haben, herzlich danken.

Mein erster Dank gilt meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Dr.h.c. Hansjoachim Walther. Sein Einsatz hat meinen mehrjährigen Aufenthalt im Institut für Mathematik der TU Ilmenau ermöglicht und perfekte Bedingungen gesichert, in welchen diese Arbeit entstehen konnte. Trotz der gemeinsamen Forschungsarbeit ließ er mir die Freiheit, meinen eigenen Weg zu gehen. Außerdem trugen seine Hinweise zur Verbesserung der Arbeit bei.

Herrn Prof. Dr. Jochen Harant und Herrn Prof. Dr. Michael Stiebitz möchte ich danken für ihren großen Anteil an meiner Anstellung, von der Information über die Stellenausschreibung bis zur mehrfachen Verlängerung.

Zu besonderem Dank bin ich Herrn Priv.-Doz. Dr. Erhard Hexel verpflichtet. In verschiedenen Phasen dieser Arbeit stand er mir mit Rat zur Seite. Die unzähligen Diskussionen mit ihm haben etliche Formulierungen ausgefeilt und sein Einsatz beim Korrekturlesen war wirklich riesig.

Weiterhin danke ich Frau Dipl.-Math. Anja Pruchnewski für das Korrekturlesen und die sprachliche (online) Hilfe und Herrn Priv.-Doz. Dr. Thomas Böhme für die vielen fruchtbaren Diskussionen (oft bis spät in die Nacht).

Allen Mitarbeitern des Institutes, insbesondere der Fachabteilung Diskrete Mathematik und Algebra, möchte ich meinen Dank für die freundliche Aufnahme, angenehme Arbeitsatmosphäre, die Unterstützung, die ich von allen Seiten erhalten habe, und einfach für eine schöne Zeit in Ilmenau aussprechen.

Ein großer Dank gehört Herrn Prof. Dr. Stanislav Jendrol', der mich vor Jahren in die Graphentheorie einführte, später bei meiner Diplomarbeit betreute und der mich an die Fragen und Probleme heranführte, die Ausgangspunkt dieser Arbeit sind.

Schließlich danke ich meiner lieben Frau Gabika und meinen Eltern für die Unterstützung jeder Art und für das immer offene Ohr.

Ilmenau, im August 2001 Igor Fabrici

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eine der bekanntesten lokalen Eigenschaften eines schlichten endlichen planaren Graphen ist die Existenz eines Knotens der Valenz höchstens 5. Dies folgt aus der Eulerschen Polyederformel und zählt zur graphentheoretischen Folklore.

Im Jahre 1852 hat F. Guthrie die Vierfarbenvermutung (4FV) formuliert, deren duale Form wie folgt lautet: *Die Knoten eines beliebigen planaren Graphen können mit 4 Farben so gefärbt werden, daß zwei adjazente Knoten stets verschiedene Farben erhalten.* Im induktiven Beweis von A. Kempe aus dem Jahre 1879 wurde für den Induktionsschritt gerade die Existenz eines Knoten der Valenz ≤ 5 benutzt. Als 1890 P. Heawood einen Fehler im Beweis von Kempe entdeckte, wurde es klar, daß mit Hilfe dieser lokalen Eigenschaft nur der Fünffarbensatz bewiesen werden kann, und es entstand Bedarf an ähnlich "einfachen" Teilgraphen der planaren Graphen, also solchen Teilgraphen, die nur durch "wenige" Kanten mit dem Rest des Obergraphen verbunden sind.

Einen (Teil-)Graphen H nennen wir leicht in einer Menge $\mathscr{G}$ von Graphen, falls es eine Konstante ψ gibt, so daß jeder Obergraph G von H ($G \in \mathscr{G}$) einen zu H isomorphen Teilgraphen K enthält, dessen Maximalvalenz $\Delta_G(K)$ in G (bzw. die Summe $W_G(K)$ der Valenzen seiner Knoten in G) die Konstante ψ nicht überschreitet. Wir müssen nicht etwa die leichten Graphen bzgl. der Maximalvalenz Δ und die bzgl. des Gewichtes W unterscheiden (es sind nämlich dieselben Graphen), da die Menge $\{\min\{\Delta_G(K) \mid K \subseteq G, K \simeq H\} \mid G \in \mathscr{G}\}$ genau dann nach oben beschränkt ist, wenn die Menge $\{\min\{W_G(K) \mid K \subseteq G, K \simeq H\} \mid G \in \mathscr{G}\}$ nach oben beschränkt ist.

Die Suche nach leichten Graphen in der Menge der Triangulationen der Minimalvalenz 5 war sehr eng mit der 4FV verbunden (wäre 4FV falsch, so gäbe es ein Gegenbeispiel in dieser Menge). Durch die Arbeit von Lebesgue [46] aus dem Jahre 1940 hat sich die Untersuchung leichter Graphen in verschiedenen Mengen von Polyedergraphen als für sich interessante Problemstellung herausgestellt. Seine Aussage, daß eine Kante (mit ihren Endknoten) in der Menge der Polyedergraphen leicht ist, wurde später auf mehrere Weisen verallgemeinert. Für die Ergebnisse, die jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen, siehe [8], [9], [10], [12], [27], [31], [32], [33], [39], [58].

In der vorliegenden Arbeit charakterisieren wir die leichten Graphen für verschiedene Mengen $\mathscr{G}$ von Polyedergraphen und schätzen den kleinsten Wert von ψ

(d. h. φ im Fall der Maximalvalenz und w im Fall des Gewichtes) ab. Außerdem stellen wir alle uns bekannten Resultate auf diesem Gebiet unter Benutzung einer einheitlichen Bezeichnungsweise dar, mit dem Ziel, interessante Zusammenhänge erklären zu können und eine vergleichende Betrachtung der Ergebnisse zu ermöglichen. Dabei läßt es sich manchmal nicht vermeiden, daß wir auf einige erst später folgende Aussagen Bezug nehmen.

Kapitel 1 enthält eine ausführliche Darstellung der verwendeten Begriffe, da eine Anzahl grundlegender Bezeichnungen verschiedenen Lehrbüchern entnommen wurde und durch eine Reihe eigener Bezeichnungen ergänzt wurde.

Eine chronologische Übersicht der Resultate aus den ersten 80 Jahren des 20. Jahrhunderts ist im Kapitel 2 zu finden.

Im Kapitel 3, Abschnitt 1, beschäftigen wir uns mit dem oben formulierten Ziel: für einen gegebenen Teilgraphen festzustellen, ob er in der Menge $\mathscr{G}_c(\delta, \varrho)$ der c-zusammenhängenden planaren Graphen mit Knotenminimalvalenz $\geq \delta$ und Flächenminimalvalenz $\geq \varrho$ leicht ist und im positiven Fall seine Zahl φ möglichst genau abzuschätzen. Im zweiten Abschnitt betrachten wir anstelle eines fest vorgegebenen Teilgraphen einen beliebigen Teilgraphen gegebener Ordnung k. Wir suchen also die kleinste natürliche Zahl τ, so daß jeder Graph $G \in \mathscr{G}_c(\delta, \varrho)$ der Ordnung $\geq k$ einen zusammenhängenden Teilgraphen H der Ordnung k mit $\Delta_G(H) \leq \tau$ enthält.

Kapitel 4 behandelt die denen im Kapitel 3 entsprechenden Problemstellungen, wenn man die Maximalvalenz Δ durch das Gewicht W ersetzt.

Für einen gegebenen leichten Graphen H in einer Menge $\mathscr{G}$ schätzen wir im Kapitel 5 die Anzahl der Teilgraphen K eines beliebigen Graphen $G \in \mathscr{G}$, die mit H isomorph sind und die Ungleichung $\Delta_G(K) \leq \varphi$ erfüllen, nach unten ab.

Die Hauptresultate der Arbeit sind in den Sätzen 3.11, 3.12, 3.13, 3.57, 3.58, 4.10 und 5.3 enthalten. Die Ergebnisse anderer Autoren sind auf übliche Weise durch den Namen und Bezug auf die Quelle gekennzeichnet.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir kurz die in der vorliegenden Arbeit benötigten Begriffe und die wichtigsten Zusammenhänge und Eigenschaften vor. Für eine ausführlichere Darstellung der hier eingeführten Begriffe sei auf das Buch von R. Diestel [15] verwiesen. Die nicht aufgeführten Beweise zu Aussagen über planare Graphen kann man z. B. im Buch von H. Sachs [52] nachlesen.

1.1 Graphen

Ein *Graph* G ist ein Paar (V, E), bestehend aus einer endlichen, nichtleeren Menge $V = V(G)$, der *Knotenmenge*, und einer Menge $E = E(G)$ von zweielementigen Teilmengen von V, der *Kantenmenge*. Die Elemente von V nennt man *Knoten* und die Elemente von E *Kanten*. Wir setzen $v(G) := |V(G)|$ und $e(G) := |E(G)|$ und nennen $v(G)$ die *Ordnung* von G und $e(G)$ die *Größe* von G.

Ist $a = \{x, y\}$ eine Kante von G, so heißen x und y ihre *Endknoten* und man sagt, daß x und y mit a *inzident* sind. Für eine Kante $\{x, y\}$ wird im weiteren die kürzere Schreibweise xy benutzt. Zwei Knoten x, y sind *adjazent* (oder *benachbart*) in G und heißen *Nachbarn* voneinander, wenn $xy \in E(G)$. Zwei Kanten a, b sind *benachbart*, falls sie einen gemeinsamen Endknoten haben.

Sind je zwei Knoten in G adjazent, so nennt man G *vollständig*. Einen vollständigen Graphen der Ordnung n bezeichnet man mit K_n.

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen *isomorph*, geschrieben $G_1 \simeq G_2$, wenn es eine adjazenzerhaltende Bijektion $\xi : V_1 \longrightarrow V_2$ gibt. Wir unterscheiden meist nicht zwischen isomorphen Graphen, betrachten sie als gleich und schreiben auch $G_1 = G_2$.

1.1.1 Teilgraphen und Graphenoperationen

Es seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei Graphen. Ist $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$, so heißt G' ein *Teilgraph* von G (und G ein *Obergraph* von G'), geschrieben $G' \subseteq G$.

Ein Teilgraph G' von G heißt *Faktor* von G, falls $V' = V$ gilt. Für eine Menge U mit $\emptyset \neq U \subseteq V$ bezeichnet $G[U]$ mit $V(G[U]) = U$ und $E(G[U]) = \{xy \in E \mid x, y \in U\}$ den von U in G *induzierten* (oder *aufgespannten*) Teilgraphen (auch *Untergraph* genannt).

Wir setzen $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$, falls $V \cap V' \neq \emptyset$, und $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$. Ist $V \cap V' = \emptyset$, so heißen G und G' *disjunkt*. Ist U eine beliebige Menge (oft Teilmenge von V), so schreiben wir $G - U$ statt $G[V \setminus U]$ und für $U = \{x\}$ dann $G - x$ statt $G - \{x\}$. Ist H ein weiterer Graph, so definieren wir $G - H := G - V(H)$. Für eine Teilmenge D von $[V]^2 = \{A \subseteq V : |A| = 2\}$ setzen wir $G - D := (V, E \setminus D)$ und $G + D := (V, E \cup D)$, und wir schreiben auch $G - a$ bzw. $G + a$ anstelle von $G - \{a\}$ bzw. $G + \{a\}$. Für zwei disjunkte Graphen G und G' bezeichnet $G \times G'$ den Graphen mit der Knotenmenge $V \cup V'$ und Kantenmenge $E \cup E' \cup \{xx' \mid x \in V \text{ und } x' \in V'\}$.

Unter dem *Komplement* $\overline{G}$ von G versteht man den Graphen mit der Knotenmenge V, in dem zwei Knoten x und y genau dann adjazent sind, wenn sie es in G nicht sind.

Es seien G_1, G_2 zwei (disjunkte) Graphen, mit isomorphen Teilgraphen $H_1 \subseteq G_1$, $H_2 \subseteq G_2$, und $\xi : V(H_1) \longrightarrow V(H_2)$ eine adjazenzerhaltende Bijektion. Wir sagen, daß der Graph G mit $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2 - H_2)$ und $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2 - H_2) \cup \{xy \mid x \in V(G_2 - H_2),\ y \in V(H_1),\ \{x, \xi(y)\} \in E(G_2)\}$ aus G_1 und G_2 durch *Identifizierung* von H_1 und H_2 entstanden ist.

1.1.2 Nachbarn und Valenzen

Es seien G ein Graph, $H \subseteq G$ sein Teilgraph und $x \in V(G)$ ein Knoten von G. Mit $N_H(x)$ bezeichnet man die Menge der mit x adjazenten Knoten von H. Die *Valenz* (oder der *Grad*) $\deg_H(x)$ eines Knoten x in H ist die Anzahl seiner Nachbarn in H, d. h. $\deg_H(x) = |N_H(x)|$.[1]

Einen Knoten der Valenz k (in G) nennen wir einen *k-Knoten* und die Anzahl der k-Knoten von G bezeichnen wir mit $v_k(G)$. Die Anzahl der Kanten von G, die mit einem i-Knoten und einem j-Knoten inzident sind, wird mit $e_{i,j}(G)$ bezeichnet.

Die Zahl $\delta_G(H) := \min\{\deg_G(x) \mid x \in V(H)\}$ heißt (*Knoten-*) *Minimalvalenz* (oder *Minimalgrad*) von H in G und die Zahl $\Delta_G(H) := \max\{\deg_G(x) \mid x \in V(H)\}$ entsprechend (*Knoten-*) *Maximalvalenz* (oder *Maximalgrad*) von H in G. Der Graph G heißt *k-regulär*, falls $\delta(G) = \Delta(G) = k$ gilt. Ein 3-regulärer Graph wird auch *kubisch* genannt.

Mit $\mathrm{W}_G(H) = \sum_{x \in V(H)} \deg_G(x)$ bezeichnen wir die Summe der Valenzen (in G) sämtlicher Knoten von H und nennen sie das *Gewicht* von H in G.

[1] Bei Bezeichnungen, die den Bezugsgraphen als Index bzw. Argument angeben, lassen wir diesen manchmal weg, wenn der Bezug klar ist. Wir schreiben dann z. B. $\deg(x)$ statt $\deg_G(x)$ und e statt $e(G)$.

1.1.3 Wege, Kreise und Kantenzüge

Unter einem *Weg* in einem Graphen G verstehen wir eine endliche, nicht leere Folge $P = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ von paarweise verschiedenen Knoten von G, in der je zwei aufeinanderfolgende Knoten in G adjazent sind, d. h. P ist der Teilgraph $(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{k-1}x_k\})$ von G. Die Knoten x_1 und x_k heißen *Endknoten* von P und alle übrigen *innere* Knoten von P. Ein Weg mit den Endknoten x, y wird auch als (x, y)-Weg bezeichnet. Einen Weg der Ordnung k nennen wir einen k-*Weg* und bezeichnen ihn mit P_k. Insbesondere ist ein (x, x)-Weg ein 1-Weg $P_1 = [x]$. Zwei Wege heißen *kreuzungsfrei*, falls keiner der beiden einen inneren Knoten oder eine Kante des anderen enthält. Insbesondere ist also $P_2 = [x, y]$ mit sich selbst nicht kreuzungsfrei.

Ist $P = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ ein Weg mit $k \geq 3$, so heißt der Graph $C = P + x_kx_1$ ein *Kreis*. Einen Kreis $C = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ der Ordnung k nennen wir einen k-*Kreis* und bezeichnen ihn mit C_k. Unter dem Knoten x_i von $C_k = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ mit $i > k$, verstehen wir den Knoten x_j mit $j \equiv i \pmod{k}$ und $1 \leq j \leq k$.

Ein *Kantenzug* in einem Graphen G ist eine endliche, nichtleere Folge $[x_1, a_1, x_2, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k]$ von abwechselnd Knoten und Kanten aus G, in der je zwei aufeinanderfolgende Elemente in G inzident sind, d. h. $a_i = x_ix_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, k-1$. Ist $x_1 = x_k$, so heißt der Kantenzug *geschlossen*.

Die Anzahl der Kanten eines Weges (Kreises, Kantenzuges) ist seine *Länge* (man beachte dabei, daß die Länge eines k-Weges P_k gleich $k-1$ ist).

Der *Abstand* $\mathrm{d}_G(x, y)$ zweier Knoten x, y in G ist die Länge eines kürzesten (x, y)-Weges in G. Existiert kein solcher Weg, so sei $\mathrm{d}_G(x, y) := \infty$.

1.1.4 Zusammenhang

Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, falls für je zwei seiner Knoten x und y ein (x, y)-Weg in G existiert. Zwei Knoten x, y von G werden von einer Menge $S \subseteq V(G)$ (bzw. von dem Untergraphen $G[S]$) *getrennt*, falls jeder (x, y)-Weg in G einen Knoten aus S enthält. Die *Komponenten* eines Graphen G sind seine größtmöglichen zusammenhängenden Teilgraphen. Die Anzahl der Komponenten von G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet. Der *Zusammenhang* $\kappa(G)$ eines Graphen $G \neq K_n$ ist durch $\kappa(G) := \min\{|S| \mid S \subseteq V(G) \text{ und } \omega(G - S) \geq 2\}$ definiert und für K_n setzt man $\kappa(K_n) := n - 1$. Ein Graph G heißt k-*zusammenhängend* (für eine natürliche Zahl $k \geq 1$), falls $\kappa(G) \geq k$ gilt.

Satz 1.1 (MENGER [49]) *Ein Graph G ist genau dann k-zusammenhängend, wenn er k kreuzungsfreie (x, y)-Wege für je zwei seiner Knoten x, y enthält.*

Ein Knoten x von G heißt eine *Artikulation*, falls $\omega(G - x) > \omega(G)$ ist, und eine Kante a von G nennt man eine *Brücke*, falls $\omega(G - a) > \omega(G)$ ist. Ein *Block* eines Graphen G ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph ohne Artikulation.

1.1.5 Spezielle Graphen

Ein Graph G heißt *bipartit*, wenn es eine Partition von $V(G)$ in zwei Klassen V_1 und V_2 gibt, so daß die Endknoten jeder Kante in verschiedenen Klassen liegen. Ein bipartiter Graph, dessen je zwei Knoten aus verschiedenen Partitionsklassen adjazent sind, heißt *vollständig bipartit*. Sind m und n die Mächtigkeiten der Partitionsklassen, so wird der vollständig bipartite Graph mit $K_{m,n}$ bezeichnet. Für $n \geq 3$ nennen wir den Graphen $K_{1,n}$ einen *Stern*.

Der Graph $W_n = C_n \times K_1$, $n \geq 3$, heißt *Rad*.

Ein Graph, der keinen Kreis enthält, heißt *Wald* und ein *Baum* ist ein zusammenhängender Wald.

Ein Graph G der Ordnung $n \geq 3$, der einen Kreis C_n als Teilgraphen enthält, heißt *hamiltonsch*, und C_n ist ein *Hamiltonkreis* von G.

1.2 Planare Graphen

Graphen werden oft als Zeichnungen in der Ebene dargestellt. Punkte der Ebene stellen die Knoten eines Graphen G dar und zur abgeschlossenen Einheitsstrecke homöomorphe Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ (auch Jordan-Kurven genannt) zwischen zwei Knoten seine Kanten. Haben je zwei (verschiedene) Kanten einer Zeichnung des Graphen G entweder gar keinen Punkt gemeinsam oder genau einen Punkt, und zwar einen Endknoten von beiden, so heißt diese Zeichnung eine *Einbettung* von G in die Ebene und den Graphen G nennt man *planar*.

1.2.1 Ebene Graphen

Jede Einbettung eines Graphen in die Ebene wird ein *ebener Graph* genannt. Es sei $G = (V, E)$ ein ebener Graph. Durch den Graphen G wird die Ebene zerlegt, wobei die (offenen) Gebiete von $\mathbb{R}^2 \setminus G$ *Flächen* (oder *Gebiete*) von G genannt werden. Da G beschränkt ist, ist genau eine seiner Flächen unbeschränkt und wird *äußere Fläche* genannt. Die Menge der Flächen von G bezeichnen wir mit $F(G)$ und setzen $f(G) := |F(G)|$. Jede Fläche α von G ist durch einen seiner Teilgraphen berandet, den man *Rand* von α nennt und mit $G[\alpha]$ bezeichnet. Ein Knoten x von $G[\alpha]$ heißt ein *Randknoten* von α und eine Kante a von $G[\alpha]$ heißt eine *Randkante* von α; wir sagen dann, daß x und α bzw. a und α *inzident* sind. Zwei Flächen α, β heißen *benachbart*, wenn sie eine gemeinsame Randkante besitzen. Die Menge der Randknoten von α bezeichnen wir auch kürzer mit $V(\alpha)$.

Es seien G ein zusammenhängender planarer Graph, $M \subseteq G$ ein Teilgraph von G und $\alpha \in F(M)$ eine Fläche von M. Mit G_α bezeichnen wir den von der in α liegenden Knotenmenge in G induzierten Teilgraphen. Weiterhin bezeichne $G_{@} := G[V(G_\alpha) \cup V(\alpha)]$ den Untergraphen, der von der Menge der in α liegenden Knoten und den Randknoten von α in G aufgespannt wird.

Es seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei ebene Graphen mit $F_1 := F(G_1)$ und $F_2 := F(G_2)$, die durch adjazenzerhaltende Bijektion $\xi : V_1 \longrightarrow V_2$ als (abstrakte) Graphen isomorph sind. Diese Bijektion kann man als inzidenzerhaltende Bijektion $\xi : V_1 \cup E_1 \longrightarrow V_2 \cup E_2$ auffassen, die V_1 auf V_2 und E_1 auf E_2 abbildet. Läßt sich diese zu einer inzidenzerhaltenden Bijektion $\xi : V_1 \cup E_1 \cup F_1 \longrightarrow V_2 \cup E_2 \cup F_2$ fortsetzen, so nennen wir die Graphen G_1 und G_2 (*kombinatorisch*) *isomorph*, geschrieben $G_1 \simeq G_2$. Genauso wie bei (abstrakten) Graphen werden wir im weiteren auch zwischen isomorphen ebenen Graphen oft nicht unterscheiden.

1.2.2 Flächenvalenzen

Die *Valenz* $\deg_G(\alpha)$ einer Fläche α eines ebenen Graphen G ist die Länge eines kürzesten geschlossenen Kantenzuges, der alle Randkanten von α enthält. Eine Fläche der Valenz k nennen wir ein *k-Eck* und die Anzahl der k-Ecke von G bezeichnen wir mit $f_k(G)$. Die Zahl $\varrho(G) := \min\{\deg_G(\alpha) \mid \alpha \in F(G)\}$ heißt *Flächenminimalvalenz* von G und die Zahl $\mathrm{R}(G) := \max\{\deg_G(\alpha) \mid \alpha \in F(G)\}$ dann entsprechend *Flächenmaximalvalenz* von G.

1.2.3 Karten, Polyedergraphen und Triangulationen

Es seien G ein ebener Graph und α eine seiner Flächen. Ist der Rand $G[\alpha]$ von α ein Kreis $C_k = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ (d. h., ist α zu einer offenen Kreisscheibe homöomorph), so heißt α eine *elementare Fläche* und wir bezeichnen sie mit $x_1 x_2 \ldots x_k$. Ist überdies $\deg_G(x_i) = d_i$, für $i = 1, \ldots, k$, und $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ das lexikographische Minimum von $\{(d_i, d_{i+1}, \ldots, d_k, d_1, \ldots, d_{i-1}) \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{(d_i, d_{i-1}, \ldots, d_1, d_k, \ldots, d_{i+1}) \mid i = 1, \ldots, k\}$, so sagen wir, daß die Fläche α *vom Typ* $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ ist. Weiterhin bezeichnen wir mit $f_{d_1,d_2,\ldots,d_k}(G)$ die Anzahl solcher Flächen in G. Sind sämtliche Flächen von G elementar, so heißt G eine *Karte*.

Lemma 1.2 *Ein ebener Graph G der Ordnung $n \geq 3$ ist genau dann eine Karte, wenn er 2-zusammenhängend ist.*

Unter einem *Polyedergraphen* verstehen wir den Graphen eines konvexen Polyeders, d. h. den Graphen, dessen Knoten und Kanten den Ecken und Kanten des Polyeders entsprechen.

Satz 1.3 (Steinitz [54]) *Ein Graph G ist genau dann ein Polyedergraph, wenn er planar und 3-zusammenhängend ist.*

Satz 1.4 (Whitney [57]) *Je zwei Einbettungen eines 3-zusammenhängenden planaren Graphen in die Ebene sind isomorph.*

Wenn dadurch keine Mißverständnisse zu befürchten sind, unterscheiden wir oft nicht zwischen einem planaren Graphen und seiner Einbettung und sprechen z. B. über Flächen eines planaren Graphen.

Ist jede Fläche eines ebenen Graphen G ein Dreieck, so heißt G eine *Triangulation*. Ist ein ebener Graph H ein Faktor einer Triangulation G, so sagen wir, daß G eine Triangulation von H ist.

Lemma 1.5 *Jede Triangulation G der Ordnung $n \geq 4$ ist 3-zusammenhängend.*

Ein planarer Graph $G = (V, E)$ heißt *maximal planar*, wenn der Graph $G + a$ für jedes $a \in [V]^2 \setminus E$ nicht planar ist.

Lemma 1.6 *Ein Graph G der Ordnung $n \geq 3$ ist genau dann maximal planar, wenn er eine Triangulation ist.*

Ersetzen wir jede Kante xy eines planaren Graphen G durch einen (x, y)-Weg der Länge ≥ 1, so daß diese Wege paarweise kreuzungsfrei sind und keinen Knoten von G als inneren Knoten enthalten, so nennen wir den entstehenden Graphen eine *Unterteilung* von G.

Satz 1.7 (Kuratowski [45]) *Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ als Teilgraphen enthält.*

Schließlich noch ein Satz über Hamiltonkreise in planaren Graphen:

Satz 1.8 (Tutte [55]) *Jeder 4-zusammenhängende planare Graph ist hamiltonsch.*

1.2.4 Operationen mit planaren Graphen

Es sei $G = (V, E)$ ein Polyedergraph mit $F = F(G)$. Wir setzen in jede Fläche von G einen neuen Knoten. Es ist möglich, die neuen Knoten zu einem neuen ebenen Graphen $G^\star$ so zu verbinden, daß zwei Knoten von $G^\star$ genau dann adjazent sind, wenn die zwei Flächen von G, in denen sie liegen, benachbart sind. Den Graphen $G^\star$ nennt man *dual* zu G (Abb. 1.1).

Proposition 1.9 *Ist $G^\star$ dual zu G und $G^{\star\star}$ dual zu $G^\star$, so ist $G^{\star\star} \simeq G$.*

Proposition 1.10 *Sind $G_1^\star, G_2^\star$ duale Graphen zu G, so ist $G_1^\star \simeq G_2^\star$.*

Der zu G duale Graph ist also eindeutig bestimmt und wir bezeichnen ihn mit $D(G)$.

Lemma 1.11 *Der zu einem Polyedergraphen G duale Graph $D(G)$ ist auch ein Polyedergraph.*

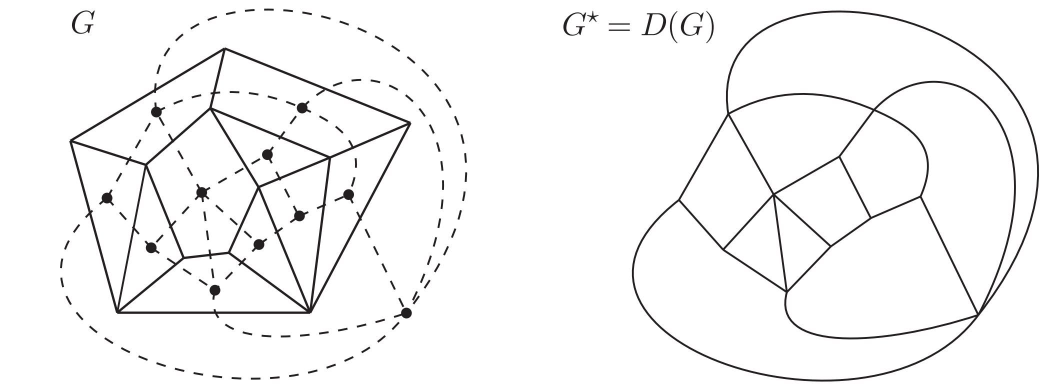


Abb. 1.1.

Es sei $G = (V, E)$ wieder ein Polyedergraph mit $F = F(G)$. Wir setzen in jede Fläche von G einen neuen Knoten und verbinden ihn mit jedem Knoten von $V(\alpha)$ durch eine Kante, so daß der entstehende Graph G' eben wird. Diesen nennen wir einen *Kleetop* von G und bezeichnen ihn mit $K(G)$ (Abb. 1.2).

Proposition 1.12 *Der Kleetop $K(G)$ von G ist eine Triangulation.*

Insbesondere folgt daraus, daß $K(G)$ ein Polyedergraph ist.

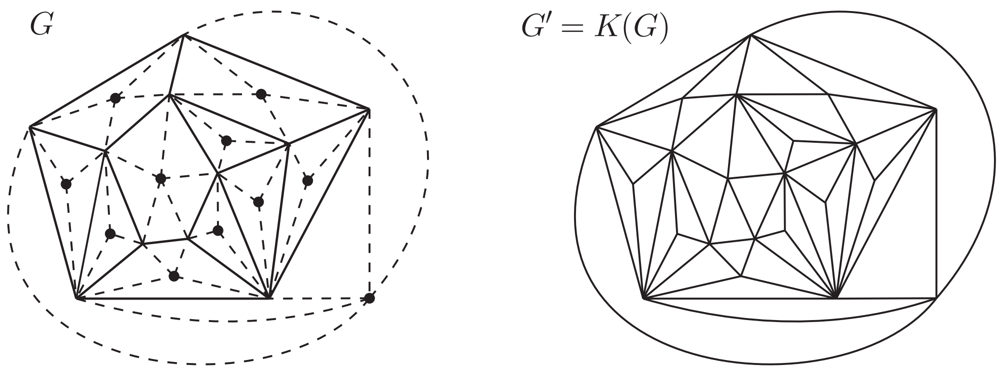


Abb. 1.2.

Es sei $G = (V, E)$ wiederum ein Polyedergraph mit $F = F(G)$. In der Unterteilung von G, die durch Ersetzen jeder Kante durch einen 3-Weg entstanden ist, verbinden wir zwei neue Knoten x, x' durch eine Kante, wenn die entsprechenden Kanten a, a' von G (die durch x, x' unterteilt wurden) zwei benachbarte Randkanten einer Fläche $\alpha \in F(G)$ sind. Der so entstehende Graph G° ist planar, wir nennen ihn *komedial* zu G und bezeichnen ihn mit $KM(G)$ (Abb. 1.3).

Lemma 1.13 *Der zu einem Polyedergraphen G komediale Graph $KM(G)$ ist auch ein Polyedergraph.*

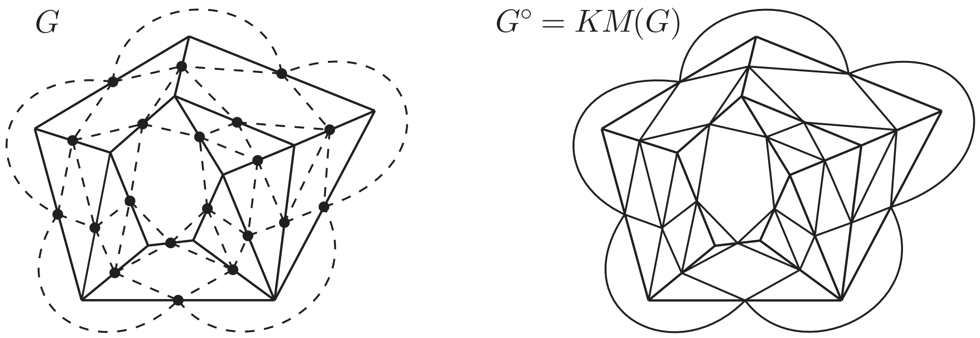


Abb. 1.3.

Der n-te Kleetop $K^n(G)$ von G ist wie folgt definiert (der n-te komediale Graph $KM^n(G)$ analog):

$$K^n(G) := \begin{cases} G, & \text{für } n = 0, \\ K(G), & \text{für } n = 1, \\ K(K^{n-1}(G)), & \text{für } n \geq 2. \end{cases}$$

Es seien G_1, G_2 zwei ebene Graphen, $\alpha_1 \in F(G_1)$ eine elementare Fläche von G_1 und $\alpha_2 \in F(G_2)$ die elementare äußere Fläche von G_2 mit $\deg_{G_1}(\alpha_1) = \deg_{G_2}(\alpha_2)$. Entsteht der ebene Graph G aus G_1 und G_2 durch die Identifizierung von $G_1[\alpha_1]$ und $G_2[\alpha_2]$, so sagen wir auch, daß wir in G_1 die Fläche α_1 durch G_2 *ersetzt* haben.

1.2.5 Spezielle Klassen

Mit $H_{12}, H_{20}, H_{8,18}$ und $H_{80,12}$ bezeichnen wir die Graphen folgender Polyeder: Dodekaeder, Ikosaeder, Rhombenkuboktaeder und abgeschrägtes Dodekaeder (Abb. 1.4-5).

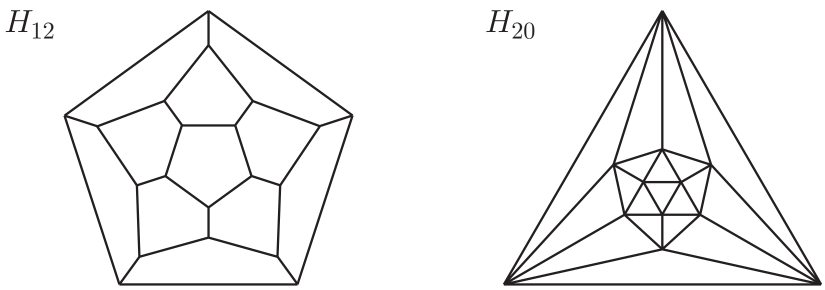


Abb. 1.4.

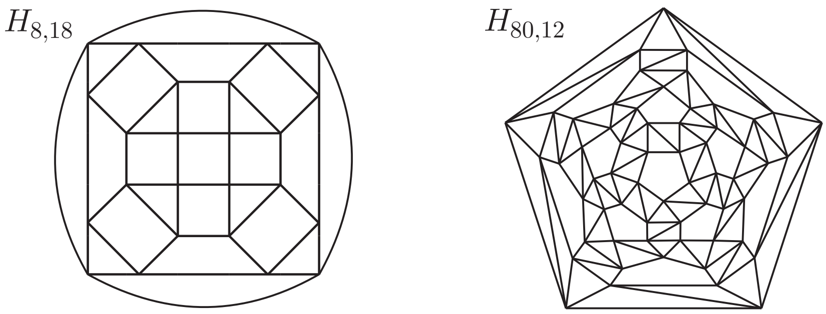


Abb. 1.5.

Es seien c, δ und ϱ drei natürliche Zahlen mit $1 \leq c \leq \delta \leq 5$, $3 \leq \varrho \leq 5$ und $\min\{\delta, \varrho\} \leq 3$. Mit $\mathscr{G}_c(\delta, \varrho)$ bezeichnen wir die Menge der c-zusammenhängenden planaren Graphen G mit Knotenminimalvalenz $\delta(G) \geq \delta$ und Flächenminimalvalenz $\varrho(G) \geq \varrho$. Für $\delta \geq 3$ bezeichnet $\mathscr{T}_c(\delta)$ die Menge der c-zusammenhängenden Triangulationen der Knotenminimalvalenz $\delta(G) \geq \delta$. (Für $\delta = c \geq 3$ und $\varrho = 3$ ist $\mathscr{G}_c(\delta, \varrho)$ die Menge aller c-zusammenhängenden planaren Graphen und $\mathscr{T}_c(\delta)$ die Menge aller c-zusammenhängenden Triangulationen.)

1.2.6 Normale Karten

Ein *Multigraph* ist ein Tripel $G = (V, E, \gamma)$ mit einer endlichen, nichtleeren Knotenmenge V, einer endlichen, von V disjunkten Kantenmenge E und einer Funktion $\gamma : E \longrightarrow [V]^2$, die jeder Kante zwei (verschiedene) Knoten zuordnet (Kanten $a, a' \in E$ mit $\gamma(a) = \gamma(a')$ heißen *Mehrfachkanten*). Ein *ebener Multigraph* ist eine Einbettung eines Multigraphen in die Ebene. Wir verwenden die für ebene Graphen definierten Begriffe sinngemäß auch für ebene Multigraphen (man beachte dabei, daß ein ebener Multigraph auch 2-Ecke enthalten kann). Sind sämtliche Flächen eines ebenen Multigraphen G elementar und ist $\delta(G) \geq 3$ und $\varrho(G) \geq 3$, so nennen wir G eine *normale Karte* und die Menge der normalen Karten bezeichnen wir mit $\mathscr{M}$.

1.3 Eulersche Polyederformel

Schon Euler [17, 18] bewies, daß für jeden Polyedergraphen folgende einfache Beziehung zwischen der Anzahl seiner Knoten, Kanten und Flächen gilt:

$$v + f = e + 2.$$

Eine ähnliche Formel gilt für alle planaren (also auch nicht zusammenhängenden) Graphen.

Satz 1.14 *Für jeden planaren Graphen (mit ω Komponenten) gilt*

$$v - e + f = \omega + 1.$$

Die Summierung der Valenzen der Knoten bzw. der Flächen eines Polyedergraphen ergibt:

Proposition 1.15 *Für jeden Polyedergraphen gilt*

$$\sum_{i\geq 3} i \cdot v_i = 2e = \sum_{i\geq 3} i \cdot f_i.$$

Es folgen einfache Beziehungen zwischen der Knoten-, Kanten- und Flächenzahl eines Polyedergraphen G. In allen gilt Gleichheit genau dann, wenn G eine Triangulation ist.

Lemma 1.16 *Für jeden Polyedergraphen gilt*

$$\begin{array}{lrcllrcl} (i) & 3v & \leq & 2e, & \qquad & 3f & \leq & 2e, \\ (ii) & e & \leq & 3v-6, & & e & \leq & 3f-6, \\ (iii) & v & \leq & 2f-4, & & f & \leq & 2v-4. \end{array}$$

Die im nächsten Lemma notierten Gleichungen sind aus dem Satz 1.14, Proposition 1.15 und Lemma 1.16 abgeleitet und finden in den nachfolgenden Kapiteln wiederholt Anwendung. Wir werden sie auch ohne besondere Erwähnung benutzen.

Lemma 1.17 *Für jeden Polyedergraphen gilt*

$$\begin{array}{ll} (i) & \sum_{i\geq 3}(4-i)(v_i+f_i) = 8, \\ (ii) & \sum_{i\geq 3}(6-i)v_i + 2\sum_{i\geq 3}(3-i)f_i = 12, \\ (iii) & 2\sum_{i\geq 3}(3-i)v_i + \sum_{i\geq 3}(6-i)f_i = 12. \end{array}$$

Kapitel 2

Bis zum Vierfarbensatz

Eine bekannte Eigenschaft der planaren Graphen (folgt aus Proposition 1.15 und Lemma 1.16 (ii)) besagt, daß die Knotenminimalvalenz eines jeden Polyedergraphen höchstens 5 ist (dasselbe gilt natürlich auch für die Flächenminimalvalenz). Der Ikosaedergraph H_{20} (bzw. der Dodekaedergraph H_{12}) zeigt, daß man diese Schranke nicht verkleinern kann.

Proposition 2.1 *Für jeden planaren Graphen der Größe ≥ 1 gilt*

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 > 0.$$

Wernicke hat im Jahre 1904 in seiner Arbeit über das Vierfarbenproblem bewiesen, daß jeder 3-zusammenhängende kubische planare Graph ohne 3- und 4-Ecke ein 5-Eck enthält, daß mit einem 5- oder 6-Eck adjazent ist. In der dualen Form und unter Verwendung der eingeführten Bezeichnungen kann man diesen Satz wie folgt formulieren:

Satz 2.2 (WERNICKE [56]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{T}_3(5)$ gilt*

$$e_{5,5} + e_{5,6} > 0.$$

Im Jahre 1922 wurde dieses Ergebnis durch Franklin verbessert: Jeder 3-zusammenhängende kubische planare Graph ohne 3- und 4-Ecke enthält ein 5-Eck, das mit zwei 5-Ecken oder einem 5- und einem 6-Eck oder mit zwei 6-Ecken adjazent ist. Bezeichnen wir mit $p_{d_1,d_2,d_3}(G)$ die Anzahl der 3-Wege $[x_1, x_2, x_3] \subseteq G$ mit $\deg_G(x_i) = d_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, so lautet die duale Aussage wie folgt:

Satz 2.3 (FRANKLIN [24]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{T}_3(5)$ gilt*

$$p_{5,5,5} + p_{5,5,6} + p_{6,5,6} > 0.$$

Lebesgue war wahrscheinlich der erste, der sich nicht nur auf die Triangulationen der Minimalvalenz 5 (die äußerst interessante Menge bezüglich des Vierfarbenproblems) beschränkt hat, sondern sich mit der Existenz von Teilgraphen mit sämtlichen Knoten "kleiner" Valenz in verschiedenen Klassen von planaren Graphen beschäftigt hat. Den folgenden Satz hat er im Jahre 1940 sogar für die größere Menge der normalen Karten $\mathscr{M} \supset \mathscr{G}_2(3,3)$ bewiesen.

Satz 2.4 (Lebesgue [46]) *Jeder Graph $G \in \mathscr{G}_2(3,3)$ enthält*
(a) ein 3-Eck von einem Typ der Liste

$$\begin{array}{rlllrll}
(i) & (3,i,j), & i \in [3,6],\ j \in [i,\infty], & & (vii) & (4,4,i), & i \in [4,\infty], \\
(ii) & (3,7,i), & i \in [7,41], & & (viii) & (4,5,i), & i \in [5,19], \\
(iii) & (3,8,i), & i \in [8,23], & & (ix) & (4,6,i), & i \in [6,11], \\
(iv) & (3,9,i), & i \in [9,17], & & (x) & (4,7,i), & i \in [7,9], \\
(v) & (3,10,i), & i \in [10,14], & & (xi) & (5,5,i), & i \in [5,9], \\
(vi) & (3,11,i), & i \in [11,13], & & (xii) & (5,6,i), & i \in [6,7]
\end{array}$$

oder
(b) ein 4-Eck von einem Typ der Liste

$$\begin{array}{rllrll}
(i) & (3,3,3,i), & i \in [3,\infty], & (iv) & (3,4,3,i), & i \in [4,11], \\
(ii) & (3,3,4,i), & i \in [4,11], & (v) & (3,4,4,i), & i \in [4,5], \\
(iii) & (3,3,5,i), & i \in [5,7], & (vi) & (3,4,5,4), & \\
 & & & (vii) & (3,5,3,i), & i \in [5,7]
\end{array}$$

oder
(c) ein 5-Eck vom Typ

$$(3,3,3,3,i), \quad i \in [3,5].$$

In folgenden Sätzen wurde die Existenz solcher Teilgraphen (Dreieck bzw. Kante) in Graphen der zwei speziellen Klassen bewiesen, die nur Knoten "kleiner" Valenz haben. Darin wurde auch die Anzahl solcher Teilgraphen abgeschätzt.

Satz 2.5 (Lebesgue [46]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{T}_3(5)$ gilt*

$$f_{5,5,5} + \tfrac{2}{3} f_{5,5,6} + \tfrac{3}{7} f_{5,5,7} + \tfrac{1}{4} f_{5,5,8} + \tfrac{1}{9} f_{5,5,9} + \tfrac{1}{3} f_{5,6,6} + \tfrac{2}{21} f_{5,6,7} \geq 20.$$

Satz 2.6 (Lebesgue [46]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(3,4)$, dessen sämtliche Flächen 4-Ecke sind, gilt*

$$10 e_{3,3} + 5 e_{3,4} + 4 e_{3,5} \geq 120.$$

Aus dem Satz 2.4 folgt insbesondere, daß jeder Graph $G \in \mathscr{G}_2(3,3)$ eine Kante mit der Summe der Valenzen ihrer Endknoten ≤ 14 enthält. Für die Menge der Polyedergraphen hat Kotzig 1955 die Schranke auf 13 und für die Mengen $\mathscr{G}_3(4,3)$ und $\mathscr{G}_3(5,3)$ sogar auf 11 verbessert, wobei alle diese schon bestmöglich sind.

Satz 2.7 (Kotzig [42]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(3,3)$ gilt*

$$\begin{aligned} 0 < e_{3,3} + e_{3,4} + e_{3,5} + e_{3,6} + e_{3,7} + e_{3,8} + e_{3,9} + e_{3,10} \\ + e_{4,4} + e_{4,5} + e_{4,6} + e_{4,7} + e_{4,8} + e_{4,9} \\ + e_{5,5} + e_{5,6} + e_{5,7} + e_{5,8} \quad . \end{aligned}$$

Satz 2.8 (Kotzig [42]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(4,3)$ gilt*

$$e_{4,4} + e_{4,5} + e_{4,6} + e_{4,7} + e_{5,5} + e_{5,6} > 0.$$

Satz 2.9 (Kotzig [42]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(5,3)$ gilt*

$$e_{5,5} + e_{5,6} > 0.$$

Aus dem Satz 2.5 folgt, daß jeder Graph $G \in \mathscr{T}_3(5)$ ein Dreieck $xyz \in F(G)$ mit $\deg_G(x) + \deg_G(y) + \deg_G(z) \leq 19$ enthält. Im Jahre 1963 hat Kotzig die Schranke auf 18 verkleinert.

Satz 2.10 (Kotzig [43]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{T}_3(5)$ gilt*

$$f_{5,5,5} + f_{5,5,6} + f_{5,5,7} + f_{5,5,8} + f_{5,6,6} + f_{5,6,7} + f_{6,6,6} > 0.$$

In der selben Arbeit findet man auch eine endgültige Verbesserung des Satzes 2.6 von Lebesgue und eine analoge Aussage für eine andere Menge.

Satz 2.11 (Kotzig [43]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(3,4)$, dessen sämtliche Flächen 4-Ecke sind, gilt*

$$10e_{3,3} + 5e_{3,4} + 2e_{3,5} \geq 120,$$

wobei alle Koeffizienten in dieser Ungleichung bestmöglich sind (KBM).

Satz 2.12 (Kotzig [43]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(3,5)$, dessen sämtliche Flächen 5-Ecke sind, gilt*

$$e_{3,3} \geq 30 \textit{ und KBM.}$$

Der Satz 2.2 wurde im Jahre 1973 von Grünbaum wie folgt verbessert.

Satz 2.13 (Grünbaum [25]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{T}_3(5)$ gilt*

$$60e_{5,5} + e_{5,6} \geq 60.$$

Während im Satz 2.7 nur die Existenz einer Kante mit dem Gewicht ≤ 13 in jedem Polyedergraphen nachgewiesen wurde, schätzte Jucovič mit der folgenden Ungleichung aus dem Jahre 1974 (zunächst nur für $\mathscr{T}_3(5)$, erst in seinem Buch wurde es auf die Menge aller Polyedergraphen erweitert) sogar die Anzahl solcher Kanten ab.

Satz 2.14 (Jucovič [40], [41]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(3,3)$ gilt*

$$\begin{aligned}120 \leq 20e_{3,3} &+ 25e_{3,4} + 16e_{3,5} + 10e_{3,6} + 6\tfrac{2}{3}e_{3,7} + 5e_{3,8} + 2\tfrac{1}{2}e_{3,9} + 2e_{3,10}\\ &+ 20e_{4,4} + 11e_{4,5} + 5e_{4,6} + 5e_{4,7} + 5e_{4,8} + 3e_{4,9}\\ &+ 8e_{5,5} + 2e_{5,6} + 2e_{5,7} + 2e_{5,8}\,.\end{aligned}$$

Im Beweis des Vierfarbensatzes von Appel und Haken im Jahre 1976 wurde unter anderem die Existenz einer Kante zwischen zwei 5-Knoten oder eines Dreiecks vom Typ $(5,6,6)$ nachgewiesen (siehe auch [4]).

Satz 2.15 (Appel & Haken [3]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{T}_3(5)$ gilt*

$$e_{5,5} + f_{5,6,6} > 0.$$

Als Kotzig den Satz 2.10 bewies, fand er gleichzeitig einen Graphen, in dem sämtliche Dreiecke das Gewicht mindestens 17 haben. In [44] behauptete er (jedoch ohne Beweis), daß 17 auch die obere Schranke ist, was dann von Aigner bewiesen wurde. Da dieser Satz zum ersten Mal in ein Buch aufgenommen wurde, das Anfang der 80-er Jahre erschienen ist, kann man vermuten, daß er gleichzeitig mit dem Vierfarbensatz oder kurz danach bewiesen wurde:

Satz 2.16 (Aigner [1]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{T}_3(5)$ gilt*

$$f_{5,5,5} + f_{5,5,6} + f_{5,5,7} + f_{5,6,6} > 0.$$

Im Original wurde die Aussage noch ein bißchen stärker formuliert: Enthält ein $G \in \mathscr{T}_3(5)$ kein Dreieck vom Typ $(5,5,5)$, $(5,5,6)$ bzw. $(5,6,6)$, so enthält er ein Dreieck vom Typ $(5,5,7)$, wobei der 7-Knoten mit mindestens 2 weiteren 5-Knoten adjazent ist.

Kapitel 3

Teilgraphen mit beschränkter Maximalvalenz

Wie schon in Kapitel 2 erwähnt wurde, enthält jeder planare Graph (und dadurch auch jeder Polyedergraph) einen Knoten der Valenz höchstens 5. Weiterhin (siehe die Sätze 2.7–2.9) enthält jeder Polyedergraph G eine Kante $xy \in E(G)$ mit

$$\max\left\{deg_G(x), deg_G(y)\right\} \leq \begin{cases} 10, & \text{für } \delta(G) = 3, \\ 7, & \text{für } \delta(G) = 4, \\ 6, & \text{für } \delta(G) = 5. \end{cases}$$

Überdies sind diese Schranken bestmöglich, wie man an den Graphen $G_3 := K(H_{20})$, G_4 (entsteht aus $H_{8,18}$ durch Ersetzen jedes Vierecks durch W_4) und $G_5 := K(H_{12})$ sehen kann, deren sämtliche Kanten mit einem Knoten der Valenz 10, 7 bzw. 6 inzident sind. In diesem Kapitel stellen wir die Ergebnisse vor, die diese zwei Eigenschaften verallgemeinern.

3.1 Teilgraphen vorgegebener Struktur

Jeder Polyedergraph G enthält also einen Teilgraphen $K_1 = P_1$ (einen Knoten) und einen Teilgraphen $K_2 = P_2$ (eine Kante) mit beschränkter Maximalvalenz in G, wobei die Schranke für alle Polyedergraphen gemeinsam (also von G unabhängig) ist. Daraus entsteht natürlich die Frage, ob dies analog für einen beliebigen Teilgraphen H gilt und was passiert, wenn wir die betrachtete Graphenmenge einschränken.

Definition 3.1 *Es seien H ein zusammenhängender planarer Graph und $\mathscr{G}$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen, die mindestens einen Obergraphen von H enthält. Mit $\varphi(\mathscr{G}, H)$ bezeichnen wir die kleinste natürliche Zahl, so daß jeder Obergraph $G \in \mathscr{G}$ von H einen zu H isomorphen Teilgraphen K mit*

$$\Delta_G(K) \leq \varphi(\mathscr{G}, H)$$

enthält. Existiert keine solche Zahl, so sei $\varphi(\mathscr{G}, H) := \infty$.

Definition 3.2 *Der Graph H heißt leicht in der Menge $\mathscr{G}$, wenn $\varphi(\mathscr{G}, H) < \infty$, sonst sagen wir, daß H nicht leicht in $\mathscr{G}$ ist.*

Die folgende Beobachtung kann zur Erläuterung der Zusammenhänge zwischen den Ergebnissen dieses Kapitels beitragen.

Proposition 3.3 *Seien H ein zusammenhängender planarer Graph, $\mathscr{G}_2$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen und $\mathscr{G}_1$ eine Teilmenge von $\mathscr{G}_2$, die einen Obergraphen von H enthält. Dann gilt:*

(i) $\varphi(\mathscr{G}_1, H) \leq \varphi(\mathscr{G}_2, H)$,
(ii) ist H leicht in $\mathscr{G}_2$, so ist er auch leicht in $\mathscr{G}_1$,
(iii) ist H nicht leicht in $\mathscr{G}_1$, so ist er auch in $\mathscr{G}_2$ nicht leicht.

Selbstverständlich kann man untersuchen, ob ein Graph H in einer beliebigen Menge $\mathscr{G}$ leicht ist. Wir beschränken uns jedoch auf die Mengen $\mathscr{G}_c(\delta, \varrho)$, mit welchen sich auch die Autoren der Ergebnisse aus dem Kapitel 2 beschäftigt haben. Im weiteren schreiben wir $\varphi_c(\delta, \varrho; H)$ statt $\varphi(\mathscr{G}_c(\delta, \varrho), H)$. Offensichtlich ist folgendes wahr (die Aussage (ii) folgt aus Lemma 1.17 (i)).

Proposition 3.4

$$\begin{array}{llcll} (i) & \varphi_c(\delta, \varrho; P_1) & = & 5, & \text{für } \varrho = 3, \\ (ii) & \varphi_c(\delta, \varrho; P_1) & = & 3, & \text{für } \varrho \in \{4, 5\}. \end{array}$$

Die Folgerung der Sätze 2.7, 2.8 und 2.9 von Kotzig, die wir schon am Anfang dieses Kapitels formuliert haben, lautet unter Verwendung der neuen Bezeichnung wie folgt.

Folgerung 3.5

$$\begin{array}{llcr} (i) & \varphi_3(3,3;P_2) & = & 10, \\ (ii) & \varphi_3(4,3;P_2) & = & 7, \\ (iii) & \varphi_3(5,3;P_2) & = & 6. \end{array}$$

Jendrol' hat im Jahre 1995 folgenden Satz bewiesen und damit weitergehende Untersuchungen auf diesem Gebiet begonnen.

Satz 3.6 (Jendroľ [34])

$$\begin{array}{llcr} (i) & \varphi_3(3,3;P_3) & = & 15, \\ (ii) & \varphi_3(4,3;P_3) & = & 9, \\ (iii) & \varphi_3(5,3;P_3) & = & 6. \end{array}$$

In den nächsten Abschnitten berichten wir über Bemühungen, die leichten Graphen in $\mathscr{G}_c(\delta, \varrho)$ zu charakterisieren und für diese die Zahl φ zu bestimmen oder (zumindest) gute Abschätzungen zu finden.

3.1.1 $c = 1$ und $c = 2$

Mit diesem kurzen Abschnitt über 1- und 2-zusammenhängende Graphen vervollständigen wir unsere Untersuchungen über leichte Graphen in der Menge der Polyedergraphen und in einigen ihrer Teilmengen. Das nächste Ergebnis folgt mit $\mathscr{G}_2(3,3) \subset \mathscr{M}$ aus dem Satz 5.1 von Borodin.

Folgerung 3.7

$$\varphi_2(3,3;P_2) = 10.$$

Satz 3.8 (Jendroľ [34])

$$\varphi_2(3,3;P_k) = \infty, \text{ für } k \geq 3.$$

Aus den letzten beiden Aussagen, den Propositionen 3.3 und 3.4 und dem Satz 3.12 folgen dann:

Folgerung 3.9 *Ein Graph H ist leicht in $\mathscr{G}_2(3,3)$ genau dann, wenn $H \in \{P_1, P_2\}$.*

Folgerung 3.10 *Ein Graph H ist leicht in $\mathscr{G}_1(3,3)$ genau dann, wenn $H \in \{P_1, P_2\}$.*

3.1.2 $c = 3$

Mit der Vergrößerung des Zusammenhangs von 2 auf mindestens 3 entstehen neue leichte Graphen. In $\mathscr{G}_3(3,3)$, der Menge der Polyedergraphen, ist es gelungen, sie alle zu charakterisieren und die Zahl φ für sie exakt zu bestimmen.

Satz 3.11 ([22])

$$\varphi_3(3,3;P_k) = 5k, \text{ für } k \geq 1.$$

Beweis. Für $k = 1$ folgt die Behauptung aus Proposition 3.4. Im weiteren sei also $k \geq 2$.

Teil I. Wir beweisen zunächst die Gültigkeit von $\varphi_3(3,3;P_k) \leq 5k$. Angenommen, die Ungleichung ist falsch, d. h. es gibt ein $k \geq 2$ mit $\varphi_3(3,3;P_k) \geq 5k+1$. Sei G ein Gegenbeispiel der Ordnung n und maximaler Größe. Ein Knoten x von G wird *Hauptpunkt* bzw. *Nebenpunkt* genannt, falls $\deg_G(x) \geq 5k+1$ bzw. $\deg_G(x) \leq 5k$.

Eigenschaft 1. *Jeder k-Weg in G enthält einen Hauptpunkt.*

Eigenschaft 2. *Jedes r-Eck von G, $r \geq 4$, ist nur mit Nebenpunkten inzident.*

Beweis von Eigenschaft 2. Angenommen, es gibt ein r-Eck $\alpha \in F(G)$, $r \geq 4$, das mit einem Hauptpunkt x inzident ist. Dann gibt es auch einen Knoten $y \in V(\alpha)$, der mit x nicht adjazent ist. Sei $G^\star := G + xy$. Der neue Graph $G^\star$ ist planar, 3-zusammenhängend und die Kante xy gehört natürlich keinem Weg an, der nur aus Nebenpunkten besteht. Also ist $G^\star$ auch ein Gegenbeispiel der Ordnung n, jedoch mit mehr Kanten als in G vorkommen, Widerspruch. $\Box\!\!\to$

Sei M der von der Menge aller Hauptpunkte in G induzierte Teilgraph. Da M planar ist, enthält er einen Knoten z mit $\deg_M(z) \leq 5$, d. h. z hat höchstens 5 Nachbarn unter den Hauptpunkten. Der Knoten z ist aber selbst ein Hauptpunkt von G, also gilt $\deg_G(z) \geq 5k+1$, was bedeutet, daß er mit mindestens $5k-4$ Nebenpunkten adjazent ist. Aus der Eig. 2 folgt dazu, daß z in G nur mit Dreiecken inzident ist. Nun ist es leicht einzusehen, daß G einen k-Weg ausschließlich aus Nebenpunkten (und zwar alles Nachbarn von z) enthält, Widerspruch.

Teil II. Es ist noch zu zeigen, daß $\varphi_3(3,3;P_k) \geq 5k$ gilt, oder anders gesagt, daß es einen 3-zusammenhängenden planaren Graphen G_k gibt, in dem jeder k-Weg einen Knoten der Valenz mindestens $5k$ enthält.

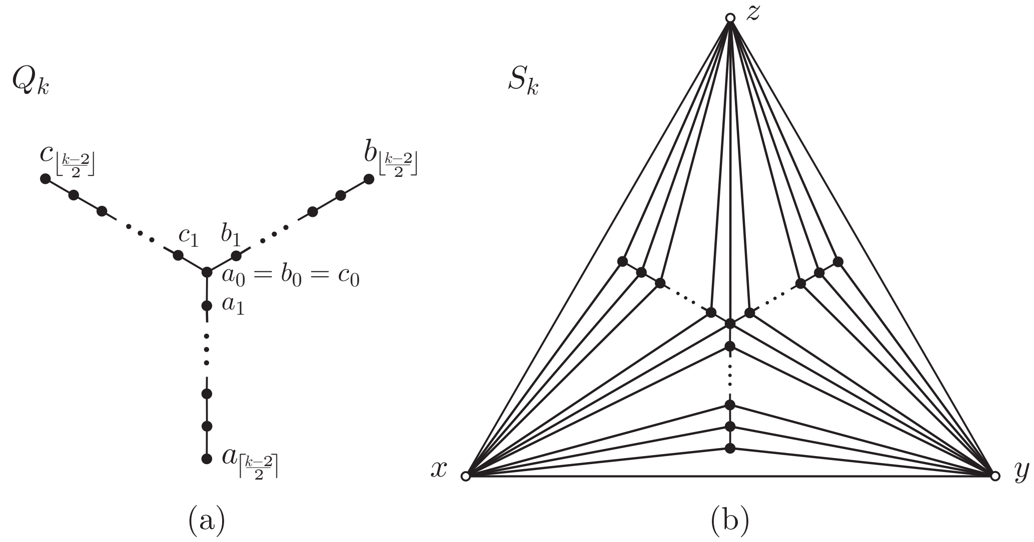


Abb. 3.1.

Sei Q_k der Graph (Abb. 3.1 (a)), der aus drei Wegen mit $\lceil\frac{k-2}{2}\rceil+1$, $\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor+1$ bzw. $\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor+1$ Knoten besteht, die einen gemeinsamen Endknoten haben. Die Konfiguration S_k (Abb. 3.1 (b)) entsteht aus einem Dreieck xyz und dem Graphen Q_k durch hinzufügen der Kanten

$$\begin{array}{lll} xa_i, ya_i, & \text{für} & i = 0,1,\ldots,\lceil\frac{k-2}{2}\rceil, \\ yb_i, zb_i, & \text{für} & i = 0,1,\ldots,\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor, \\ zc_i, xc_i, & \text{für} & i = 0,1,\ldots,\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor. \end{array}$$

Es ist leicht einzusehen, daß $\deg_{Q_k}(x) = \deg_{Q_k}(y) = k-1$ und $k-2 \leq \deg_{Q_k}(z) \leq k-1$.

Sei $G := K(H_{12})$ der Kleetop des Dodekaedergraphen. Alle Flächen von G sind Dreiecke vom Typ $(5,6,6)$. Der Graph G_k, der aus G durch Ersetzen jedes

Dreiecks $xyz \in F(G)$ (bezeichnet gegen den Uhrzeigersinn, so daß $\deg_G(x) = 5$ und $\deg_G(y) = \deg_G(z) = 6$) durch S_k entsteht, ist planar und nach Lemma 1.5 auch 3-zusammenhängend.

Alle Knoten von G haben in G_k die Valenz mindestens $5k$ (die 5-Knoten von G haben in G_k die Valenz genau $5k$ und die 6-Knoten von G die Valenz $6k$ für gerades k bzw. $6k-3$ für ungerades k, was in beiden Fällen nicht weniger als $5k$ ist). Die Valenz aller anderen Knoten in G_k ist höchstens 6. Wie man jetzt leicht sieht, enthält jeder k-Weg in G_k einen Knoten von G, d. h. einen Knoten der Valenz mindestens $5k$. $\square$

Satz 3.12 ([22]) *Ein Graph H ist leicht in $\mathscr{G}_3(3,3)$ genau dann, wenn $H \in \{P_k \,|\, k \geq 1\}$.*

Beweis. Mit Satz 3.11 haben wir bereits bewiesen, das alle Wege P_k, $k \geq 1$, in $\mathscr{G}_3(3,3)$ leicht sind. Es ist noch zu zeigen, daß es für jeden zusammenhängenden planaren Graphen $H \neq P_k$ und für jede natürliche Zahl $m > v(H)$ einen Graphen $G_m \in \mathscr{G}_3(3,3)$ gibt, so daß $H \subseteq G_m$ und jeder zu H isomorphe Teilgraph K von G_m einen Knoten der Valenz (in G_m) mindestens m enthält.

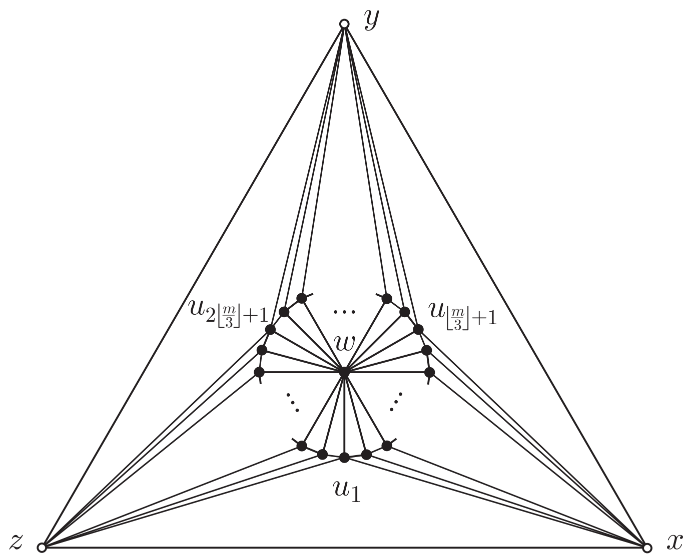


Abb. 3.2.

Betrachten wir eine Einbettung von H in die Ebene. Sei T_H eine Triangulation von H. In jedes Dreieck $xyz \in F(T_H)$ fügen wir ein Rad W_m mit dem Zentrum w und den Randknoten $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ein und verbinden es mit den Knoten x, y, z durch Kanten

$$\begin{array}{lll} xu_i, & \text{für} & i = 1, \ldots, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1, \\ yu_i, & \text{für} & i = \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1, \ldots, 2\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1, \end{array}$$

$$zu_i, \quad \text{für} \quad i = 2\lfloor \tfrac{m}{3} \rfloor + 1, \ldots, m \text{ und } i = 1$$

(Abb. 3.2). Der so entstehende Graph G_m ist planar, 3-zusammenhängend (nach Lemma 1.5) und enthält H als Teilgraphen.

Der von der Menge aller Knoten der Valenz höchstens $m-1$ in G_m induzierte Teilgraph besteht aus lauter Kreisen der Länge m, d. h. jeder zu H isomorphe Teilgraph von G_m enthält einen Knoten der Valenz mindestens m. □

3.1.3 $c = 3$, $\delta = 4$

Aus Satz 3.11 und Proposition 3.3 folgt, daß die Wege auch in der Menge $\mathscr{G}_3(4,3)$ leicht sind.

Satz 3.13 ([20])

$$\begin{array}{rrcl}
\textit{(i)} & \varphi_3(4,3;P_1) & = & 5, \\
\textit{(ii)} & \varphi_3(4,3;P_2) & = & 7, \\
\textit{(iii)} & \varphi_3(4,3;P_3) & = & 9, \\
\textit{(iv)} & \varphi_3(4,3;P_4) & = & 15, \\
\textit{(v)} & \varphi_3(4,3;P_5) & = & 19, \\
\textit{(vi)} & \varphi_3(4,3;P_6) & = & 23, \\
\textit{(vii)} & \varphi_3(4,3;P_7) & = & 27, \\
\textit{(viii)} & \varphi_3(4,3;P_k) & = & 5k-7, \ \textit{für } k \geq 8.
\end{array}$$

Beweis. Aussagen (i), (ii) und (iii) folgen aus Proposition 3.4, Folgerung 3.5 bzw. Satz 3.6.

Teil I. Um $\varphi_3(4,3;P_k) \geq g(k)$ mit

$$g(k) := \begin{cases} 4k-1, & \text{falls } k \in \{4,5,7\}, \\ 5k-7, & \text{falls } k = 6 \text{ oder } k \geq 8 \end{cases}$$

zu beweisen, genügt es, einen 3-zusammenhängenden planaren Graphen G_k mit $\delta(G_k) \geq 4$ zu konstruieren, so daß jeder k-Weg von G_k einen Knoten der Valenz mindestens $g(k)$ enthält.

Für $m \geq 4$ sei $Q_m := [u_1, u_2, \ldots, u_m] + \{u_m u_{m-2}, u_m u_{m-3}\}$ (Abb. 3.3 (a)). Die Konfiguration R_k, $k \geq 8$, entsteht aus einem Dreieck, dem Graphen Q_{k-1} und Kanten, die Q_{k-1} mit dem Dreieck verbinden (Abb. 3.3 (a)). Die Konfiguration S_k, $k \geq 8$, besteht dagegen aus einem Dreieck, drei Figuren $Q_{\lceil \frac{k-1}{2} \rceil}$, $Q_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ und $Q_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ mit dem gemeinsamen Endknoten u_0 und Kanten, die sie verbinden (Abb. 3.3 (a)).

Sei $G := K(H_{12})$ der Kleetop des Dodekaedergraphen und G' der wie folgt definierte Graph:

$$G' := \begin{cases} G, & \text{falls } k = 4, \\ KM(G), & \text{falls } k = 5 \text{ oder } k \geq 8, \\ KM^2(G), & \text{falls } k \in \{6,7\}. \end{cases}$$

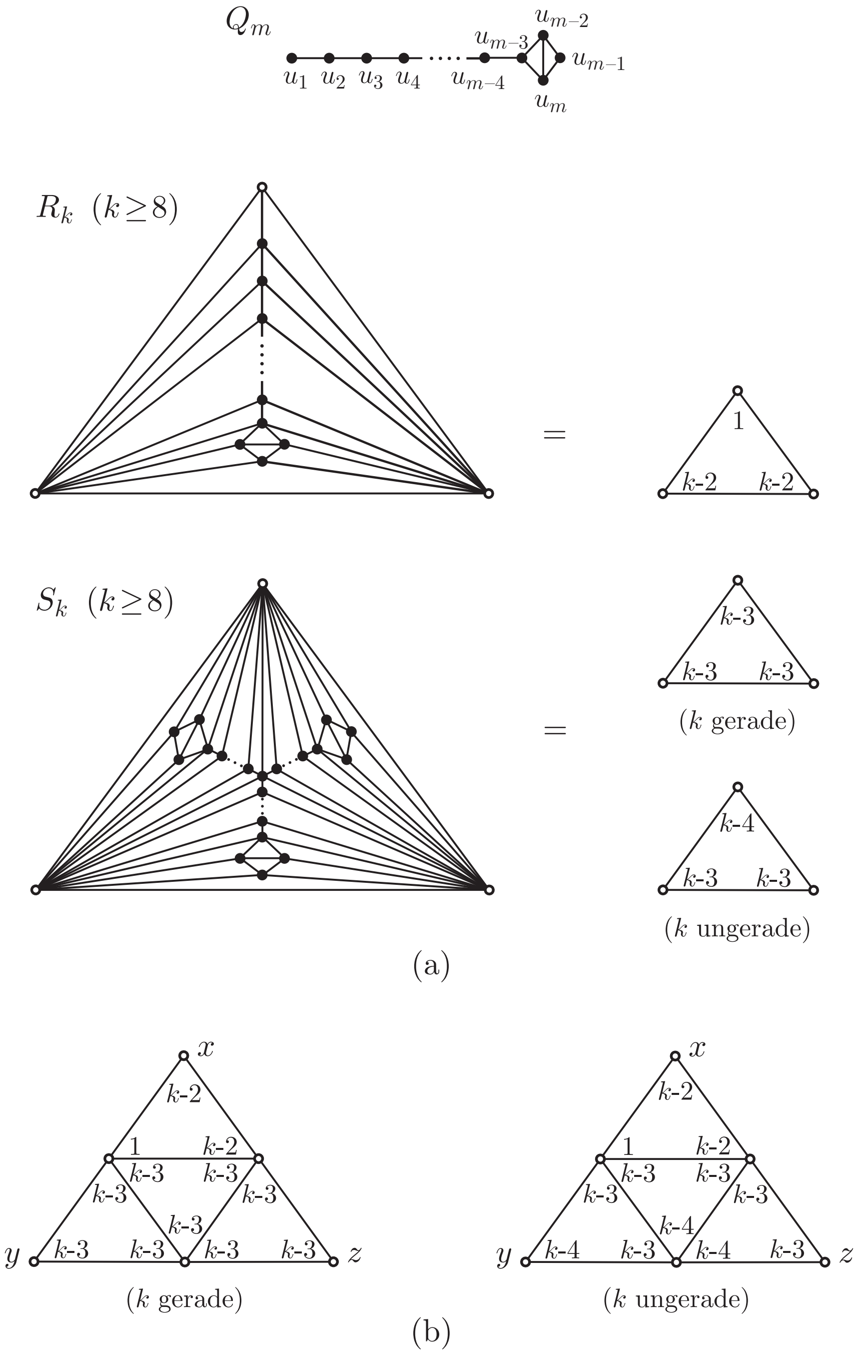


Abb. 3.3.

Man sieht leicht ein, daß alle Flächen von G' Dreiecke vom Typ $(5, 6, 6)$ bzw. (6,6,6) sind. Aus G' entsteht dann durch Ersetzen jeder Fläche durch R_k bzw. S_k (Abb. 3.3–7 (a)) der gesuchte Graph G_k.

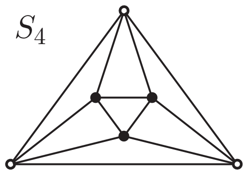


Abb. 3.4.

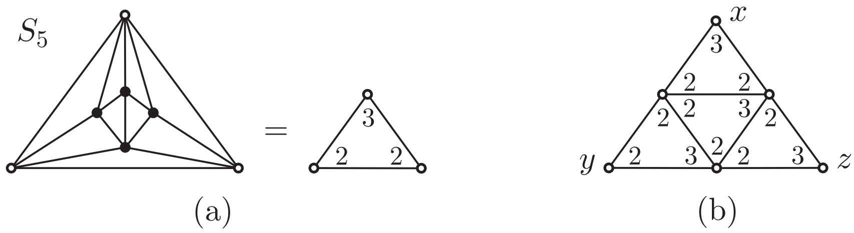


Abb. 3.5.

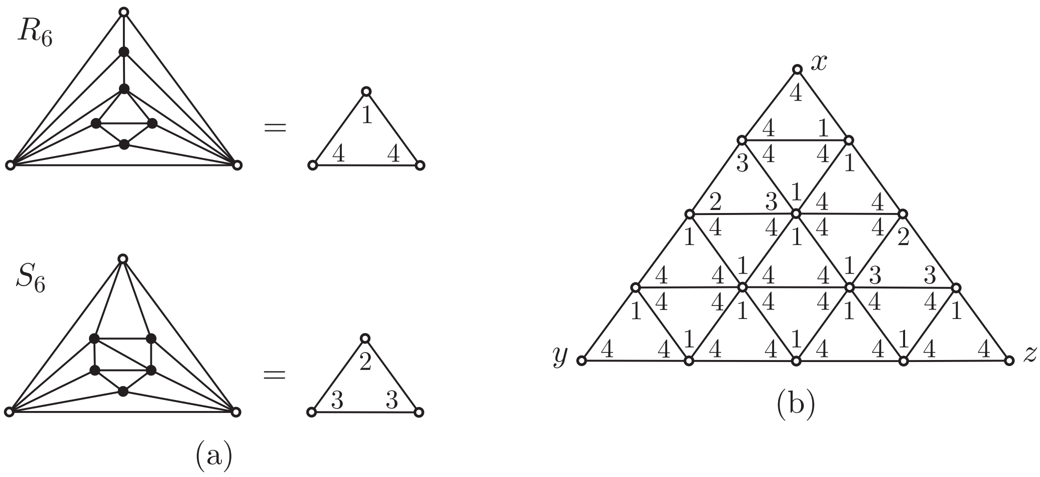


Abb. 3.6.

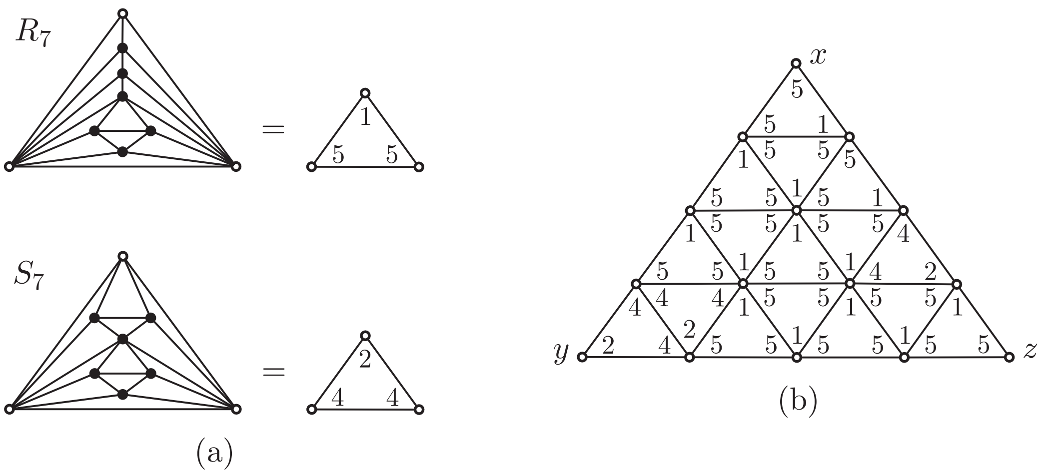


Abb. 3.7.

Die Abbildungen 3.3, 3.5–7 (b) zeigen für eine Fläche $xyz \in F(G)$, bezeichnet entgegen dem Uhrzeigersinn, so daß $\deg_G(x) = 5$ und $\deg_G(y) = \deg_G(z) = 6$, welche Konfiguration beim Ersetzen welcher Fläche von G' benutzt wurde und ihre Orientierung. Die Zahlen in den Ecken geben für den jeweiligen Knoten die Anzahl seiner Nachbarn in dieser Fläche an.

Teil II. Wir beweisen jetzt $\varphi_3(4, 3; P_k) \leq g(k)$, für $k \geq 4$.
Angenommen, die Ungleichung ist falsch. Es gibt also ein $k \geq 4$ mit $\varphi_3(4, 3; P_k) \geq g(k) + 1$. Sei G ein Gegenbeispiel der Ordnung n und maximaler Größe. Ein Knoten x von G wird *Hauptpunkt* bzw. *Nebenpunkt* genannt, falls $\deg_G(x) \geq g(k) + 1$ bzw. $\deg_G(x) \leq g(k)$.

Eigenschaft 1. *Jeder k-Weg in G enthält einen Hauptpunkt.*

Genauso wie im Beweis des Satzes 3.11 gilt:

Eigenschaft 2. *Jedes r-Eck von G, $r \geq 4$, ist nur mit Nebenpunkten inzident.*

Seien M die Einbettung des von der Menge aller Hauptpunkte in G induzierten Teilgraphen in die Ebene, die durch G bestimmt ist, und $\alpha = x_1x_2 \ldots x_r$, $r \geq 3$, eine Fläche von M.

Eigenschaft 3. *Alle Knoten von G_α sind Nebenpunkte.*

Eigenschaft 4. *G_α enthält keinen k-Weg als Teilgraphen.*

Eigenschaft 5. *$v_i(M) = 0$, für $i \leq 3$* (sonst gäbe es einen Hauptpunkt $x \in V(M)$ mit $\deg_G(x) \leq i + i(k-1) = ik \leq 3k < g(k)$, Widerspruch).

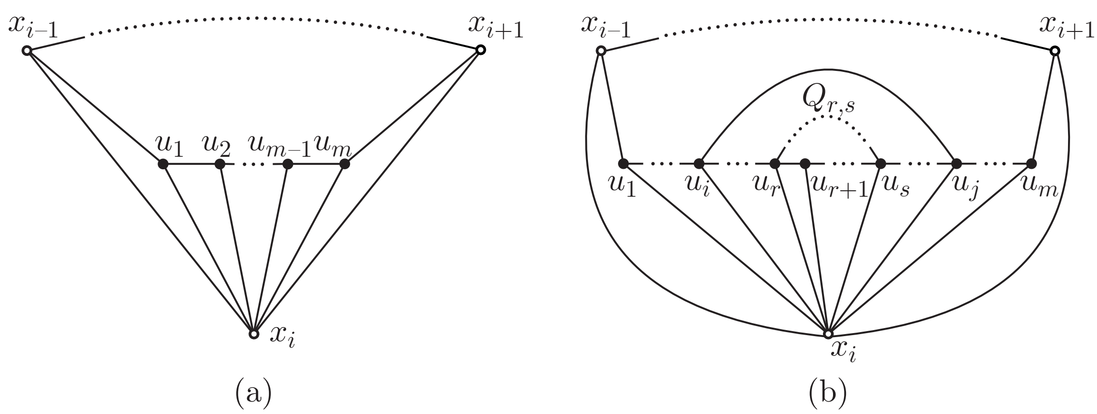


Abb. 3.8.

Es sei $x_i \in V(\alpha)$ ein Knoten von α mit $N_{G_\alpha}(x_i) = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Als ein Hauptpunkt ist er nach der Eigenschaft 2 ausschließlich mit Dreiecken inzident und daraus folgt

Eigenschaft 6. *Der Graph $G[N_{G_\alpha}(x_i)]$ enthält einen m-Weg (o. B. d. A. $[u_1, u_2, \ldots, u_m]$) als Teilgraphen und die Knoten u_1 und x_{i-1} sowie u_m und x_{i+1} (Indexarithmetik modulo r) sind adjazent in G (Abb. 3.8 (a)).*

Im weiteren wird mit $P_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq m$, der Weg $[u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j]$ bezeichnet.

Lemma 3.14 *Für jede Kante $u_iu_j \in E(G_\alpha)$ mit $j - i \geq 2$ gibt es einen (u_i, u_j)-Weg mit mindestens $j - i + 2$ Knoten in G_α, der nur aus Knoten vom Kreis $C := P_{i,j} + u_iu_j$ oder von seinem Inneren besteht.*

Beweis von Lemma 3.14. Seien r, s $(i \leq r < s \leq j)$ zwei natürliche Zahlen, so daß es einen (u_r, u_s)-Weg $Q_{r,s} := [u_r = w_1, w_2, \ldots, w_l = u_s]$ gibt, der mit $P_{r,s}$ kreuzungsfrei ist und nur aus Knoten von C oder seinem Inneren besteht (möglicherweise ist $Q_{r,s} = [u_r, u_s]$), und so daß $s - r$ minimal ist.
Fall 1. $s - r = 1$.
In diesem Fall hat $Q_{r,s}$ mindestens einen inneren Knoten und $P_{i,r} \cup Q_{r,s} \cup P_{s,j}$ erfüllt die Bedingungen des Lemmas.
Fall 2. $s - r \geq 2$ (Abb. 3.8 (b)).
Jeder Knoten hat mindestens 4 Nachbarn (weil $\delta(G) \geq 4$), d. h. u_{r+1} hat einen Nachbar $z \notin \{u_r, u_{r+2}, x_1\}$, der auf dem Kreis $C' := P_{r,s} \cup Q_{r,s}$ oder in seinem Inneren liegt. Gleichzeitig ist $z \notin V(P_{r,s})$, das Gegenteil wäre ein Widerspruch zur Minimalität von $s - r$. Da G 3-zusammenhängend ist, gibt es zwischen z und einem Knoten $z' \in V(C') \setminus \{u_{r+1}\}$ einen Weg P, der mit C' kreuzungsfrei ist (möglicherweise ist $z = z'$ und $P = [z]$). Der Knoten z' muß ein innerer Knoten w_q von $Q_{r,s}$ sein (sonst ist $s - r$ nicht minimal, Widerspruch), und der Weg $[u_{r+1}, z] \cup P \cup [z' = w_q, w_{q+1}, \ldots, w_l = u_s]$ von G_α ist dann kreuzungsfrei mit $[u_1, u_2, \ldots, u_m]$, was der Minimalität von $s - r$ widerspricht. $\Box\!\!\to$

Für eine Fläche $\alpha \in F(M)$ und einen mit ihr inzidenten Knoten $x \in V(M)$ definieren wir

$$\mathrm{mem}(x : \alpha) := \Big|\{u \in V(G_\alpha) \mid ux \in E(G)\}\Big|,$$

$$\mathrm{bon}(x : \alpha) := \begin{cases} \mathrm{mem}(x : \alpha) - (k-3), & \text{falls } \mathrm{mem}(x : \alpha) > k - 3 \\ 0, & \text{falls } \mathrm{mem}(x : \alpha) \leq k - 3, \end{cases}$$

$$\mathrm{bon}(\alpha) := \sum_{x:\ x \in V(\alpha)} \mathrm{bon}(x : \alpha) \quad \text{und} \quad \mathrm{bon}(x) := \sum_{\alpha:\ x \in V(\alpha)} \mathrm{bon}(x : \alpha).$$

Lemma 3.15 *Für jedes Dreieck $\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M)$ ist*

$$\mathrm{bon}(x_i : \alpha) \leq 1, \text{ für alle } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Beweis von Lemma 3.15. Nach Eigenschaften 4 und 6 ist $\mathrm{mem}(x_i : \alpha) \leq k - 1$ und daraus folgt $\mathrm{bon}(x_i : \alpha) \leq 2$ (für alle $i \in \{1, 2, 3\}$). Angenommen, es gibt ein Dreieck $\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M)$ mit (o. B. d. A.) $\mathrm{bon}(x_1 : \alpha) = 2$. Sei $N_{G_\alpha}(x_1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ mit (o. B. d. A.) $[u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}] \subseteq G$. Gibt es einen Knoten $u \in V(G_\alpha) \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$, der mit u_1 oder u_{k-1} adjazent ist, so haben wir einen k-Weg in G_α, der nur aus Nebenpunkten besteht (Eig. 3), Widerspruch.

Anderenfalls gibt es in G (wegen der Planarität) höchstens eine der Kanten u_1x_2, $u_{k-1}x_3$ (sei o. B. d. A. $u_1x_3 \notin E(G)$). Dann ist u_1 mit einem Knoten aus der Menge $\{u_3, u_4, \ldots, u_{k-1}\}$ adjazent (wegen $\delta(G) \geq 4$), und nach Lemma 3.14 gibt es einen k-Weg in G_α, der ausschließlich aus Nebenpunkten besteht, Widerspruch. ⊡→

Aus den Eigenschaften 2–4 und 6 und Lemma 3.14 folgt mit $\delta(G) \geq 4$.

Lemma 3.16 *Für jedes r-Eck* $\alpha = x_1x_2\ldots x_r \in F(M)$, $r \geq 4$, *mit* $bon(x_i : \alpha) = 2$ *ist*

$$mem(x_{i-1} : \alpha) = mem(x_{i+1} : \alpha) = 1.$$

Lemma 3.17 *Für jedes Dreieck* $\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M)$ *mit* $bon(x_1 : \alpha) = 1$

$$\begin{array}{ll} \textit{ist} & mem(x_2 : \alpha) = 1 \\ \textit{oder} & mem(x_3 : \alpha) = 1 \\ \textit{oder} & mem(x_2 : \alpha) = mem(x_3 : \alpha) = 2. \end{array}$$

Beweis von Lemma 3.17. Für $k = 4$ ist die Aussage trivial, es sei also $k \geq 5$. Aus $\mathrm{bon}(x_1 : \alpha) = 1$ folgt $\mathrm{mem}(x_1 : \alpha) = k - 2$. Es seien $u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}$ die Nachbarn von x_1 in G_α mit $[u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}] \subseteq G$ und $u_{k-2}x_2, u_1x_3 \in E(G)$.

Fall 1. $u_1x_2 \in E(G)$ (analog $u_{k-2}x_3 \in E(G)$).

1a. $u_1x_2x_3 \in F(G)$.

Dann ist $\mathrm{mem}(x_3 : \alpha) = 1$.

1b. $u_1x_2x_3 \notin F(G)$.

Es gibt einen Knoten $u \in V(G_\alpha) \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}\}$, so daß $u_1u, ux_3 \in E(G)$ und $u_1ux_3 \in F(G)$. Daraus folgt $uu_{k-2} \notin E(G)$ (weil der Kreis $[u_1, x_2, x_3]$ die Knoten u und u_{k-2} trennt). Wir haben schon einen $(k-1)$-Weg $[u, u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}]$ in G_α, d. h. es gibt kein $z \in V(G_\alpha) \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}\}$ mit $zu_{k-2} \in E(G)$, anderenfalls hätten wir einen k-Weg in G_α, Widerspruch. Da $\delta(G) \geq 4$, gibt es ein $i \leq k - 4$ mit $u_iu_{k-2} \in E(G)$. Nach Lemma 3.14 finden wir einen (u_i, u_{k-2})-Weg $Q_{i,k-2}$ in G_α mit mindestens $(k-2) - i + 2$ Knoten, der zu $[u, u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}]$ disjunkt ist und zusammen mit diesem einen k-Weg in G_α bildet, Widerspruch.

Fall 2. $u_1x_2 \notin E(G)$ und $u_{k-2}x_3 \notin E(G)$.

2a. $\exists\, u \in V(G_\alpha) \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}\} \,:\, uu_1 \in E(G)$ und $uu_{k-2} \in E(G)$.

Es gibt hier keinen Knoten $z \in V(G_\alpha) \setminus \{u, u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}\}$, der mit u_1, u_{k-2} oder u benachbart ist, sonst hätten wir einen k-Weg in G_α, Widerspruch. Also gilt $ux_2x_3, u_1ux_3, u_{k-2}ux_2 \in F(G)$, und daraus folgt $\mathrm{mem}(x_2 : \alpha) = \mathrm{mem}(x_3 : \alpha) = 2$.

2b. $\exists\, u \in V(G_\alpha) \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}\} \,:\,$ (o.B.d.A.) $uu_1 \in E(G)$ und $uu_{k-2} \notin E(G)$.

Dann gibt es keinen Knoten $z \in V(G_\alpha) \setminus \{u, u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}\}$, mit $zu_{k-2} \in E(G)$, sonst hätten wir einen k-Weg in G_α, Widerspruch. Wegen $\delta(G) \geq 4$ gibt es ein i $(1 \leq i \leq k - 4)$, so daß $u_iu_{k-2} \in E(G)$, und nach Lemma 3.14 gibt es einen (u_i, u_{k-2})-Weg $Q_{i,k-2}$ in G_α mit mindestens $(k-2) - i + 2$ Knoten, der zu $[u, u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}]$ disjunkt ist und zusammen mit diesem einen k-Weg in G_α bildet, Widerspruch.

2c. $\forall\, u \in V(G_\alpha) \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}\} \,:\, uu_1 \notin E(G)$ und $uu_{k-2} \notin E(G)$.
Dann gilt $u_1 u_{k-2} \notin E(G)$, da sonst $x_3 u_1 u_{k-2} x_2 \in F(G)$ ein mit einem Hauptpunkt inzidentes Viereck wäre (Widerspruch zu Eig. 2). Das bedeutet, daß es Zahlen i, j $(3 \le i < j \le k-4)$ mit $u_1 u_i, u_j u_{k-2} \in E(G)$ gibt, und nach Lemma 3.14 gibt es dann einen (u_1, u_i)-Weg $Q_{1,i}$ in G_α mit mindestens $i - 1 + 2$ Knoten und einen (u_j, u_{k-2})-Weg $Q_{j,k-2}$ in G_α mit mindestens $(k-2) - j + 2$ Knoten, die zu $[u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_{k-2}]$ bzw. $[u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}]$ disjunkt sind. Schließlich ist $Q_{1,i} \cup P_{i,j} \cup Q_{j,k-2}$ ein Weg in G_α mit mindestens $(i-1+2) + (j-i+1) + (k-2-j+2) - 2 = k$ Knoten, Widerspruch. ⊡→

Teil II.A. Es sei im weiteren $k \ge 5$.

Lemma 3.18 *Für jedes i-Eck $\alpha \in F(M)$ ist*

$$bon(\alpha) = \sum_{x:\ x \in \alpha} bon(x : \alpha) \le \begin{cases} 2, & \text{falls } i = 3 \\ 2i, & \text{falls } i \ge 4. \end{cases}$$

Beweis von Lemma 3.18. Für ein Dreieck gilt die Aussage nach Lemma 3.17 und für ein i-Eck, $i \ge 4$, nach der Definition von $\mathrm{bon}(x : \alpha)$ und infolge der Eigenschaften 4 und 6. ⊡→

Wir teilen jetzt (nach Lemma 3.17) alle Dreiecke $\alpha \in F(M)$ mit $\mathrm{bon}(\alpha) > 0$ in zwei Mengen

$$\mathcal{P} := \Big\{\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M) \,|\, \mathrm{bon}(\alpha) > 0 \wedge (\exists\, i \in \{1,2,3\} :\, \mathrm{mem}(x_i : \alpha) = 1)\Big\},$$

$$\mathcal{Q} := \Big\{\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M) \,|\, \mathrm{bon}(\alpha) > 0 \wedge \\ (\exists\, i, j \in \{1,2,3\}, i \ne j :\, \mathrm{mem}(x_i : \alpha) = \mathrm{mem}(x_j : \alpha) = 2)\Big\}$$

und betrachten noch eine Menge von Dreiecken α mit $\mathrm{bon}(\alpha) = 0$

$$\mathcal{R} := \Big\{\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M) \,|\, \mathrm{bon}(\alpha) = 0 \wedge (\exists\, i \in \{1,2,3\} :\, \mathrm{mem}(x_i : \alpha) \le k-4)\Big\}.$$

Mit p, q und r (in dieser Reihenfolge) bezeichnen wir die Mächtigkeiten dieser drei Mengen.

Für jeden Knoten $x \in V(M)$ definieren wir

$$p(x) := \Big|\{\alpha \in \mathcal{P} \,|\, x \in V(\alpha),\ \mathrm{mem}(x : \alpha) = 1\}\Big|,$$

$$q(x) := \Big|\{\alpha \in \mathcal{Q} \,|\, x \in V(\alpha),\ \mathrm{mem}(x : \alpha) = 2\}\Big|,$$

$$r(x) := \Big|\{\alpha \in \mathcal{R} \,|\, x \in V(\alpha),\ \mathrm{mem}(x : \alpha) \le k-4\}\Big|.$$

und setzen

$$p_i := \sum_{x:\ \deg_M(x) = i} p(x)\,, \quad q_i := \sum_{x:\ \deg_M(x) = i} q(x)\,, \quad r_i := \sum_{x:\ \deg_M(x) = i} r(x).$$

Offensichtlich ist dann

$$p = \sum_{i \geq 3} p_i\,, \quad 2q = \sum_{i \geq 3} q_i\,, \quad 3r \geq \sum_{i \geq 3} r_i \geq r$$

und wegen der Eigenschaft 5 sogar

$$p = \sum_{i \geq 4} p_i\,, \quad 2q = \sum_{i \geq 4} q_i\,, \quad 3r \geq \sum_{i \geq 4} r_i \geq r\,.$$

Folgendes ist leicht einzusehen: $\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M) \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{R})$ genau dann, wenn $\mathrm{mem}(x_i : \alpha) = k - 3$, für $i = 1, 2, 3$. Im Fall $k = 7$ gibt es sogar kein Dreieck $\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M)$ mit $\mathrm{mem}(x_i : \alpha) = 4$ für $i = 1, 2, 3$ (was man einfach nachweisen kann), also ist $p + q + r = f_3(M)$.

Lemma 3.19 *Für B_f und B_v mit*

$$B_f = 2p + q + \sum_{i \geq 4} 2i \cdot f_i(M)$$

und

$$B_v = \begin{cases} \sum\limits_{i \geq 4} \Big(\sum\limits_{x:\ \deg_M(x)=i} \big(2p(x) + q(x) + 4(6-i)\big)\Big), & \text{falls } k = 6 \text{ oder } k \geq 8, \\ \sum\limits_{i \geq 4} \Big(\sum\limits_{x:\ \deg_M(x)=i} \big((k-4) \cdot p(x) + (k-5) \cdot q(x) + r(x) + 4k - (k-2)i\big)\Big), & \\ & \text{falls } k \in \{5, 7\} \end{cases}$$

gilt $B_f \geq B_v$.

Beweis von Lemma 3.19.
1. Zuerst beweisen wir, daß $B_f \geq \sum_{\alpha \in F(M)} \mathrm{bon}(\alpha)$. Jedes Dreieck $\alpha \in \mathcal{P}$ bzw. $\alpha \in \mathcal{Q}$ liefert $\mathrm{bon}(\alpha) \leq 2$ bzw. $\mathrm{bon}(\alpha) \leq 1$. Für alle anderen Dreiecke α ist $\mathrm{bon}(\alpha) = 0$. Nach Lemma 3.18 ist $\mathrm{bon}(\alpha) \leq 2i$ für jedes i-Eck $\alpha \in F(M)$, $i \geq 4$. Das bedeutet

$$B_f = 2p+q+\sum_{i \geq 4} 2i \cdot f_i(M) \geq \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \mathrm{bon}(\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}} \mathrm{bon}(\alpha) + \sum_{\alpha:\ \deg_M(\alpha) \geq 4} \mathrm{bon}(\alpha) = \sum_{\alpha \in F(M)} \mathrm{bon}(\alpha).$$

2. Trivialerweise gilt $\sum_{\alpha \in F(M)} \mathrm{bon}(\alpha) = \sum_{x \in V(M)} \mathrm{bon}(x)$.

3. Es ist noch zu zeigen, daß $\sum_{x \in V(M)} \mathrm{bon}(x) \geq B_v$.

3a. Es sei $k = 6$ oder $k \geq 8$. Ist $i - (p(x) + q(x)) \geq 6$, so haben wir

$$\mathrm{bon}(x) \geq 0 \geq 4(6 - i + p(x) + q(x)) \geq 2p(x) + q(x) + 4(6 - i).$$

Sei nun $i - (c(x) + d(x)) \leq 5$. In G gibt es $p(x)$ bzw. $q(x)$ mit x inzidente Dreiecke α mit $\mathrm{bon}(\alpha) > 0$ und $\mathrm{mem}(x : \alpha) = 1$ bzw. $\mathrm{mem}(x : \alpha) = 2$. Für die restlichen mit x inzidenten Dreiecke α ist $\mathrm{mem}(x:\alpha) \leq (k-3) + \mathrm{bon}(x:\alpha)$. Überdies ist x in M mit i Kanten inzident. Also gilt

$$\begin{aligned}
&5k-6 = g(k)+1 \leq \deg_G(x) \leq \\
&\leq p(x)+2q(x)+(i-(p(x)+q(x)))\cdot(k-3)+\mathrm{bon}(x)+i \\
&= p(x)+2q(x)+3(i-(p(x)+q(x)))+(i-(p(x)+q(x)))\cdot(k-6)+\mathrm{bon}(x)+i \\
&\leq -2p(x)-q(x)+4i+5(k-6)+\mathrm{bon}(x)
\end{aligned}$$

und mit $k \geq 6$ folgt daraus

$$\mathrm{bon}(x) \geq 2p(x)+q(x)+4(6-i).$$

3b. Im Fall $k \in \{5,7\}$ betrachten wir auch $r(x)$ mit x inzidente Dreiecke α mit $\mathrm{bon}(\alpha) = 0$ und $\mathrm{mem}(x:\alpha) \leq k-4$. Es gilt $4k = g(k)+1 \leq \deg_G(x) \leq p(x)+2q(x)+(k-4)\cdot r(x)+(i-(p(x)+q(x)+r(x)))\cdot(k-3)+\mathrm{bon}(x)+i$ und daraus folgt

$$\mathrm{bon}(x) \geq (k-4)\cdot p(x)+(k-5)\cdot q(x)+r(x)+4k-(k-2)i. \quad \Box\!\!\rightarrow$$

Wir schätzen nun die Differenz $B_v - B_f$ ab. Zunächst für $k=6$ bzw. $k \geq 8$.

$$\begin{aligned}
B_v - B_f &= \sum_{i\geq 4}\Big(\sum_{x:\ \deg_M(x)=i}\big(2p(x)+q(x)+4(6-i)\big)\Big) - \Big(2p+q+\sum_{i\geq 4} 2i\cdot f_i(M)\Big) \\
&= \sum_{i\geq 4}\Big(2p_i+q_i+4(6-i)\cdot v_i(M)\Big) - \Big(2p+q+2\sum_{i\geq 4} i\cdot f_i(M)\Big) \\
&= 2p+2q+4\sum_{i\geq 4}(6-i)\cdot v_i(M) - 2p - q - 2\sum_{i\geq 4} i\cdot f_i(M) \\
&= q+4\sum_{i\geq 4}(6-i)\cdot v_i(M) - 2\sum_{i\geq 4} i\cdot f_i(M) \\
&\geq 4\sum_{i\geq 4}(6-i)\cdot v_i(M) - 2\sum_{i\geq 4} i\cdot f_i(M) - 6\sum_{i\geq 4}(i-4)\cdot f_i(M) \\
&= 4\sum_{i\geq 4}(6-i)\cdot v_i(M) + 8\sum_{i\geq 4}(3-i)\cdot f_i(M) \\
&= 24(1+t) > 0.
\end{aligned}$$

Und jetzt die Abschätzung der Differenz für $k \in \{5,7\}$.

$$\begin{aligned}
B_v - B_f &= \sum_{i\geq 4}\Big(\sum_{x:\ \deg_M(x)=i}\big((k-4)\cdot p(x)+(k-5)\cdot q(x)+r(x)+4k-(k-2)i\big)\Big) - \\
&\quad \Big(2p+q+\sum_{i\geq 4} 2i\cdot f_i(M)\Big) \\
&= \sum_{i\geq 4}\Big((k-4)p_i+(k-5)q_i+r_i+\big(4k-(k-2)i\big)\cdot v_i(M)\Big) -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \Big(2p + q + \sum_{i\geq 4} 2i \cdot f_i(M)\Big) \\
\geq\ & (k-6)p + (k-6)q + r + \sum_{i\geq 4}\Big(4k-(k-2)i\Big)\cdot v_i(M) - \sum_{i\geq 4} 2i\cdot f_i(M) \\
\geq\ & (k-6)\cdot f_3(M) + \sum_{i\geq 4}\Big(4k-(k-2)i\Big)\cdot v_i(M) - \sum_{i\geq 4} 2i\cdot f_i(M) \\
\geq\ & (k-6)\cdot\Big(4(1+t) + \sum_{i\geq 4}(i-4)\cdot\Big(v_i(M)+f_i(M)\Big)\Big) + \\
& \sum_{i\geq 4}\Big(4k-(k-2)i\Big)\cdot v_i(M) - \sum_{i\geq 4} 2i\cdot f_i(M) \\
\geq\ & 4(k-6)(1+t) + \sum_{i\geq 4}\Big((k-6)(i-4)+4k-(k-2)i\Big)\cdot v_i(M) + \\
& \sum_{i\geq 4}\Big((k-6)(i-4)-2i\Big)\cdot f_i(M) \\
\geq\ & 4(k-6)(1+t) + \sum_{i\geq 4}(24-4i)\cdot v_i(M) + \\
& \sum_{i\geq 4}\Big((k-6)(i-4)-2i\Big)\cdot f_i(M) - k\sum_{i\geq 4}(i-4)\cdot f_i(M) \\
=\ & 4(k-6)(1+t) + 4\sum_{i\geq 4}(6-i)\cdot v_i(M) + 8\sum_{i\geq 4}(3-i)\cdot f_i(M) \\
=\ & 4(k-6)(1+t) + 24(1+t) = 4k(1+t) > 0.
\end{aligned}
$$

In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch zu Lemma 3.19. Für $k \geq 5$ wurde der Satz also bewiesen.

Teil II.B. Sei nun $k = 4$, und wir beenden damit den Beweis des Satzes 3.13. In jedem Dreieck $\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M)$ ist $\mathrm{mem}(x_i : \alpha) \leq 2$, für $i = 1, 2, 3$ (nach Lemma 3.15). Aus Lemma 3.16 folgt, daß jedes r-Eck $\alpha = x_1x_2\ldots x_r \in F(M)$, $r \geq 4$, höchstens $\frac{r}{2}$ Knoten von $x_1, x_2, \ldots, x_r$ mit $\mathrm{mem}(x_i : \alpha) = 3$ enthält. Jeder Hauptpunkt x von G hat $\deg_G(x) \geq 4k = 16$. D.h., es gibt keinen 3-Knoten in M, für jeden 4-Knoten x von M und jede mit ihm inzidente Fläche $\alpha \in F(M)$ ist $\mathrm{mem}(x : \alpha) = 3$, und schließlich gibt es für jeden 5-Knoten x von M eine mit ihm inzidente Fläche $\alpha \in F(M)$, so daß $\mathrm{mem}(x : \alpha) = 3$.

Für die Anzahl A der Paare (x, α) mit $x \in V(\alpha)$ und $\mathrm{mem}(x : \alpha) = 3$ gilt:

$$\sum_{i\geq 4} \tfrac{i}{2} f_i(M) \geq A \geq 4v_4(M) + v_5(M) \geq 2v_4(M) + v_5(M),$$

andererseits folgt aus Lemma 1.17 (ii) mit $v_3(M) = 0$ folgendes:

$$2v_4(M) + v_5(M) \geq 12 + \sum_{i\geq 6}(i-6)\cdot v_i(M) + 2\sum_{i\geq 3}(i-3)\cdot f_i(M) > \sum_{i\geq 4}\tfrac{i}{2} f_i(M),$$

und das ist ein Widerspruch. Damit ist der Satz 3.13 endlich bewiesen. □

Auch in der Menge $\mathscr{G}_3(4,3)$ sind die leichten Graphen vollständig charakterisiert. Da der im Beweis des Satzes 3.12 konstruierte Graph G_m ein Element von $\mathscr{G}_3(4,3)$ ist, haben wir mit diesem Beweis gleichzeitig die Gültigkeit des folgenden Satzes nachgewiesen.

Satz 3.20 ([20]) *Ein Graph H ist leicht in $\mathscr{G}_3(4,3)$ genau dann, wenn $H \in \{P_k \mid k \geq 1\}$.*

3.1.4 $c = 3$, $\varrho = 4$

Die Situation in der Menge $\mathscr{G}_3(3,4)$ ist ähnlich zu den vorher betrachteten 2 Fällen. Auch hier sind alle leichten Graphen bekannt, es sind wieder nur Wege, jedoch ist es noch nicht gelungen, die Zahl φ für die k-Wege mit ungeradem k genau zu bestimmen.

Satz 3.21 (Harant, Jendroľ & Tkáč [28])

$$5\lfloor \tfrac{k}{2} \rfloor \;\leq\; \varphi_3(3,4;P_k) \;\leq\; \lfloor \tfrac{5k}{2} \rfloor, \quad \textit{für } k \geq 2.$$

Satz 3.22 (Harant, Jendroľ & Tkáč [28]) *Ein Graph H ist leicht in $\mathscr{G}_3(3,4)$ genau dann, wenn $H \in \{P_k \mid k \geq 1\}$.*

3.1.5 $c = 3$, $\delta = 5$

Es ist sicherlich kein Wunder, daß die Menge der leichten Graphen in $\mathscr{G}_3(5,3)$ (und dadurch auch in $\mathscr{T}_3(5)$) wesentlich reicher ist als in Graphenmengen, die wir bis jetzt betrachtet haben (sonst hätte man wahrscheinlich den Vierfarbensatz schon früher und ohne Computer bewiesen). Der nächste Satz schätzt die Zahl φ für die Wege von unten ab, und die bis jetzt beste bekannte obere Schranke ist $5k - 7$ (für $k \geq 8$) aus dem Satz 3.13.

Satz 3.23 (Jendroľ & Voss [38])

$$5k - 235 \leq \varphi_3(5,3;P_k), \quad \textit{für } k \geq 68.$$

Schon aus dem Satz 2.4 von Lebesgue folgt, daß C_3 leicht in $\mathscr{G}_3(5,3)$ ist (ein $G \in \mathscr{G}_3(5,3)$ besitzt keine 3- und 4-Knoten und enthält dadurch ein Dreieck vom Typ (5,5,5), (5,5,6), (5,5,7), (5,5,8), (5,5,9), (5,6,6) oder (5,6,7), was $\varphi_3(5,3;C_3) \leq 9$ impliziert). Der genaue Wert $\varphi_3(5,3;C_3)$ folgt aus dem Satz 5.6 von Borodin.

Folgerung 3.24

$$\varphi_3(5,3;C_3) = 7.$$

Es folgen Aussagen über Kreise, Sterne und Kreise mit Diagonalen.

Satz 3.25 (SOTÁK [53])

$$
\begin{array}{rrcl}
\textit{(i)} & \varphi_3(5,3;C_4) & = & 11, \\
\textit{(ii)} & \varphi_3(5,3;C_5) & = & 10.
\end{array}
$$

Satz 3.26 (MOHAR, ŠKREKOVSKI & VOSS [51]) *Der Graph C_6 ist leicht in der Menge $\mathscr{G}_3(5,3)$.*

Satz 3.27 (JENDROĽ, MADARAS, SOTÁK & TUZA [36])

$$\varphi_3(5,3;C_k) = \infty, \ \textit{für } k \geq 11.$$

Es wird vermutet, daß die Kreise $C_7, \ldots, C_{10}$ dagegen leicht in dieser Menge sind.

Satz 3.28 (JENDROĽ & MADARAS [35])

$$
\begin{array}{rrcll}
\textit{(i)} & \varphi_3(5,3;K_{1,3}) & = & 7, & \\
\textit{(ii)} & \varphi_3(5,3;K_{1,4}) & = & 10, & \\
\textit{(iii)} & \varphi_3(5,3;K_{1,r}) & = & \infty, & \textit{für } r \geq 5.
\end{array}
$$

Satz 3.29 (MADARAS & SOTÁK [48]) *Für die Graphen $H_1 := P_1 \times P_3$ und $H_2 := P_1 \times P_4$ ist*

$$\varphi_3(5,3;H_i) \leq 11, \ \textit{für } i \in \{1,2\}.$$

Es seien $S_k^1, S_k^2, S_k^3, S_k^4$ $(k \geq 1)$ folgende Graphen: $S_k^1 := ([w_1, u_1, u_2, \ldots, u_k] \cup [w_2]) + w_2 u_1$, $S_k^2 := [w_1, w_2, u_1, u_2, \ldots, u_k] + w_1 u_1$, $S_k^3 := [w_1, w_2, w_3, u_1, u_2, \ldots, u_k] + \{w_1 u_1, w_2 u_1\}$ und $S_k^4 := [w_1, w_2, w_3, u_1, u_2, \ldots, u_k] + \{w_1 u_1, w_1 w_3\}$ (Abb. 3.9).

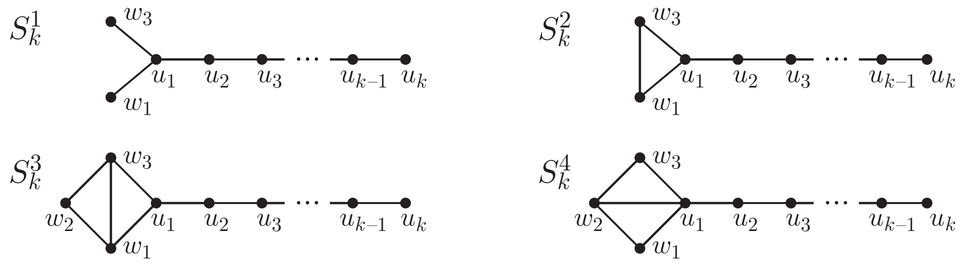


Abb. 3.9.

Satz 3.30 (SOTÁK [53]) *Die Graphen $S_k^1, S_k^2, S_k^3, S_k^4$ $(k \geq 1)$ sind leicht in $\mathscr{G}_3(5,3)$.*

Die folgenden zwei Sätze geben hinreichende Bedingungen für nicht leichte Graphen an.

Satz 3.31 (Jendroľ, Madaras, Soták & Tuza [36]) *Sei H ein Graph.*
(a) Ist $\Delta(H) \geq 6$ oder
(b) enthält H einen Block mit mindestens 11 Knoten,
so ist H nicht leicht in $\mathscr{G}_3(5,3)$.

Der nächste Satz ist eine Verbesserung der Sätze 3.28 (iii) und 3.31 (a).

Satz 3.32 ([19]) *Ein Graph H mit $\Delta(H) \geq 5$ ist nicht leicht in $\mathscr{G}_3(5,3)$.*

Beweis. Für jeden zusammenhängenden planaren Graphen H mit $\Delta(H) \geq 5$ und für jede natürliche Zahl $m \geq 6$ finden wir einen Graphen $G_m \in \mathscr{G}_3(5,3)$, so daß $H \subseteq G_m$ und jeder zu H isomorphe Teilgraph K von G_m einen Knoten der Valenz (in G_m) mindestens m enthält.

Sei T_H eine Triangulation von H. In jedes Dreieck $xyz \in F(T_H)$ fügen wir zwei disjunkte Kreise $C_m := [u_1, \ldots, u_m]$ und $\tilde{C}_m := [\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m]$, einen Knoten w und Kanten

$$\begin{array}{lll} u_i\tilde{u}_i, u_i\tilde{u}_{i+1}, w\tilde{u}_i, & \text{für} & i = 1, \ldots, m, \\ xu_i, & \text{für} & i = 1, \ldots, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1, \\ yu_i, & \text{für} & i = \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1, \ldots, 2\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1, \\ zu_i, & \text{für} & i = 2\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1, \ldots, m \text{ und } i = 1, \end{array}$$

ein (Abb. 3.10). Der so entstehende Graph G_m ist aus der Menge $\mathscr{G}_3(5,3)$ und enthält H als Teilgraph. Für den von der Menge aller Knoten der Valenz höchstens $m-1$ in G_m induzierten Teilgraphen N ist $\Delta(N) = 4$, also jeder zu H isomorphe Teilgraph von G_m enthält einen Knoten von $G_m - N$. □

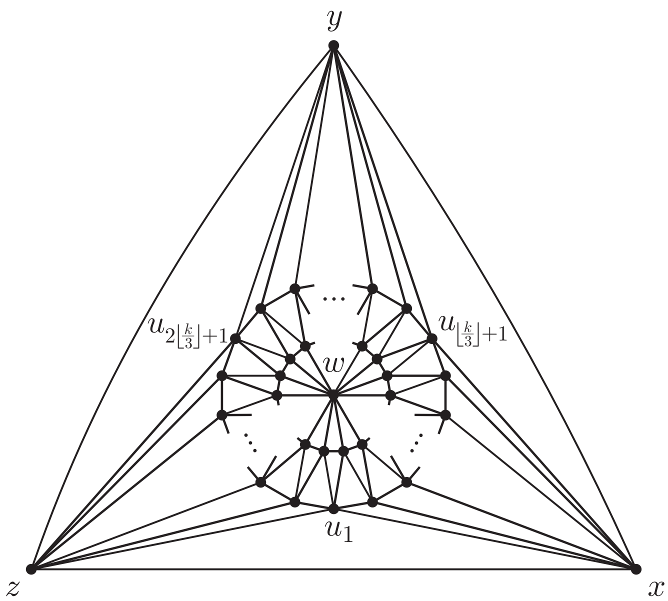


Abb. 3.10.

Die Beispiele $K_{1,4}$ und S_k^4 zeigen, daß man die Schranke 5 aus dem letzten Satz nicht weiter verkleinern kann. Offen bleiben noch die Kreise C_k ($7 \leq k \leq 10$)

und viele Graphen mit Maximalvalenz 3 und 4, die keinen Block mit mindestens 11 Knoten enthalten.

3.1.6 $c = 3$, $\varrho = 5$

Auch in diesem Abschnitt fangen wir mit der Abschätzung der Zahl φ mit den Wegen an.

Satz 3.33 (Jendroľ & Owens [37])

$$\begin{array}{llcll} (i) & & \varphi_3(3,5;P_k) & \leq \tfrac{5}{3}k, & \textit{für } k \geq 2, \\ (ii) & \tfrac{5}{9}(k+7) \leq & \varphi_3(3,5;P_k), & & \textit{für } k \geq 38. \end{array}$$

Diesen Satz kann man für große k wie folgt verbessern

Satz 3.34

$$\tfrac{5}{3}k - 80 \quad \leq \quad \varphi_3(3,5;P_k), \qquad \textit{für } k \geq 935.$$

Beweis. Wir konstruieren einen Graphen $G_k \in \mathscr{G}_3(3,5)$, in dem jeder k-Weg einen Knoten der Valenz mindestens $\frac{5}{3}k - 80$ enthält.

Dazu benutzen wir die Figuren J_0, J_1, J_2, J_3 (Abb. 3.11) und L_i, $i \geq 0$, die aus einer Kette von i benachbarten 5-Ecken besteht (Abb. 3.12).

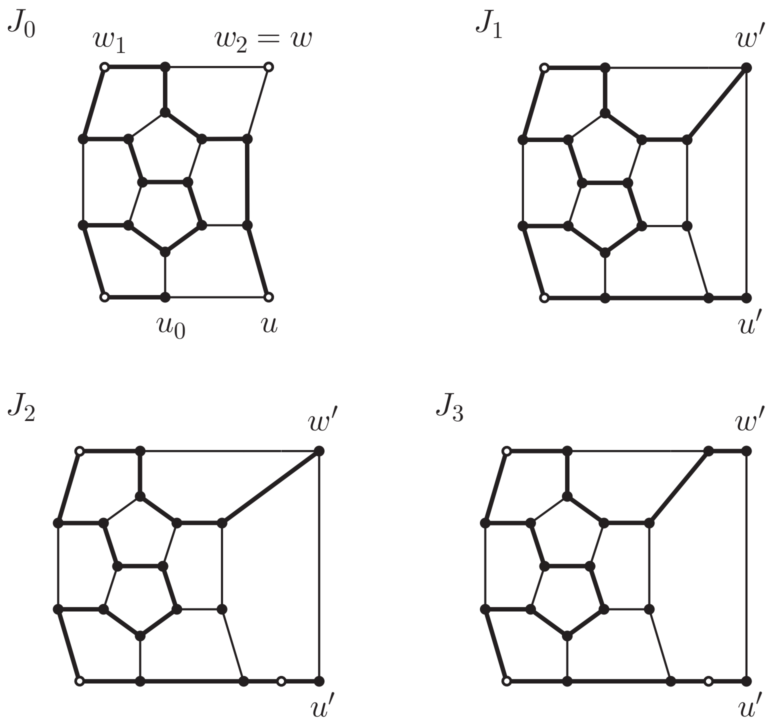


Abb. 3.11.

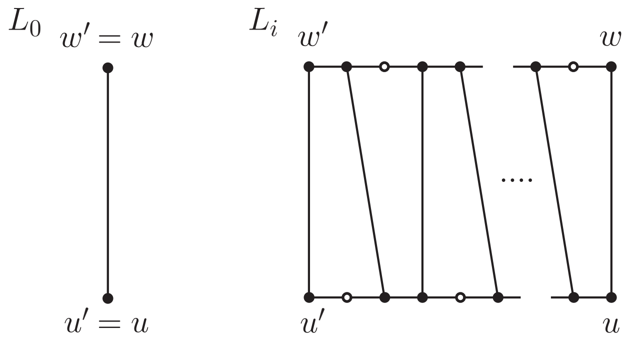
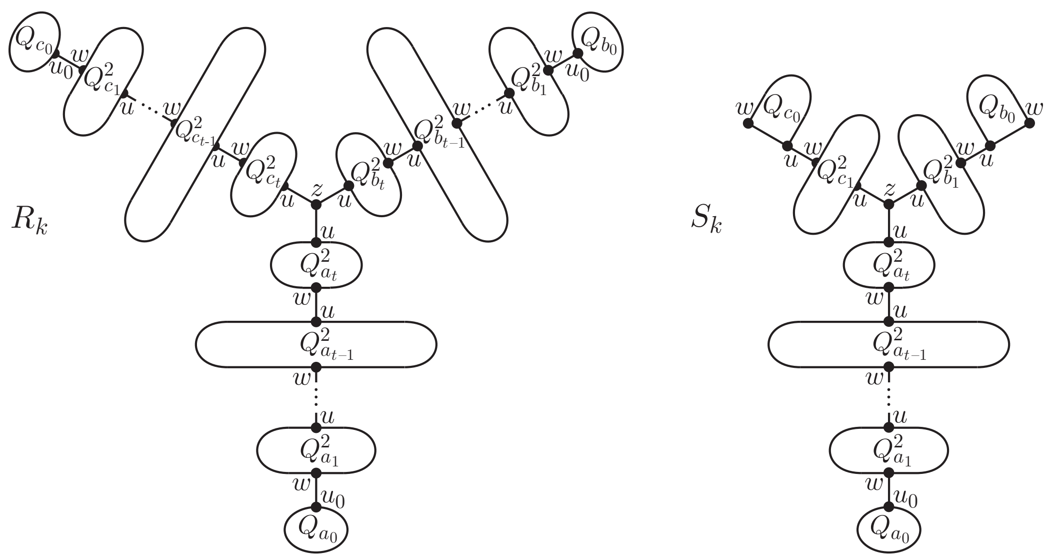


Abb. 3.12.

Der längste Weg in J_0 mit einem Endknoten u_0 und die längsten (w', u')-Wege in J_1, J_2, J_3 sind fett gezeichnet (Abb. 3.11). Aus diesen Figuren setzen wir die neuen wie folgt zusammen: $Q_{17} := J_0$, Q_i $(i \geq 18)$ entsteht aus $L_{\lfloor \frac{i-18}{3} \rfloor}$ und $J_{i-17-3\lfloor \frac{i-18}{3} \rfloor}$ durch Identifizieren der Kanten $w'u' \in E(L_{\lfloor \frac{i-18}{3} \rfloor})$ und $w'u' \in E(J_{i-17-3\lfloor \frac{i-18}{3} \rfloor})$ und Q_i^2 $(i \geq 18)$ aus 2 Kopien von Q_i durch Identifizieren von $Q_i[\{u, w\}]$ aus beiden Kopien. Der längste (w, u)-Weg in Q_i bzw. Q_i^2 besteht aus i Knoten und der längste Weg in Q_i^2 mit dem Endknoten u enthält höchstens $2i - 1$ Knoten.



(a) (b)

Abb. 3.13.

Der Graph R_k (Abb. 3.13 (a)) besteht aus einem Knoten z und drei Ketten

$$\mathcal{A} \;:=\; Q_{a_0}, h_0^{\mathcal{A}}, Q_{a_1}^2, h_1^{\mathcal{A}}, Q_{a_2}^2, h_2^{\mathcal{A}}, \ldots, h_{t-1}^{\mathcal{A}}, Q_{a_t}^2,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &:= Q_{b_0}, h_0^{\mathcal{B}}, Q^2_{b_1}, h_1^{\mathcal{B}}, Q^2_{b_2}, h_2^{\mathcal{B}}, \ldots, h_{t-1}^{\mathcal{B}}, Q^2_{b_t},\\
\mathcal{C} &:= Q_{c_0}, h_0^{\mathcal{C}}, Q^2_{c_1}, h_1^{\mathcal{C}}, Q^2_{c_2}, h_2^{\mathcal{C}}, \ldots, h_{t-1}^{\mathcal{C}}, Q^2_{c_t},
\end{aligned}$$

deren Elemente genau die Blöcke von R_k sind, wobei die Kante $h_0^{\mathcal{A}} = u_0 w$ die Blöcke Q_{a_0} und $Q^2_{a_1}$ und die Kante $h_i^{\mathcal{A}} = uw$ $(i = 1, \ldots, t-1)$ die Blöcke $Q^2_{a_i}$ und $Q^2_{a_{i+1}}$ verbindet (analog die Kanten $h_i^{\mathcal{B}}$ und $h_i^{\mathcal{C}}$). Der Knoten z ist außerdem mit den Blöcken $Q^2_{a_t}$, $Q^2_{b_t}$ und $Q^2_{c_t}$ durch zu-Kanten $h_t^{\mathcal{A}}, h_t^{\mathcal{B}}$ und $h_t^{\mathcal{C}}$ verbunden. Dabei ist:

$$t = \left\lfloor \log_2 \tfrac{k-2}{17} \right\rfloor,$$

$$A = B = \left\lfloor \tfrac{k-2}{2} \right\rfloor, \quad C = \left\lceil \tfrac{k-2}{2} \right\rceil,$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 17,\\
a_i &= 17 \cdot 2^{i-1}, && \text{für } i = 1, \ldots, t-2,\\
a_t &= \begin{cases} A - 17 \cdot 2^{t-1}, & \text{falls } A - 17 \cdot 2^{t-1} \geq 17\\ 17, & \text{falls } A - 17 \cdot 2^{t-1} < 17, \end{cases}\\
a_{t-1} &= A - \sum_{\substack{i=0\\ i \neq t-1}}^{t} a_i \qquad (\text{analog } b_i \text{ und } c_i).
\end{aligned}$$

Der Graph S_k (Abb. 3.13 (b)) besteht aus einem Knoten z und drei Ketten

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= Q_{a_0}, h_0^{\mathcal{A}}, Q^2_{a_1}, h_1^{\mathcal{A}}, Q^2_{a_2}, h_2^{\mathcal{A}}, \ldots, h_{t-1}^{\mathcal{A}}, Q^2_{a_t},\\
\mathcal{B} &:= Q_{b_0}, h_0^{\mathcal{B}}, Q^2_{b_1},\\
\mathcal{C} &:= Q_{c_0}, h_0^{\mathcal{C}}, Q^2_{c_1},
\end{aligned}$$

deren Elemente wieder die Blöcke von S_k sind, wobei die Kante $h_0^{\mathcal{A}} = u_0 w$ die Blöcke Q_{a_0} und $Q^2_{a_1}$ und die Kante $h_i^{\mathcal{A}} = uw$ $(i = 1, \ldots, t-1)$ die Blöcke $Q^2_{a_i}$ und $Q^2_{a_{i+1}}$ verbindet (analog die Kanten $h_0^{\mathcal{B}}$ und $h_0^{\mathcal{C}}$). Der Knoten z ist außerdem mit den Blöcken $Q^2_{a_t}$, $Q^2_{b_1}$ und $Q^2_{c_1}$ durch zu-Kanten $h_t^{\mathcal{A}}, h_1^{\mathcal{B}}$ und $h_1^{\mathcal{C}}$ verbunden. Dabei ist:

$$t = \left\lfloor \log_2 \tfrac{k-2}{17} \right\rfloor,$$

$$A = B = \left\lfloor \tfrac{k-2}{2} \right\rfloor, \quad C = \left\lceil \tfrac{k-2}{2} \right\rceil,$$

$$a_i \text{ ist definiert wie bei } R_t,$$

$$b_0 = \lceil \tfrac{B}{2} \rceil, \quad b_1 = \lfloor \tfrac{B}{2} \rfloor,$$

$$c_0 = \lceil \tfrac{C}{2} \rceil, \quad c_1 = \lfloor \tfrac{C}{2} \rfloor.$$

Es ist leicht einzusehen, daß der längste Weg in R_k bzw. S_k aus $C+1+A = k-1$ Knoten besteht.

Wir setzen nun den Graphen R_k in ein Dreieck $\alpha = y_1 y_2 y_3$ ein und verbinden den Knoten y_1 mit $w_1 \in V(Q_{b_0})$, $w_2 \in V(Q_{c_0})$ und mit z, den Knoten y_2 mit $w_1 \in V(Q_{c_0})$, $w_2 \in V(Q_{a_0})$ und mit z und den Knoten y_3 mit $w_1 \in V(Q_{a_0})$, $w_2 \in V(Q_{b_0})$ und mit z durch eine Kante. Weiterhin fügen wir Kanten zwischen allen 2-Knoten von S_k und einem der Knoten y_1, y_2 bzw. y_3 hinzu, so daß der entstehende Graph T_k (Abb. 3.14 (a)) planar bleibt. Die Anzahl von 2-Knoten in Q_i ist $\lfloor \frac{i-10}{3} \rfloor$ und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
m_1 := \mathrm{mem}(y_1 : \alpha) &= 1 + \sum_{i=0}^{t} \left\lfloor \tfrac{b_i-10}{3} \right\rfloor + \sum_{i=0}^{t} \left\lfloor \tfrac{c_i-10}{3} \right\rfloor \\
&\geq 1 + \sum_{i=0}^{t} \tfrac{b_i-12}{3} + \sum_{i=0}^{t} \tfrac{c_i-12}{3} = 1 + \tfrac{1}{3} \sum_{i=0}^{t} (b_i + c_i) - 8(t+1) \\
&= \tfrac{k-2}{3} - 7 - 8 \left\lfloor \log_2 \tfrac{k-2}{17} \right\rfloor \geq \tfrac{k}{3} - \tfrac{23}{3} - 8 \log_2 \tfrac{k-2}{17} \\
&= \tfrac{k}{3} - \tfrac{23}{3} - 8 \log_2 (k-2) + 8 \log_2 17 \geq \tfrac{k}{3} - 8 \log_2 k + 25, \\
m_2 := \mathrm{mem}(y_2 : \alpha) &= m_1 \geq \tfrac{k}{3} - 8 \log_2 k + 25, \\
m_3 := \mathrm{mem}(y_3 : \alpha) &\geq m_1 - 1 \geq \tfrac{k}{3} - 8 \log_2 k + 24.
\end{aligned}$$

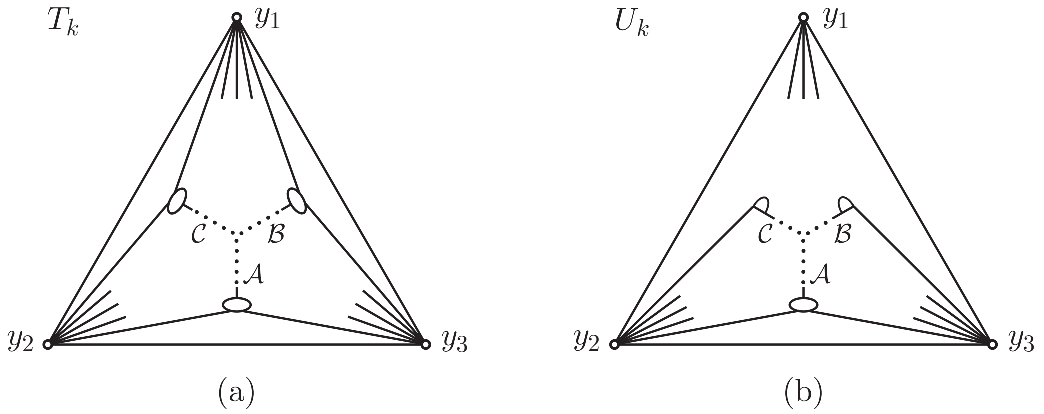


Abb. 3.14.

Auf ähnliche Weise setzen wir den Graphen S_k in ein Dreieck $\alpha = y_1 y_2 y_3$ ein. Wir fügen Kanten zwischen y_2 und $w \in V(Q_{c_0})$, y_2 und $w_2 \in V(Q_{a_0})$, y_2 und $w_2 \in V(Q_{a_0})$, y_2 und $w \in V(Q_{c_0})$ und zwischen jedem 2-Knoten von S_k und einem der Knoten y_1, y_2 bzw. y_3 hinzu, so daß der entstehende Graph U_k (Abb. 3.14 (b)) planar bleibt und die Kanten $y_1 y_2, y_2 w$ (für $w \in V(Q_{c_0})$) bzw. $y_1 y_3, y_3 w$ (für $w \in V(Q_{b_0})$) jeweils mit derselben Fläche von U_k inzident werden. Wieder kann man die Anzahl der Nachbarn von y_i in S_k wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
n_1 := \mathrm{mem}(y_1 : \alpha) &= \left\lfloor \tfrac{b_0-10}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{b_1-10}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{c_0-10}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{c_1-10}{3} \right\rfloor \\
&\geq \tfrac{b_0-12}{3} + \tfrac{b_1-12}{3} + \tfrac{c_0-12}{3} + \tfrac{c_1-12}{3} \\
&= \tfrac{1}{3}(b_0 + b_1 + c_0 + c_1) - 16 = \tfrac{1}{3}(k-2) - 16 \geq \tfrac{k}{3} - 17,
\end{aligned}$$

$$n_2 := \mathrm{mem}(y_2 : \alpha) \geq 1 + \left\lfloor \tfrac{c_1-10}{3} \right\rfloor + \sum_{i=0}^{t} \left\lfloor \tfrac{a_i-10}{3} \right\rfloor \geq 1 + \tfrac{c_1-12}{3} + \sum_{i=0}^{t} \tfrac{a_i-12}{3}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{c_1}{3} - 3 + \tfrac{1}{3}\sum_{i=0}^{t} a_i - 4(t+1) = \tfrac{1}{3}\Big(\Big\lfloor \tfrac{C}{2} \Big\rfloor + A\Big) - 7 - 4t \\
&\geq \tfrac{k-3}{4} - 7 - 4\Big\lfloor \log_2 \tfrac{k-2}{17} \Big\rfloor \geq \tfrac{k}{4} - \tfrac{31}{4} - 4\log_2(k-2) + 4\log_2 17 \\
&\geq \tfrac{k}{4} - 4\log_2 k + \tfrac{17}{2},
\end{aligned}
$$

$$n_3 := \mathrm{mem}(y_3 : \alpha) \geq n_2 - 1 \geq \tfrac{k}{4} - 4\log_2 k + \tfrac{15}{2}.$$

Sei $G = K(H_{12})$ der Kleetop des Dodekaedergraphen und $G' = KM^2(G)$ sein zweiter komedialer Graph. Jedes Dreieck von G' ersetzen wir durch eine der Konfigurationen T_k, U_k und bekommen so den Graphen G_k. Die Abbildung 3.15 zeigt für eine Fläche $x_1x_2x_3 \in F(G)$, bezeichnet gegen dem Uhrzeigersinn, so daß $\deg_G(x_1) = 5$ und $\deg_G(x_2) = \deg_G(x_3) = 6$, welche Konfiguration beim Ersetzen welcher Fläche von G' benutzt wurde und ihre Orientierung. Die Zahlen in den Ecken geben für den entsprechenden Knoten die Anzahl seiner Nachbarn in dieser Fläche an.

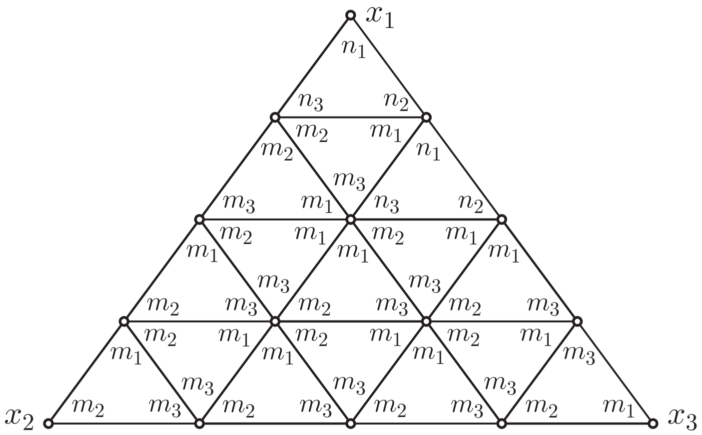


Abb. 3.15.

Die 5-Knoten von G' haben in G_k die Valenz

$$5n_1 + 5 \geq 5\Big(\tfrac{k}{3} - 17\Big) + 5 = \tfrac{5}{3}k - 80.$$

Die 6-Knoten von G' haben in G_k eine der Valenzen $m_1 + 2m_2 + n_1 + n_2 + n_3 + 6$, $3m_1 + m_2 + m_3 + n_2 + 6$, $3m_1 + m_2 + m_3 + n_3 + 6$, $2m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 6$, $3m_1 + 3m_2 + 6$ oder $2m_2 + 4m_3 + 6$, die man wie folgt abschätzen kann

$$
\begin{aligned}
&m_1 + 2m_2 + n_1 + n_2 + n_3 + 6 \geq \\
&\quad \geq 3\Big(\tfrac{k}{3} - 8\log_2 k + 25\Big) + \Big(\tfrac{k}{3} - 17\Big) + \Big(\tfrac{k}{4} - 4\log_2 k + \tfrac{17}{2}\Big) \\
&\quad\quad + \Big(\tfrac{k}{4} - 4\log_2 k + \tfrac{15}{2}\Big) + 6 \\
&\quad = \tfrac{5}{3}k - 80 + \Big(\tfrac{k}{6} - 32\log_2 k + 160\Big) \geq \tfrac{5}{3}k - 80, \quad \text{für } k \geq 935,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&3m_1 + m_2 + m_3 + n_2 + 6 \geq 3m_1 + m_2 + m_3 + n_3 + 6 \geq \\
&\qquad \geq 4\Big(\tfrac{k}{3} - 8\log_2 k + 25\Big) + \Big(\tfrac{k}{3} - 8\log_2 k + 24\Big) + \Big(\tfrac{k}{4} - 4\log_2 k + \tfrac{15}{2}\Big) + 6 \\
&\qquad = \tfrac{5}{3}k - 80 + \Big(\tfrac{k}{4} - 44\log_2 k + \tfrac{435}{2}\Big) \geq \tfrac{5}{3}k - 80, \quad \text{für } k \geq 840, \\
&3m_2 + 3m_3 + 6 \geq 2m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 6 \geq 2m_2 + 4m_3 + 6 \geq \\
&\qquad \geq 2\Big(\tfrac{k}{3} - 8\log_2 k + 25\Big) + 4\Big(\tfrac{k}{3} - 8\log_2 k + 24\Big) + 6 \\
&\qquad = \tfrac{5}{3}k - 80 + \Big(\tfrac{k}{3} - 48\log_2 k + 232\Big) \geq \tfrac{5}{3}k - 80, \quad \text{für } k \geq 650.
\end{aligned}$$

Da der längste Weg in R_k bzw. S_k aus $k-1$ Knoten besteht, enthält jeder k-Weg von G_k einen Knoten von G'. $\square$

Schon aus dem Satz 2.4 von Lebesgue folgt, daß C_5 leicht in $\mathscr{G}_3(3,5)$ mit $\varphi_3(3,5;C_5) \leq 5$ ist. Der duale Graph des abgeschrägten Dodekaedergraphen $D(H_{80,12})$ zeigt, daß es schon die beste Schranke ist.

Folgerung 3.35

$$\varphi_3(3,5;C_5) = 5.$$

Satz 3.36 (Jendroľ & Owens [37]) *Der Graph C_k, $k \geq 6$, $k \neq 14$, ist nicht leicht in $\mathscr{G}_3(3,5)$.*

Es wird vermutet, daß auch C_{14} nicht leicht ist. Folgende Bedingung läßt dann nur die Frage offen, welche der Graphen mit Maximalvalenz 3 in $\mathscr{G}_3(3,5)$ leicht sind.

Satz 3.37 (Jendroľ & Owens [37]) *Sei H ein Graph.*
(a) Ist $\Delta(H) \geq 4$ oder
(b) enthält H einen Block mit mindestens 19 Knoten,
so ist H nicht leicht in $\mathscr{G}_3(3,5)$.

3.1.7 $c = 4$

Interessant ist die Situation in der Menge der 4-zusammenhängenden Graphen. Klar, die Wege sind hier leicht, aber eine beliebige 4-zusammenhängende Triangulation T_4 hat einen einzigen planaren Obergraphen (und zwar sich selbst) und ist dadurch trivial leicht mit $\varphi_4(4,3;T_4) = \Delta(T_4)$.

Satz 3.38 (Hexel & Walther [30])

$$2k+2 \leq \varphi_4(4,3;P_k) \leq 2k+3, \text{ für } k \geq 2.$$

Satz 3.39 (Mohar [50]) *Ein Graph H ist leicht in $\mathscr{G}_4(4,3)$ genau dann, wenn $H \in \{P_k \mid k \geq 1\}$ oder $H \in \mathscr{T}_4(4)$.*

3.1.8 $c = 4$, $\delta = 5$

Die Menge $\mathscr{G}_4(5,3)$ und die nachfolgend betrachtete Menge $\mathscr{G}_5(5,3)$ sind Teilmengen von $\mathscr{G}_3(5,3)$, was bedeutet, daß alle leichten Graphen aus $\mathscr{G}_3(5,3)$ auch in diesen beiden Mengen leicht sind.

Satz 3.40 (Hexel & Walther [30])

$$\begin{array}{lrclll}
\textit{(i)} & & & \varphi_4(5,3;P_k) & \leq \ k+4, & \textit{für } k \geq 2, \\
\textit{(ii)} & k+4 & \leq & \varphi_4(5,3;P_k), & & \textit{für } k = 2, \\
\textit{(iii)} & k+3 & \leq & \varphi_4(5,3;P_k), & & \textit{für } k \in \{3,4,10,11\}, \\
\textit{(iv)} & k+2 & \leq & \varphi_4(5,3;P_k), & & \textit{für } k \in \{5,6,7,8,9,12,13,14\}, \\
\textit{(v)} & k+1 & \leq & \varphi_4(5,3;P_k), & & \textit{für } k \geq 15.
\end{array}$$

Viele Beispiele, die die Schärfe einzelner Ergebnisse aus dem Abschnitt 3.1.5 zeigen, sind sogar 4-zusammenhängend, also gilt

Folgerung 3.41

$$\begin{array}{llcrl}
\textit{(i)} & \varphi_4(5,3;C_3) & = & 7, & \\
\textit{(ii)} & \varphi_4(5,3;C_k) & = & \infty, & \textit{für } k \geq 11, \\
\textit{(iii)} & \varphi_4(5,3;K_{1,3}) & = & 7, & \\
\textit{(iv)} & \varphi_4(5,3;K_{1,4}) & = & 10, & \\
\textit{(v)} & \varphi_4(5,3;K_{1,r}) & = & \infty, & \textit{für } r \geq 5.
\end{array}$$

Mit Proposition 3.3 folgt aus dem Satz 3.39

Folgerung 3.42 *Ein Graph $H \in \mathscr{T}_4(5)$ ist (trivial) leicht in $\mathscr{G}_4(5,3)$.*

Satz 3.43 (Hexel [29]) *Es sei H ein Graph mit $R(H) \geq 4$. Ist*
(a) $\Delta(H) \geq 5$ oder
(b) H 3-zusammenhängend,
so ist H nicht leicht in $\mathscr{G}_4(5,3)$.

3.1.9 $c = 5$

Der nächste Satz gibt uns die unteren Schranken von φ für die Wege in der Menge aller 5-zusammenhängenden Graphen an. Die bis jetzt beste bekannte obere Schranke ist $k+4$ $(k \geq 2)$ und folgt aus dem Satz 3.40.

Satz 3.44 (Hexel & Walther [30])

$$\begin{array}{rrcll}
\textit{(i)} & 6 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k \in \{2,3\}, \\
\textit{(ii)} & 7 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k \in \{4,5\}, \\
\textit{(iii)} & 8 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k = 6, \\
\textit{(iv)} & 9 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k = 7, \\
\textit{(v)} & 10 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k \in \{8,9,10\}, \\
\textit{(vi)} & 11 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k = 11, \\
\textit{(vii)} & 12 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k \in \{12,13,14\}, \\
\textit{(viii)} & 13 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k = 15, \\
\textit{(ix)} & 14 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k \in \{16,17\}, \\
\textit{(x)} & 15 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k = 18, \\
\textit{(xi)} & 16 & \leq & \varphi_5(5,3;P_k), & \textit{für } k = 19, \\
\textit{(xii)} & \lfloor \frac{2k+8}{3} \rfloor & \leq & \varphi_4(5,3;P_k), & \textit{für } k \geq 20.
\end{array}$$

Das Nächste folgt mit 5-zusammenhängenden Beispielen aus dem Abschnitt 3.1.5

Folgerung 3.45

$$\begin{array}{rlcll}
\textit{(i)} & \varphi_5(5,3;C_3) & = & 7, & \\
\textit{(ii)} & \varphi_5(5,3;K_{1,3}) & = & 7, & \\
\textit{(iii)} & \varphi_5(5,3;K_{1,4}) & = & 10, & \\
\textit{(iv)} & \varphi_5(5,3;K_{1,r}) & = & \infty, & \textit{für } r \geq 5.
\end{array}$$

Jeder Obergraph $G \in \mathscr{G}_5(5,3)$ eines zusammenhängenden planaren Graphen H, dessen sämtliche Flächen 3- oder 4-Ecke sind, hat die gleiche Ordnung wie H. Für jeden Knoten $x \in V(H) = V(G)$ gilt $\deg_G(x) \leq 2\deg_H(x)$ (da man in jede Fläche von H höchstens eine Kante einbetten kann), was dann $\varphi_5(5,3;H) = 2\Delta(H)$ ergibt.

Satz 3.46 (Hexel [29]) *Ein Graph H mit $R(H) \leq 4$, der einen Obergraphen $G \in \mathscr{G}_5(5,3)$ hat, ist (trivial) leicht in $\mathscr{G}_5(5,3)$.*

Satz 3.47 (Hexel [29]) *Es sei H ein Graph mit $R(H) \geq 5$. Ist*

(a) $\Delta(H) \geq 5$ *oder*

(b) H *3-zusammenhängend,*

so ist H nicht leicht in $\mathscr{G}_5(5,3)$.

In der Tabelle 3.1 sind einige Ergebnisse aus dem Abschnitt 3.1 zusammengefaßt.

c	δ	ϱ	$\varphi(\mathscr{G},H) = \varphi(\mathscr{G}_c(\delta,\varrho),H)$	
3	3	3	$\varphi(\mathscr{G},P_k) = 5k, \quad k \geq 1$	$\varphi(\mathscr{G},H) = \infty,\ H \neq P_k$
3	4	3	$\varphi(\mathscr{G},P_2) = 7$ $\varphi(\mathscr{G},P_3) = 9$ $\varphi(\mathscr{G},P_4) = 15$ $\varphi(\mathscr{G},P_5) = 19$ $\varphi(\mathscr{G},P_6) = 23$ $\varphi(\mathscr{G},P_7) = 27$ $\varphi(\mathscr{G},P_k) = 5k-7, \quad k \geq 8$	$\varphi(\mathscr{G},H) = \infty,\ H \neq P_k$
3	3	4	$5\lfloor\frac{k}{2}\rfloor \leq \varphi(\mathscr{G},P_k) \leq \lfloor\frac{5k}{2}\rfloor, \quad k \geq 2$	$\varphi(\mathscr{G},H) = \infty,\ H \neq P_k$
3	5	3	$\varphi(\mathscr{G},P_2) = 6$ $\varphi(\mathscr{G},P_3) = 6$ $\varphi(\mathscr{G},P_k) \leq 5k-7, \quad k \geq 6$ $5k-235 \leq \varphi(\mathscr{G},P_k) \quad k \geq 68$ $\varphi(\mathscr{G},C_3) = 7$ $\varphi(\mathscr{G},C_4) = 11$ $\varphi(\mathscr{G},C_5) = 10$ $\varphi(\mathscr{G},K_{1,3}) = 7$ $\varphi(\mathscr{G},K_{1,4}) = 10$	$\varphi(\mathscr{G},H) = \infty,\ \Delta(H) \geq 5$ $\varphi(\mathscr{G},C_k) = \infty,\ k \geq 11$
3	3	5	$\varphi(\mathscr{G},P_k) \leq \lfloor\frac{5k}{3}\rfloor, \quad k \geq 2$ $\frac{5}{3}k-80 \leq \varphi(\mathscr{G},P_k) \quad k \geq 935$ $\varphi(\mathscr{G},C_5) = 5$	$\varphi(\mathscr{G},H) = \infty,\ \Delta(H) \geq 4$ $\varphi(\mathscr{G},C_k) = \infty,\ k \notin \{5,14\}$
4	4	3	$2k+2 \leq \varphi(\mathscr{G},P_k) \leq 2k+3, \quad k \geq 2$	$\varphi(\mathscr{G},H) = \infty,\ H \neq P_k,$ $H \notin \mathscr{T}_4(4)$
4	5	3	$\varphi(\mathscr{G},P_2) = 6$ $\varphi(\mathscr{G},P_3) = 6$ $k+1 \leq \varphi(\mathscr{G},P_k) \leq k+4, \quad k \geq 2$ $\varphi(\mathscr{G},C_3) = 7$ $\varphi(\mathscr{G},K_{1,3}) = 7$ $\varphi(\mathscr{G},K_{1,4}) = 10$	$\varphi(\mathscr{G},H) = \infty,\ \Delta(H) \geq 5,$ $\mathrm{R}(H) \geq 4$
5	5	3	$\varphi(\mathscr{G},P_2) = 6$ $\varphi(\mathscr{G},P_3) = 6$ $\lfloor\frac{2k+8}{3}\rfloor \leq \varphi(\mathscr{G},P_k) \leq k+4, \quad k \geq 2$ $\varphi(\mathscr{G},C_3) = 7$ $\varphi(\mathscr{G},K_{1,3}) = 7$ $\varphi(\mathscr{G},K_{1,4}) = 10$	$\varphi(\mathscr{G},H) = \infty,\ \Delta(H) \geq 5,$ $\mathrm{R}(H) \geq 5$

3.2 Teilgraphen vorgegebener Ordnung

Schauen wir uns die Ergebnisse, die am Anfang des Kapitels 3 wiederholt zitiert wurden, aus einem anderen Blickwinkel an. Jeder Polyedergraph G enthält einen zusammenhängenden Teilgraphen H der Ordnung 1 (es gibt nur einen: P_1) bzw. der Ordnung 2 (wieder existiert nur einer: P_2), dessen Maximalvalenz in G mit einer von G unabhängigen Zahl beschränkt ist. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Verallgemeinerung dieser Aussage für zusammenhängende Teilgraphen der Ordnung k in Graphen aus $\mathscr{G}_c(\delta, \varrho)$.

Definition 3.48 *Seien $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\mathscr{G}$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen mit mindestens einem Graphen der Ordnung $\geq k$. Mit $\tau(\mathscr{G}, k)$ bezeichnen wir die kleinste natürliche Zahl, so daß jeder Graph $G \in \mathscr{G}$ der Ordnung $\geq k$ einen zusammenhängenden Teilgraphen H der Ordnung k mit*

$$\Delta_G(H) \leq \tau(\mathscr{G}, k)$$

enthält. Existiert keine solche Zahl, so sei $\tau(\mathscr{G}, k) := \infty$.

Im weiteren schreiben wir (ähnlich wie bei φ) $\tau_c(\delta, \varrho; k)$ statt $\tau(\mathscr{G}_c(\delta, \varrho), k)$. Die nächste Eigenschaft von τ ist leicht einzusehen.

Proposition 3.49 *Seien $j < k$ zwei natürlichen Zahlen, $\mathscr{G}_2$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen und $\mathscr{G}_1$ eine Teilmenge von $\mathscr{G}_2$, die einen Graphen der Ordnung $\geq k$ enthält. Dann gilt:*

$$\begin{array}{ll} (i) & \tau(\mathscr{G}_1, k) \leq \tau(\mathscr{G}_2, k), \\ (ii) & \tau(\mathscr{G}_2, j) \leq \tau(\mathscr{G}_2, k). \end{array}$$

Es folgt ein trivialer Zusammenhang zwischen φ und τ.

Proposition 3.50 *Seien $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\mathscr{G}$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen, die mindestens einen Obergraphen von P_k enthält. Dann gilt:*

$$\tau(\mathscr{G}, k) \leq \varphi(\mathscr{G}, P_k).$$

Mit der Tatsache, daß P_k, $k \in \{1, 2, 3\}$, Teilgraph von jedem zusammenhängenden Graphen der Ordnung k ist, folgt aus dem letzten:

Proposition 3.51 *Für $k \in \{1, 2, 3\}$ ist:*

$$\tau(\mathscr{G}, k) = \varphi(\mathscr{G}, P_k).$$

Mit der letzten Proposition liefern die Folgerung 3.5 und der Satz 3.6 die Werte τ für P_1 und P_2.

Folgerung 3.52

$$\begin{array}{rrcll} \textit{(i)} & \tau_c(\delta,\varrho;1) & = & 5, & \textit{für } \varrho = 3,\\ \textit{(ii)} & \tau_c(\delta,\varrho;1) & = & 3, & \textit{für } \varrho \in \{4,5\}. \end{array}$$

Folgerung 3.53

$$\begin{array}{rrcl} \textit{(i)} & \tau_3(3,3;2) & = & 13,\\ \textit{(ii)} & \tau_3(4,3;2) & = & 11,\\ \textit{(iii)} & \tau_3(5,3;2) & = & 11. \end{array}$$

Seien G ein zusammenhängender ebener Graph, M ein zusammenhängender Teilgraph von G und α eine Fläche von M. Für einen Knoten $x \in V(\alpha)$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{mem}(x:\alpha) := \deg_{G_\alpha}(x)$$

die Anzahl der Kanten von G, die mit x und einem Knoten von G_α inzident sind. Weiterhin sei

$$\mathrm{mem}(\alpha) := \sum_{x\in V(\alpha)} \mathrm{mem}(x:\alpha)$$

die Anzahl der Kanten von G, die mit einem Randknoten von α und einem Knoten von G_α inzident sind.

Lemma 3.54 *Ist G_α zusammenhängend, so ist*

$$\mathit{mem}(\alpha) \leq 2v(G_\alpha) - 2 + \deg_M(\alpha).$$

Beweis. Angenommen, der Rand von α ist ein Kreis. Anderenfalls wäre er ein geschlossener Kantenzug (Abb. 3.16 (a)), den wir (nur für die Zwecke dieses Beweises) durch einen Kreis gleicher Länge ersetzen könnten (Abb. 3.16 (b)), ohne $\deg_M(\alpha)$, $\mathrm{mem}(\alpha)$, $v(G_\alpha)$ und $e(G_\alpha)$ zu verändern.

Der Graph $G_@$ hat $v(G_@) = \deg_M(\alpha)+v(G_\alpha)$ Knoten und $e(G_@) = \deg_M(\alpha)+\mathrm{mem}(\alpha)+e(G_\alpha)$ Kanten. Um $G_@$ zu triangulieren, wären mindestens $\deg_M(\alpha)-3$ Kanten für die äußere Fläche notwendig, also $e(G_@) \leq 3v(G_@)-6-(\deg_M(\alpha)-3) = 3v(G_\alpha)-3+2\deg_M(\alpha)$. Da G_α zusammenhängend ist, gilt $e(G_\alpha) \geq v(G_\alpha)-1$ und wir bekommen schließlich $\mathrm{mem}(\alpha) = e(G_@) - \deg_M(\alpha) - e(G_\alpha) \leq 3v(G_\alpha) - 3 + 2\deg_M(\alpha) - \deg_M(\alpha) - (v(G_\alpha)-1) = 2v(G_\alpha) - 2 + \deg_M(\alpha)$. □

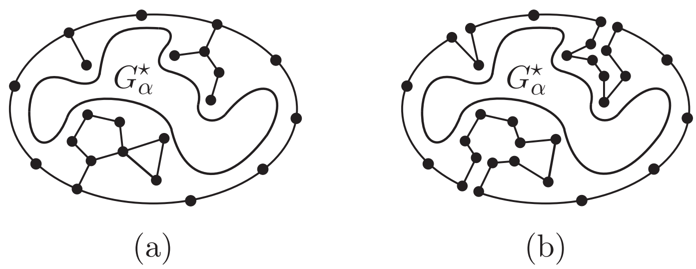


Fig. 3.16.

3.2.1 $c = 1$ und $c = 2$

Es sei $G_k := (\cup_{i=1}^{k} P_2) \times (P_1 \cup P_1) \in \mathscr{G}_2(3,3) \subseteq \mathscr{G}_1(3,3)$, für $k \geq 3$. Alle seine zusammenhängenden Teilgraphen der Ordnung k enthalten einen seiner $2k$-Knoten, was zusammen mit Folgerungen 3.9 und 3.10 und Proposition 3.50 folgendes impliziert:

Proposition 3.55

$$\tau_2(3,3;k) = \infty \text{ genau dann, wenn } k \geq 3.$$

Proposition 3.56

$$\tau_1(3,3;k) = \infty \text{ genau dann, wenn } k \geq 3.$$

3.2.2 $c = 3$

Aus dem Satz 4.33 und Proposition 4.28 folgt $\tau_3(3,3;k) \leq 5k + 2$. Eine etwas bessere Abschätzung erhalten wir mit Proposition 3.50 aus dem Satz 3.11, und zwar $\tau_3(3,3;k) \leq 5k$. Der nächste Satz bestimmt den exakten Wert von $\tau_3(3,3;k)$.

Satz 3.57 ([23])

$$\begin{array}{rrcl} (i) & \tau_3(3,3;1) & = & 5, \\ (ii) & \tau_3(3,3;2) & = & 10, \\ (iii) & \tau_3(3,3;k) & = & 4k+3, \ \textit{für } k \geq 3. \end{array}$$

Beweis. Die Aussagen (i), (ii) und (iii) für $k = 3$ folgen aus dem Satz 3.11 und Proposition 3.51.

Teil I. Zunächst zeigen wir, daß $\tau_3(3,3;k) \leq 4k + 3$ für $k \geq 4$ gilt.
Angenommen, die Behauptung ist falsch. Es gibt also ein $k \geq 4$, so daß $\tau_3(3,3;k) \geq 4k + 4$. Sei G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung n und maximaler Größe m unter allen Gegenbeispielen der Ordnung n. Ein Knoten x von G wird *Hauptpunkt* bzw. *Nebenpunkt* genannt, falls $\deg_G(x) \geq 4k + 4$ bzw. $\deg_G(x) \leq 4k + 3$.

Eigenschaft 1. *Jeder zusammenhängende Teilgraph von G der Ordnung k enthält einen Hauptpunkt.*

Eigenschaft 2. *G ist eine Triangulation.*

Beweis von Eigenschaft 2. Angenommen, es gibt ein r-Eck $\alpha \in F(G)$, $r \geq 4$. Ist α mit einem Hauptpunkt x inzident, so fügen wir die Diagonale zwischen x und einem mit ihm noch nicht adjazenten Knoten $y \in V(\alpha)$ hinzu. Es ist leicht einzusehen, daß der neue Graph $G + xy$ ein Gegenbeispiel der Ordnung n und der Größe $m + 1$ ist, Widerspruch. Ist dagegen α ausschließlich mit Nebenpunkten inzident, so gehören diese zu derselben Komponente des von der Menge aller

Nebenpunkte in G induzierten Teilgraphen N. Durch Einfügen einer Diagonale in α entsteht ein Gegenbeispiel mit n Knoten und $m+1$ Kanten, Widerspruch. (Es sei bemerkt, daß in beiden Fällen das Einfügen der Diagonale keine Vergrößerung der Ordnung einer beliebigen Komponente von N verursachen kann.) ⊡→

Sei M der von der Menge aller Hauptpunkte in G induzierte Teilgraph.

Eigenschaft 3. *M ist zusammenhängend.*

Beweis von Eigenschaft 3. Angenommen, M hat mindestens zwei Komponenten M_1 und M_2. Sei $G^\star$ die Komponente des Graphen $G - M_2$, die M_1 als Teilgraphen enthält. Höchstens eine Fläche von $G^\star$ ist ein r-Eck, $4 \le r \le k-1$, sie darf aber nur mit Nebenpunkten inzident sein, alle anderen Flächen sind Dreiecke. Dann ist aber eine Triangulation von $G^\star$ (aus gleichem Grund wie im Beweis von Eig. 2 bereits erwähnt) ein Gegenbeispiel mit weniger als n Knoten, Widerspruch. ⊡→

Aus den Eigenschaften 1 bis 3 folgt:

Eigenschaft 4. *Für jede Fläche $\alpha \in F(M)$ ist G_α zusammenhängend und es gilt $v(G_\alpha) \le k-1$.*

Mit den Eigenschaften 3 und 4 folgt aus Lemma 3.54:

Eigenschaft 5. *Für jede Fläche $\alpha \in F(M)$ ist $\mathrm{mem}(\alpha) \le 2k - 4 + \deg_M(\alpha)$.*

Jetzt schätzen wir die Valenzensumme aller Hauptpunkte ab:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in V(M)} \deg_G(x) &= \sum_{x\in V(M)} \deg_M(x) + \sum_{\alpha\in F(M)} \mathrm{mem}(\alpha) \\
&\le 2e(M) + \sum_{\alpha\in F(M)} \Big(2k-4+\deg_M(\alpha)\Big) \\
&= 2e(M) + \sum_{\alpha\in F(M)} \deg_M(\alpha) + (2k-4)\cdot f(M) \\
&= 2e(M) + 2e(M) + (2k-4)\cdot f(M) \\
&\le 4\Big(3v(M)-6\Big) + (2k-4)\cdot\Big(2v(M)-4\Big) \\
&= (4k+4)\cdot v(M) - (8k+8).
\end{aligned}$$

Das bedeutet, daß es einen Hauptpunkt der Valenz höchstens $\frac{(4k+4)\cdot v(M)-(8k+8)}{v(M)} = 4k+4-\frac{8k+8}{v(M)} < 4k+4$ gibt, Widerspruch.

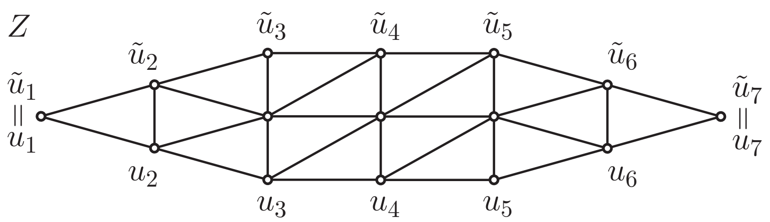


Abb. 3.17.

Teil II. Es ist noch zu zeigen, daß $\tau_3(3,3;k) \geq 4k+3$ für $k \geq 4$. Hier genügt es, einen Graphen $G_k \in \mathcal{G}_3(3,3)$ der Ordnung $\geq k$ zu konstruieren, in dem jeder zusammenhängende Teilgraph der Ordnung k einen Knoten der Valenz (in G_k) mindestens $4k+3$ enthält.

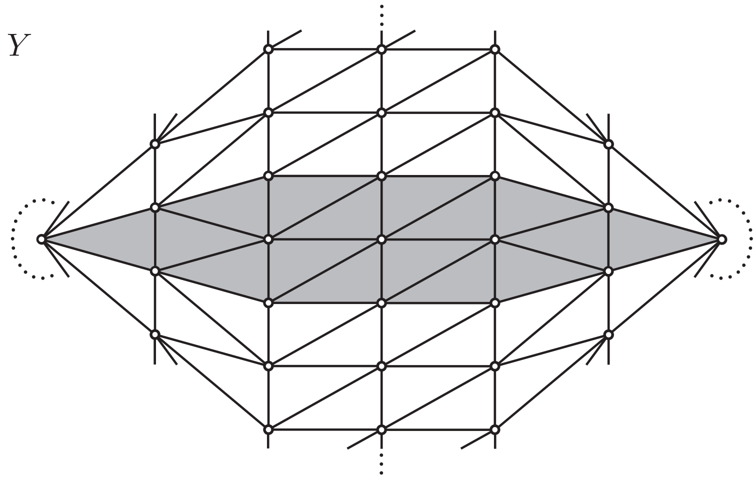


Abb. 3.18.

Wir betrachten zuerst den Graphen Z, in dem die Wege $P := [u_1, \ldots, u_7]$ und $Q := [\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_7]$ (Abb. 3.17) zusammen die äußere Fläche begrenzen. Die Triangulation Y, die aus $2k+2$ Kopien $(Z_1, \ldots, Z_{2k+2})$ von Z durch Identifizierung der Wege Q von Z_i $(i = 1, \ldots, 2k+2)$ und P von Z_{i+1} (Indexarithmetik modulo $2k+2$) entsteht, hat zwei $(2k+2)$-Knoten und sonst nur 5- und 6-Knoten (Abb. 3.18). Wir ersetzen nun jedes Dreieck $xyz \in F(Y)$ durch die Konfiguration $R_k := [u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, z] \times [x, y]$ bzw. $S_k := R_k - \{xu_{k-1}, yu_{k-2}\} + \{zu_{k-2}, u_{k-1}u_{k-3}\}$ (Abb. 3.19) und erhalten so den Graphen G_k. Die Abb. 3.20 zeigt für eine Kopie von Z (durch die Zahlen in den Ecken, die für den entsprechenden Knoten die Anzahl seiner Nachbarn in dieser Fläche angeben), welche Konfiguration beim Ersetzen welcher Fläche benutzt wurde und ihre Orientierung.

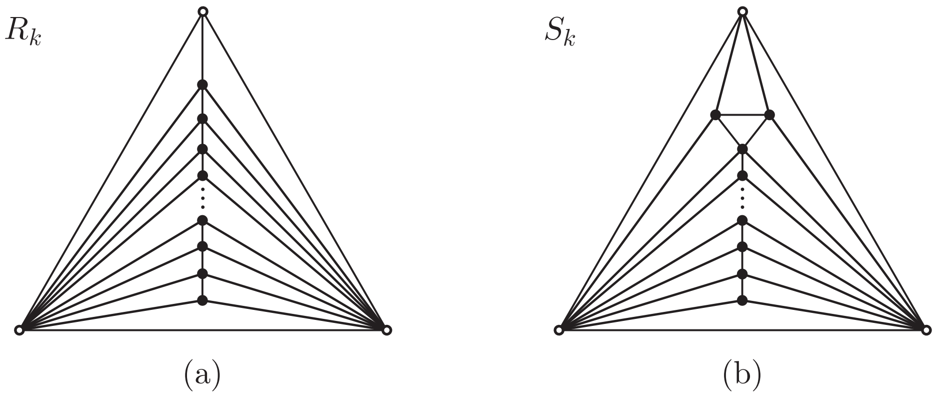


Abb. 3.19.

Folgendes ist leicht einzusehen. Jeder Knoten von Y hat in G_k die Valenz mindestens $4k+3$. Weiterhin besteht der Graph $G_k - Y$ aus lauter Komponenten der Ordnung $k-1$. Dadurch enthält jeder zusammenhängende Teilgraph der Ordnung k von G_k einen Knoten von Y. □

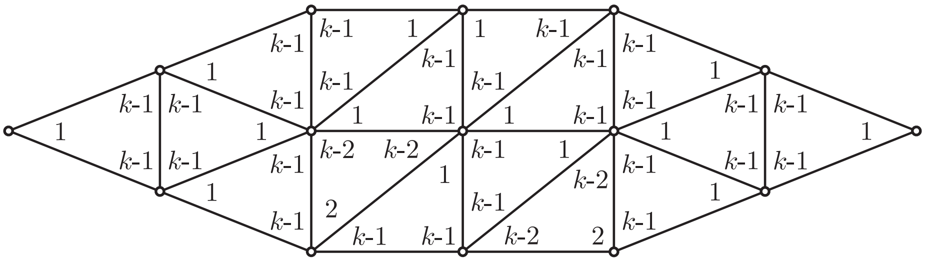


Abb. 3.20.

Die Sätze 3.13 bzw. 4.34 implizieren $\tau_3(4,3;k) \leq 5k-7$ bzw. $\tau_3(4,3;k) \leq 4k+1$. Obwohl es eine ziemlich triviale Folgerung ist, ist die zweite Abschätzung recht gut.

Satz 3.58 ([19])

$$\begin{array}{rrcl} (i) & \tau_3(4,3;1) & = & 5, \\ (ii) & \tau_3(4,3;2) & = & 7, \\ (iii) & \tau_3(4,3;3) & = & 9, \\ (iv) & \tau_3(4,3;k) & = & 4k-1, \quad \textit{für } k \geq 4. \end{array}$$

Beweis. Die Aussagen (i), (ii) und (iii) folgen aus dem Satz 3.13 und Proposition 3.51.

Teil I. Wir zeigen zuerst, daß $\tau_3(4,3;k) \leq 4k-1$ für $k \geq 4$ gilt.
Angenommen, die Ungleichung ist falsch. Dann gibt es ein $k \geq 4$ mit $\tau_3(4,3;k) \geq 4k$. Sei G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung n und maximaler Größe m. Ein Knoten x von G wird *Hauptpunkt* bzw. *Nebenpunkt* genannt, falls $\deg_G(x) \geq 4k$ bzw. $\deg_G(x) \leq 4k-1$.

Genauso wie im Beweis des Satzes 3.57 gelten folgende zwei Eigenschaften.

Eigenschaft 1. *Jeder zusammenhängende Teilgraph von G der Ordnung k enthält einen Hauptpunkt.*

Eigenschaft 2. *G ist eine Triangulation.*

Es seien M der von der Menge der Hauptpunkte in G induzierte Teilgraph und $M_1, \ldots, M_\omega$ ($\omega \geq 1$) seine Komponenten.

Eigenschaft 3. *Es gibt eine Komponente von M (o. B. d. A. sei es M_1), so daß alle anderen Komponenten ($M_2, \ldots, M_\omega$) Teilgraphen von derselben Komponente von $G - M_1$ sind.*

Sei $G^\star$ die Komponente von $G - (M_2 \cup \ldots \cup M_\omega)$, die M_1 als Teilgraphen enthält (wobei $G^\star \notin \mathscr{G}_3(4,3)$ nicht ausgeschlossen ist).

Da wir in G keine Nachbarn eines Hauptpunktes $x \in V(M_1)$ und keine Kanten zwischen zwei Nebenpunkten $y, z \in V(G^\star)$ gelöscht haben, gelten folgende zwei Aussagen:

Eigenschaft 4. *Für jeden Knoten $x \in V(M_1)$ ist $\deg_{G^\star}(x) = \deg_G(x)$.*

Eigenschaft 5. *Jedes r-Eck von $G^\star$, $r \geq 4$, ist nur mit Nebenpunkten inzident.*

$G^\star$ ist ein zusammenhängender planarer Graph, M_1 sein zusammenhängender Teilgraph und aus der Eigenschaft 2 folgt, daß $G^\star_\alpha$ für jede Fläche $\alpha \in F(M_1)$ auch zusammenhängend ist.

Eigenschaft 6. *Für jede Fläche $\alpha \in F(M_1)$ ist $v(G^\star_\alpha) \leq k - 1$.*

Mit den Eigenschaften 3, 4 und 6 folgt aus Lemma 3.54:

Eigenschaft 7. *Für jede Fläche $\alpha \in F(M_1)$ ist $\mathrm{mem}(\alpha) \leq 2k - 4 + \deg_{M_1}(\alpha)$.*

Fall I.A. Sei im weiteren $k \geq 5$. Den Fall $k = 4$ betrachten wir anschließend gesondert.

Ist α ein Dreieck, so kann man die Abschätzung für $\mathrm{mem}(\alpha)$ aus der Eigenschaft 7 mit Hilfe von Lemma 3.15 noch verbessern.

Lemma 3.59 *Für jedes Dreieck $\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M_1)$ ist $\mathrm{mem}(\alpha) \leq 2k - 3$.*

Beweis von Lemma 3.59. Ist $v(G^\star_\alpha) \leq 3$, so ist $\mathrm{mem}(\alpha) \leq 6 < 2k - 3$. Sei also weiter $v(G^\star_\alpha) \geq 4$ und wir unterscheiden folgende zwei Fälle.

Fall 1. Ist $G^\star_@$ keine Triangulation, so ist $e(G^\star_\alpha) \geq v(G^\star_\alpha)$, da $G^\star_\alpha$ zusammenhängend ist und wegen der Eigenschaft 5 einen Kreis enthält. Der Graph $G^\star_@$ hat dann $v(G^\star_@) = v(G^\star_\alpha) + 3$ Knoten und $e(G^\star_@) \leq v(G^\star_@) - 7 = 3v(G^\star_\alpha) + 2$ Kanten, was mit der Eigenschaft 6 bedeutet: $\mathrm{mem}(\alpha) = e(G^\star_@) - 3 - e(G^\star_\alpha) \leq 3v(G^\star_\alpha) + 2 - 3 - v(G^\star_\alpha) = 2v(G^\star_\alpha) - 1 \leq 2k - 3$.

Fall 2. Ist $G^\star_@$ eine Triangulation, dann ist jeder 1-Knoten von $G^\star_\alpha$ adjazent mit allen drei Knoten x_1, x_2, x_3 (weil $\delta(G) \geq 4$), und das heißt, daß es höchstens einen 1-Knoten in $G^\star_\alpha$ gibt.

2a. Gibt es einen 1-Knoten in $G^\star_\alpha$, so ist o. B. d. A. $\mathrm{mem}(x_1 : \alpha) = 1$ und nach Lemma 3.15 gilt $\mathrm{mem}(x_2 : \alpha), \mathrm{mem}(x_3 : \alpha) \leq k-2$, was insgesamt $\mathrm{mem}(\alpha) \leq 2k-3$ ergibt.

2b. Gibt es keinen 1-Knoten in $G^\star_\alpha$, dann ist $e(G^\star_\alpha) \geq v(G^\star_\alpha) + 1$, da $G^\star_\alpha$ kein Baum und kein Kreis ist (was die einzigen zusammenhängenden Graphen mit $e \leq v$ sind). Der Graph $G^\star_@$ hat also $v(G^\star_@) = v(G^\star_\alpha) + 3$ Knoten und $e(G^\star_@) = v(G^\star_@) - 6 = 3v(G^\star_\alpha) + 3$ Kanten. Mit der Eigenschaft 6 bedeutet das schließlich: $\mathrm{mem}(\alpha) = e(G^\star_@) - 3 - e(G^\star_\alpha) \leq 3v(G^\star_\alpha) + 3 - 3 - (v(G^\star_\alpha) + 1) = 2v(G^\star_\alpha) - 1 \leq 2k - 3$.
$\square\!\!\rightarrow$

Für die Valenzensumme aller Hauptpunkte von M_1 ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in V(M_1)} \deg_G(x) &= \sum_{x\in V(M_1)} \deg_{G^\star}(x) = \sum_{x\in V(M_1)} \deg_{M_1}(x) + \sum_{\alpha\in F(M_1)} \mathrm{mem}(\alpha) \\
&\le 2e(M_1) + \sum_{\substack{\alpha\in F(M_1)\\ \deg_{M_1}(\alpha)\ge 4}} \Big(2k-4+\deg_{M_1}(\alpha)\Big) + \sum_{\substack{\alpha\in F(M_1)\\ \deg_{M_1}(\alpha)=3}} \Big(2k-4+\deg_{M_1}(\alpha)-2\Big) \\
&= 2e(M_1) + \sum_{i\ge 3} \deg_{M_1}(\alpha) - 2f_3(M_1) + (2k-4)\cdot \sum_{i\ge 3} f_i(M_1) \\
&= 2e(M_1) + 5\sum_{i\ge 3} \deg_{M_1}(\alpha) - 4\sum_{i\ge 3} \deg_{M_1}(\alpha) - 2f_3(M_1) + (2k-4)\cdot f(M_1) \\
&= 2e(M_1) + 10e(M_1) - 4\sum_{i\ge 3} i\cdot f_i(M_1) - 2f_3(M_1) + (2k-4)\cdot f(M_1) \\
&= 12\Big(v(M_1)+f(M_1)-2\Big) - 4\sum_{i\ge 3} i\cdot f_i(M_1) - 2f_3(M_1) + (2k-4)\cdot f(M_1) \\
&= 12v(M_1) - 24 + 12\sum_{i\ge 3} f_i(M_1) - 4\sum_{i\ge 3} i\cdot f_i(M_1) - 2f_3(M_1) + (2k-4)\cdot f(M_1) \\
&= 12v(M_1) - 24 - 4\sum_{i\ge 3}(i-3)\cdot f_i(M_1) - 2f_3(M_1) + (2k-4)\cdot f(M_1) \\
&\le 12v(M_1) - 24 - 2\sum_{i\ge 4} f_i(M_1) - 2f_3(M_1) + (2k-4)\cdot f(M_1) \\
&= 12v(M_1) - 24 + (2k-6)\cdot f(M_1) \\
&\le 12v(M_1) - 24 + (2k-6)\cdot \Big(2v(M_1)-4\Big) \\
&= 4k\cdot v(M_1) - 8k.
\end{aligned}$$

Es gibt also einen Hauptpunkt von M_1 der Valenz höchstens $\frac{4k\cdot v(M_1)-8k)}{v(M_1)} = 4k - \frac{8k}{v(M_1)} < 4k$, Widerspruch.

Fall I.B. Sei nun $k = 4$ und wir beenden damit den Teil 1 des Beweises. Für jedes Dreieck $\alpha = x_1x_2x_3 \in F(M_1)$ gilt nach Lemma 3.15: $\mathrm{mem}(x_i : \alpha) \le 2$. In jedem r-Eck $\alpha \in F(M_1)$, $r \ge 4$, gibt es höchstens 2 Knoten mit $\mathrm{mem}(x : \alpha) = 3$ (bei 3 solchen Knoten wäre $K_{3,3} \subseteq G^\star$, Widerspruch zur Planarität) und für jeden anderen Knoten $y \in V(\alpha)$ ist $\mathrm{mem}(y : \alpha) \le 2$. Jeder Hauptpunkt x von G hat $\deg_G(x) \ge 4k = 16$. D.h., es gibt keinen 3-Knoten von M_1, für jeden 4-Knoten x von M_1 und jede mit ihm inzidente Fläche $\alpha \in F(M_1)$ ist $\mathrm{mem}(x : \alpha) = 3$, und schließlich gibt es für jeden 5-Knoten x von M_1 eine mit ihm inzidente Fläche $\alpha \in F(M_1)$ mit $\mathrm{mem}(x : \alpha) = 3$.

Für die Anzahl A der Paare (x, α) mit $x \in V(\alpha)$ und $\mathrm{mem}(x : \alpha) = 3$ haben wir also

$$2\sum_{i\ge 4} f_i(M_1) \ge A \ge 4v_4(M_1) + v_5(M_1),$$

andererseits folgt aus Lemma 1.17 (ii) mit $v_3(M_1) = 0$ folgendes:

$$4v_4(M_1) + v_5(M_1) \ge 2v_4(M_1) + v_5(M_1) \quad =$$

$$= \quad 12 + \sum_{i \geq 6} (i-6) \cdot v_i(M_1) + 2 \sum_{i \geq 3} (i-3) \cdot f_i(M_1) > 2 \sum_{i \geq 4} f_i(M_1),$$

und das ist ein Widerspruch.

Teil II. Um $\tau_3(4,3;k) \geq 4k-1$ für $k \geq 3$ zu zeigen, konstruieren wir einen Graphen $G_k \in \mathscr{G}_3(4,3)$ der Ordnung $\geq k$, in welchem jeder zusammenhängende Teilgraph der Ordnung k einen Knoten x mit $\deg_{G_k}(x) \geq 4k-1$ enthält.

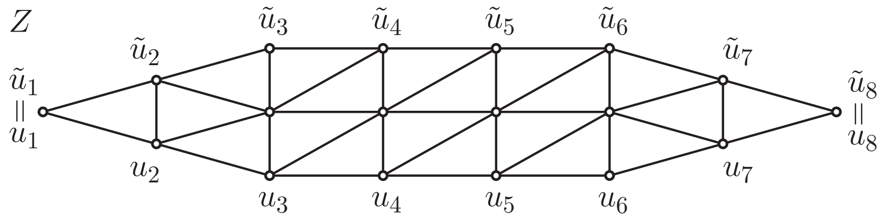


Abb. 3.21.

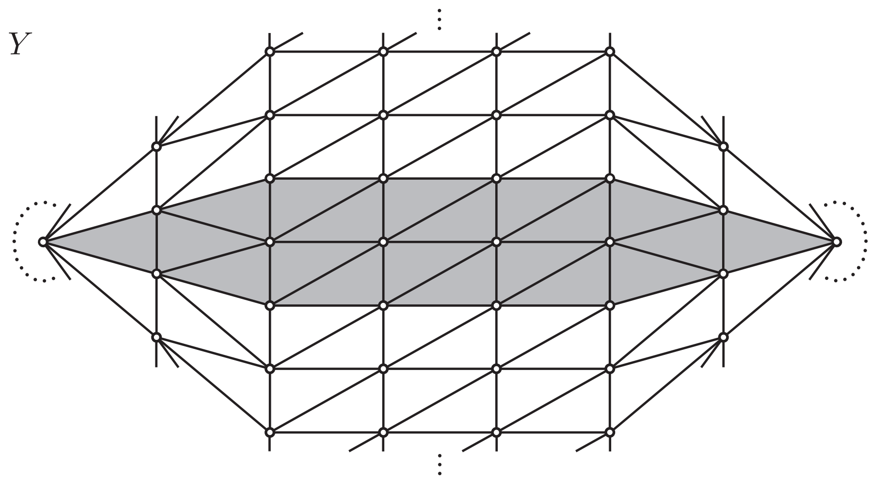


Abb. 3.22.

Sei Y die Triangulation, die aus $2k$ Kopien $(Z_1, \ldots, Z_{2k})$ von Z (Abb. 3.21) durch Identifizieren der Wege $Q := [\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_8]$ von Z_i $(i = 1, \ldots, 2k)$ und $P := [u_1, \ldots, u_8]$ von Z_{i+1} (Indexarithmetik modulo $2k$) entsteht. Y enthält zwei $(2k)$-Knoten und außerdem nur 5- und 6-Knoten (Abb. 3.22). Weiterhin betrachten wir die Triangulationen R_k und S_k (Abb. 3.23). Für $k \geq 5$ besteht R_k aus dem Graphen Q_{k-1} (Abb. 3.7 (a)), einem Dreieck und Kanten, die sie verbinden (Abb. 3.23 (a)), S_k $(k \geq 7)$ enthält im Dreieck den Graphen $Q_{k-1} + u_1u_3$ (Abb. 3.23 (b)). Die äußeren Flächen von R_k bzw. S_k sind also Dreiecke vom Typ $(\geq 1, k-2, k-2)$ bzw. $(2, k-3, \geq k-3)$. Jedes Dreieck $xyz \in F(Y)$ ersetzen wir nun durch die Konfiguration R_k bzw. S_k und bezeichnen den neuen Graphen mit G_k. Für eine

Kopie von Z zeigt die Abb. 3.24 (durch die Zahlen in den Ecken, die für denjenigen Knoten die (untere Beschränkung der) Anzahl seiner Nachbarn in dieser Fläche angeben) die ersetzende Konfiguration und ihre Orientierung.

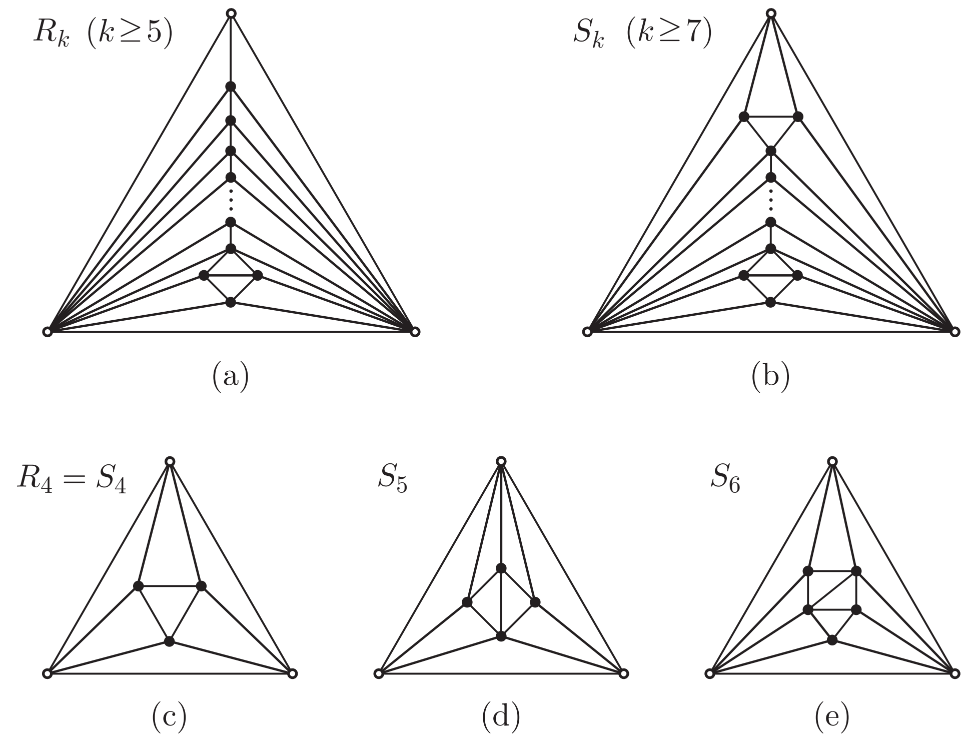


Abb. 3.23.

Alle Knoten von Y haben in G_k die Valenz mindestens $4k-1$ und da der Graph $G_k - Y$ aus lauter Komponenten der Ordnung $k-1$ besteht, enthält jeder zusammenhängende Teilgraph der Ordnung k von G_k einen Knoten von Y. $\square$

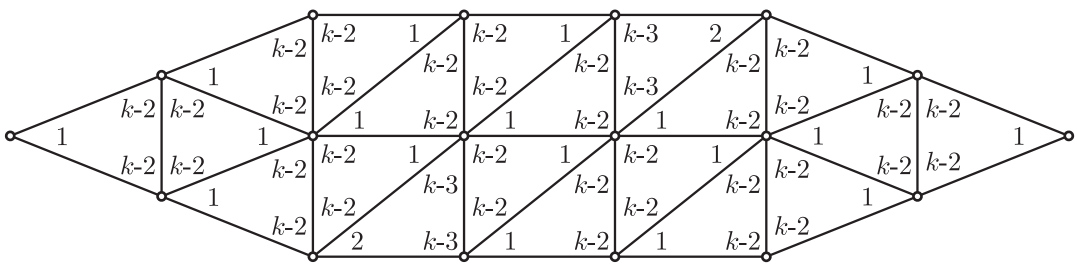


Abb. 3.24.

Es ist uns gelungen, die Zahl τ in den Klassen $\mathscr{G}_3(3,4)$ und $\mathscr{G}_3(3,5)$ abzuschätzen. Die Beweise basieren auf den Ideen aus dem Beweis des Satzes 3.58, sie sind jedoch zu lang und sehr technisch, so daß wir auf ihre Darstellung hier verzichten.

Bemerkung 3.60

$$\begin{array}{llcll} (i) & & \tau_3(3,4;k) & \leq\ 2k+2, & \textit{für } k \geq 6, \\ (ii) & 2k-1\ \leq & \tau_3(3,4;k), & & \textit{für } k \geq 6. \end{array}$$

Die beste bekannte obere Abschätzung von $\tau_3(5,3;k)$ folgt mit Proposition 4.28 aus dem Satz 4.35. Danach geben wir auch eine untere Schranke an.

Folgerung 3.61

$$\tau_3(5,3;k) \leq 2k+3, \ \textit{für } k \geq 5.$$

Satz 3.62

$$2k-3 \leq \tau_3(5,3;k) \ \textit{für } k \geq 12.$$

Beweis. Wir konstruieren wie folgt einen Graphen $G_k \in \mathscr{G}_3(3,3)$ in dem ein beliebiger zusammenhängender Teilgraph H der Ordnung k einen Knoten $x \in V(H)$ mit $\deg_{G_k}(x) \geq 2k-3$ enthält.

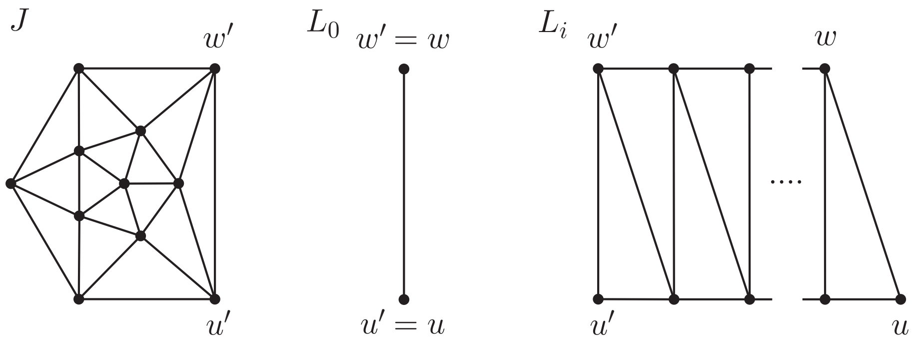


Abb. 3.25.

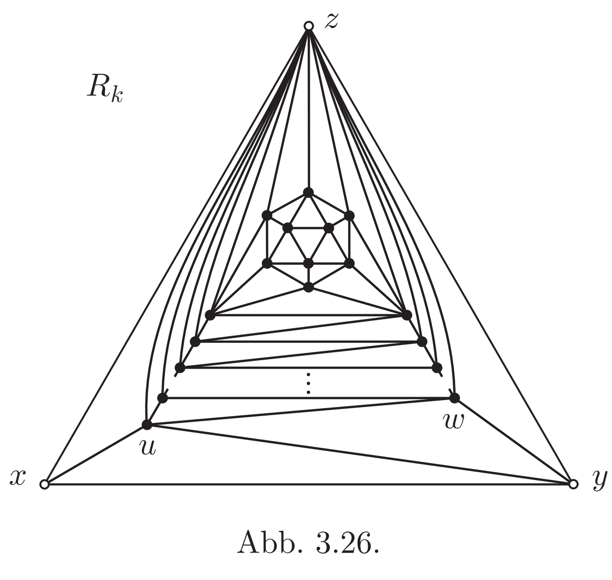


Abb. 3.26.

Der Graph L_i, $i \geq 0$, besteht aus einer Kette von i benachbarten Dreiecken (Abb. 3.25) und der Graph Q_k entsteht aus J (Abb. 3.25) und L_{k-12} durch Identifizierung der Kanten $u'w' \in E(J)$ und $u'w' \in E(L_{k-12})$. Die äußere Fläche β von Q_k ist ein $(k-7)$-Eck, das für $k \geq 14$ mit jeweils einem 2-, 3-, 5- und 6-Knoten und $k-11$ 4-Knoten inzident ist (für $k = 12$ bzw. $k = 13$ ist β vom Typ (4,4,4,4,4) bzw. (2,5,4,4,4,5)). In ein Dreieck xyz fügen wir den Graphen Q_k ein und dazu die Kanten tz, für alle Knoten $t \in V(\beta)$, und xu, yu, yw, wobei u der 2- und w der 3-Knoten von Q_k ist. Der neue Graph wird R_k genannt (Abb. 3.26). Schließlich ersetzen wir jede Fläche von Y (Abb. 3.18) durch R_k und erhalten so den Graphen G_k. Die Abb. 3.27 bestimmt die Orientierung der ersetzenden Figuren R_k in Z (die Triangulation Y besteht aus $2k+2$ Kopien von Z).

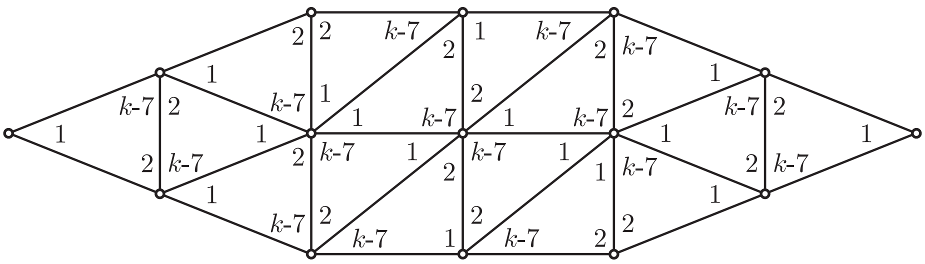


Abb. 3.27.

Da sämtliche Komponenten von $G_k - Y$ die Ordnung $k-1$ haben, enthält jeder zusammenhängende Teilgraph der Ordnung k von G_k einen Knoten von Y, also einen Knoten der Valenz (in G) mindestens $2k-3$. $\square$

Bemerkung 3.63

$$\begin{array}{llcll} (i) & & \tau_3(3,5;k) \leq \frac{4}{3}k - 2, & \text{für } k \geq 6, \\ (ii) & \frac{2}{3}k - 10 \leq & \tau_3(3,5;k), & & \text{für } k \geq 38. \end{array}$$

3.2.3 $c = 4$ und $c = 5$

In $\mathscr{G}_4(\delta, 3)$ liegen $\tau(k)$ und $\varphi(P_k)$ dicht beieinander, dasselbe kann man auch bei 5-zusammenhängenden Graphen vermuten. Aus den Abchätzungen der Differenz $\varphi - \tau$ und bekannten Schranken für φ aus dem Abschnitt 3.1 folgen dann die Schranken für τ.

Satz 3.64 (Hexel & Walther [30])

$$\begin{array}{lrcll} (i) & \varphi_4(4,3;P_k) - \tau_4(4,3;k) & \leq & 1, & \text{für } k \geq 2, \\ (ii) & \varphi_4(5,3;P_k) - \tau_4(5,3;k) & \leq & 3, & \text{für } k \geq 2, \\ (iii) & \varphi_5(5,3;P_k) - \tau_5(5,3;k) & \leq & \frac{k+7}{3}, & \text{für } k \geq 2, \end{array}$$

Folgerung 3.65

$$2k+1 \leq \tau_4(4,3;k) \leq 2k+3, \text{ für } k \geq 2.$$

Folgerung 3.66

$$k-2 \leq \tau_4(5,3;k) \leq k+4, \text{ für } k \geq 2.$$

Folgerung 3.67

$$\lfloor \tfrac{k+1}{3} \rfloor \quad \leq \quad \tau_5(5,3;k) \quad \leq \quad k+4, \quad \text{für } k \geq 2.$$

Kurzer Überblick über die Ergebnisse dieses Abschnittes:

c	δ	ϱ	$\tau(\mathscr{G},k) = \tau(\mathscr{G}_c(\delta,\varrho),k)$
3	3	3	$\tau(\mathscr{G},2) = 10$ $\tau(\mathscr{G},k) = 4k+3, \quad k \geq 3$
3	4	3	$\tau(\mathscr{G},2) = 7$ $\tau(\mathscr{G},3) = 9$ $\tau(\mathscr{G},k) = 4k-1, \quad k \geq 4$
3	5	3	$\tau(\mathscr{G},k) \leq 2k+3, \quad k \geq 5$ $2k-3 \leq \tau(\mathscr{G},k), \quad k \geq 12$
4	4	3	$\tau(\mathscr{G},k) \leq 2k+3, \quad k \geq 2$ $2k+1 \leq \tau(\mathscr{G},k), \quad k \geq 2$
4	5	3	$\tau(\mathscr{G},k) \leq k+4, \quad k \geq 2$ $k-2 \leq \tau(\mathscr{G},k), \quad k \geq 2$
5	5	3	$\tau(\mathscr{G},k) \leq k+4, \quad k \geq 2$ $\lfloor \frac{k+1}{3} \rfloor \leq \tau(\mathscr{G},k), \quad k \geq 2$

Tab. 3.2.

Kapitel 4

Teilgraphen mit beschränktem Gewicht

Im letzten Kapitel haben wir uns mit der Maximalvalenz eines konkreten Teilgraphen (bzw. eines beliebigen zusammenhängenden Teilgraphen der Ordnung k) in einem Graphen aus einer bestimmten Klasse beschäftigt. Die Ergebnisse von Kotzig (2.7 – 2.9) wurden jedoch im Original als Aussagen über die Summe der Valenzen beider Knoten von P_2 formuliert (siehe den Satz 4.7). Das bringt uns zu der Frage, ob man analoge Resultate zum Kapitel 3 auch für das Gewicht eines Teilgraphen gewinnen kann.

4.1 Teilgraphen vorgegebener Struktur

Definition 4.1 *Seien H ein zusammenhängender planarer Graph und $\mathscr{G}$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen, die einen Obergraphen von H enthält. Mit $w(\mathscr{G}, H)$ bezeichnen wir die kleinste natürliche Zahl, so daß jeder Graph $G \in \mathscr{G}$ folgende Bedingung erfüllt: Ist $H \subseteq G$, so enthält G einen zu H isomorphen Teilgraphen K mit*

$$W_G(K) = \sum_{x \in V(K)} \deg_G(x) \leq w(\mathscr{G}, H).$$

Existiert keine solche Zahl, so sei $w(\mathscr{G}, H) := \infty$.

Es folgt eine einfache Eigenschaft von w und danach einige Aussagen über den Zusammenhang zwischen w und φ.

Proposition 4.2 *Seien $\mathscr{G}_2$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen, $\mathscr{G}_1$ eine Teilmenge von $\mathscr{G}_2$ und H ein zusammenhängender planarer Graph, der ein Teilgraph von mindestens einem Graphen aus $\mathscr{G}_1$ ist. Dann gilt:*

$$w(\mathscr{G}_1, H) \leq w(\mathscr{G}_2, H).$$

Proposition 4.3 *Seien $\mathscr{G}$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen und H ein zusammenhängender planarer Graph, der ein Teilgraph von einem Graphen aus $\mathscr{G}$ ist. Dann gilt:*

$$\begin{array}{ll} (i) & \varphi(\mathscr{G}, H) \leq w(\mathscr{G}, H), \\ (ii) & w(\mathscr{G}, H) \leq v(H) \cdot \varphi(\mathscr{G}, H). \end{array}$$

Die letzten zwei Ungleichungen implizieren folgende Äquivalenz.

Proposition 4.4 *Ein Graph H ist leicht in der Menge $\mathscr{G}$ genau dann, wenn $w(\mathscr{G}, H) < \infty$.*

Wir schreiben im weiteren $w_c(\delta, \varrho; H)$ statt $w(\mathscr{G}_c(\delta, \varrho), H)$.

Proposition 4.5 *Für einen zusammenhängenden planaren Graphen H ist*

$$\varphi_c(\delta, \varrho; H) \leq w_c(\delta, \varrho; H) - (v(H) - 1) \cdot \delta.$$

Die Ausgangspunkte für die weiteren Untersuchungen auf diesem Gebiet waren folgende zwei Aussagen. Die erste folgt aus Proposition 3.4 und die zweite ist die Originalaussage von Kotzig unter Verwendung der neuen Bezeichnung (vergleiche mit 2.7, 2.8, 2.9 und 3.5).

Proposition 4.6

$$\begin{array}{lrcll} (i) & w_c(\delta, \varrho; P_1) & = & 5, & \text{für } \varrho = 3, \\ (ii) & w_c(\delta, \varrho; P_1) & = & 3, & \text{für } \varrho \in \{4, 5\}. \end{array}$$

Satz 4.7 (Kotzig [42])

$$\begin{array}{lrcl} (i) & w_3(3, 3; P_2) & = & 13, \\ (ii) & w_3(4, 3; P_2) & = & 11, \\ (iii) & w_3(5, 3; P_2) & = & 11. \end{array}$$

4.1.1 $c = 3$

Mit Proposition 4.27 folgt aus dem Satz 4.32 der genaue Wert w für einen 3-Weg.

Folgerung 4.8

$$w_3(3, 3; P_3) = 21.$$

Der Satz 3.11 mit Proposition 4.3 (ii) impliziert $w_3(3, 3; P_k) \leq 5k^2$. Diese Schranke wurde mit dem nächsten Satz fast halbiert.

Satz 4.9 (Madaras [47])

$$w_3(3, 3; P_k) \leq \tfrac{5}{2}k(k + 1), \text{ für } k \geq 4.$$

Alle in dieser Arbeit erwähnten Werte bzw. untere Schranken von φ, τ und σ (siehe Definition 4.24) und einige von w sind lineare Funktionen der Ordnung des Teilgraphen. Der nächste Satz und seine Folgerung zeigen, daß $w_3(3,3;P_k) \geq O(k \log_2 k)$ gilt.

Satz 4.10 ([22]) *Für $k \geq 4$ und $t = t(k) := \lfloor \log_2 k \rfloor - 1$ ist*

$$3k - 6 + \left(3 - 3t + 5\left\lfloor \tfrac{k}{2^t} \right\rfloor\right)2^t + 3\sum_{i=0}^{t-1}\left(\left\lfloor \tfrac{k}{2^{i+1}} \right\rfloor + i\right)2^i \leq w_3(3,3;P_k).$$

Beweis. Es seien $k \geq 4$ eine natürliche Zahl, $T_0 := K(H_{20})$ der Kleetop des Ikosaedergraphen und T_1 der Graph, der aus dem Dodekaedergraphen H_{12} entsteht, in dem wir jede Fläche durch die Konfiguration Y (Abb. 4.1) ersetzen.

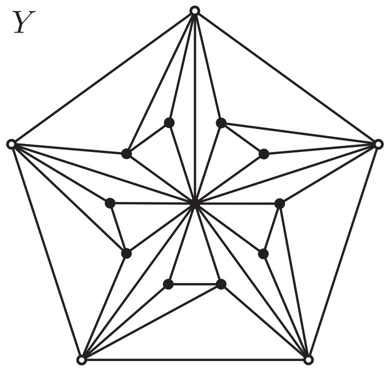


Abb. 4.1.

Weiterhin definieren wir

$$l = l(k) := \left\lfloor \log_2 \tfrac{k}{3} \right\rfloor \text{ und } n = n(k) := \left\lfloor \tfrac{k}{2^t} \right\rfloor - 2.$$

Außerdem sei $b(m) := \max\{r \mid m \equiv 0 \pmod{2^r}\}$ die Vielfachheit der Primzahl 2 in der Primzahlzerlegung einer natürlichen Zahl m. Es ist leicht einzusehen, daß das Gewicht eines beliebigen k-Weges in $K^t(T_0)$ mindestens $a_0(k)$ ist, wobei a_0 wie folgt rekursiv definiert ist:

$$a_0(k) := \begin{cases} a_0(k-1) + 3 \cdot 2^t + 5 \cdot 2^t, & \text{für } k = 2^{t+1} \\ a_0(k-1) + 3b(k - 2^{t+1}), & \text{für } k \in [2^{t+1}+1, 2^{t+2}-1]. \end{cases}$$

Lösen wir die Rekursionsformel von $a_0(k)$ auf, so erreichen wir folgende explizite Bildungsvorschrift

$$a_0(k) = 3k + 2^{t+2} + 3\sum_{i=0}^{t} \left\lfloor \tfrac{k}{2^{i+1}} \right\rfloor 2^i.$$

Auf ähnliche Weise ist es möglich das Gewicht eines k-Weges in $K^l(T_1)$ mit

$$a_1(k) = 3k + \left(9 + \left\lfloor \tfrac{k}{2^l} \right\rfloor\right)2^l + 3\sum_{i=0}^{l-1} \left\lfloor \tfrac{k}{2^{i+1}} \right\rfloor 2^i$$

von unten abzuschätzen. Schließlich können wir es mit der gemeinsamen Funktion $a(k) := \max\{a_0(k), a_1(k)\}$ zusammenfassen: jeder k-Weg in $K^t(T_n)$ hat Gewicht mindestens

$$a(k) = 3k - 6 + \Big(3 - 3t + 5\Big\lfloor \frac{k}{2^t} \Big\rfloor\Big)2^t + 3\sum_{i=0}^{t-1}\Big(\Big\lfloor \frac{k}{2^{i+1}} \Big\rfloor + i\Big)2^i.$$

k	t	l	n	a	a_0	Gradfolge von $P_k \subseteq T_0$	a_1	Gradfolge von $P_k \subseteq T_1$
2	0		0	13	13	3,10		
3	0	0	1	21	16	3,10,3	21	3,15,3
4	1	0	0	32	32	3,6,3,20	25	3,15,3,4
5	1	0	0	35	35	3,6,3,20,3	29	4,3,15,3,4
6	1	1	1	51	41	3,6,3,20,3,6	51	3,6,3,30,3,6
7	1	1	1	54	44	3,6,3,20,3,6,3	54	3,6,3,30,3,6,3
8	2	1	0	76	76	3,6,3,12,3,6,3,40	62	3,6,3,30,3,6,3,8
9	2	1	0	79	79	3,6,3,12,3,6,3,40,3	65	3,6,3,30,3,6,3,8,3
10	2	1	0	85	85	3,6,3,12,3,6,3,40,3,6	73	8,3,6,3,30,3,6,3,8,3
11	2	1	0	88	88	3,6,3,12,3,6,3,40,3,6,3	76	3,8,3,6,3,30,3,6,3,8,3
12	2	2	1	120	100	3,6,3,12,3,6,3,40,3,6,3,12	120	3,6,3,12,3,6,3,60,3,6,3,12
13	2	2	1	123	103	3,6,3,12,3,6,3,40,3,6,3,12,3	123	3,6,3,12,3,6,3,60,3,6,3,12,3
14	2	2	1	129	109	3,6,3,12,3,6,3,40,3,6,3,12,3,6	129	3,6,3,12,3,6,3,60,3,6,3,12,3,6
15	2	2	1	132	112	3,6,3,12,3,6,3,40,3,6,3,12,3,6,3	132	3,6,3,12,3,6,3,60,3,6,3,12,3,6,3
16	3	2	0	176	176	3,6,3,12,3,6,3,24,3,6,3,12,3,6,3,80	148	3,6,3,12,3,6,3,60,3,6,3,12,3,6,3,16

Tab. 4.1.

Die Tabelle 4.1 zeigt ausführlich die Fälle $k = 2, \ldots, 16$. In der 7. und 9. Spalte ist für einen k-Weg $P_k = [x_1, \ldots, x_k] \subseteq T_i$ $(i \in \{0,1\})$ mit dem minimalen Gewicht die Folge $\deg_{T_i}(x_1), \ldots, \deg_{T_i}(x_k)$ angegeben. $\square$

Folgerung 4.11

$$k \log_2 k \leq w_3(3,3;P_k), \text{ für } k \geq 4.$$

Beweis. Die Abschätzung ist einfach zu zeigen.

$$\begin{aligned}
a(k) &\geq 3k - 6 + \Big(3 - 3t + 5\frac{k}{2^t} - 5\Big)2^t + 3\sum_{i=0}^{t-1}\Big(\frac{k}{2^{i+1}} - 1 + i\Big)2^i \\
&= 3k - 6 - 2\cdot 2^t - 3t\cdot 2^t + 5k + 3\sum_{i=0}^{t-1}\Big(\frac{k}{2} + (i-1)2^i\Big) \\
&= 8k - 6 - 2\cdot 2^t - 3t\cdot 2^t + \tfrac{3}{2}kt + 3\sum_{i=0}^{t-1}(i-1)2^i \\
&= 8k - 6 - 2\cdot 2^t - 3t\cdot 2^t + \tfrac{3}{2}kt + 3t\cdot 2^t - 9\cdot 2^t + 9 \\
&= 8k + 3 - 11\cdot 2^t + \tfrac{3}{2}kt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq 8k + 3 - 11 \cdot 2^{(\log_2(k)-1)} + \tfrac{3}{2}k(\log_2(k) - 2) \\
&= 8k + 3 - \tfrac{11}{2}k + \tfrac{3}{2}k \log_2 k - 3k \\
&= 3 - \tfrac{1}{2}k + \tfrac{3}{2}k \log_2 k \geq k \log_2 k. \quad \square
\end{aligned}$$

In der Menge $\mathscr{G}_3(4,3)$ wurde das minimale Gewicht nur für den 3-Weg bestimmt. Die beste obere Schranke für $w_3(4,3;P_k)$ ist $\frac{5}{2}k(k+1)$ aus dem Satz 4.9.

Satz 4.12 (Borodin [11])

$$w_3(4,3;P_3) = 17.$$

Satz 4.13 (Mohar [50])

$$\tfrac{9}{16}k \log_2 k \leq w_3(4,3;P_k), \ \textit{für } k \geq 4.$$

Wie schon aus dem Kapitel 3 bekannt ist, gibt es in der Menge $\mathscr{G}_3(5,3)$ mehrere leichte Graphen, jedoch ist die Zahl w nur für einige von ihnen bekannt. Aus dem Satz 4.12 folgt $w_3(5,3;P_3) \leq 17$, die umgekehrte Ungleichung folgt mit der Proposition 4.5 aus dem Satz 3.6. Für $w_3(5,3;P_k)$ haben wir dieselbe obere Abschätzung wie bei $w_3(\delta,3;P_k)$ mit $\delta \in \{3,4\}$.

Folgerung 4.14

$$w_3(5,3;P_3) = 17.$$

Satz 4.15 (Jendroľ & Madaras [35])

$$w_3(5,3;P_4) = 23.$$

Satz 4.16 (Mohar [50])

$$\tfrac{3}{10}k \log_2 k \leq w_3(5,3;P_k), \ \textit{für } k \geq 4.$$

Satz 4.17 (Borodin [5])

$$w_3(5,3;C_3) = 17.$$

Satz 4.18 (Jendroľ & Madaras [35])

$$w_3(5,3;K_{1,3}) = 23.$$

Satz 4.19 (Borodin & Woodall [14])

$$w_3(5,3;K_{1,4}) = 30.$$

4.1.2 $c = 4$ und $c = 5$

Den nächsten Satz von Mohar präsentieren wir auch mit seinem kurzen und eleganten Beweis.

Satz 4.20 (MOHAR [50]) *Seien $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\mathscr{G}$ die Menge der hamiltonschen planaren Graphen. Dann gilt*

$$w(\mathscr{G}, P_k) = 6k - 1.$$

Beweis. Sei $G \in \mathscr{G}$ ein hamiltonscher planarer Graph der Ordnung k und sei $C = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ mit $n = v(G)$ sein Hamiltonkreis. Für $i = 1, \dots, n$ sei Q_i der k-Weg $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]$ (Indexarithmetik modulo n). Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{W}_G(Q_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in V(Q_i)} \deg_G(x) = k \sum_{x \in V(G)} \deg_G(x)$$

$$= k \cdot 2e(G) \leq 2k(3v(G) - 6) = 6k \cdot v(G) - 12k,$$

es gibt also einen Weg Q_i mit $\mathrm{W}_G(Q_i) \leq \frac{6k \cdot v(G) - 12k}{v(G)} = 6k - \frac{12k}{v(G)}$ und daraus folgt $w(\mathscr{G}, P_k) \leq 6k - 1$.

Wir betrachten nun den Graphen $G_k = KM^k(H_{20}) \in \mathscr{G}$. Dieser besitzt außer 6-Knoten nur noch zwölf 5-Knoten, die paarweise den Abstand 2^k haben. Für jeden k-Weg P_k in G_k ist dann entweder $\mathrm{W}_{G_k}(P_k) = 6k$, falls er aus lauter 6-Knoten besteht, oder $\mathrm{W}_{G_k}(P_k) = 6k - 1$, falls er einen 5-Knoten enthält, was schließlich $w(\mathscr{G}, P_k) \geq 6k - 1$ ergibt. □

Jeder 4-zusammenhängende planare Graph (und dadurch auch jeder 5-zusammenhängende) ist nach dem Satz 1.8 von Tutte hamiltonsch, und der im Beweis des letzten Satzes betrachtete Graph G_k ist ein Element von $\mathscr{G}_5(5,3) \subseteq \mathscr{G}_4(5,3) \subseteq \mathscr{G}_4(4,3)$. Damit bekommen wir aus dem Satz 4.20 folgende Gleichheiten:

Folgerung 4.21

$$w_4(4, 3; P_k) = 6k - 1.$$

Folgerung 4.22

$$w_4(5, 3; P_k) = 6k - 1.$$

Folgerung 4.23

$$w_5(5, 3; P_k) = 6k - 1.$$

Die Ergebnisse dieses Abschnittes nochmals kompakt:

c	δ	ϱ	$w(\mathscr{G}, H) = w(\mathscr{G}_c(\delta, \varrho), H)$
3	3	3	$w(\mathscr{G}, P_2) = 13$ $w(\mathscr{G}, P_3) = 21$ $w(\mathscr{G}, P_k) \leq \frac{5}{2}k(k+1), \quad k \geq 4$ $k \log_2 k \leq w(\mathscr{G}, P_k) \quad k \geq 4$
3	4	3	$w(\mathscr{G}, P_2) = 11$ $w(\mathscr{G}, P_3) = 17$ $\frac{9}{16}k \log_2 k \leq w(\mathscr{G}, P_k) \quad k \geq 4$
3	5	3	$w(\mathscr{G}, P_2) = 11$ $w(\mathscr{G}, P_3) = 17$ $w(\mathscr{G}, P_4) = 23$ $\frac{3}{10}k \log_2 k \leq w(\mathscr{G}, P_k) \quad k \geq 4$ $w(\mathscr{G}, C_3) = 17$ $w(\mathscr{G}, K_{1,3}) = 23$ $w(\mathscr{G}, K_{1,4}) = 30$
4	4	3	$w(\mathscr{G}, P_k) = 6k - 1, \quad k \geq 1$
4	5	3	$w(\mathscr{G}, P_k) = 6k - 1, \quad k \geq 1$
5	5	3	$w(\mathscr{G}, P_k) = 6k - 1, \quad k \geq 1$

Tab. 4.2.

4.2 Teilgraphen vorgegebener Ordnung

Wir haben uns schon mit der Maximalvalenz eines Teilgraphen und mit dem Gewicht eines konkreten Teilgraphen beschäftigt. In diesem Abschnitt wird das minimale Gewicht eines Teilgraphen gegebener Ordnung in einem Polyedergraphen untersucht. Dies komplettiert die Untersuchungen über die Existenz eines Teilgraphen mit Knoten "kleiner" Valenzen in einem Polyedergraphen.

Definition 4.24 *Seien $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\mathscr{G}$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen mit mindestens einem Graphen der Ordnung $\geq k$. Wir bezeichnen mit $\sigma(\mathscr{G}, k)$ die kleinste natürliche Zahl, so daß jeder Graph $G \in \mathscr{G}$ der Ordnung $\geq k$ einen zusammenhängenden Teilgraphen H der Ordnung k mit*

$$W_G(H) \leq \sigma(\mathscr{G}, k)$$

enthält. Existiert keine solche Zahl, so sei $\sigma(\mathscr{G}, k) := \infty$.

Analog zu der Proposition 3.49 gilt folgendes für σ.

Proposition 4.25 *Seien $j < k$ zwei natürlichen Zahlen, $\mathscr{G}_2$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen und $\mathscr{G}_1$ eine Teilmenge von $\mathscr{G}_2$, die einen Graphen der Ordnung $\geq k$ enthält. Dann gilt:*

$$\begin{array}{ll} (i) & \sigma(\mathscr{G}_1, k) \leq \sigma(\mathscr{G}_2, k), \\ (ii) & \sigma(\mathscr{G}_2, j) \leq \sigma(\mathscr{G}_2, k). \end{array}$$

Die nächsten Eigenschaften sollen die Zusammenhänge zwischen σ und den drei vorher definierten Zahlen φ, τ und w erklären.

Proposition 4.26 *Seien $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\mathscr{G}$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen, die mindestens einen Obergraphen von P_k enthält. Dann gilt:*

$$\sigma(\mathscr{G}, k) \leq w(\mathscr{G}, P_k).$$

Proposition 4.27 *Für $k \in \{1, 2, 3\}$ ist:*

$$\sigma(\mathscr{G}, k) = w(\mathscr{G}, P_k).$$

Proposition 4.28 *Seien $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\mathscr{G}$ eine Menge von zusammenhängenden planaren Graphen, die einen Graphen der Ordnung $\geq k$ enthält. Dann gilt:*

$$\begin{array}{llcl} (i) & \tau(\mathscr{G}, k) & \leq & \sigma(\mathscr{G}, k), \\ (ii) & \sigma(\mathscr{G}, k) & \leq & k \cdot \tau(\mathscr{G}, k). \end{array}$$

Wir schreiben im weiteren $\sigma_c(\delta, \varrho; k)$ statt $\sigma(\mathscr{G}_c(\delta, \varrho), k)$.

Proposition 4.29 *Für jede natürliche Zahl $k \geq 4$ ist*

$$\tau_c(\delta, \varrho; H) \leq \sigma_c(\delta, \varrho; H) - (k-1)\delta.$$

Mit Proposition 4.27 folgen aus Proposition 4.6 bzw. Satz 4.7 die nächsten zwei Aussagen.

Folgerung 4.30

$$\begin{array}{rlcll} (i) & \sigma_c(\delta, \varrho; 1) & = & 5, & \text{für } \varrho = 3, \\ (ii) & \sigma_c(\delta, \varrho; 1) & = & 3, & \text{für } \varrho \in \{4, 5\}. \end{array}$$

Folgerung 4.31

$$\begin{array}{rlcl} (i) & \sigma_3(3, 3; 2) & = & 13, \\ (ii) & \sigma_3(4, 3; 2) & = & 11, \\ (iii) & \sigma_3(5, 3; 2) & = & 11. \end{array}$$

4.2.1 $c = 3$

Außer den exakten Werten σ für die zusammenhängende Teilgraphen der Ordnung 3 und 4, sind hier noch sehr gute Abschätzungen der Zahl $\sigma_3(\delta, 3; k)$ bekannt.

Satz 4.32 (Ando, Iwasaki & Kaneko [2])

$$\begin{array}{rlcl} (i) & \sigma_3(3, 3; 3) & = & 21, \\ (ii) & \sigma_3(3, 3; 4) & = & 29. \end{array}$$

Satz 4.33 (Enomoto & Ota [16])

$$8k - 5 \leq \sigma_3(3, 3; k) \leq 8k - 1, \ \text{für } k \geq 5.$$

Satz 4.34 (Enomoto & Ota [16])

$$8k - 5 \leq \sigma_3(4, 3; k) \leq 8k - 3, \ \text{für } k \geq 5.$$

Satz 4.35 (Enomoto & Ota [16])

$$\sigma_3(5, 3; k) \leq 7k - 2, \ \text{für } k \geq 5.$$

Kapitel 5

Anzahl leichter Teilgraphen

In den vorangegangenen zwei Kapiteln haben wir die lokalen Eigenschaften eines Polyedergraphen G untersucht, nämlich die Existenz eines Teilgraphen von G mit sämtlichen Knoten von "kleiner" Valenz. Dadurch, daß die Existenz nachgewiesen wurde, stellt sich natürlich die Frage nach der Anzahl solcher Teilgraphen in G, was einen breiteren Einblick auf G verschaffen würde. Auskunft über die Anzahl der leichten, paarweise isomorphen Teilgraphen K in jedem Graphen G einer Menge $\mathscr{G}$ von Polyedergraphen, so daß $\Delta_G(K) \leq \varphi(\mathscr{G}, K)$ gilt, geben schon die Sätze 2.5, 2.6, 2.11, 2.12, 2.13 und 2.14.

5.1.1 $c = 3$

Von den nächsten beiden Sätzen ist der erste eine Verallgemeinerung des Satzes 2.14 von Jucovič und der zweite ist eine Verbesserung des gleichen Satzes für eine spezielle Klasse.

Satz 5.1 (Borodin [6]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{M}$ gilt*

$$\begin{aligned} 120 \leq 40e_{3,3} &+ 25e_{3,4} + 16e_{3,5} + 10e_{3,6} + 6\tfrac{2}{3}e_{3,7} + 5e_{3,8} + 2\tfrac{1}{2}e_{3,9} + 2e_{3,10} \\ &+ 16\tfrac{2}{3}e_{4,4} + 11e_{4,5} + 5e_{4,6} + 1\tfrac{2}{3}e_{4,7} \\ &+ 5\tfrac{1}{3}e_{5,5} + 2e_{5,6} \qquad \textit{und KBM.} \end{aligned}$$

Satz 5.2 (Borodin [6]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{T}_3(3)$ gilt*

$$\begin{aligned} 120 \leq 20e_{3,3} &+ 25e_{3,4} + 16e_{3,5} + 10e_{3,6} + 6\tfrac{2}{3}e_{3,7} + 5e_{3,8} + 2\tfrac{1}{2}e_{3,9} + 2e_{3,10} \\ &+ 16\tfrac{2}{3}e_{4,4} + 11e_{4,5} + 5e_{4,6} + 1\tfrac{2}{3}e_{4,7} \\ &+ 5\tfrac{1}{3}e_{5,5} + 2e_{5,6} \qquad \textit{und KBM.} \end{aligned}$$

Der folgende Satz (bewiesen mit großer Hilfe der letzten beiden) ist eine Verbesserung des Satzes 2.14 und gibt die endgültige Lösung des Problems von Grünbaum [26] und Jucovič [41]: *Für jeden Polyedergraphen G gilt die Ungleichung $\sum_{i+j\leq 13} \varepsilon_{i,j} e_{i,j}(G) \geq 120$; man bestimme die bestmöglichen Koeffizienten $\varepsilon_{i,j}$.*

Satz 5.3 ([21]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(3,3)$ gilt*

$$\begin{aligned} 120 \le 20e_{3,3} + {} & 25e_{3,4} + 16e_{3,5} + 10e_{3,6} + 6\tfrac{2}{3}e_{3,7} + 5e_{3,8} + 2\tfrac{1}{2}e_{3,9} + 2e_{3,10} \\ & + 16\tfrac{2}{3}e_{4,4} + 11e_{4,5} + 5e_{4,6} + 1\tfrac{2}{3}e_{4,7} \qquad\qquad (*) \\ & + 5\tfrac{1}{3}e_{5,5} + 2e_{5,6} \qquad \textit{und KBM.} \end{aligned}$$

Beweis. Mit $\varepsilon_{i,j}$ bezeichnen wir den Koeffizienten von $e_{i,j}$ in der Ungleichung $(*)$, außerdem sei $\varepsilon_{i,j} = 0$ für $i = 3$ und $j \ge 11$, $i = 4$ und $j \ge 8$, $i = 5$ und $j \ge 7$, $i \ge 6$ und $j \ge 6$. Weiterhin bezeichnen wir mit $\bar{e}_{i,j}(G)$ die Anzahl der Kanten von G, die mit einem i-Eck und einem j-Eck inzident sind und für eine solche Kante $h \in F(G)$ sei $\varepsilon_G(h) := \varepsilon_{i,j}$. Für den Graphen G sei noch

$$\Sigma(G) := \sum_{i,j} \varepsilon_{i,j}\bar{e}_{i,j} = \sum_{h \in E(G)} \varepsilon_G(h).$$

Das Lemma 1.11 gilt analog für die Menge $\mathscr{M}$, also der zu einer normalen Karte duale Graph ist wieder eine normale Karte. Außerdem ist der folgende Zusammenhang zwischen $e_{i,j}$ und $\bar{e}_{i,j}$ leicht einzusehen

$$\bar{e}_{i,j}(G) = e_{i,j}(D(G)), \text{ für alle } i, j.$$

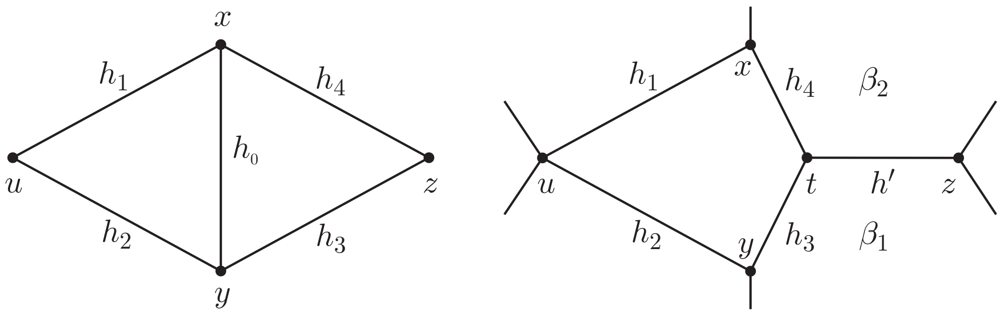
Das berechtigt uns, den Beweis in der dualen Form durchzuführen. Die duale Aussage lautet dann wie folgt: Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(3,3)$ ist $\Sigma(G) \ge 120$. Angenommen, es ist falsch. Sei $G \in \mathscr{G}_3(3,3)$ ein Gegenbeispiel (d. h. $\Sigma(G) < 120$) mit der minimalen Anzahl von Flächen. Für G gilt natürlich die Ungleichung aus dem Satz 5.1, und da sich diese von der Ungleichung $(*)$ nur im Koeffizienten $\varepsilon_{3,3}$ unterscheidet, folgt daraus $\bar{e}_{3,3}(G) > 0$. Sei also $h_0 := xy$ eine mit 2 Dreiecken inzidente Kante von G. Seien u, z die weiteren Knoten und $h_1 := ux$, $h_2 := uy$, $h_3 := yz$, $h_4 := xz$ die weiteren Kanten, die mit diesen Dreiecken inzident sind (Abb. 5.1 (a)).

Wir unterscheiden die folgenden 3 Fälle.

Fall 1. $\deg_G(x) \ge 4$ und $\deg_G(y) \ge 4$.
1.1. $\deg_G(u) = 3$ oder $\deg_G(z) = 3$.
Sei $G^\star := G - h_0$. Mit Hilfe des Satzes 1.1 von Menger ist es leicht einzusehen, daß $G^\star$ 3-zusammenhängend ist und dadurch $G^\star \in \mathscr{G}_3(3,3)$. Für jede Kante $h \in \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ist $\varepsilon_G(h) - \varepsilon_{G^\star}(h) \ge -5$, für alle anderen Kanten h ändert sich $\varepsilon(h)$ nicht, also

$$\Sigma(G) - \Sigma(G^\star) = \varepsilon_G(h_0) + \sum_{i=1}^{4} \Big(\varepsilon_G(h_i) - \varepsilon_{G^\star}(h_i)\Big) \ge 20 + 4 \cdot (-5) = 0.$$

Das bedeutet $\Sigma(G^\star) \le \Sigma(G) < 120$ und wir haben ein Gegenbeispiel mit weniger Flächen als G, Widerspruch.



(a) (b)

Abb. 5.1

1.2. $\deg_G(u) \geq 4$ und $\deg_G(z) \geq 4$.
Sei $G^\star$ der Graph, der aus G durch Einsetzen eines neuen Knoten t in die Fläche xyz, durch Hinzufügen der Kanten tx, ty, tz und durch Entfernen der Kanten xy, xz, yz entsteht (Abb. 5.1 (b)). Ähnlich wie im Fall 1.1 ist auch hier $G^\star$ 3-zusammenhängend, also $G^\star \in \mathscr{G}_3(3,3)$. Seien $h' := tz \in E(G^\star)$, $\beta_1 \in F(G^\star)$ die mit h_3 und h' inzidente Fläche und $\beta_2 \in F(G^\star)$ die Fläche, die mit h_4 und h' inzident ist. Außerdem sei o. B. d. A. $\deg_{G^\star}(\beta_2) \geq \deg_{G^\star}(\beta_1) \geq 4$. Dann gilt

$$\Sigma(G) - \Sigma(G^\star) = \varepsilon_G(h_0) + \sum_{i=3}^{4} \Big(\varepsilon_G(h_i) - \varepsilon_{G^\star}(h_i)\Big) - \varepsilon_{G^\star}(h') + \Delta'$$

mit

$$\Delta' = \sum_{h \in E(G)\setminus\{h_0,h_3,h_4\}} \Big(\varepsilon_G(h) - \varepsilon_{G^\star}(h)\Big).$$

Die Tabelle 5.1 zeigt, daß für alle Kombinationen $\deg_{G^\star}(\beta_1)$, $\deg_{G^\star}(\beta_2)$ die Differenz $\Sigma(G) - \Sigma(G^\star)$ immer ≥ 0 ist, also $\Sigma(G^\star) \leq \Sigma(G) < 120$. Bei der Abschätzung von Δ' beachte man, daß $\bar{e}_{3,3}(G) \leq 5$ (weil G ein Gegenbeispiel ist). Der Graph $G^\star$ ist also ein Gegenbeispiel mit weniger Flächen als in G vorkommen, Widerspruch.

$\deg_G(\beta_1)$	$\deg_G(\beta_2)$	$\varepsilon_G(h_3)$ $-\varepsilon_{G^\star}(h_3)$	$\varepsilon_G(h_4)$ $-\varepsilon_{G^\star}(h_4)$	$\varepsilon_{G^\star}(h')$	Δ'	$\Sigma(G) - \Sigma(G^\star)$
4	4	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$16\frac{2}{3}$	≥ -10	≥ 0
4	5	$3\frac{1}{3}$	14	11	≥ -20	$\geq 6\frac{1}{3}$
4	6	$3\frac{1}{3}$	11	5	≥ -20	$\geq 9\frac{1}{3}$
4	7	$3\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	≥ -20	≥ 10
4	≥ 8	$3\frac{1}{3}$	≥ 0	0	≥ -20	$\geq 3\frac{1}{3}$
5	5	14	14	$5\frac{1}{3}$	≥ -10	$\geq 32\frac{2}{3}$
5	6	14	11	2	≥ -10	≥ 33
5	≥ 7	14	≥ 0	0	≥ -10	≥ 24
≥ 6	≥ 6	≥ 0	≥ 0	0	≥ -10	≥ 10

Tab. 5.1.

Fall 2. O. B. d. A. $\deg_G(x) = 3$ und $\deg_G(y) \geq 4$.
Sei $\beta \in F(G)$ die mit h_1 und h_4 inzidente Fläche von G.
2.1. $\deg_G(\beta) = 3$.
Sei $G^\star := G - x$. Dann ist

$$\Sigma(G) - \Sigma(G^\star) = \varepsilon_G(h_0) + \varepsilon_G(h_1) + \varepsilon_G(h_4) = 3 \cdot \varepsilon_{3,3} = 60 > 0$$

und $G^\star$ ist dadurch ein Gegenbeispiel mit weniger Flächen als G, Widerspruch.
2.2. $\deg_G(\beta) = r \geq 4$.
Wir entfernen den Knoten x aus G, verbinden die Knoten u und z durch die Kante h'' und bezeichnen den neuen Graphen mit $G^\star$. Dann gilt

$$\Sigma(G) - \Sigma(G^\star) = \varepsilon_G(h_0) + \varepsilon_G(h_1) + \varepsilon_G(h_4) - \varepsilon_{G^\star}(h'') + \Delta''$$

mit

$$\Delta'' = \sum_{h \in E(G) \setminus \{h_0, h_1, h_4\}} \Big(\varepsilon_G(h) - \varepsilon_{G^\star}(h)\Big).$$

Es ist leicht einzusehen, daß $\varepsilon_G(h) - \varepsilon_{G^\star}(h) \neq 0$ höchstens für die mit β inzidenten Kanten ist. Aus $\deg_{G^\star}(\beta) = \deg_G(\beta) - 1 = r - 1$ folgt für solche Kanten $\varepsilon_G(h) - \varepsilon_{G^\star}(h) \geq \varepsilon_{3,r} - \varepsilon_{3,r-1}$ und daraus dann $\Delta'' \geq (r-2) \cdot (\varepsilon_{3,r} - \varepsilon_{3,r-1})$. Die Tabelle 5.2 zeigt, daß die Differenz $\Sigma(G) - \Sigma(G^\star)$ immer ≥ 0 ist. Das bedeutet, daß $G^\star$ ein Gegenbeispiel ist und weniger Flächen als G besitzt, Widerspruch.

$\deg_G(\beta)$	$\varepsilon_G(h_1)$ $-\varepsilon_{G^\star}(h_1)$	$\varepsilon_G(h_4)$ $-\varepsilon_{G^\star}(h_4)$	$\varepsilon_{G^\star}(h'')$	Δ''	$\Sigma(G) - \Sigma(G^\star)$
4	25	25	20	$\geq 2 \cdot (-8\frac{1}{3})$	$\geq 33\frac{1}{3}$
5	16	16	25	$\geq 3 \cdot (-9)$	≥ 0
6	10	10	16	$\geq 4 \cdot (-6)$	≥ 0
7	$6\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{3}$	10	$\geq 5 \cdot (-3\frac{1}{3})$	$\geq 6\frac{2}{3}$
8	5	5	$6\frac{2}{3}$	$\geq 6 \cdot (-1\frac{2}{3})$	$\geq 13\frac{1}{3}$
9	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	5	$\geq 7 \cdot (-2\frac{1}{2})$	$\geq 2\frac{1}{2}$
10	2	2	$2\frac{1}{2}$	$\geq 8 \cdot (-\frac{1}{2})$	$\geq 17\frac{1}{2}$
11	0	0	2	$\geq 9 \cdot (-2)$	≥ 0
≥ 12	0	0	0	0	20

Tab. 5.2.

Fall 3. $\deg_G(x) = 3$ und $\deg_G(y) = 3$.
In diesem Fall ist G entweder ein K_4 oder 2-zusammenhängend, was in beiden Fällen ein Widerspruch ist.

Der Graph K_4 zeigt, daß man $\varepsilon_{3,3}$ in $(*)$ nicht verbessern kann. Die Schärfe der anderen Koeffizienten folgt aus den Sätzen 5.1 und 5.2. $\square$

5.1.2 $c = 3$, $\delta = 5$

Grünbaum hat in [25] behauptet, daß für jeden $G \in \mathscr{T}_3(5)$ die Ungleichung $2e_{5,5} + e_{5,6} \geq 60$ gilt, was seinen Satz 2.13 verbessert hätte. Dies wurde aber von Fisk (siehe [27]) durch ein Gegenbeispiel mit $e_{5,5} = 28$ und $e_{5,6} = 0$ widerlegt. Die endgültige Verbesserung des Satzes 2.13 in zwei verschiedene Richtungen ist Jucovič sowie Borodin und Sanders gelungen.

Satz 5.4 (Jucovič [41]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(5,3)$ gilt*

$$2e_{5,5} + e_{5,6} + \tfrac{2}{7}e_{5,7} \geq 60.$$

Daß man keinen Koeffizienten in dieser Ungleichung verbessern kann, hat später Borodin [7] bewiesen.

Satz 5.5 (Borodin & Sanders [13]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(5,3)$ gilt*

$$\tfrac{7}{3}e_{5,5} + e_{5,6} \geq 60 \textit{ und KBM.}$$

Eine analoge Aussage über die Anzahl leichter Dreiecke in $\mathscr{G}_3(5,3)$, die die Sätze 2.10, 2.15 und 2.16 verallgemeinert, stammt von Borodin. Gemeinsam mit Sanders [13] hat er dann auch gezeigt, daß alle Koeffizienten in dieser Ungleichung bestmöglich sind.

Satz 5.6 (Borodin [7]) *Für jeden Graphen $G \in \mathscr{G}_3(5,3)$ gilt*

$$18f_{5,5,5} + 9f_{5,5,6} + 5f_{5,5,7} + 4f_{5,6,6} \geq 144.$$

Literaturverzeichnis

[1] M. Aigner, Graphentheorie - Eine Entwicklung aus dem 4-Farben Problem, Teubner, Stuttgart, 1984.

[2] K. Ando, S. Iwasaki, A. Kaneko, Every 3-connected planar graph has a connected subgraph with small degree sum, Annual Meeting of the Mathematical Society of Japan, 1993. (japanisch)

[3] K. Appel, W. Haken, The existence of unavoidable sets of geographically good configurations, Illinois J. Math. 20 (1976), 218–297.

[4] L. W. Beinecke, R. J. Wilson, Selected topics in graph theory, Academic Press, London, 1978.

[5] O. V. Borodin, Solution of problems of Kotzig and Grünbaum concerning the isolation of cycles in planar graphs, Math. Notes 46 (1989), 835–837 (englische Übersetzung), Mat. Zametki 46 (1989), 9–12. (russisch)

[6] O. V. Borodin, Precise lover bound for the number of edges of minor weight in planar maps, Math. Slovaca 42 (1992), 129–146.

[7] O. V. Borodin, Structural properties of planar maps with the minimal degree 5, Math. Nachr. 158 (1992), 109–117.

[8] O. V. Borodin, Four problems on plane graphs raised by Branko Grünbaum, Graph Struct. Theory 147 (1993), 149–156

[9] O. V. Borodin, Joint extension of two theorems of Kotzig on 3–polytopes, Combinatorica 13 (1993), 121–125.

[10] O. V. Borodin, Triangles with restricted degree sum of their boundary vertices in plane graphs, Discrete Math. 137 (1995), 45–51.

[11] O. V. Borodin, Minimal vertex degree sum of a 3-path in plane maps, Discuss. Math. Graph Theory 17 (1997), 279–284.

[12] O. V. Borodin, Triangulated 3-polytopes without faces of low weight, Discrete Math. 186 (1998), 281–85.

[13] O. V. Borodin, D. P. Sanders, On light edges and triangles in planar graphs of minimum degree five, Math. Nachr. 170 (1994), 19–24.

[14] O. V. Borodin, D. R. Woodall, Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5, Discuss. Math. Graph Theory 18 (1998), 159–164.

[15] R. Diestel, Graphentheorie, Springer, Berlin, 1996.

[16] H. Enomoto, K. Ota, Connected subgraphs with small degree sums in 3-connected planar graphs, J. Graph Theory 30 (1999), 191–203.

[17] L. Euler, Elementa doctrinae solidorum, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol. 4 (1752/53), 109–140.

[18] L. Euler, Demonstratio nunnullarum insignium proprietatum quibus, solida hedris planis inclusa sunt praedita, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol. 4 (1752/53), 140–160.

[19] I. Fabrici, On vertex-degree restricted subgraphs in polyhedral graphs, Discrete Math. 256 (2002), 105–114.

[20] I. Fabrici, E. Hexel, S. Jendrol', H. Walther, On vertex-degree restricted paths in polyhedral graphs, Discrete Math. 212 (2000), 61–73.

[21] I. Fabrici, S. Jendrol', An inequality concerning edges of minor weight in convex 3-polytopes, Discuss. Math. Graph Theory 16 (1996), 81–87.

[22] I. Fabrici, S. Jendrol', Subgraphs with restricted degrees of their vertices in planar 3-connected graphs, Graphs Comb. 13 (1997), 245–250.

[23] I. Fabrici, S. Jendrol', Subgraphs with restricted degrees of their vertices in planar graphs, Discrete Math. 191 (1998), 83–90.

[24] P. Franklin, The four colour problem, Amer. J. Math. 44 (1922), 225–236; oder in N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson (eds.), Graph Theory 1737–1936, Clarendon Press, Oxford (1977).

[25] B. Grünbaum, Acyclic colorings of planar graphs, Israel J. Math. 14 (1973), 390–408.

[26] B. Grünbaum, New views on some old questions of combinatorial geometry, in Theorie Combinatoriae, Proc. Int. Coll. Rome, 1973, Accad. nac. dei lincei Rome (1976), 451–468.

[27] B. Grünbaum, G. C. Shephard, Analogues for tiling of Kotzig's theorem on minimal weights of edges, Ann. Discrete Math. 12 (1982), 129–140.

[28] J. Harant, S. Jendrol', M. Tkáč, On 3-connected plane graphs without triangular faces, J. Comb. Theory, Ser. B 77 (1999), 150–161.

[29] E. Hexel, On light graphs in the class of 4-connected planar graphs, erscheint in Discrete Math.

[30] E. Hexel, H. Walther, On vertex-degree restricted paths in 4-connected planar graphs, Tatra Mt. Math. Publ. 18 (1999), 1–13.

[31] J. Ivančo, The weight of a graph, Ann. Discrete Math. 51 (1992), 113–116.

[32] S. Jendrol', A structural property of convex 3-polytopes, Geom. Dedicata 68 (1997), 91–99.

[33] S. Jendrol', Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations, Discrete Math. 196 (1999), 177–196.

[34] S. Jendrol', Paths with restricted degrees of their vertices in planar graphs, Czechoslovak Math. J. 49 (1999), 481–490.

[35] S. Jendrol', T. Madaras, On light subgraphs in plane graphs with minimum degree five, Discuss. Math. Graph Theory 16 (1996), 207–217.

[36] S. Jendrol', T. Madaras, R. Soták, Zs. Tuza, On light cycles in planar triangulations, Discrete Math. 197/198 (1999), 453–467.

[37] S. Jendrol', P. J. Owens, On light graphs in 3-connected plane graphs without triangular or quadrangular faces, Graphs Comb. 17 (2001), 659–680.

[38] S. Jendrol', H.-J. Voss, Light paths in large polyhedral maps with prescribed minimum degree, Australas. J. Comb. (eingereicht).

[39] S. Jendrol', H.-J. Voss, Light subgraphs of graphs embedded in 2-dimensional manifolds of Euler characteristic ≤ 0 – a survey, Preprint 1999.

[40] E. Jucovič, Strengthening of a theorem about 3-polytopes, Geom. Dedicata 3 (1974), 233–237.

[41] E. Jucovič, Convex polytopes, Veda, Bratislava, 1981. (slowakisch)

[42] A. Kotzig, Contribution to the theory of Eulerian polyhedra, Mat.-Fyz. Čas. SAV (Math. Slovaca) 5 (1955), 111–113. (slowakisch)

[43] A. Kotzig, On the theory of Euler's polyhedra, Mat.-Fyz. Čas. SAV (Math. Slovaca) 13 (1963), 20–31. (russisch)

[44] A. Kotzig, Extremal polyhedral graphs, Ann. New York Acad. Sci. 319 (1979), 569–570.

[45] C. Kuratowski, Sur le problême des courbes gauches en Topologie, Fund. Math. 15 (1930), 271–283.

[46] H. Lebesgue, Quelques conséquences simples de la formule d'Euler, J. Math. Pures Appl. 19 (1940), 27–43.

[47] T. Madaras, Note on weights of paths in polyhedral graphs, Discrete Math. 203 (1999), 267–269.

[48] T. Madaras, R. Soták, Note on light cycles in plane triangulations of minimum degree 5, Preprint 1998.

[49] K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, Fund. Math. 10 (1927), 96–115.

[50] B. Mohar, Light paths in 4-connected graphs in the plane and other surfaces, J. Graph Theory 34 (2000), 170–179.

[51] B. Mohar, R. Škrekovski, H.-J. Voss, Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9, J. Graph Theory (eingereicht).

[52] H. Sachs, Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil II, Teubner, Leipzig, 1972.

[53] R. Soták, persönliche Mitteilung.

[54] E. Steinitz, Polyeder und Raumeinteilungen, Enzykl. der math. Wiss. 3 (1922), Teil AB12, 1–139.

[55] W. T. Tutte, A theorem on planar graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 99–116.

[56] P. Wernicke, Über den kartographischen Vierfarbensatz, Math. Ann. 58 (1904), 413–426.

[57] H. Whitney, Non-separable and planar graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), 339–362.

[58] J. Zaks, Extending Kotzig's theorem, Israel J. Math. 45 (1983), 281–296.