

Ausbreitung und Wechselwirkung optischer Impulse in Glasfasern mit
periodisch variierenden Materialparametern

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomischen Fakultät der
Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Diplomphysiker Matthias Wald
geboren am 12. Januar 1971 in Sonneberg

Gutachter

1.
2.
3.

Tag der letzten Rigorosumsprüfung:

Tag der öffentlichen Verteidigung:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Beschreibung der Lichtausbreitung in Glasfasern	7
2.1	Die Polarisation	8
2.2	Modenstruktur	9
2.3	Impulsausbreitung	12
2.4	Die normierte nichtlineare Schrödingergleichung	17
2.5	Optische Solitonen	20
3	Variationsmethode für nichtlineare Evolutionsgleichungen	22
3.1	Grundbegriffe	22
3.2	Das inverse Problem der Variationsrechnung	23
3.3	Das Variationsverfahren unter Benutzung eines Ansatzes	24
3.4	Anwendung auf die gestörte nichtlineare Schrödingergleichung	27
4	Der Einfluß von Dispersionsmanagement und periodischer Verstärkung auf die Impulsdynamik	31
4.1	Beschreibung im Originalraum	34
4.1.1	Variationsmethode	35
4.1.2	Gemittelttes Solitonenkonzept	43
4.1.3	Quasi-soliton	50
4.2	Mittelungsverfahren im Fourierraum	51
5	Impuls-Wechselwirkung unter dem Einfluß von Dispersionsmanagement in einem Kanal	55
5.1	Schwaches Dispersionsmanagement	57
5.2	Starkes Dispersionsmanagement	61

6	Impuls-Wechselwirkung unter dem Einfluß von Dispersionsmanagement in verschiedenen Kanälen	64
6.1	Unvollständiger Stoß	68
6.2	Vollständiger Stoß	73
6.2.1	Einfluß auf die Frequenz	74
6.2.2	Einfluß auf die Impulslage	76
6.3	Mittlere Dispersion gleich Null	77
6.3.1	Stoß in der Mitte eines Fasersegmentes	78
6.3.2	Stoß am Rand eines Fasersegmentes	79
7	Zusammenfassung	82
A	Berechnung der Integrale für die Wechselwirkung in mehreren Kanälen	85

Kapitel 1

Einleitung

Der Transport von Information gewinnt in unserer hochtechnisierten Gesellschaft immer mehr an Bedeutung. Man denke nur an die ständig wachsende Zahl der Internet-Benutzer. Dazu kommt in den nächsten Jahren noch der Bedarf an bildverarbeitenden Kommunikationssystemen, wie sie zur Zeit in vereinzelt Konferenzschaltungen bereits verfügbar sind. Die damit verbundenen, sehr großen Datenmengen stellen hohe Anforderungen an die Signalübertragungsstrecken und auch an nachfolgende Systeme und Geräte. Eine entscheidende Größe zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit eines Übertragungssystems ist die Übertragungskapazität. Sie wächst mit der Frequenz des Trägersignals. Während Koaxialleitungen aus Kupfer nur mit Trägersignalen im MHz-Bereich betrieben werden können, lassen sich in Richtfunkstrecken, zu denen auch die Satellitenverbindungen zählen, schon Trägersignale im GHz-Bereich nutzen. Im Lichtwellenleiter dagegen beträgt die Trägerfrequenz im Dämpfungsminimum, das bei einer Wellenlänge von etwa $1,5 \mu\text{m}$ liegt, rund 200 THz. Damit sind unter der Annahme, daß etwa 20 Perioden des Trägersignals zur eindeutigen Definition eines Bit als Impuls ausreichen, theoretisch etwa 10 TBit/s maximal übertragbar. Praktisch ist dieser hohe Wert jedoch nicht erreichbar, da sich Laufzeiteffekte, hervorgerufen durch Dispersion, Dämpfung oder Nichtlinearität, besonders bei sehr kurzen Lichtimpulsen störend auswirken. Heute erreichbare typische Übertragungsraten liegen bei etwa 20-40 GBit/s in einem Kanal, d.h. bei einer festen Trägerfrequenz.

Das Prinzip der Totalreflexion als Grundlage für die Lichtleitung in Glasfasern ist schon seit dem 19. Jahrhundert bekannt. In den 20er Jahren des vorigen Jahrhunderts wurden bereits die ersten Fasern hergestellt, die aus heutiger Sicht aber nur aus dem Kern bestanden und keine großen optischen Anwendungen zuließen. Die Geburt der Faseroptik vollzog sich dann in den 50er Jahren, als mit der Einführung einer Man-

telschicht, dem sogenannten cladding, die optischen Eigenschaften beträchtlich verbessert wurden. Den einzigen Nachteil stellten die damals noch sehr hohen Verluste von rund 1000 dB/km dar. Dieses Hindernis wurde Ende der 70er Jahre überwunden, als man Fasern mit Verlusten von nur noch 0,2 dB/km, was dem theoretischen Limit der Rayleigh-Streuung entspricht, herstellen konnte.

Bei den derzeit weltweit verlegten optischen Fasern handelt es sich hauptsächlich um sogenannte Standardfasern, die in den Wellenlängenbereichen von $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ und $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ extrem geringe Verluste aufweisen und bei $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ einen Dispersionsnullpunkt haben. Viele gegenwärtige Kommunikationssysteme, wie z.B. das Netz der Deutschen Telekom, arbeiten gerade in einem Bereich um diesen Dispersionsnullpunkt mit geringen optischen Leistungen von weniger als 1 mW, so daß dispersive und nicht-lineare Effekte nur kleine Störungen darstellen. Zur Verstärkung der Signale werden elektronische Regeneratoren benutzt, die zwar auftretende Laufzeiteffekte periodisch kompensieren können, aber aufgrund der relativ langsamen Elektronik den Vorteil der schnellen optischen Datenübertragung teilweise zunichte machen. So sind über längere Strecken maximal 1 bis 5 GBit/s fehlerfrei übertragbar.

Zur Erhöhung der Kapazität in optischen Informationsübertragungssystemen rückte die Anwendung von Solitonen in den letzten Jahren zunehmend in den Mittelpunkt der Forschungen. Von Hasegawa und Tappert [1] 1973 theoretisch vorhergesagt und 1980 durch Mollenauer und Mitarbeiter [2] experimentell bestätigt, stieg das Interesse an ihnen zur Datenübertragung erst gegen Ende der 80er Jahre, als die Solitonenverstärkung mittels erbiumdotierter Faserverstärker (EDFA) erstmals experimentell gelang [3].

Optische Solitonen sind zeitlich begrenzte Impulse, die aus dem Zusammenspiel von Dispersion und Nichtlinearität entstehen. Sie sind nicht nur äußerst robust gegenüber Störungen, sondern auch verträglich mit verschiedenen Bauelementen der nicht-linearen Optik zur Datenübertragung wie Schalter, Verzweiger u.a. und somit gut für eine komplett optische Kommunikation geeignet. Solitonensysteme waren anfänglich so konzipiert, daß der Verstärkerabstand wesentlich kleiner als die charakteristische Dispersions- bzw. nichtlineare Länge war. Die Leistungsschwankungen aufgrund der Verluste und der periodischen Verstärkung erfolgten so schnell, daß im wesentlichen nur die mittlere Leistung für die Bildung eines Solitons, des sogenannten „guiding-center soliton“, ausschlaggebend war [4, 5]. Betrachtet man jedoch Systeme bestehend aus Standardfasern mit einer Dispersion von etwa $-20 \text{ ps}^2/\text{km}$ bei einer Wellenlänge von $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$, so stößt man sehr schnell an die Grenze der Übertragungskapazität, die bei einer Bitrate von etwa 5 GBit/s liegt [6]. Die Wellenlänge ist dabei

durch den Arbeitsbereich des EDFA vorgegeben. Der Grund dafür ist die mit kürzer werdenden Impulsen stark verringerte Dispersionslänge, die, wenn sie in die Größenordnung des Verstärkerabstandes kommt, Resonanzstrahlung in Form von Seitenbändern hervorruft [7, 8]. Ein Ausweg besteht darin, dispersionsverschobene Fasern, die bei $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ eine Gruppengeschwindigkeitsdispersion von nur $-1 \text{ ps}^2/\text{km}$ aufweisen, zu verwenden. Da man aber gerne die bereits vielfach installierten Standardfasern nutzen möchte, wurde in [9–11] der Vorschlag gemacht, dispersionskompensierende Fasern mit großer normaler Dispersion periodisch einzusetzen, um damit die mittlere Dispersion zu verringern. Dies war der Startschuß zu einer stürmischen Entwicklung. Es zeigten sich nämlich recht bald weitere Vorteile dieses *Dispersionsmanagements*. So konnte bereits in [10] experimentell gezeigt werden, daß durch Dispersionsmanagement der Gordon-Haus timing jitter [12], der eine Folge der spontanen Emission im Verstärker ist, deutlich reduziert werden kann. Gleichzeitig wird aufgrund der hohen lokalen Dispersion auch die Effizienz der Vier-Wellen-Mischung unterdrückt.

Das Konzept des „guiding-center soliton“ läßt sich in solchen Systemen nur für schwaches Dispersionsmanagement anwenden. Schwach bedeutet dabei, daß die lokale Dispersionslänge immer noch größer als die Länge einer Periode des Dispersionsmanagements ist. Eine Optimierung der Solitonenausbreitung kann entweder durch die Position des Einspeisepunktes [13] oder durch ein pre-chirping des Eingangsimpulses [14] erreicht werden. Genauere theoretische Untersuchungen mit Hilfe der Lie Transformation [4] zeigen jedoch, daß sich die Form des „guiding-center soliton“ mit zunehmender Managementstärke immer mehr vom gewöhnlichen Soliton unterscheidet. Dazu kommen stärker werdende periodische Breiten- und chirp-Schwankungen, so daß eine ganz neue *stroboskopisch* stationäre Lösung, das sogenannte *dispersion-managed* Soliton, identifiziert werden kann [15, 16].

Die Eigenschaften dieses äußerst stabilen Impulses unterscheiden sich deutlich von denen des gewöhnlichen Solitons. So ist die Energie größer als die des Solitons, das zu dem System mit der mittleren Dispersion gehört [15]. Die Folge ist ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis. Die Impulse besitzen grundsätzlich einen nichttrivialen chirp [17]. Ihre Form variiert mit steigender Managementstärke von der sech-Form des gewöhnlichen Solitons zu einer Gauß-ähnlichen Struktur, wobei dann noch oszillierende Impulsflanken dazukommen [17, 18]. *Dispersion-managed* Solitonen können auch im Bereich verschwindender und sogar normaler mittlerer Dispersion existieren [19–22], womit eine direkte Anwendung in bereits dispersionskompensierten linearen Übertragungssystemen möglich ist.

Ein weiterer Aspekt ist die Wechselwirkung der *dispersion-managed* Solitonen untereinander. Sie ist eine Folge der Kerr-Nichtlinearität der Glasfaser. Man muß zwischen der Wechselwirkung von Solitonen im selben Kanal und der von Solitonen in verschiedenen Kanälen unterscheiden. Wie vom Autor gezeigt werden wird, reduziert in beiden Fällen *moderates* Dispersionsmanagement die Stärke der Wechselwirkung [23, 24]. Dagegen verschlechtert sich die Situation im Bereich starken Dispersionsmanagements. Die Wechselwirkung nimmt dramatisch zu und wird zum limitierenden Faktor für die übertragbare Bitrate. Ihrem Studium wurde deshalb großes Interesse geschenkt.

Die Arbeiten [23, 25–31] beispielsweise widmen sich alle dem Problem der Impulswechselwirkung im selben Kanal. Die meisten der theoretischen Studien stützen sich dabei auf die Variationsrechnung mit Gaußscher Ansatzfunktion oder nur auf die Numerik. Die Wechselwirkung im Bereich schwachen bis moderaten Dispersionsmanagements entzieht sich jedoch einer Variationsbeschreibung mittels Gaußscher Ansatzfunktion. Der Grund dafür ist die falsche Asymptotik der Gauß-Funktion, auf die es aber gerade bei schwachem Dispersionsmanagement ankommt. Deshalb wurde vom Autor in [23] ein alternativer Ansatz vorgeschlagen, der dieses Problem in gewissen Grenzen löst. Zur Unterdrückung der Wechselwirkung wurde in [32–34] der Effekt von Filtern und synchroner Intensitätsmodulation untersucht und in [35, 36] das Regime extrem starken Dispersionsmanagements vorgeschlagen. Diese Aspekte sind jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Ebenso intensiv wie die Wechselwirkung in einem Kanal wurde auch die Wechselwirkung in Mehrkanalsystemen untersucht. Auf experimentellem Gebiet konnten nämlich gerade in solchen Mehrkanal- oder WDM-Systemen¹ die größten Bitraten von einigen 100 GBit/s erzielt werden [37, 38]. In den nächsten Jahren sollen dann sogar Bitraten jenseits von TBit/s erreichbar sein [39, 40]. Der limitierende Faktor ist wieder die Wechselwirkung. Aufgrund der unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten in den verschiedenen Kanälen kommt es immer zu einer Vielzahl von Kollisionen, die sich in Frequenz- und Positionsverschiebungen der beteiligten Impulse äußern. Ihrer Berechnung sind eine Vielzahl theoretischer Arbeiten gewidmet, wie z.B. [24, 41–46]. Die meisten unter ihnen stützen sich wieder auf die Variationsrechnung. Um die Frequenzverschiebungen durch die Wechselwirkung zu reduzieren, wurden in den Arbeiten [47–50] verschiedene Filter vorgeschlagen und ihr Einfluß auf die Impulsdynamik untersucht. Da sich die direkte Numerik zur Modellierung besonders von Vielkanalsystemen als ziemlich

¹WDM: wavelength-division-multiplexing

aufwendig erweist, wurden in [51, 52] alternative Methoden entwickelt, die zwar sehr effektiv, aber auch mit einigen Näherungen verbunden sind.

Aus den Ergebnissen zur Wechselwirkung im selben Kanal folgt als optimales Systemdesign ein Dispersionsmanagement im *moderaten* Bereich. Dies kann man entweder durch relativ lange Impulse oder durch kurze Managementperioden erreichen, da sich die Dispersionsmanagementstärke invers proportional zum Quadrat der Impulsbreite und direkt proportional zum Produkt aus Gruppengeschwindigkeitsdispersion und Fasersegmentlänge verhält. Hohe Datenraten fordern aber kurze Impulse. Deshalb wurde in [53–55] die Benutzung „kurzperiodischer Fasern“ vorgeschlagen. Dabei handelt es sich um Glasfasern, die aus kontinuierlich aufeinanderfolgenden Segmenten positiver und negativer Gruppengeschwindigkeitsdispersion bestehen. Bereits existierende Technologien machen eine Herstellung mit Segmentlängen von weniger als 10 km möglich. Damit eröffnen sich neue Möglichkeiten für zukünftig zu konzipierende Übertragungsstrecken.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit der Beschreibung der Impulswechselwirkung in optischen Informationsübertragungsstrecken mit Dispersionsmanagement. Alle Berechnungen erfolgen auf der Basis der nichtlinearen Schrödingergleichung. Als analytische Methoden kommen im wesentlichen die Lie-Transformation und die Variationsrechnung zum Einsatz.

In Kapitel 2 soll zunächst die Ableitung der nichtlinearen Schrödingergleichung mit Hilfe der multiplen Skalentheorie ausführlich dargestellt werden. Dies erscheint dem Autor angebracht, da in der Literatur einige Aspekte dieser Theorie nicht klar und eindeutig dargestellt sind. Die Vorgehensweise stützt sich hauptsächlich auf die Arbeiten von Newell und Moloney [56] sowie Kodama und Hasegawa [57]. Nach der Meinung des Autors lassen sich einzig mit der Theorie der vielfachen Skalen die Störterme zur nichtlinearen Schrödingergleichung wie Dispersion 3. Ordnung, „Self-Steepening“ oder „Raman-self-frequency-shift“ konsistent ableiten. Die Gleichungen dieses Kapitels bilden die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen.

Kapitel 3 ist der Variationsrechnung zur Behandlung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen vom Evolutionstyp gewidmet. Mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes läßt sich eine solche Differentialgleichung mit unendlich vielen Freiheitsgraden auf ein System mit endlich vielen Freiheitsgraden abbilden, dessen Dynamik nun durch einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben wird. Der Autor zeigt, daß die Kenntnis der Lagrangefunktion bei dieser Prozedur nicht erforderlich ist und stellt die These auf, daß die Theorie auch auf Differentialgleichungen, die keine La-

grangefunktion besitzen, anwendbar bleibt. Anhand einiger Störterme zur nichtlinearen Schrödingergleichung soll die Leistungsfähigkeit demonstriert werden. Die nachfolgenden Kapitel machen sich diese Variationsmethode ausgiebig zunutze.

Die Eigenschaften einzelner Impulse in Übertragungssystemen mit Dispersionsmanagement werden in Kapitel 4 analysiert. Neben der variationstheoretischen Beschreibung kommt auch die Lie-Transformationstechnik zum Einsatz, zum einen zur Analyse des schwachen Dispersionsmanagements und zum anderen als Mittelungsmethode im Fourierraum. Die Lie-Transformationstechnik ist in [4, 58] exakt beschrieben. Sie hat sich bei der Beschreibung der Impulsausbreitung in Systemen mit Verlusten und periodischer Verstärkung ausgezeichnet bewährt [59]. In Übertragungssystemen mit Dispersionsmanagement stößt sie jedoch im Originalraum an ihre Grenzen, indem sie nur für schwaches Dispersionsmanagement die richtigen Ergebnisse liefert. Es soll dennoch diese Theorie kurz beschrieben werden, da sie sich im Fourierraum sehr gut bewährt und dort die Eigenschaften der *dispersion-managed* Solitonen vollständig beschreibt. Mit ihrer Hilfe gelang dem Autor die Berechnung des *dispersion-managed* Solitons als stroboskopisch stationäre Lösung in Übertragungssystemen mit Dispersionsmanagement, Verlusten und periodischer Verstärkung [60].

Kapitel 5 widmet sich ausschließlich der Wechselwirkung der *dispersion-managed* Solitonen in einem Kanal. Für schwaches bis moderates Dispersionsmanagement gelingt ihre Beschreibung im Rahmen der Variationsmethode mit Hilfe einer vom Autor vorgeschlagenen alternativen Ansatzfunktion [23]. Die Impulswechselwirkung im Bereich starken Dispersionsmanagements soll nur kurz vorgestellt werden.

Zum Schluß wird in Kapitel 6 die Wechselwirkung in verschiedenen Kanälen ausführlich untersucht. Dabei erfolgt eine Unterscheidung zwischen vollständigen Stößen, bei denen sich die Impulse komplett überholen, und unvollständigen Stößen, die nur an den beiden Enden der Übertragungsstrecke durch sich überlappende Impulse auftreten. Die Untersuchungen erstrecken sich über die gesamte Spanne der Dispersionsmanagementstärke für die Fälle anomaler [24], normaler und verschwindender mittlerer Dispersion. Als Untersuchungsmethode dient ausschließlich die Variationsrechnung mit Gaußscher Ansatzfunktion, die sich hier sehr gut bewährt.

Kapitel 2

Beschreibung der Lichtausbreitung in Glasfasern

Den Ausgangspunkt für eine exakte theoretische Behandlung geführter elektromagnetischer Wellen bilden die vier Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathfrak{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, & \nabla \mathfrak{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \times \mathfrak{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial \mathfrak{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), & \nabla \mathfrak{B}(\mathbf{r}, t) &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

die die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}(\mathbf{r}, t)$ mit der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}(\mathbf{r}, t)$ sowie die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}(\mathbf{r}, t)$ mit der dielektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}(\mathbf{r}, t)$ verknüpfen. Alle Größen hängen vom Ort \mathbf{r} und der Zeit t ab. Bei den hier zu betrachtenden Glasfasern handelt es sich um unmagnetische Dielektrika, in denen weder freie Ladungsträger existieren noch Ströme fließen. Das bedeutet, daß sowohl die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ als auch die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ Null sind und daß die magnetische Induktion nur über die Permeabilitätskonstante μ_0 des Vakuums von der magnetischen Feldstärke gemäß $\mathfrak{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathfrak{H}(\mathbf{r}, t)$ abhängt. Die dielektrische Verschiebung hingegen besitzt einen komplizierteren Zusammenhang mit der elektrischen Feldstärke. Hier spielen, vermittelt durch die Polarisation $\mathfrak{P}(\mathbf{r}, t)$ gemäß $\mathfrak{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t) + \mathfrak{P}(\mathbf{r}, t)$, die Materialeigenschaften die entscheidende Rolle, die über nur schwer zugängliche Abhängigkeiten der Polarisation vom einwirkenden Feld $\mathfrak{E}(\mathbf{r}, t)$ berücksichtigt werden müssen. Im Vakuum ist $\mathfrak{P}(\mathbf{r}, t)$ Null, aber wenn sich Licht in einem Dielektrikum ausbreitet, so bewirkt sein elektrisches Feld Verformungen der atomaren Struktur. Die Folge sind lokale Dipolmomente und damit verbunden das induzierte Polarisationsfeld. Die Abhängigkeit der Polarisation $\mathfrak{P}(\mathbf{r}, t)$ von der Zeit, von räumlichen Inhomogenitäten und nicht zuletzt

von der Intensität des elektrischen Feldes führt zu einer Vielzahl interessanter physikalischer Erscheinungen wie z.B. Dispersion, Doppelbrechung, Frequenzverdopplung, Wellenmischung oder Selbst- und Kreuzphasenmodulation.

Mit Hilfe der Polarisation läßt sich aus den Maxwell-Gleichungen (2.1) die allgemeinste Wellengleichung der Optik in der Form

$$\Delta \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t) - \nabla(\nabla \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t)) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

direkt ableiten. Die Fouriertransformation, die gemäß

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad \mathcal{F}^{-1}[f](t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.3)$$

definiert ist, gibt dieser Wellengleichung im Fourierraum die Gestalt

$$\Delta \hat{\mathfrak{E}}(\mathbf{r}, \omega) - \nabla(\nabla \hat{\mathfrak{E}}(\mathbf{r}, \omega)) + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\mathfrak{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -\mu_0 \omega^2 \hat{\mathfrak{P}}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.4)$$

2.1 Die Polarisation

Die Abhängigkeit der Polarisation $\mathfrak{P}(\mathbf{r}, t)$ von der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}(\mathbf{r}, t)$ nimmt unter Dipolnäherung im nichtresonanten Fall die Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_0} P_i(\mathbf{r}, t) &= \int \chi_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}, \tau) E_j(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \\ &+ \iint \chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}, \tau_1, \tau_2) E_j(\mathbf{r}, t - \tau_1) E_k(\mathbf{r}, t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &+ \iiint \chi_{ijkl}^{(3)}(\mathbf{r}, \tau_1, \tau_2, \tau_3) E_j(\mathbf{r}, t - \tau_1) E_k(\mathbf{r}, t - \tau_2) E_l(\mathbf{r}, t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

für allgemeine anisotrope Medien an [56, 61]. Der erste Term bedingt die Frequenzabhängigkeit der Suszeptibilität $\hat{\chi}_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}, \omega)$ aufgrund der nichtinstantanen Reaktion des Mediums auf die elektrische Feldstärke, d.h., die Polarisation zum Zeitpunkt t wird auch durch die Feldstärke von früheren Zeiten $t - \tau$ beeinflusst. Im Fourierraum wird aus der Faltung ein Produkt, woraus sich der lineare Polarisationsanteil für homogene Medien zu $\hat{\mathfrak{P}}_{\text{L}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \hat{\chi}^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) \hat{\mathfrak{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ ergibt.

Da Glas als isotropes Material Zentralsymmetrie aufweist, verschwindet der Suszeptibilitätstensor 2. Ordnung, so daß der Term 3. Ordnung den ersten nichtverschwindenden Beitrag zur nichtlinearen Polarisation in Glasfasern liefert. Die zugehörige Suszeptibilität ist ein Tensor 4. Stufe mit 81 Komponenten. Durch Anwendung von Symmetrietransformationen wie Spiegelungen und Rotationen läßt sich jedoch zeigen, daß

nur 21 Komponenten von Null verschieden sind, und daß diese aus nur 3 unabhängigen Größen gemäß

$$\begin{aligned} \chi_{ijj}^{(3)} &= \chi_1^{(3)}, & \chi_{iji}^{(3)} &= \chi_2^{(3)}, & \chi_{jji}^{(3)} &= \chi_3^{(3)} & ; & & i, j = x, y, z ; i \neq j \\ \chi_{iii}^{(3)} &= \chi_1^{(3)} + \chi_2^{(3)} + \chi_3^{(3)} = \chi^{(3)} & ; & & i = x, y, z \end{aligned} \quad (2.6)$$

bestehen [61]. Damit vereinfacht sich die nichtlineare Polarisation zu

$$\mathfrak{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \iiint \chi^{(3)}(\mathbf{r}, \tau_1, \tau_2, \tau_3) [\mathfrak{E}(\mathbf{r}, t - \tau_1) \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t - \tau_2)] \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \quad (2.7)$$

Suszeptibilitäten höherer Ordnung sollen im Sinne einer Reihenentwicklung unberücksichtigt bleiben.

2.2 Modenstruktur

Bei der weiteren Behandlung der Wellengleichung (2.2) soll die nichtlineare Polarisation lediglich als Störung aufgefaßt werden. Für die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}(\mathbf{r}, t)$ (und analog auch für $\mathfrak{H}(\mathbf{r}, t)$) ist somit eine Reihenentwicklung der Form

$$\mathfrak{E} = \epsilon \mathfrak{E}_0 + \epsilon^2 \mathfrak{E}_1 + \epsilon^3 \mathfrak{E}_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{n+1} \mathfrak{E}_n \quad (2.8)$$

sinnvoll. Eingesetzt in die Wellengleichung (2.4) resultiert in der Ordnung ϵ^1 die Gleichung

$$\Delta \widehat{\mathfrak{E}}_0 - \nabla(\nabla \widehat{\mathfrak{E}}_0) + \frac{\omega^2}{c^2} \widehat{\epsilon} \widehat{\mathfrak{E}}_0 = \widetilde{\mathbf{L}} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -i\omega \right) \widehat{\mathfrak{E}}_0(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (2.9)$$

Die Größe $\widehat{\epsilon} = \widehat{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega)$ heißt dielektrische Funktion und ist definiert als $\widehat{\epsilon} = 1 + \widehat{\chi}^{(1)}$.

Wegen Translationsinvarianz in Ausbreitungsrichtung (z-Richtung) hängen alle Materialgrößen räumlich nur von x und y ab. Für die Felder bedeutet dies, daß man die Propagation $\exp(i\beta z)$ gemäß

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{E}}_0(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega) e^{i\beta z} + \widehat{\mathfrak{E}}_0^*(x, y, -\omega) e^{-i\beta z} \right) \\ \widehat{\mathfrak{H}}_0(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathfrak{H}}_0(x, y, \omega) e^{i\beta z} + \widehat{\mathfrak{H}}_0^*(x, y, -\omega) e^{-i\beta z} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

separieren kann. Dieser spezielle Ansatz wurde außerdem so gewählt, daß die aus der Forderung nach reellen Feldern im Originalraum stammende Eigenschaft $\widehat{\mathfrak{E}}^*(\mathbf{r}, \omega) =$

$\widehat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, -\omega)$ gewährleistet ist. Aus der z -Ableitung wird $i\beta$, so daß Gleichung (2.9) übergeht in

$$\mathbf{L} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, i\beta, -i\omega \right) \widehat{\mathcal{E}}_0(x, y, \omega) = 0. \quad (2.11)$$

Der Operator \mathbf{L} ist selbstadjungiert bezüglich des Skalarproduktes $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int (f_1^* g_1 + f_2^* g_2 + f_3^* g_3) dx dy$, d.h. $\langle \mathbf{f}, \mathbf{L}\mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{L}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$. Diese Eigenschaft wird später nützlich sein.

Die hier zu betrachtenden Glasfasern zeichnen sich durch einen kreisförmigen Querschnitt und annähernd stufenförmiges Brechzahlprofil aus (siehe Abbildung 2.1). Der Brechungsindex n ist dabei gemäß $n^2 = \hat{\epsilon}$ für verlustfreie Medien definiert¹. Die Diver-

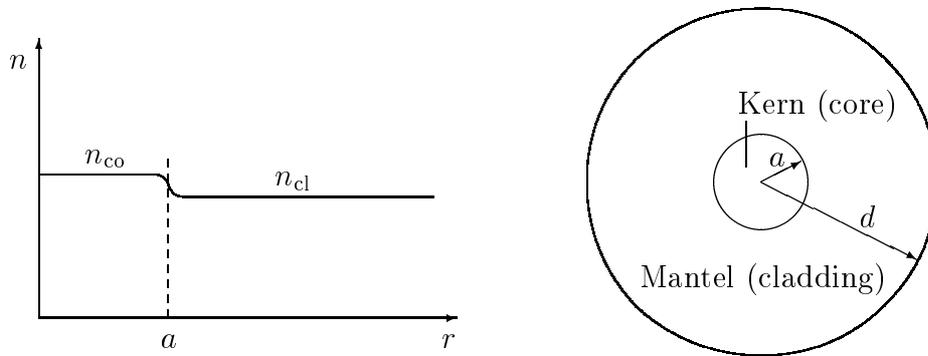


Abbildung 2.1: Brechzahlprofil der Glasfaser

genz des elektrischen Feldes ist somit in Kern und Mantel Null, so daß man für beide Gebiete jetzt eine Helmholtzgleichung für $\widehat{\mathcal{E}}_0(x, y, \omega)$ und $\widehat{\mathcal{H}}_0(x, y, \omega)$ zu lösen hat. An der Grenze von Kern und Mantel sind dann die üblichen Übergangsbedingungen zu erfüllen. Von den 6 Komponenten des $\widehat{\mathcal{E}}_0$ - und $\widehat{\mathcal{H}}_0$ -Feldes sind aufgrund der Maxwell-Gleichungen nur zwei unabhängig. Meist wählt man hier \widehat{E}_{0z} und \widehat{H}_{0z} . Die übrigen Komponenten lassen sich dann mit Hilfe der Rotationsgleichungen daraus berechnen.

Entsprechend der Geometrie des Problems benutzt man im weiteren Zylinderkoordinaten, mit deren Hilfe die Besselsche Differentialgleichung für die radiale Feldverteilung abgeleitet werden kann. Der Winkelanteil gehorcht einer Schwingungsgleichung mit der Lösung $\exp(il\phi)$. Da diese Lösung 2π -periodisch in ϕ sein muß, kann l nur ganzzahlige Werte annehmen. Aus den Forderungen, daß das Feld bei $r = 0$ nicht singulär werden darf und daß es bei $r = \infty$ verschwinden muß, ergeben sich als Lösung für den Radialanteil die Besselfunktionen 1. Gattung $J_l(\cdot)$ im Kern und die modifizierten Besselfunktionen 2. Gattung oder Macdonaldschen Funktionen $K_l(\cdot)$ im Mantel. Die

¹Im allgemeinen ist $\widehat{\chi}^{(1)} = \widehat{\chi}_R^{(1)} + i\widehat{\chi}_I^{(1)}$ komplex, so daß $n \approx \sqrt{1 + \widehat{\chi}_R^{(1)}}$ und $\alpha \approx \frac{\omega \widehat{\chi}_I^{(1)}}{cn}$ gilt (α : Extinktionskoeffizient)

zunächst noch freien Integrationskonstanten lassen sich mit Hilfe der Übergangsbedingungen bei $r = a$, die die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von elektrischer und magnetischer Feldstärke fordern, bestimmen. Aus der Lösbarkeitsbedingung des resultierenden Gleichungssystems folgt die Dispersionsrelation $\beta(\omega)$ in Form der Eigenwertgleichung

$$\left(\frac{J_l'(\gamma_{\text{co}} a)}{\gamma_{\text{co}} J_l(\gamma_{\text{co}} a)} + \frac{K_l'(\gamma_{\text{cl}} a)}{\gamma_{\text{cl}} K_l(\gamma_{\text{cl}} a)} \right) \left(\frac{J_l'(\gamma_{\text{co}} a)}{\gamma_{\text{co}} J_l(\gamma_{\text{co}} a)} + \frac{n_{\text{cl}}^2}{n_{\text{co}}^2} \frac{K_l'(\gamma_{\text{cl}} a)}{\gamma_{\text{cl}} K_l(\gamma_{\text{cl}} a)} \right) = \left(\frac{l\omega\beta}{c a \gamma_{\text{cl}}^2 \gamma_{\text{co}}^2} \frac{n_{\text{co}}^2 - n_{\text{cl}}^2}{n_{\text{co}}} \right)^2, \quad (2.12)$$

wobei $\gamma_{\text{co}}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_{\text{co}}^2 - \beta^2$ und $\gamma_{\text{cl}}^2 = \beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_{\text{cl}}^2$ die Ausbreitungskonstanten in Kern und Mantel darstellen.

Im allgemeinen hat diese Gleichung mehrere Lösungen für jeden Wert von l . Diese werden fortlaufend durchnummeriert und mit β_{ln} ($n = 1, 2, \dots$) bezeichnet. Sie gehören jeweils zu einer möglichen geführten Mode der Faser, da das zugehörige Feldprofil sich während der Ausbreitung bis auf einen Phasenfaktor nicht ändert. Da bei diesen Fasermode, außer für $l = 0$, die z -Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} immer ungleich Null sind, spricht man von Hybridmoden und bezeichnet sie mit HE_{ln} bzw. EH_{ln} , je nachdem, ob H_z oder E_z überwiegt.

Abbildung 2.2 zeigt die Lösung der Eigenwertgleichung (2.12) für die niedrigsten Fasermode. Dabei kristallisiert sich der Faserparameter $V = (2\pi/\lambda)a\sqrt{n_{\text{co}}^2 - n_{\text{cl}}^2}$ als

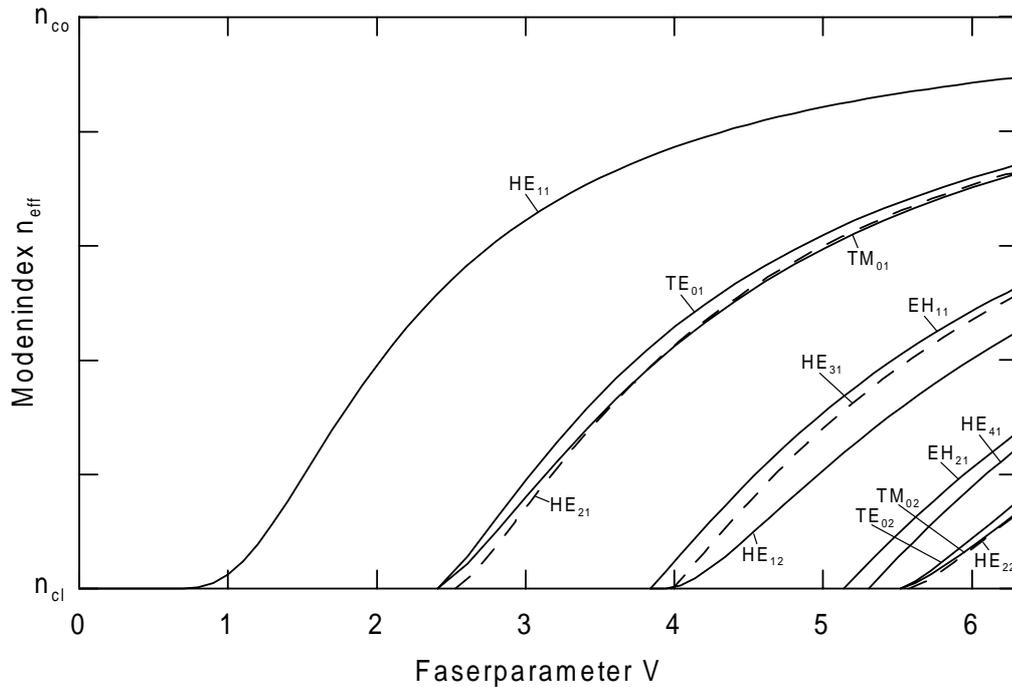


Abbildung 2.2: Effektiver Index für die niedrigsten Faser-Moden

wichtige Größe zur Bestimmung der sogenannten *cutoff*-Punkte heraus. Für $V < 2.405$ beispielsweise wird von der Faser nur die Grundmode HE_{11} geführt. Im weiteren sollen nur noch solche Single-Mode-Fasern betrachtet werden.

Es sei noch erwähnt, daß die Moden mit $l \geq 1$ bezüglich des Drehsinns zweifach entartet sind, so daß selbst Single-Mode-Fasern eigentlich 2 entartete Moden führen. Da in der Praxis die exakte Zylindersymmetrie, die zu dieser Entartung führt, meist stochastisch gebrochen wird, kommt es zu unterschiedlichen Ausbreitungskonstanten für beide Moden und damit zu Laufzeitdifferenzen zwischen unterschiedlichen Polarisationszuständen einer Frequenz. Besonders für sehr kurze Impulse, wie sie in hochbitratigen Systemen benutzt werden müssen, wirkt sich dieser Effekt der Polarisationsmodendispersion zunehmend negativ aus. Durch eine geeignete Verdrehung der Faser beim Herstellungsprozess [62] oder durch eine gezielte laterale Deformation [63] kann er jedoch unterdrückt werden.

2.3 Impulsausbreitung

Ein Impuls, oder auch Wellenpaket, ist eine lineare Superposition von Wellenzügen der Frequenzen ω , die in einer ϵ -Umgebung der Trägerfrequenz ω_0 liegen. Mathematisch drückt sich dies in einer Verallgemeinerung des Ansatzes (2.10) gemäß

$$\widehat{\mathfrak{E}}_0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2} \left(\hat{a}(\omega - \omega_0) \widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega) e^{i\beta z} + \hat{a}^*(-\omega - \omega_0) \widehat{\mathfrak{E}}_0^*(x, y, -\omega) e^{-i\beta z} \right) \quad (2.13)$$

aus, wobei $\hat{a}(\omega - \omega_0)$ nur in einer Umgebung $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ von Null verschieden ist. Mit β ist die Ausbreitungskonstante der Grundmode β_{11} gemeint. Die Indizes sollen aber, da die zu betrachtenden Fasern monomodig sind, weggelassen werden.

Da im weiteren eine Differentialgleichung zur Beschreibung der Impulsausbreitung mit Hilfe der multiplen Skalentheorie abgeleitet werden soll, ist es sinnvoll, sich zunächst die Skalierungseigenschaften von $\widehat{\mathfrak{E}}_0(\mathbf{r}, \omega)$ näher zu betrachten. Dazu entwickelt man $\beta(\omega)$ in eine Taylor-Reihe

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.14)$$

um ω_0 . Eingesetzt in Formel (2.13) findet man, daß eine schnelle Frequenzabhängigkeit (schmales Spektrum) eine langsame z -Abhängigkeit gemäß

$$\hat{a}(\omega - \omega_0) e^{i\beta z} = \hat{A}(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} = \hat{A} \left(\epsilon z, \epsilon^2 z, \dots, \frac{\omega - \omega_0}{\epsilon} \right) e^{i\beta_0 z} \quad (2.15)$$

zur Folge hat. \hat{A} ist die Fouriertransformierte der langsam veränderlichen Einhüllenden des elektromagnetischen Feldes nicht nur in z , sondern auch in der Zeit, da das Produkt aus spektraler Breite und Impulsdauer eine Konstante ist. Man wird also später im Sinne einer Störungstheorie die langsamen Skalen $Z_n = \epsilon^n z$, ($n = 1, 2, \dots$) und $T = \epsilon t$ einführen können.

Das elektrische Feld im Originalraum, d.h. die inverse Fouriertransformierte von (2.13), verschafft man sich nun auf folgende Art und Weise. Da das Spektrum schmal sein soll (gilt für nicht zu kurze Impulse), läßt sich $\widehat{\mathfrak{E}}_0(\mathbf{r}, \omega)$ in eine Taylor-Reihe um ω_0 entwickeln. Aus $(\omega - \omega_0)^m$ wird bei der Rücktransformation $(i\frac{\partial}{\partial t})^m$, wobei noch der Faktor $\exp(-i\omega_0 t)$ entsteht. Wenn man dann noch berücksichtigt, daß $A(z, t)$ die langsam veränderliche Einhüllende des elektrischen Feldes darstellt, und die langsamen Skalen $Z = \epsilon z$ und $T = \epsilon t$ (siehe oben) einführt, so resultiert

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_0(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{2} \left[\widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega_0 + i\epsilon \frac{\partial}{\partial T}) A(Z, T) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} \right. \\ & \left. + \widehat{\mathfrak{E}}_0^*(x, y, \omega_0 - i\epsilon \frac{\partial}{\partial T}) A^*(Z, T) e^{-i(\beta_0 z - \omega_0 t)} \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

wobei $\widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega_0 + i\epsilon \frac{\partial}{\partial T})$ jetzt ein auf $A(Z, T)$ wirkender Operator ist, der durch seine Reihenentwicklung

$$\widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega_0 + i\epsilon \frac{\partial}{\partial T}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \widehat{\mathfrak{E}}_0}{\partial \omega^m} \Big|_{\omega=\omega_0} \left(i\epsilon \frac{\partial}{\partial T} \right)^m \quad (2.17)$$

definiert ist. Ganz analog läßt sich auch der lineare Anteil der Polarisation unter Berücksichtigung von (2.16) als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \mathfrak{P}_L(\mathbf{r}, t) = & \frac{\epsilon}{2} \left[\widehat{\chi}^{(1)}(x, y, \omega_0 + i\epsilon \frac{\partial}{\partial T}) \widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega_0 + i\epsilon \frac{\partial}{\partial T}) A(Z, T) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} \right. \\ & \left. + \widehat{\chi}^{(1)*}(x, y, \omega_0 - i\epsilon \frac{\partial}{\partial T}) \widehat{\mathfrak{E}}_0^*(x, y, \omega_0 - i\epsilon \frac{\partial}{\partial T}) A^*(Z, T) e^{-i(\beta_0 z - \omega_0 t)} \right] \\ & + \epsilon^2 \int \chi^{(1)}(\mathbf{r}, \tau) \mathfrak{E}_1(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

schreiben. Die Suszeptibilität $\widehat{\chi}^{(1)}(x, y, \omega)$ ist dabei komplex, wobei der Imaginärteil wesentlich kleiner als der Realteil sein soll, d.h. $\widehat{\chi}^{(1)} = \widehat{\chi}_R^{(1)} + i\epsilon^2 \widehat{\chi}_I^{(1)}$.

Der nichtlineare Polarisationsanteil ist in genau der selben Art und Weise zu behandeln. Jedoch treten hier wegen der dritten Potenz und der dreidimensionalen Taylorreihenentwicklung des Integranden wesentlich mehr Terme auf. Als Resultat ergibt

sich hier

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = & -\frac{\epsilon^3}{2} \left\{ \frac{e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)}}{4c^2} \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \frac{1}{k! l! m!} \left[\right. \right. \\ & 2 \frac{\partial^{k+l+m} \mathfrak{f}_1}{\partial \omega_1^k \partial \omega_2^l \partial \omega_3^m}(-\omega_0, \omega_0, \omega_0) \left(i\epsilon \frac{\partial}{\partial T} \right)^k A^* \left(i\epsilon \frac{\partial}{\partial T} \right)^l A \left(i\epsilon \frac{\partial}{\partial T} \right)^m A \\ & + \frac{\partial^{k+l+m} \mathfrak{f}_3}{\partial \omega_1^k \partial \omega_2^l \partial \omega_3^m}(\omega_0, \omega_0, -\omega_0) \left(i\epsilon \frac{\partial}{\partial T} \right)^k A \left(i\epsilon \frac{\partial}{\partial T} \right)^l A \left(i\epsilon \frac{\partial}{\partial T} \right)^m A^* \left. \right] \\ & + \text{c.c.} \left. \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die Vektoren \mathfrak{f}_j sind gemäß

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_1 &= (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2 \widehat{\chi}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \left(\widehat{\mathfrak{E}}_0^*(x, y, -\omega_1) \widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega_2) \right) \widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega_3) = \mathfrak{f}_2 \\ \mathfrak{f}_3 &= (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2 \widehat{\chi}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \left(\widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega_1) \widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega_2) \right) \widehat{\mathfrak{E}}_0^*(x, y, -\omega_3) \end{aligned} \quad (2.20)$$

definiert. Dabei wurde vorausgesetzt, daß $\widehat{\chi}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ in seinen Argumenten vollständig symmetrisch ist. Die Terme $\sim e^{\pm 3i(\beta_0 z - \omega_0 t)}$ leisten keinen Beitrag, da sie nicht phasenangepaßt sind, denn aufgrund der Dispersion ist $\beta(3\omega) \neq 3\beta(\omega)$.

Nun wird Ansatz (2.8), wobei $\mathfrak{E}_0(\mathbf{r}, t)$ das Wellenpaket (2.16) sein soll, in die Wellengleichung (2.2) eingesetzt. Aus den Lösbarkeitsbedingungen für $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots$ wird sich dann eine Differentialgleichung für die Einhüllende $A(Z, T)$ ergeben.

In der Ordnung ϵ^1 resultiert die Gleichung $\mathbf{L}(\partial_x, \partial_y, i\beta_0, -i\omega_0) \widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega_0) = 0$, was auch nicht anders zu erwarten war, da $\widehat{\mathfrak{E}}_0(x, y, \omega)$ ja eine Fasermode sein soll. Die nächste Ordnung (ϵ^2) liefert die Gleichung

$$\mathbf{M}\mathfrak{E}_1 = -\frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\mathbf{L}_3 \frac{\partial}{\partial Z} + \mathbf{L}_4 \frac{\partial}{\partial T} \right) \widehat{\mathfrak{E}}_0 A(Z, T) + \mathbf{L}_0 \frac{\partial \widehat{\mathfrak{E}}_0}{\partial \omega_0} i \frac{\partial A}{\partial T} \right] e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + \text{c.c.} \right\}, \quad (2.21)$$

wobei $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}(\partial_x, \partial_y, i\beta_0, -i\omega_0)$ und \mathbf{M} der lineare Wellengleichungsoperator im Zeitraum sein soll. Mit \mathbf{L}_n sei die partielle Ableitung von \mathbf{L} nach dem n -ten Argument an der Stelle $(\partial_x, \partial_y, i\beta_0, -i\omega_0)$ bezeichnet. Mit Hilfe der Beziehungen $\partial \mathbf{L}_0 / \partial \omega_0 = -i\mathbf{L}_4 + i\beta'_0 \mathbf{L}_3$ und $\partial_Z = \partial_{Z_1} + \epsilon \partial_{Z_2} + \dots$ und des Ansatzes

$$\mathfrak{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathfrak{E}}_1(x, y, \omega_0, Z, T) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + \text{c.c.} \right) \quad (2.22)$$

vereinfacht sich dies zu

$$\mathbf{L} \widehat{\mathfrak{E}}_1 = -\mathbf{L}_3 \widehat{\mathfrak{E}}_0 \left(\frac{\partial A}{\partial Z_1} + \beta'_0 \frac{\partial A}{\partial T} \right). \quad (2.23)$$

Da der selbstadjungierte Operator \mathbf{L} einen nichttrivialen Null-Raum besitzt, muß als Lösungsbedingung die rechte Seite der Gleichung (2.23) senkrecht auf der Null-Lösung von \mathbf{L} , d.h. $\widehat{\mathfrak{E}}_0$, stehen (Fredholm'scher Alternativsatz). Man kann das auch sehr leicht zeigen, indem man das Skalarprodukt der Gleichung (2.23) mit $\widehat{\mathfrak{E}}_0$ bildet und die Selbstadjungiertheit von \mathbf{L} ausnutzt, d.h.

$$\langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, \mathbf{L}_0 \widehat{\mathfrak{E}}_1 \rangle = \langle \mathbf{L}_0 \widehat{\mathfrak{E}}_0, \widehat{\mathfrak{E}}_1 \rangle = 0 = - \langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, \mathbf{L}_3 \widehat{\mathfrak{E}}_0 \rangle \left(\frac{\partial A}{\partial Z_1} + \beta'_0 \frac{\partial A}{\partial T} \right). \quad (2.24)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \beta'_0 \langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, \mathbf{L}_3 \widehat{\mathfrak{E}}_0 \rangle &= \langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, \mathbf{L}_4 \widehat{\mathfrak{E}}_0 \rangle \\ &= 2i \frac{\omega_0}{c} \left\langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, n(x, y, \omega_0) \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left(\frac{\omega_0 n(x, y, \omega_0)}{c} \right) \widehat{\mathfrak{E}}_0 \right\rangle \neq 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

so daß

$$\frac{\partial A}{\partial Z_1} + \beta'_0 \frac{\partial A}{\partial T} = 0 \quad (2.26)$$

gewählt werden muß. In der Ordnung ϵ^2 , d.h. auf einer Längenskala der Impulsbreite, bewegt sich also der Impuls mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g = 1/\beta'_0$ der Trägerfrequenz ohne eine Formänderung. Aus Gleichung (2.23) folgt damit $\widehat{\mathfrak{E}}_1 = \text{const} \widehat{\mathfrak{E}}_0$. Da es aber wenig Sinn macht, ein vielfaches von \mathfrak{E}_0 zur Lösung zu addieren, kann $\mathfrak{E}_1 = 0$ gewählt werden.

Verfährt man nun analog für die Ordnung ϵ^3 , so folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathfrak{E}_2 &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\mathbf{L}_{33}}{2} \frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} + \mathbf{L}_{34} \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \partial T} + \frac{\mathbf{L}_{44}}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \mathbf{L}_3 \frac{\partial}{\partial Z_2} \right) \widehat{\mathfrak{E}}_0 A \right. \right. \\ &\quad + \left(\mathbf{L}_3 \frac{\partial}{\partial Z_1} + \mathbf{L}_4 \frac{\partial}{\partial T} \right) \frac{\partial \widehat{\mathfrak{E}}_0}{\partial \omega_0} i \frac{\partial A}{\partial T} - \frac{\mathbf{L}_0}{2} \frac{\partial^2 \widehat{\mathfrak{E}}_0}{\partial \omega_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega_0^2 \widehat{\chi}^{(3)}}{4c^2} |A|^2 A + i \frac{\omega_0^2}{c^2} \widehat{\epsilon}_1 \widehat{\mathfrak{E}}_0 A \right] e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + \text{c.c.} \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

für \mathfrak{E}_2 , aus deren Lösbarkeitsbedingung sich die (zunächst unnormierte) nichtlineare Schrödingergleichung

$$\frac{\partial A}{\partial Z_2} + i \frac{\beta''_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - i \frac{\omega_0}{c} n_{\text{NL}} |A|^2 A + \frac{\alpha}{2} A = 0 \quad (2.28)$$

ergibt. Der Koeffizient des nichtlinearen Termes $\mathfrak{F}(\omega_0)$ folgt unmittelbar aus dem Term 3. Ordnung der Reihenentwicklung (2.19) und ist durch $\mathfrak{F}(\omega_0) = 2|\widehat{\mathfrak{E}}_0|^2 \widehat{\mathfrak{E}}_0 + \widehat{\mathfrak{E}}_0^2 \widehat{\mathfrak{E}}_0^*$

gegeben. β_0'' ist die Gruppengeschwindigkeitsdispersion und n_{NL} stellt die nichtlineare Brechzahl dar, die aber im Wellenleiter durch die Modenstruktur gemäß

$$n_{\text{NL}} = \frac{\beta_0' \langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, \widehat{\chi}^{(3)} \mathfrak{F}(\omega_0) \rangle}{8 \langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, n(x, y, \omega_0) \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left(\frac{\omega_0 n(x, y, \omega_0)}{c} \right) \widehat{\mathfrak{E}}_0 \rangle} \quad (2.29)$$

modifiziert ist². Die Dämpfung in der Faser wird durch den Extinktionskoeffizienten α (siehe Fußnote Seite 10) beschrieben, der jetzt aber analog der nichtlinearen Brechzahl durch

$$\alpha = \frac{\omega_0}{c} \frac{\beta_0' \langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, \widehat{\varepsilon}_1(x, y, \omega_0) \widehat{\mathfrak{E}}_0 \rangle}{\langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, n(x, y, \omega_0) \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left(\frac{\omega_0 n(x, y, \omega_0)}{c} \right) \widehat{\mathfrak{E}}_0 \rangle} \quad (2.30)$$

definiert ist. Ansonsten wurde zur Ableitung der Gleichung (2.28) lediglich von der Beziehung

$$\frac{\partial^2 \mathbf{L}_0}{\partial \omega_0^2} = -\mathbf{L}_{44} + 2\beta_0' \mathbf{L}_{34} - \beta_0'^2 \mathbf{L}_{33} + i\beta_0'' \mathbf{L}_3 \quad (2.31)$$

und natürlich von den Lösungen der Ordnungen ϵ^1 und ϵ^2 Gebrauch gemacht.

Für die korrekte Behandlung der nächsten Ordnung (ϵ^4) ist es wichtig zu berücksichtigen, daß \mathfrak{E}_2 ungleich Null ist. Zwar wirkt sich dies im nichtlinearen Term (2.19) erst in der Ordnung ϵ^5 aus, aber der lineare Wellengleichungsoperator angewandt auf \mathfrak{E}_2 liefert auch einen Term 4. Ordnung, da die $\widehat{\mathfrak{E}}_j$ ($j > 0$) ja auch von den langsamen Variablen Z und T abhängen.

Mit genau der gleichen Vorgehensweise wie bisher ergibt sich dann in der Ordnung ϵ^4 aus der Lösbarkeitsbedingung für \mathfrak{E}_3 die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial Z_3} - \frac{\beta_0'''}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} + \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left(\frac{\omega_0}{c} n_{\text{NL}} \right) \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) + \frac{i}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_0} \frac{\partial A}{\partial T} + \mu A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} = 0. \quad (2.32)$$

Alle Terme dieser Gleichung stellen Störungen zur nichtlinearen Schrödingergleichung dar. Sie spielen im allgemeinen erst bei sehr kurzen Impulsen mit Impulsbreiten < 100 fs eine Rolle. Die Dispersion 3. Ordnung (Term $\sim \beta_0'''$) kann aber auch bei längeren Impulsen wichtig werden, wenn beispielsweise nahe des Dispersionsnullpunktes, der bei Standard-Glasfasern bei einer Wellenlänge von ca. 1300 nm liegt, die Gruppengeschwindigkeitsdispersion verschwindet oder sehr klein ist.

Die beiden nichtlinearen Terme sind durch die Frequenzabhängigkeit des Kerr-Koeffizienten sowie der Fasermoden bedingt. Der Term proportional $(|A|^2 A)_T$ heißt

²Im Volumen ergibt sich unter Benutzung ebener, linear polarisierter Wellen $n_{\text{NL}} = \frac{3\widehat{\chi}^{(3)}}{8n} |\widehat{\mathfrak{E}}_0|^2$, was genau der Definition der Kerr-Nichtlinearität entspricht.

„Self-Steepening“-Term, da er ein Aufsteilen der Vorderflanke des Impulses bewirkt [64]. Der Koeffizient des zweiten nichtlinearen Terms, der durch

$$\mu = -\frac{\omega_0 \beta_0' \left\langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, \widehat{\chi}^{(3)} \left(\mathfrak{F}_{\omega_0} + 2 \left(\widehat{\mathfrak{E}}_0 \widehat{\mathfrak{E}}_{0\omega_0}^* \right) \widehat{\mathfrak{E}}_0 + \widehat{\mathfrak{E}}_0^2 \widehat{\mathfrak{E}}_{0\omega_0}^* \right) + 2 \left(\widehat{\chi}_+^{(3)} - \widehat{\chi}_-^{(3)} \right) \mathfrak{F} \right\rangle}{8c \left\langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, n(x, y, \omega_0) \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left(\frac{\omega_0 n(x, y, \omega_0)}{c} \right) \widehat{\mathfrak{E}}_0 \right\rangle} \quad (2.33)$$

gegeben ist, ist aufgrund seines nichtverschwindenden Imaginärteils für den sogenannten „Raman-self-frequency-shift“ [12] verantwortlich. Der Realteil von μ ist hingegen so klein, daß er meist weggelassen wird. Die Größen $\widehat{\chi}_+^{(3)}$ und $\widehat{\chi}_-^{(3)}$ bezeichnen jeweils die Ableitung von $\widehat{\chi}^{(3)}$ nach einem Argument ω_k an der Stelle $+\omega_0$ bzw. $-\omega_0$. Mit diesen Definitionen folgt dann

$$\widehat{\chi}_+^{(3)} - \widehat{\chi}_-^{(3)} = \frac{i}{2} \iiint (\tau_1 + \tau_3 - 2\tau_2) \chi^{(3)}(\mathbf{r}, \tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{i\omega_0(\tau_1 + \tau_3 - \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (2.34)$$

als maßgeblicher Anteil für den Imaginärteil von μ .

Die Dispersion der Dämpfung, die aufgrund des Ansatzes $\widehat{\chi}^{(1)} = \widehat{\chi}_R^{(1)} + i\epsilon^2 \widehat{\chi}_I^{(1)}$ bereits in dieser Ordnung erscheint, kann in der Regel vernachlässigt werden.

2.4 Die normierte nichtlineare Schrödingergleichung

Faßt man nun die Evolutionsgleichungen aller Ordnungen für $A(Z, T)$ mit Hilfe von $\partial_Z = \partial_{Z_1} + \epsilon \partial_{Z_2} + \epsilon^2 \partial_{Z_3} + \dots$ zusammen und transformiert die resultierende Gleichung in ein mit der Gruppengeschwindigkeit bewegtes Bezugssystem gemäß $T' = T - \beta_0' Z = \epsilon(t - \beta_0' z)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial Z'} - \frac{\beta_0''}{2} \frac{\partial^2 \widetilde{A}}{\partial T'^2} + \frac{\omega_0 n_{\text{NL}}}{c} |\widetilde{A}|^2 \widetilde{A} + i \frac{\alpha}{2} \widetilde{A} \\ = i\epsilon \left[\frac{\beta_0'''}{6} \frac{\partial^3 \widetilde{A}}{\partial T'^3} - \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left(\frac{\omega_0}{c} n_{\text{NL}} \right) \frac{\partial}{\partial T'} (|\widetilde{A}|^2 \widetilde{A}) - \mu \widetilde{A} \frac{\partial |\widetilde{A}|^2}{\partial T'} - \frac{i}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_0} \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial T'} \right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

wobei $Z' = \epsilon Z = \epsilon^2 z$ bezeichnet und $\widetilde{A}(Z', T') = A(Z, T)$ ist.

Die Leistung im System berechnet sich als Integral der Intensität (= zeitlich gemittelter Poyntingvektor) über den Faserquerschnitt. Mit dem Ansatz (2.16) führt dies in erster Näherung zu

$$P = \epsilon^2 \frac{\beta_0}{2\omega_0 \mu_0} |A|^2 \left\langle \widehat{\mathfrak{E}}_0, \widehat{\mathfrak{E}}_0 \right\rangle. \quad (2.36)$$

In den nächsten Ordnungen treten dann Terme proportional zu Ableitungen der z -Komponente von $\widehat{\mathfrak{E}}_0$ nach r und ϕ sowie Zeitableitungen von A auf. Um nun absolute

Aussagen über die Impuls-Leistung mittels der Gleichung für die langsam veränderliche Einhüllende treffen zu können, d.h. ohne Kenntnis der Modenleistung, sondern nur mit Hilfe der Modenstruktur, führt man gemäß Gleichung (2.36) die Amplitude

$$\bar{A}(Z', T') = \sqrt{\frac{\beta_0}{2\omega_0\mu_0} \langle \widehat{\mathbf{E}}_0, \widehat{\mathbf{E}}_0 \rangle} \tilde{A}(Z', T') \quad (2.37)$$

ein, deren Betragsquadrat ja gerade die Impuls-Leistung darstellt.

Als Resultat folgt die gestörte unnormierte nichtlineare Schrödingergleichung für die Amplitude $\bar{A}(Z', T')$

$$i \frac{\partial \bar{A}}{\partial Z'} - \frac{\beta_0''}{2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial T'^2} + \gamma |\bar{A}|^2 \bar{A} + i \frac{\alpha}{2} \bar{A} = i \epsilon R \quad (2.38)$$

$$R = \frac{\beta_0'''}{6} \frac{\partial^3 \bar{A}}{\partial T'^3} - \gamma_1 \frac{\partial}{\partial T'} (|\bar{A}|^2 \bar{A}) - \gamma_2 \bar{A} \frac{\partial |\bar{A}|^2}{\partial T'} - \frac{i}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_0} \frac{\partial \bar{A}}{\partial T'} \quad (2.39)$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma = \frac{\mu_0 \omega_0 \langle \widehat{\mathbf{E}}_0, \widehat{\chi}^{(3)} \mathfrak{F}(\omega_0) \rangle}{4n_{\text{co}}^2 \langle \widehat{\mathbf{E}}_0, \widehat{\mathbf{E}}_0 \rangle^2} \approx \frac{\omega_0 n_2}{c A_{\text{eff}}} \quad (2.40)$$

$$\gamma_1 = \gamma \frac{\partial}{\partial \omega_0} \ln \left(\frac{\omega_0}{c} n_{\text{NL}} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial \omega_0} + \gamma \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left(\frac{\beta_0}{2\omega_0 \mu_0} \langle \widehat{\mathbf{E}}_0, \widehat{\mathbf{E}}_0 \rangle \right) \approx \frac{\gamma}{\omega_0} \quad (2.41)$$

$$\gamma_2 = \mu \frac{2c \mu_0}{n_{\text{co}} \langle \widehat{\mathbf{E}}_0, \widehat{\mathbf{E}}_0 \rangle} \approx - \frac{3\omega_0 \mu_0 (\widehat{\chi}_+^{(3)} - \widehat{\chi}_-^{(3)})}{2n_{\text{co}}^2 A_{\text{eff}}} = i \gamma T_{\text{R}}. \quad (2.42)$$

Die Näherungsausdrücke wurden unter der Annahme linearer Polarisation und sehr kleiner Frequenzabhängigkeit sowohl von $\widehat{\chi}^{(3)}$ als auch von den Moden und eines über den Faserquerschnitt nahezu konstanten $\widehat{\chi}^{(3)}$ abgeleitet. Der nichtlineare Brechungsindex n_2 hängt mit n_{NL} nur durch die Intensität I als $n_{\text{NL}} = n_2 I$ zusammen. A_{eff} ist die effective Modenfläche und berechnet sich zu

$$A_{\text{eff}} = \frac{\left(\iint |\widehat{\mathbf{E}}_0|^2 dx dy \right)^2}{\iint |\widehat{\mathbf{E}}_0|^4 dx dy}. \quad (2.43)$$

Der Koeffizient γ_2 ist im wesentlichen imaginär und wird durch den Anstieg des Raman gain Spektrums T_{R} bestimmt [12], der sich nach Gleichung (2.34) zu

$$T_{\text{R}} = \frac{1}{\widehat{\chi}^{(3)}} \iiint (2\tau_2 - \tau_1 - \tau_3) \chi^{(3)}(\mathbf{t}, \tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{i\omega_0(\tau_1 + \tau_3 - \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (2.44)$$

berechnet. Benutzt man für $\chi^{(3)}(\mathbf{r}, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ den speziellen Ansatz

$$\chi^{(3)}(\mathbf{r}, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \widehat{\chi}^{(3)} R(\tau_1) \delta(\tau_2 - \tau_1) \delta(\tau_3), \quad (2.45)$$

der den allgemeinen Ausdruck (2.7) in

$$\mathfrak{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \widehat{\chi}^{(3)} \mathfrak{E}(\mathbf{r}, t) \int R(\tau_1) |\mathfrak{E}(\mathbf{r}, t - \tau_1)|^2 d\tau_1 \quad (2.46)$$

überführt, so nimmt T_{R} die in der Literatur zu findende Gestalt

$$T_{\text{R}} = \int \tau R(\tau) d\tau \quad (2.47)$$

an [12]. Detailliertere Untersuchungen zum Raman-Effekt in Glasfasern finden sich in [65, 66].

Normiert man nun die Amplitude $\bar{A}(Z', T')$ auf die Impuls-Spitzenleistung (peak-power) gemäß $\bar{A} = \sqrt{P_0} \tilde{u}$, wobei $P_0 = P(0, 0)$ sein soll, und die Zeit T' auf eine charakteristische Zeit T_0 gemäß $\tau = T'/T_0$, so lassen sich die charakteristischen Längenskalen

$$\begin{aligned} L_{\text{D}} &= \frac{T_0^2}{|\beta_0''|} && \text{Dispersionslänge} \\ L_{\text{NL}} &= \frac{1}{\gamma P_0} && \text{nichtlineare Länge} \end{aligned} \quad (2.48)$$

einführen. Mit der Substitution $\zeta = Z'/L_{\text{D}}$ folgt damit für $u(\zeta, \tau) = \sqrt{\frac{L_{\text{D}}}{L_{\text{NL}}}} \tilde{u}(Z', T')$ die Gleichung

$$iu_{\zeta} - \frac{\text{sgn}(\beta_0'')}{2} u_{\tau\tau} + |u|^2 u + i\Gamma u = i\epsilon R \quad (2.49)$$

$$R = \beta_1 u_{\tau\tau\tau} - \beta_2 (|u|u)_{\tau} - i\sigma_3 u |u|_{\tau}^2 - i\beta_4 u_{\tau}, \quad (2.50)$$

wobei die linke Seite von (2.49) die (verlustbehaftete) normierte nichtlineare Schrödingergleichung darstellt. Die zugehörigen normierten Koeffizienten ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\alpha}{2} L_{\text{D}} && \text{Dämpfung} \\ \beta_1 &= \frac{\beta_0'''}{6|\beta_0''|T_0} && \text{Dispersion 3. Ordnung} \\ \beta_2 &= \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial \omega_0} \ln \left(\frac{\omega_0}{c} n_{\text{NL}} \right) \approx \frac{1}{\omega_0 T_0} && \text{“self-steepening“} \\ \sigma_3 &= -i \frac{\gamma_2}{\gamma T_0} \approx \frac{T_{\text{R}}}{T_0} && \text{Raman-Effekt} \\ \beta_4 &= \frac{L_{\text{D}}}{2T_0} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_0} \approx \frac{\Gamma}{\omega_0 T_0} && \text{Dispersion der Dämpfung.} \end{aligned} \quad (2.51)$$

2.5 Optische Solitonen

Spezielle Lösungen der Gleichung (2.49) mit $\Gamma = 0$, d.h. der nichtlineare Schrödinger-Gleichung in der Standardform

$$iu_\zeta - \frac{\text{sgn}(\beta_0'')}{2}u_{\tau\tau} + |u|^2u = 0, \quad (2.52)$$

stellen für $\beta_0'' < 0$ die hellen Solitonen und für $\beta_0'' > 0$ die dunklen Solitonen dar [58].

Solitonen sind die lokalisierten Lösungen eines nichtlinearen integrablen Systems, die dadurch definiert sind, daß sie bei der Ausbreitung stabil bleiben und sich ohne Formänderung durchdringen. Sie entstehen hier aus dem Zusammenspiel von Dispersion und Nichtlinearität. Ein Impuls, der sich in einem Medium mit Kerr-Nichtlinearität ausbreitet, erfährt eine Selbstphasenmodulation, die mit der Erzeugung eines Chirps verbunden ist. Die Mittenfrequenz variiert unter dem Impuls. Bei positiver nichtlinearer Brechzahl beispielsweise wächst die Frequenz im hinteren Teil des Impulses an, während sie sich im vorderen Teil verringert. Zeigt ein solches Medium nun zusätzlich anomale Dispersion, so kann dieser Chirp kompensiert werden. Für gewisse Impulsformen und angepasste Intensitäten kann es dann zu einer stabilen Impulsausbreitung ohne Formänderung kommen.

Die allgemeine Form der hellen Einsolitonlösung, die man durch Separationsansatz aus Gleichung (2.52) direkt oder mittels inverser Streutheorie [67, 68] gewinnen kann, ergibt sich zu [58]

$$u(\zeta, \tau) = \eta \text{sech}[\eta(\tau - \tau_0 + \kappa\zeta)] e^{-i\kappa\tau} e^{i(\eta^2 - \kappa^2)\frac{\zeta}{2}}, \quad (2.53)$$

wobei η die Amplitude und die inverse Breite und κ die Differenz zur Mittenfrequenz oder analog dazu die Abweichung von der inversen Gruppengeschwindigkeit darstellt. Mit der Formel (2.53) ist es nun möglich, T_0 als Impulsbreite gemäß $T_{\text{FWHM}} = 1.763 T_0/\eta$ zu interpretieren. Die benötigte Impuls-Spitzenleistung berechnet sich zu

$$P_0 = 3.11 \frac{|\beta_0''|}{\gamma T_{\text{FWHM}}^2}. \quad (2.54)$$

Typische Parameter für beispielsweise dispersionsverschobene Fasern bei einer Wellenlänge von $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ sind etwa [64]: $n_2 \approx 2.5 \cdot 10^{-20} \text{m}^2/\text{W}$, $A_{\text{eff}} \approx 40 \mu\text{m}^2$ und $\beta_0'' \approx -1 \text{ps}^2/\text{km}$. Damit ergibt sich $\gamma \approx 2.5W^{-1} \text{km}^{-1}$, woraus für einen Impuls mit der Breite $T_{\text{FWHM}} = 10 \text{ps}$ die Leistung $P_0 \approx 12 \text{mW}$ folgt. Die Dispersionslänge, die hier gleich der nichtlinearen Länge ist, beträgt $L_D \approx 32 \text{km}$.

Solitonen höherer Ordnung entstehen, wenn $N = \sqrt{\frac{L_D}{L_{NL}}}$ die natürlichen Zahlen durchläuft. Sind bei dieser sogenannten N-Solitonen-Lösung alle Geschwindigkeiten κ_i unterschiedlich, so erhält man asymptotisch N voneinander getrennte Solitonen. Andererseits bilden Solitonen mit gleicher Geschwindigkeit einen gebundenen Zustand, der sich durch periodische Änderungen in der Impulsform auszeichnet. Die allgemeine Lösung für $N = 2$ beispielsweise findet man in [58]. Es sei darauf hingewiesen, daß die gebundenen Zustände keine Bindungsenergie haben und somit durch beliebig kleine Störungen aufgebrochen werden können.

Kapitel 3

Variationsmethode für nichtlineare Evolutionsgleichungen

3.1 Grundbegriffe

Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit der Ermittlung von Extrema von Funktionalen, die auf einer Klasse von Funktionen definiert sind. Solche Funktionale können dabei in gewisser Weise als Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes aufgefaßt werden, da sie eine Klasse von Funktionen in den \mathbb{R}^1 abbilden. Diese Verallgemeinerung kann man sich als eine Erweiterung der Funktionen mehrerer Veränderlicher $F = F(Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots)$ auf kontinuierlich veränderliches k vorstellen.

Betrachtet man nun Funktionale in Integralform der Gestalt

$$F[Q] = \int_{t_1}^{t_2} f(Q, Q_t, Q_{tt}, \dots, t) dt, \quad (3.1)$$

und sucht eine Funktion $Q(t)$ derart, daß dieses Funktional unter den Randbedingungen $Q(t_1) = Q_1$ und $Q(t_2) = Q_2$ extremal wird, so muß die Funktion $Q(t)$ der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung genügen [69], die als notwendige Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation δF des Funktionals $F[Q]$ erscheint. Die erste Variation (Gâteaux-Differential oder Gâteaux-Variation) ist dabei gemäß

$$\delta F := \left. \frac{d}{d\mu} F[Q + \mu\Delta Q] \right|_{\mu=0} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{F[Q + \mu\Delta Q] - F[Q]}{\mu} \quad (3.2)$$

definiert. Setzt man nun Funktionale der Gestalt (3.1) in diese Definition ein, so wird man mittels Anwendung partieller Integration und unter Berücksichtigung oben ge-

nannter Randbedingungen auf einen Ausdruck der Gestalt

$$\delta F = \int \left(\frac{\partial f}{\partial Q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial Q_t} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f}{\partial Q_{tt}} - \dots \right) \Delta Q(t) dt =: \int \frac{\delta F[Q]}{\delta Q(t)} \Delta Q(t) dt \quad (3.3)$$

geführt, wobei $\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(t)}$ als Funktionalableitung oder Volterra-Ableitung bezeichnet wird. In der Mathematik spielt die Funktionalableitung nur noch eine untergeordnete Rolle und ist insbesondere bei theoretischen Betrachtungen durch die Konzepte der Gâteaux-Ableitung und des Fréchet-Differentials verdrängt worden. Bei praktischeren Fragen, wie etwa funktionalanalytischen Methoden zur Numerik, erweist sie sich allerdings als nützlich und wird auch in der Physik, z.B. in Feldtheorien, häufig verwendet [70]. Die Bezeichnung $\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(t)}$ soll die Analogie zur partiellen Ableitung bei gewöhnlichen Funktionen verdeutlichen. Das Gâteaux-Differential oder die erste Variation können somit als Verallgemeinerung des totalen Differentials gewöhnlicher Funktionen $dF = \sum_k \frac{\partial F}{\partial Q_k} dQ_k$ auf Funktionale betrachtet werden. Die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung zur Bestimmung der Funktion $Q(t)$, die das Funktional (3.1) extremiert, folgt jetzt unmittelbar aus dem Verschwinden der Funktionalableitung $\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(t)} = 0$ ganz analog zur Bestimmung der Extremstellen bei gewöhnlichen Funktionen.

Ein anderes interessantes Beispiel ist das Funktional $F[Q] = Q(t')$, das die Funktion $Q(t)$ an der Stelle t' liefert. Unter Benutzung von $F[Q + \mu \Delta Q] = Q(t') + \mu \Delta Q(t')$ ergibt sich aus Formel (3.2) zusammen mit der Definition für die Funktionalableitung (3.3) der Ausdruck

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{F[Q + \mu \Delta Q] - F[Q]}{\mu} = \Delta Q(t') = \int \frac{\delta F[Q]}{\delta Q(t)} \Delta Q(t) dt, \quad (3.4)$$

aus dem man unmittelbar

$$\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(t)} = \frac{\delta Q(t')}{\delta Q(t)} = \delta(t - t') \quad (3.5)$$

abliest. Die Diracsche δ -Funktion tritt also jetzt an die Stelle des Kronecker-Symbols der gewöhnlichen Ableitung $\frac{\partial Q_k}{\partial Q_m} = \delta_{km}$.

3.2 Das inverse Problem der Variationsrechnung

Die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung für eine Funktion $Q(t)$ ergibt sich als notwendige Bedingung dafür, einem Funktional $F[Q]$ ein Extremum zu erteilen. Unter dem inversen Problem der Variationsrechnung versteht man die Aufgabe, zu einer vorgegebenen gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung ein Funktional $F[Q]$ zu

konstruieren, wobei aus dem Verschwinden der Funktionalableitung $\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(t)} = 0$ gerade diese Differentialgleichung folgt. Im allgemeinen ist es jedoch ziemlich kompliziert, ein solches Funktional zu konstruieren.

Im Falle der nichtlinearen Schrödingergleichung (2.52) beispielsweise, die ja eine nichtlineare partielle Differentialgleichung darstellt, ergibt sich als zugehöriges Funktional ein zweidimensionales Integral der Gestalt

$$L[u, u^*] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} l(u, u^*, u_t, u_t^*, u_z, u_z^*, z) dt dz, \quad (3.6)$$

da die gesuchte Funktion $u(z, t)$ zweidimensional und komplex ist. Analog zur klassischen Mechanik soll l als Lagrangesche Funktion bezeichnet werden. Diese bekommt im vorliegenden Fall die explizite Gestalt

$$l = \frac{i}{2}(u_z u^* - u u_z^*) - \frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}|u|^4 \quad (3.7)$$

[71]. Da l von $u(z, t)$ und $u^*(z, t)$ abhängt und da beide Funktionen unabhängig voneinander sind, müssen hier die Funktionalableitungen

$$\frac{\delta L}{\delta u} = \frac{\partial l}{\partial u} - \frac{d}{dz} \frac{\partial l}{\partial u_z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial u_t} \quad (3.8)$$

$$\frac{\delta L}{\delta u^*} = \frac{\partial l}{\partial u^*} - \frac{d}{dz} \frac{\partial l}{\partial u_z^*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial u_t^*} \quad (3.9)$$

unabhängig voneinander verschwinden. Als Resultat folgt dann die nichtlineare Schrödingergleichung (2.52) sowie ihr komplex Konjugiertes.

3.3 Das Variationsverfahren unter Benutzung eines Ansatzes

In vielen Gebieten der Physik spielen nichtlineare partielle Differentialgleichungen mit solitären Wellenlösungen, wie z.B. die nichtlineare Schrödingergleichung, eine immer größer werdende Rolle. Da aber analytische Verfahren zur Lösung solcher nichtlinearer Probleme nur für ganz spezielle Klassen von Gleichungen zur Verfügung stehen und numerische Lösungen sehr aufwendig sind, ist man natürlich an Näherungsmethoden sehr stark interessiert.

Eine besonders populäre Methode ist das Variationsverfahren, das für die nichtlineare Optik am Beispiel der nichtlinearen Schrödingergleichung von Anderson [71]

eingeführt wurde. Mit Hilfe dieses Näherungsverfahrens ist es möglich, grundlegende physikalische Zusammenhänge sehr einfach anschaulich darzustellen. Alles, was man dazu braucht, ist eine Lagrangefunktion und den richtigen Ansatz. Und genau da liegen dann auch die Probleme. Wie im nächsten Punkt gezeigt werden wird, ist die Existenz einer Lagrangefunktion nicht unbedingt eine notwendige Voraussetzung. Aber die Wahl einer geeigneten Ansatzfunktion ist von entscheidender Bedeutung für die Güte der Ergebnisse. Exakt werden sie nie sein können. Auch ist es fraglich, ob sie mit einem immer raffinierter werdenden Ansatz die wahre Lösung auch besser approximieren. Fakt ist, daß es bisher noch keine Möglichkeit gibt, die Genauigkeit der Ergebnisse abzuschätzen. Vielmehr ist der letzte und entscheidende Test immer noch der Vergleich mit numerischen Ergebnissen.

Der Grund für dieses Dilemma ist der mit dem Ansatz verbundene Verlust einer Vielzahl von Freiheitsgraden des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems. Im Falle der nichtlinearen Schrödingergleichung wird ein Ansatz immer die Form $u(z, t) = U(q_k(z), t)$ mit N freien, z -abhängigen Parametern $q_k(z)$ haben. Die große Kunst besteht nun darin, die richtige Funktion U mit genügend vielen Parametern $q_k(z)$ zu finden. Aber auch eine noch so gute Wahl von U kann nicht verhindern, daß der ursprünglich unendlich-dimensionale Raum der Variationen auf einen N -dimensionalen Unterraum, in dem nur noch Variationen in die q_k -Richtungen möglich sind, eingeschränkt wird. Die Festlegung einer Ansatzfunktion ist mit einer künstlichen Auferlegung holonomer Nebenbedingungen vergleichbar.

Dennoch bietet die Variationsrechnung oftmals die einzige Möglichkeit, zu analytischen Ergebnissen zu gelangen. Und gerade im Fall der nichtlinearen Schrödingergleichung inklusive eventueller Störterme hat sich diese Methode gut bewährt. Solitonen höherer Ordnung werden sich natürlich im allgemeinen nicht beschreiben lassen, aber für fundamentale Solitonen und auch für deren Wechselwirkungen funktioniert die Technik ausgesprochen gut. Das liegt natürlich daran, daß Solitonen auch unter dem Einfluß kleiner Störungen relativ konstante Impulsformen aufweisen, wobei sich nur gewisse Impulsparameter ändern. Eventuell auftretende Strahlung kann natürlich ebenfalls nicht erfaßt werden. Aber das Ziel ist ja, gerade im Hinblick auf die Anwendung optischer Solitonen in der Nachrichtentechnik, Abstrahlungen von den Impulsen so weit wie möglich zu vermeiden.

Um nun diese Methode allgemein zu entwickeln, sollen nur nichtlineare partielle

Differentialgleichungen vom Typ der Evolutionsgleichungen gemäß

$$iu_z = iY(u, u^*, u_t, u_t^*, u_{tt}, u_{tt}^*, \dots, z) \quad (3.10)$$

betrachtet werden, d.h. die rechte Seite der Gleichung soll unabhängig von u_z sein. Die Lagrangesche Funktion sei gegeben durch

$$L[u, u^*] = L_0 + L_1 = \iint (l_0 + l_1) dt dz, \quad (3.11)$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_0}{\delta u} &= -iu_z^*, & \frac{\delta L_0}{\delta u^*} &= iu_z \\ \frac{\delta L_1}{\delta u} &= iY^*, & \frac{\delta L_1}{\delta u^*} &= -iY \end{aligned} \quad (3.12)$$

gelten soll. Die Funktion l_0 kann leicht nach Formel (3.7) als

$$l_0(u, u^*, u_z, u_z^*) = \frac{i}{2}(u_z u^* - u u_z^*) \quad (3.13)$$

angegeben werden. Die explizite Form von $l_1 = l_1(u, u^*, u_t, u_t^*, \dots, z)$ hängt von der speziellen Struktur von Y in Gleichung (3.10) ab. Es wird sich aber zeigen, das die Kenntnis von l_1 nicht unbedingt erforderlich ist.

Nun wird der Ansatz $u = U(q_k(z), t)$ in die Lagrange-Funktionen l_0 und l_1 eingesetzt. Für die Funktionale (3.11) bedeutet das

$$L_0[u, u^*] \rightarrow \tilde{L}_0[q_k] = \int \tilde{l}_0(q_k(z), q_k'(z)) dz \quad (3.14)$$

$$L_1[u, u^*] \rightarrow \tilde{L}_1[q_k] = \int \tilde{l}_1(q_k(z), z) dz, \quad (3.15)$$

wobei die neuen Lagrange-Funktionen \tilde{l}_0 und \tilde{l}_1 gemäß

$$\tilde{l}_0(q_k(z)) = \int l_0(U(q_k, t), U^*(q_k, t), U_z(q_k, t), U_z^*(q_k, t)) dt \quad (3.16)$$

$$\tilde{l}_1(q_k(z), z) = \int l_1(U(q_k, t), U^*(q_k, t), U_t(q_k, t), U_t^*(q_k, t), \dots, z) dt \quad (3.17)$$

definiert sind.

Das Verschwinden der 1. Variation von L , das ja dem Hamiltonprinzip der klassischen Mechanik entspricht, nimmt nun die Gestalt

$$\frac{\delta \tilde{L}_0}{\delta q_k} = -\frac{\delta \tilde{L}_1}{\delta q_k} \quad (3.18)$$

an. Die Funktionalableitungen können explizit berechnet werden und ergeben sich zu

$$\frac{\delta \tilde{L}_0}{\delta q_k} = -2 \sum_{j=1}^N q'_j \operatorname{Im} \int \frac{\partial U}{\partial q_j} \frac{\partial U^*}{\partial q_k} dt = -2 \sum_{j=1}^N m_{kj} q'_j \quad (3.19)$$

$$\frac{\delta \tilde{L}_1}{\delta q_k} = 2 \operatorname{Im} \int Y \frac{\partial U^*}{\partial q_k} dt, \quad (3.20)$$

so daß als Resultat ein gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Parameter $q_k(z)$ gemäß

$$\vec{q}' = \hat{M}^{-1} \operatorname{Im} \int Y \nabla_{\vec{q}} U^* dt \quad (3.21)$$

folgt. Die Elemente der Matrix \hat{M} sind dabei definiert als

$$m_{kj} = \operatorname{Im} \int \frac{\partial U^*}{\partial q_k} \frac{\partial U}{\partial q_j} dt, \quad (3.22)$$

woraus sofort folgt, daß \hat{M} eine schiefsymmetrische Matrix ist, d.h. daß $m_{ii} = 0$ und $m_{ij} = -m_{ji}$ gilt. Zur Berechnung der Inversen von \hat{M} muß als notwendige und hinreichende Bedingung die Determinante von \hat{M} ungleich Null sein. Das ist im vorliegenden Fall aber nur möglich, wenn die Dimension von \hat{M} eine gerade Zahl ist. Daraus folgt nun sofort, daß immer Paare konjugierter Variabler q_k gewählt werden müssen.

Wie aus Gleichung (3.21) ersichtlich ist, taucht die Lagrangefunktion l_1 gar nicht mehr auf. Das ist eine Folge ihrer Unabhängigkeit von u_z . Es liegt also die Vermutung nahe, daß obige Theorie auch auf partielle Differentialgleichungen vom Evolutionstyp, die keine Lagrangefunktion besitzen, angewendet werden kann.

3.4 Anwendung auf die gestörte nichtlineare Schrödingergleichung

Als Beispiel für eine Differentialgleichung ohne Lagrangefunktion soll die gestörte nichtlineare Schrödingergleichung (2.49) betrachtet werden, wobei aber die Verluste zunächst unberücksichtigt bleiben sollen, d.h. $\Gamma = 0$. Die Ansatzfunktion soll die Gestalt

$$u(\zeta, \tau) = \eta \sqrt{p} e^{-(1-i\frac{\nu}{p})\frac{t^2}{2} - i\kappa\tau + i\phi} \quad (3.23)$$

mit $t = p(\tau - T_0)$ haben. Der Vektor \vec{q} der freien Parameter q_k besitzt damit 6 Komponenten gemäß

$$\vec{q} = (\eta(\zeta), \phi(\zeta), p(\zeta), \nu(\zeta), \kappa(\zeta), T_0(\zeta))^T. \quad (3.24)$$

Hierbei bedeuten $\eta\sqrt{p}$ die Amplitude, p die inverse Impulsbreite, T_0 die Lage, κ die Abweichung von der Mittenfrequenz des Impulses, ν/p den chirp und ϕ den in der Zeit konstanten Anteil der Phase.

Man hätte natürlich auch einen anderen Ansatz mit beispielsweise einer anderen funktionalen Form wählen können. Die Wahl dieser Gauß-förmigen Funktion hat den entscheidenden Vorteil, daß alle in (3.21) auftretenden Integrale analytisch gelöst werden können. Das wäre zwar auch im Falle der sech-Funktion möglich, aber da sich diese Wahl im vorliegenden Beispiel lediglich auf den Wert einiger Konstanten im resultierenden Differentialgleichungssystem auswirken wird, nicht aber auf dessen Struktur, soll die einfachere Gauß-Funktion betrachtet werden.

Einsetzen des Ansatzes (3.23) in die Gleichung (3.21), wobei Y aus Gleichung (2.49) zu entnehmen ist, liefert das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\eta' = 0 \quad (3.25a)$$

$$p' = p^2 \nu (\vartheta + 6\beta_1 \kappa) \quad (3.25b)$$

$$\nu' = -p^2 \left(\vartheta p + \frac{g}{\sqrt{2}} \eta^2 \right) - p^2 \kappa \left(6\beta_1 p + \frac{\beta_2}{\sqrt{2}} \eta^2 \right) \quad (3.25c)$$

$$\phi' = \frac{\vartheta}{2} p^2 + \frac{5g}{4\sqrt{2}} p \eta^2 - \frac{\vartheta}{2} \kappa^2 + \frac{3}{2} \beta_1 \kappa \left(p^2 - \frac{4}{3} \kappa^2 - \nu^2 \right) - \frac{\beta_2}{4\sqrt{2}} p \eta^2 \kappa \quad (3.25d)$$

$$\kappa' = -\frac{p^2 \eta^2}{\sqrt{2}} (\sigma_3 p + \beta_2 \nu) \quad (3.25e)$$

$$T_0' = \vartheta \kappa + \frac{3}{2} \beta_1 (p^2 + \nu^2 + 2\kappa^2) + \frac{3\beta_2}{2\sqrt{2}} p \eta^2 \quad (3.25f)$$

für die freien Parameter. Aus Gründen der Übersichtlichkeit und damit auch die Herkunft der einzelnen Terme besser identifiziert werden kann, wurden die Koeffizienten ϑ anstelle von $\text{sgn}(\beta_0'')$ und g als Vorfaktor der Kerr-Nichtlinearität in Gleichung (2.49) eingefügt.

Betrachtet man zunächst nur den Ramaneeffekt, d.h. $\beta_1 = \beta_2 = 0$, so erhält man als Lösung für den Spezialfall $\eta = 2^{1/4} \sqrt{p}$, für den nach Gleichungen (3.25b) und (3.25c) mit $\vartheta = -1$ und $g = 1$ die inverse Breite p eine Konstante ist, die Lösung

$$\kappa = -\sigma_3 p^4 \zeta \quad (3.26a)$$

$$T_0 = \frac{\sigma_3}{2} p^4 \zeta^2 \quad (3.26b)$$

für die störungsbedingte Frequenzverschiebung, die natürlich auch mit einer Positionsverschiebung verbunden ist. Die Amplitude des Impulses, die sich ja nach Ansatz (3.23) gemäß $\eta\sqrt{p}$ berechnet, ergibt sich zu $A = 2^{1/4}p$, woraus für die Frequenzverschiebung nun $\kappa = -\frac{\sigma_3}{2} A^4 \zeta$ folgt. Das mittels adiabatischer Störungstheorie gewonnene Ergebnis [57, 72] unterscheidet sich von obigem lediglich durch den Vorfaktor $8/15$ anstelle von $1/2$. Die kleine Differenz ist durch den Gauß-förmigen Ansatz bedingt. Hätte anstelle der Exponentialfunktion in (3.23) die sech-Funktion Anwendung gefunden, so wären beide Ergebnisse identisch gewesen.

Analoges gilt auch für den Fall der Dispersion 3. Ordnung. Hier ergibt sich unter den gleichen Voraussetzungen für den Impuls, nun aber mit $\beta_2 = \sigma_3 = 0$,

$$\kappa = \text{const} \quad (3.27a)$$

$$T_0 = \frac{3}{2}\beta_1 p^2 \zeta = \frac{3}{2\sqrt{2}}\beta_1 A^2 \zeta. \quad (3.27b)$$

Auch dieses Ergebnis stimmt mit dem mittels adiabatischer Störungstheorie [73] gewonnenem, bis auf den Vorfaktor (dort 1, hier 1.06), überein.

Abbildung 3.1 läßt eine sehr gute Übereinstimmung dieser Ergebnisse mit der direkten numerischer Simulation von Gleichung (2.49) unter Anwendung der Strahlverfolgungsmethode (BPM¹) erkennen. Voraussetzung dafür ist natürlich, daß die Impuls-

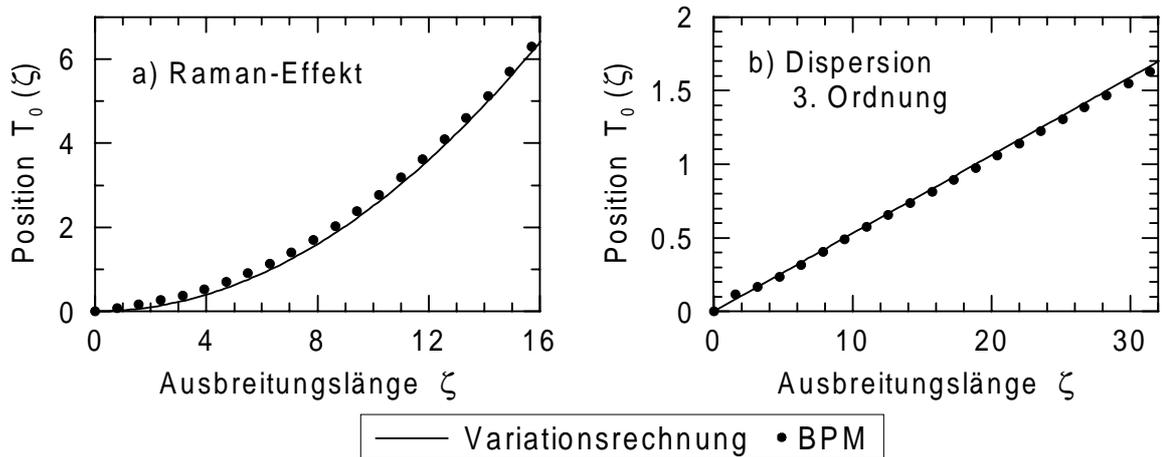


Abbildung 3.1: Vergleich von Variationsrechnung und BPM-Simulation für Gleichung (2.49) mit $\beta_2 = 0$ und a) $\beta_1 = 0, \sigma_3 = 0.1$ (Raman-Effekt), sowie b) $\beta_1 = 0.05, \sigma_3 = 0$ (Dispersion 3. Ordnung).

¹Beam Propagation Method: Split-Step-FFT Verfahren, bei dem eine gegebene Anfangsfeldverteilung schrittweise durch die Faser propagiert wird [64].

form gewahrt bleibt und daß sich die Störungen nur auf die Impulsparameter auswirken. Ein größerer Wert von β_1 beispielsweise bewirkt eine stark asymmetrische Impulsverbreiterung, so daß obige Theorie nicht mehr anwendbar ist.

In Abbildung 3.2 ist die kombinierte Wirkung der Dispersion 3. Ordnung und des Raman-Effektes dargestellt. Hier ist nun neben der Mittenfrequenz und der Position auch die Impulsbreite sowie der Chirp beeinflusst. Die Ergebnisse sind immer noch zufriedenstellend. Mit der Dynamik der Impulsbreite, die auch eine Änderung der Amplitude bewirkt, kann aber die Impulsform nicht konstant bleiben, so daß nach einer bestimmten Ausbreitungsstrecke die Theorie versagen wird. Auch bleibt immer der Strahlungsanteil unberücksichtigt.

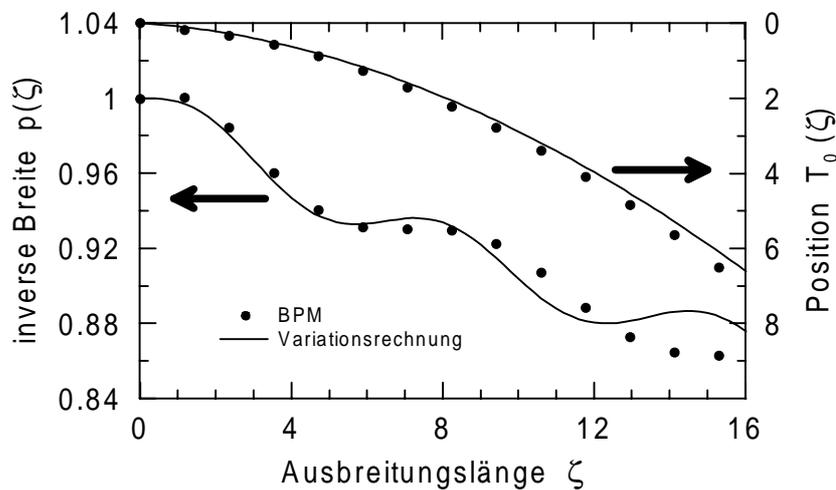


Abbildung 3.2: Vergleich von Variationsrechnung und BPM-Simulation für Gleichung (2.49) mit $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 0.04$ und $\sigma_3 = 0.05$ (Raman-Effekt und Dispersion 3. Ordnung) und den Anfangsbedingungen $\eta = 1.1892$ und $p(0) = 1$.

Alles in Allem liefert die Variationsrechnung sehr anschauliche und zum Teil sogar analytische Ergebnisse. Die Haupteigenschaften des betrachteten Systems werden, abhängig von einer vernünftigen Wahl des Ansatzes, in der Regel richtig beschrieben. Wäre zum Beispiel in Ansatz (3.23) die Impulsbreite als konstant angenommen worden, so hätten die Ergebnisse (3.26a) - (3.27b) genauso abgeleitet werden können, aber die kombinierte Wirkung von Dispersion 3. Ordnung und des Raman-Effektes wäre falsch beschrieben worden.

Kapitel 4

Der Einfluß von Dispersionsmanagement und periodischer Verstärkung auf die Impulsdynamik

Die in diesem Kapitel zu betrachtenden optischen Informationssysteme sollen aus periodisch aufeinanderfolgenden Glasfasern unterschiedlicher Dispersion aufgebaut sein. Zur Kompensierung der Verluste seien in regelmäßigen Abständen Verstärker eingebracht. Abbildung 4.1 zeigt die einfachste Möglichkeit, ein solches System zu realisieren. Am Ort des Verstärkers baut man dabei dispersionskompensierende Faserstücke ein. Diese müssen im zu betrachtenden Wellenlängenbereich von $\lambda = 1.55 \mu m$ normale Gruppengeschwindigkeitsdispersion aufweisen, da die eigentliche Übertragungsfaser, so wie sie in ganz Europa in der Vergangenheit verlegt wurde, bei dieser Wellenlänge

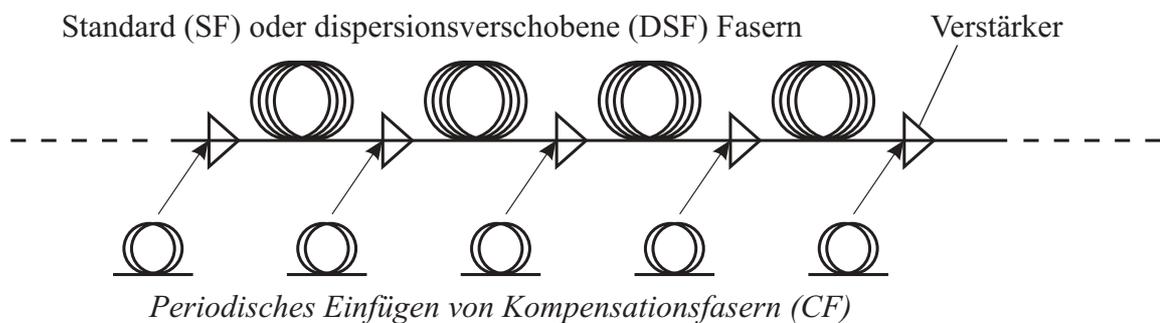


Abbildung 4.1: Prinzipieller Aufbau eines Übertragungssystems mit Dispersionsmanagement

eine hohe anomale Dispersion von etwa $\beta_0'' \approx -20 \text{ ps}^2/\text{km}$ besitzt. Ziel dieser Technik ist, wie bereits in der Einleitung erwähnt, eine deutliche Reduzierung der mittleren Dispersion.

Im folgenden soll die Wirkung periodisch variierender Materialparameter auf einzelne Impulse untersucht werden. Als Grundgleichung dient die unnormierte nichtlineare Schrödingergleichung (2.38) für die Feldamplitude $\bar{A}(Z', T')$ in der Form

$$i \frac{\partial \bar{A}}{\partial Z'} - \frac{\beta_0''(Z')}{2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial T'^2} + \gamma(Z') |\bar{A}|^2 \bar{A} + i \frac{\alpha(Z')}{2} \bar{A} = i \bar{G}(Z') \bar{A}, \quad (4.1)$$

wobei vorerst die Störterme (2.39) unberücksichtigt bleiben sollen. Die Gruppengeschwindigkeitsdispersion β_0'' , der nichtlineare Koeffizient γ sowie der Extinktionskoeffizient α sollen sich periodisch mit der Ausbreitungsrichtung ändern und werden in den folgenden Betrachtungen einen stufenförmigen Verlauf annehmen. Der Term auf der rechten Seite der Gleichung soll die periodische Verstärkung darstellen. Effekte durch Bandbreitenbegrenzung sowie durch Sättigung sollen dabei vernachlässigt werden. Tatsächlich sind diese Effekte bei den verwendeten EDFA's für nicht zu kurze Impulse ($T_{\text{FWHM}} > 1 \text{ ps}$) sehr klein und rechtfertigen dieses Vorgehen.

Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 2.4 führt man auch hier eine dimensionslose Amplitude \tilde{u} gemäß $\bar{A} = \sqrt{P_0} \tilde{u}$ ein, wobei aber P_0 eine zunächst beliebige Normierungsleistung sein soll. Die Zeit T' wird wieder auf eine charakteristische Zeit T_0 normiert, so daß die Gleichung

$$i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z'} - \frac{\beta_0''(Z')}{2T_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} + \gamma(Z') P_0 |\tilde{u}|^2 \tilde{u} + i \frac{\alpha(Z')}{2} \tilde{u} = i \bar{G}(Z') \tilde{u} \quad (4.2)$$

entsteht.

Für die charakteristischen Längenskalen erscheint es sinnvoll, sie über gemittelte Größen zu definieren. Sie ergeben sich analog (2.48) zu

$$\begin{aligned} L_D &= \frac{T_0^2}{|\langle \beta_0'' \rangle|} && \text{Dispersionslänge} \\ L_{\text{NL}} &= \frac{1}{\langle \gamma \rangle P_0} && \text{nichtlineare Länge.} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Da nun aber der Fall eintreten kann und auch wird, daß die mittlere Dispersion $|\langle \beta_0'' \rangle|$ verschwindet, ist die Dispersionslänge nicht zur Normierung der Ausbreitungslänge Z' geeignet. Der nichtlineare Koeffizient γ ist dagegen immer positiv, so daß generell auf die nichtlineare Länge normiert werden soll. Um die durch die periodische Verstärkeranordnung zwangsläufig auftretende Resonanzstrahlung gering zu halten, müssen die

charakteristischen Längenskalen (4.3) viel größer als der Verstärkerabstand sein [4, 7, 8]. Die daraus resultierende schnelle Variation der Amplitude aufgrund der Verluste und dieser periodischen Verstärkung kann dann gemäß $\tilde{u}(Z', \tau) = a(\zeta)u(\zeta, \tau)$ separiert werden [59], ζ ist dabei als $\zeta = Z'/L_{\text{NL}}$ definiert.

Mit der Forderung, daß sich $a(\zeta)$ wie

$$a(\zeta) = a(0)e^{\int_0^\zeta (G(z) - \Gamma(z)) dz} \quad (4.4)$$

verhalten soll, folgt dann für $u(\zeta, \tau)$ die Gleichung

$$iu_\zeta - \frac{\vartheta(\zeta)}{2}u_{\tau\tau} + g(\zeta)|u|^2u = 0, \quad (4.5)$$

wobei für die Koeffizienten $\vartheta(\zeta)$, $g(\zeta)$ und $\Gamma(\zeta)$ die Definitionen

$$\vartheta(\zeta) = \frac{L_{\text{NL}}}{L_{\text{D}}^{\text{lok}}} = \frac{L_{\text{NL}}\beta_0''}{2T_0^2} \quad (4.6)$$

$$g(\zeta) = \frac{\gamma}{\langle \gamma \rangle} a^2 \quad (4.7)$$

$$\Gamma(\zeta) = \frac{\alpha}{2} L_{\text{NL}} \quad (4.8)$$

abgelesen werden können. Der Koeffizient der Verstärkung $G(\zeta)$ muß gemäß

$$G = \langle \Gamma \rangle \zeta_a \sum_{n=1}^N \delta(\zeta - n\zeta_a) \quad (4.9)$$

definiert werden, damit er die Verluste exakt kompensieren kann. Eingesetzt in Gleichung (4.4) folgt dann für die schnelle Amplitudenvariation

$$a(\zeta) = a(0) e^{-\int_0^\zeta \Gamma(z) dz} \prod_{n=1}^N e^{(\Gamma)\zeta_a \Theta(\zeta - n\zeta_a)}, \quad (4.10)$$

wobei $\Theta(x)$ die gewöhnliche Stufenfunktion darstellt, d.h. $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$. Es ist leicht zu erkennen, daß damit tatsächlich $a(k\zeta_a) = a(0)$ für alle $k \leq N$ gilt.

Abbildung 4.2 soll den typischen funktionalen Verlauf der Parameter $g(\zeta)$ und $\vartheta(\zeta)$ aus Gleichung (4.5) verdeutlichen, wobei, wie bereits oben erwähnt, stückweise konstante Materialparameter vorausgesetzt wurden.

Aufgrund des periodischen Aufbaus der Übertragungsstrecke kommt nun noch ein weiterer Freiheitsgrad ins Spiel, und zwar der *launch-point* ζ_0 . Das ist der Punkt innerhalb einer Periode, an dem das Signal in die Faser eingespeist wird. Das Signal soll

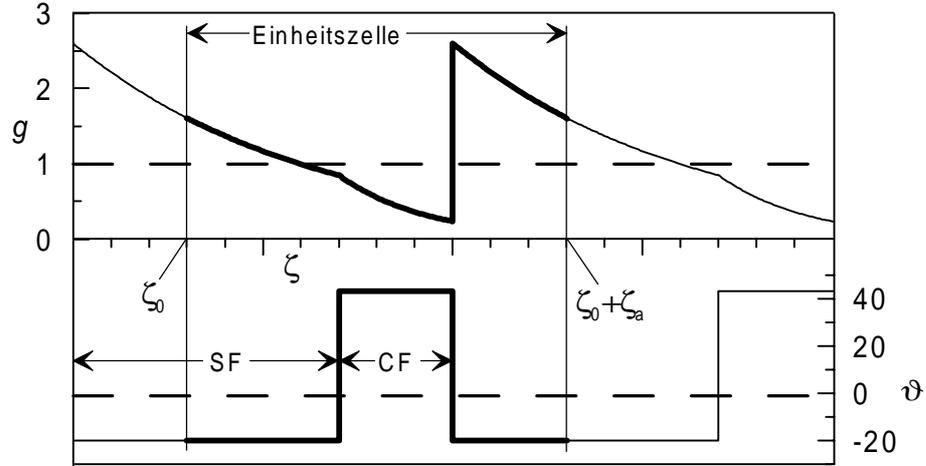


Abbildung 4.2: Definition der Einheitszelle des Übertragungssystems

dabei immer aus chirp-freien Impulsen bestehen. Eine volle Periode, vom launch-point aus betrachtet, soll *Einheitszelle* genannt werden (Abbildung 4.2).

Läßt man nun die Übertragungsstrecke am launch-point ζ_0 beginnen und bezeichnet die Längen von Standardfaser (SF) und Kompensationsfaser (CF) mit ζ_1 bzw. ζ_2 und deren Dispersionen mit ϑ_1 bzw. ϑ_2 sowie deren Verluste mit Γ_1 bzw. Γ_2 , so lassen sich für die Koeffizienten $g(\zeta)$ und $\vartheta(\zeta)$ die Formeln

$$\vartheta(\zeta) = \vartheta_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_1) \sum_{n=1}^N [\Theta(\zeta - n\zeta_a + \zeta_0 + \zeta_2) - \Theta(\zeta - n\zeta_a + \zeta_0)] \quad (4.11)$$

$$g(\zeta) = a(0)^2 e^{-2\Gamma_1\zeta_0} e^{-2\int_0^\zeta \Gamma(z) dz} \prod_{n=1}^N e^{2\langle\Gamma\rangle\zeta_a\Theta(\zeta - n\zeta_a + \zeta_0)} \quad (4.12)$$

angeben, auf die im weiteren ausschließlich Bezug genommen werden soll. Vorausgesetzt wurde hier allerdings, daß der Verstärkerabstand und die Periode des Dispersionsmanagements identisch sind, d.h. $\zeta_a = \zeta_1 + \zeta_2$, und daß der Verstärker immer am Rand eines Faserstückes lokalisiert ist. Das entspricht aber genau der praktisch relevanten Situation.

In den nächsten Abschnitten soll nun die Impulsausbreitung auf der Basis von Gleichung (4.5) mit Hilfe verschiedener Methoden analysiert werden.

4.1 Beschreibung im Originalraum

Als besonders mächtige Methode hat sich hier die Variationsrechnung, wie sie in Kapitel 3 vorgestellt wurde, herausgestellt. Natürlich läßt sich damit nicht jede beliebige

Impulsdynamik beschreiben, aber die stroboskopisch stationäre Lösung wird gut analysierbar sein. Mit stroboskopisch stationär soll die Lösung bezeichnet sein, die sich periodisch nach jeder Einheitszelle, bis auf ihre in der Zeit konstante Phase, wieder reproduziert. Die Variationsmethode, angewandt auf Systeme mit variierender Dispersion, wurde zuerst in [16] beschrieben und soll im nächsten Abschnitt ausführlich diskutiert werden.

Eine andere Methode, die aber nur für sehr schwaches Dispersionsmanagement geeignet ist, ist das gemittelte Solitonenkonzept [4, 59, 74]. Mit diesem ist es möglich, die Änderung der Impulsform vom gewöhnlichen Soliton (2.53) hin zum *dispersion-managed* Soliton zu analysieren. Das Konzept wird im Punkt 4.1.2 beschrieben.

Zum Schluß soll noch ganz kurz das *Quasi-soliton* [75] vorgestellt werden. Es bildet insofern hier eine Ausnahme, da ein stufenförmiger Dispersionsverlauf nicht vorausgesetzt wird.

Zu einer weiteren, der Variationsrechnung sehr ähnlichen Theorie, die zu einem großen Teil auf der Momentenmethode [76, 77] basiert, soll hier nicht näher eingegangen werden. Sie ist in [78–80] ausführlich beschrieben. Für die schnellen Oszillationen der Impulsbreite und des chirps innerhalb der Einheitszelle liefert sie genau die selben Gleichungen, die im nächsten Abschnitt abgeleitet werden. Als Impulsform dient jedoch eine Entwicklung nach Gauß-Hermite Funktionen, deren Entwicklungskoeffizienten als Resultat einer Mittelung gewonnen werden.

Daneben gibt es noch eine Reihe ähnlicher Methoden, die sich eine Entwicklung nach Gauß-Hermite Funktionen zunutze machen, wie z.B. die Interpretation der *dispersion-managed* Solitonen als nichtlineare Bloch Wellen [81] oder die Gewinnung der Entwicklungskoeffizienten durch Minimierung der Restenergie des Impulses [82].

4.1.1 Variationsmethode

Wie bereits in Kapitel 3 dargelegt wurde, besteht die größte Schwierigkeit bei dieser Methode in der Wahl der richtigen Ansatzfunktion. Numerische Simulationen der Gleichung (4.5) zeigen, besonders für nicht zu schwaches Dispersionsmanagement, daß ein einzelner Impuls ein Verhalten aufweist, wie man es in linearen Systemen erwarten würde. Innerhalb einer Einheitszelle wird aufgrund der hohen lokalen Dispersion ein chirp generiert, womit auch eine Zunahme der Impulsbreite verbunden ist. Am Ende der Einheitszelle soll natürlich der chirp wieder verschwunden und die Impulsbreite genauso groß wie am Anfang der Einheitszelle sein. In linearen Systemen würde dies eine

mittlere Dispersion von Null erfordern. Hier muß nun zusätzlich auch der nichtlinear generierte chirp kompensiert werden. Wie weiter unten gezeigt werden wird, ist aber dafür nicht unbedingt eine mittlere anomale Dispersion, wie sie in Solitonensystemen ohne Dispersionsmanagement gebraucht wird, erforderlich.

Demgemäß soll nun Gleichung (4.5) in der Form

$$iu_\zeta - \frac{d(\zeta)}{2}u_{\tau\tau} + \varepsilon \left(-\frac{\langle \vartheta \rangle}{2}u_{\tau\tau} + g(\zeta)|u|^2u \right) = 0, \quad (4.13)$$

geschrieben werden, wobei die Gruppengeschwindigkeitsdispersion $\vartheta(\zeta)$ in einen konstanten und einen fluktuierenden Anteil gemäß $\vartheta(\zeta) = \langle \vartheta \rangle + d(\zeta)$ zerlegt wurde. Die Spitzklammern $\langle \cdot \rangle$ bedeuten dabei Mittelung über eine Einheitszelle. Zusätzlich sei der Größenordnungsparameter ε eingefügt, der anzeigen soll, daß die schnelle Impulsdynamik hauptsächlich durch $d(\zeta)$ bestimmt wird. Auf längeren Skalen darf natürlich der Einfluß der letzten beiden Terme nicht vernachlässigt werden.

Aus oben Gesagtem liegt es also nahe, einen Ansatz der Form

$$u(\zeta, \tau) = \eta(\zeta)\sqrt{p(\zeta)}f[p(\zeta)\tau]e^{i\phi(\zeta)+i\frac{\nu(\zeta)}{2p(\zeta)}\frac{f''[p(\zeta)\tau]}{f[p(\zeta)\tau]}} \quad (4.14)$$

anzuwenden, wobei die Funktion $f(x)$ noch frei wählbar sein soll. Die vier freien Parameter q_k bedeuten hier

- $\eta(\zeta)\sqrt{p(\zeta)}$: Amplitude,
- $\phi(\zeta)$: konstanter Anteil der Phase,
- $p(\zeta)$: inverse Breite und
- $\nu(\zeta)/p(\zeta)$: chirp.

Es ist zu bemerken, daß die spezielle Gestalt f_{xx}/f der Phase ihren Ursprung in der näherungsweise Lösung des linearen Anteils der Gleichung (4.13) mit $\varepsilon = 0$ hat. In der Literatur wird die Phase häufig quadratisch angesetzt [83], was für Gauß-förmige Impulse natürlich richtig ist, aber für alle anderen Formen nur im Zentrum des Impulses gilt. Bei der Beschreibung der Wechselwirkung benachbarter Impulse im selben Kanal würde sich dies negativ auswirken, da es dort ja gerade auf die korrekte Beschreibung der Impulsflanken ankommt. Im Kapitel 5 wird deshalb auch ein alternativer Ansatz mit einer etwas ungewöhnlichen Funktion f Anwendung finden.

Setzt man den Ansatz (4.14) nun in die Formel (3.21) ein, wobei Y gemäß Gleichung (4.5) oder (4.13) zu wählen ist, so ergibt sich das gekoppelte Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\eta' = 0 \quad (4.15a)$$

$$p' = k_1 \vartheta p^2 \nu = k_1 d p^2 \nu + \varepsilon k_1 \langle \vartheta \rangle p^2 \nu \quad (4.15b)$$

$$\nu' = -p^2 (\vartheta p + g k_2 \eta^2) = -d p^3 - \varepsilon p^2 (\langle \vartheta \rangle p + g k_2 \eta^2) \quad (4.15c)$$

$$\phi' = -k_3 \vartheta \nu^2 + k_4 g \eta^2 p \quad (4.15d)$$

für die Parameter q_j . Die Konstanten k_j , die nur von der speziellen Impulsform abhängen, sind definiert als

$$k_1 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f_{xx}}{f} \right)_x^2 f^2 dx}{4 \int_{-\infty}^{+\infty} f_x^2 dx} \quad k_2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^4 dx}{2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_x^2 dx} \quad (4.15e)$$

$$k_3 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f_{xx}}{f} \right)_x^2 f^2 dx}{4 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dx} \quad k_4 = \frac{3 \int_{-\infty}^{+\infty} f^4 dx}{4 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dx} \quad (4.15f)$$

Für Gauß- und sech-förmige Impulse beispielsweise lassen sie sich zu

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} : \quad k_1 = 1, \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k_3 = \frac{1}{2}, \quad k_4 = \frac{3}{4\sqrt{2}} \quad (4.16)$$

$$f(x) = \operatorname{sech}(x) : \quad k_1 = \frac{32}{35}, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = \frac{32}{105}, \quad k_4 = \frac{1}{2} \quad (4.17)$$

berechnen.

Die Lösung des Gleichungssystems (4.15) muß im allgemeinen numerisch erfolgen. Die Energie η^2 des Impulses ist dabei eine Konstante und der zeitunabhängige Anteil der Phase kann gemäß

$$\phi(\zeta) = \phi_0 - k_3 \int_0^\zeta \theta(x) \nu^2(x) dx + k_4 \eta^2 \int_0^\zeta g(x) p(x) dx \quad (4.18)$$

angegeben werden, da Gleichung (4.15d) von den übrigen beiden Gleichungen entkoppelt ist.

Zunächst soll der Spezialfall konstanter Dispersion und verlustfreier Übertragung untersucht werden. Die stationäre Lösung läßt sich hier sehr einfach aus dem Verschwinden der Ableitungen p' und ν' gewinnen. Mit $\vartheta = -1$ und $g = 1$ ergibt sich einfach $\nu = 0$ und $p = k_2 \eta^2$. Die Phase ist dann $\phi = \phi_0 + k_4 \eta^2 p \zeta$. Für $f(x) = \text{sech}(x)$ reproduziert sich natürlich exakt das fundamentale Soliton (2.53). Setzt man hingegen die Gauß-Funktion an, so erhält man das sogenannte *Gaußsche Soliton* [71], das die Variationsnäherung der Einsolitenlösung darstellt. Die allgemeine Lösung läßt sich mit den Mitteln der klassischen Mechanik analysieren und ist in [71] ausführlich beschrieben. Man darf natürlich nicht vergessen, daß alle Aussagen nur für den angewandten Ansatz richtig sind. Im ungünstigsten Fall haben die so gewonnenen Resultate gar nichts mehr mit dem ursprünglichen Problem zu tun.

Das eigentliche Problem mit ζ -abhängigen Parametern ist streng nur noch numerisch analysierbar. Von besonderem Interesse ist dabei die *stroboskopisch stationäre* Lösung, die ja gerade das *dispersion-managed* Soliton darstellt. In [6] wurde gezeigt, daß eine solche Lösung auch tatsächlich immer existiert. Danach gibt es in jedem der beiden Faserstücken einer Einheitszelle genau einen chirp-freien Punkt, der dann natür-

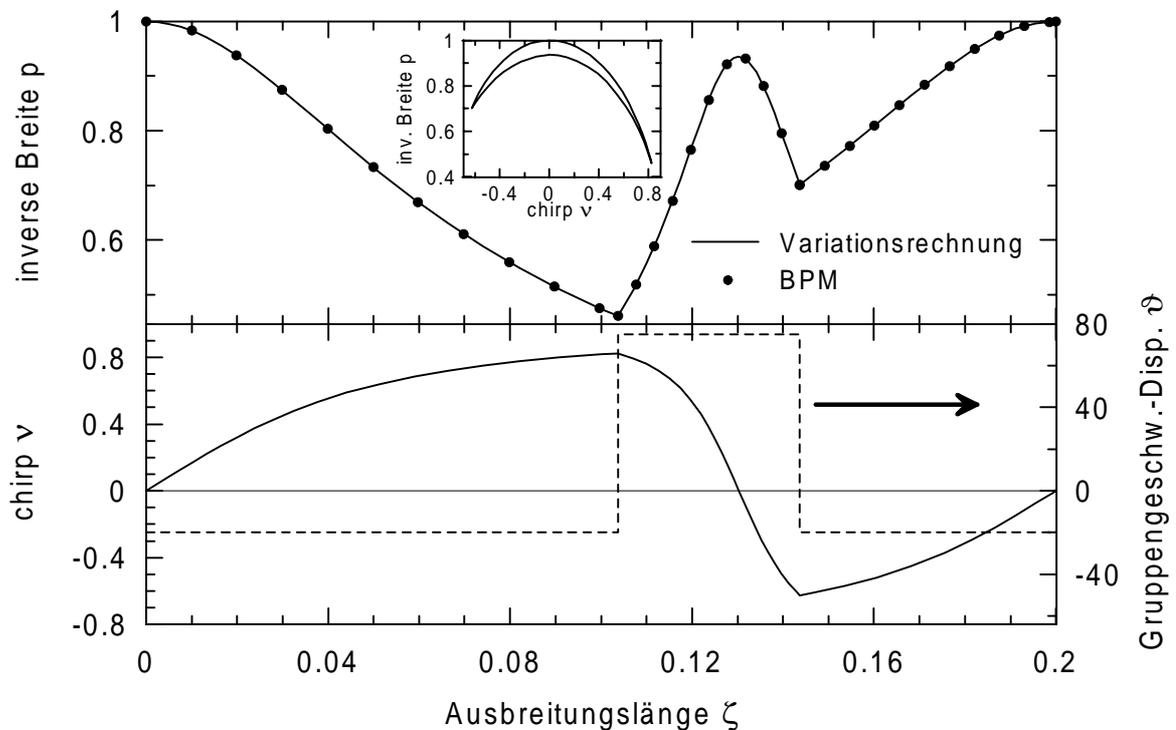


Abbildung 4.3: Evolution der Impulsparameter aus Ansatz (4.14) für $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ mit den Materialparametern $\zeta_1 = 0.16$, $\vartheta_1 = -20$, $\zeta_2 = 0.04$, $\vartheta_2 = 75$ (d.h. $s = 1.6$, siehe Text) und $\Gamma = 4$.

lich als optimaler Einspeisepunkt genutzt werden kann. Wie weiter unten noch gezeigt werden wird, gibt es für den Fall normaler mittlerer Dispersion ab einer bestimmten Stärke des Managements immer zwei periodische Lösungen mit unterschiedlicher Energie, sonst generell höchstens eine für eine bestimmte Impulsbreite.

Abbildung 4.3 zeigt die periodische Lösung des Systems (4.15) für stückweise konstante Gruppengeschwindigkeitsdispersion und periodische Verstärkung. Ohne Verluste und Verstärkung würde sich hier ein symmetrisches Bild ergeben. Gleichzeitig ist auch eine sehr gute Übereinstimmung mit der direkten Lösung der Gleichung (4.2) zu erkennen.

In Abbildung 4.4 ist sowohl die Impulsausbreitung innerhalb einer Einheitszelle (a) als auch über viele Zellen (b) zu sehen. Als Anfangsbedingung wurde dabei die Impulsform (4.14) mit den Parametern aus Abbildung 4.3 benutzt. Besonders das rechte Bild (b) zeigt, daß es sich tatsächlich um die stroboskopisch stationäre Lösung handelt. Der Sprung in der Amplitude in (a) ist durch die Verstärkung bedingt, die ja als einfache Multiplikation modelliert wurde.

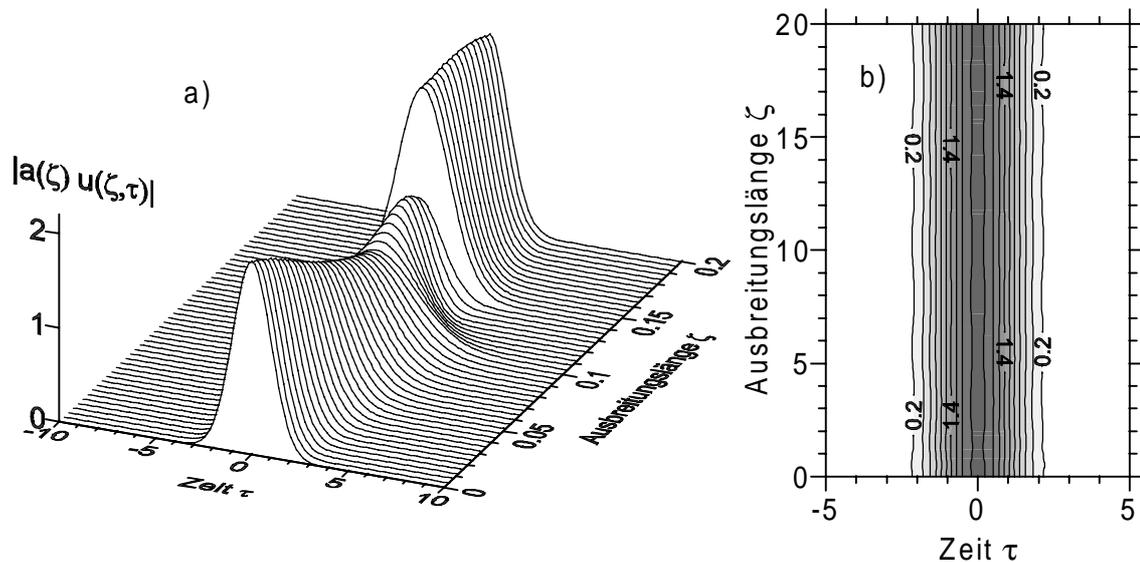


Abbildung 4.4: Direkte numerische Lösung der Gleichung (4.2) mittels BPM für die Parameter aus Abbildung 4.3; a) Feldamplitude innerhalb einer Einheitszelle; b) stroboskopischer Graph der Isolinien der Feldamplitude bei Ausbreitung über 100 Einheitszellen.

Analytische Lösung im verlustfreien Fall

Um zu analytischen Lösungen des Gleichungssystems (4.15) zu kommen, müssen Verluste und periodische Verstärkung zunächst weggelassen werden. Ohne die ε -Terme kann man die Lösung der beiden Gleichungen (4.15b) und (4.15c) als $p^2 + k_1\nu^2 = \text{const}$ und $\frac{\nu}{p} + (p^2 + k_1\nu^2)D = \text{const}$ angeben, wobei $D(\zeta) = \int_0^\zeta d(x) dx$ ist. Es soll deshalb die Variablentransformation

$$t^2 = p^2 + k_1\nu^2 \quad (4.19a)$$

$$r = \frac{\nu}{p} + t^2 D \quad (4.19b)$$

angewandt werden, die das Gleichungssystem (4.15b) und (4.15c) in

$$t' = -\varepsilon g k_1 k_2 \eta^2 \frac{t^2 (r - t^2 D)}{(1 + k_1 (r - t^2 D)^2)^{3/2}} \quad (4.20a)$$

$$r' = -\varepsilon \langle \vartheta \rangle t^2 - \varepsilon g k_2 \eta^2 \frac{t (1 + k_1 (r^2 - t^4 D^2))}{(1 + k_1 (r - t^2 D)^2)^{3/2}} \quad (4.20b)$$

überführt. Dieses System soll nun sukzessive gelöst werden. In nullter Ordnung ergibt sich offensichtlich $t = p_0$ und $r = 0$, wenn man von einer chirp-freien Anfangsbedingung ausgeht. Daraus folgt dann in erster Ordnung

$$t' = k_1 k_2 g \eta^2 \frac{p_0^4 D}{(1 + k_1 p_0^4 D^2)^{3/2}} \quad (4.21a)$$

$$r' = -\langle \vartheta \rangle p_0^2 - g k_2 \eta^2 p_0 \frac{1 - k_1 p_0^4 D^2}{(1 + k_1 p_0^4 D^2)^{3/2}}. \quad (4.21b)$$

Diese Gleichungen (4.21) sind nun entkoppelt und können exakt integriert werden. Mit der Forderung $t(\zeta_a) = t(0)$ folgt aus Gleichung (4.21a), daß der Einspeisepunkt in der Mitte einer der beiden Faserstücken, aus denen die Einheitszelle ja bestehen soll, liegen muß. Gleichung (4.21b) liefert mit derselben Periodizitätsbedingung die für eine stroboskopisch stationäre Lösung notwendige Anfangsamplitude η . Das Ergebnis ist [83, 84]

$$\eta^2 = -\frac{p_0 \langle \vartheta \rangle}{g k_2} \frac{S \sqrt{1 + S^2}}{2S - \sqrt{1 + S^2} \operatorname{arsinh}(S)}, \quad (4.22)$$

wobei die Stärke S des Dispersionsmanagements gemäß $S = \sqrt{k_1 p_0^2} s$ definiert ist und $s = |d_1 \zeta_1|/2$ der Konfigurationsparameter der Einheitszelle sein soll. In der Literatur wurde eine Managementstärke zuerst in [15] als $S' = |(\beta_{01}'' - \langle \beta_0'' \rangle) Z_1 - (\beta_{02}'' -$

$\langle \beta_0'' \rangle Z_2 / T_{\text{FWHM}}^2$ empirisch eingeführt. Diese ist der hier zwangsläufig auftretenden Definition qualitativ sehr ähnlich.

Da das *dispersion-managed* Soliton mehr die Form eines Gauß als eines sech hat, soll im weiteren auch nur die Gaußsche Ansatzfunktion betrachtet werden. Da ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_0 = 1$ gewählt werden kann, gilt hier $S = s$.

Gleichung (4.22) hat offensichtlich nur dann eine reelle Lösung, wenn $\text{sgn}(2s - \sqrt{1+s^2} \text{arsinh}(s)) = -\text{sgn}(\langle \vartheta \rangle)$ gilt. Für den Grenzfall $\langle \vartheta \rangle = 0$ ist η nur dann ungleich Null, wenn auch der Nenner $2s - \sqrt{1+s^2} \text{arsinh}(s)$ verschwindet. Dies ist der Fall für $s = s_c \approx 3.32$. Für normale mittlere Dispersion muß dann s größer als s_c sein [85].

Wie auch aus Abbildung 4.5 hervorgeht, ist die Formel (4.22) nur für kleine Amplituden richtig. Die Grenzstärke s_c wird zwar richtig vorhergesagt, aber der funktionale Verlauf der 3 Beispielkurven ist doch ziemlich falsch. Deshalb soll für t in Gleichung (4.20b) bereits die Lösung in erster Ordnung eingesetzt werden. Der Quotient in (4.20b) muß dabei, um zu einer analytischen Lösung zu gelangen, in eine Potenzreihe in $t - p_0$ entwickelt werden. Um Konsistenz zu wahren, muß diese Entwicklung bis zur Ordnung $(t - p_0)^2$ getrieben werden. Als Resultat bekommt man eine kubische Gleichung für η^2 mit s -abhängigen Koeffizienten. Der Graph dieser Lösung ist für die drei Beispiele ebenfalls in 4.5 zu sehen. Die Übereinstimmung mit der exakten Lösung ist hier zufriedenstellend. Da die Ausdrücke in dieser Lösung jedoch etwas lang sind, soll auf eine

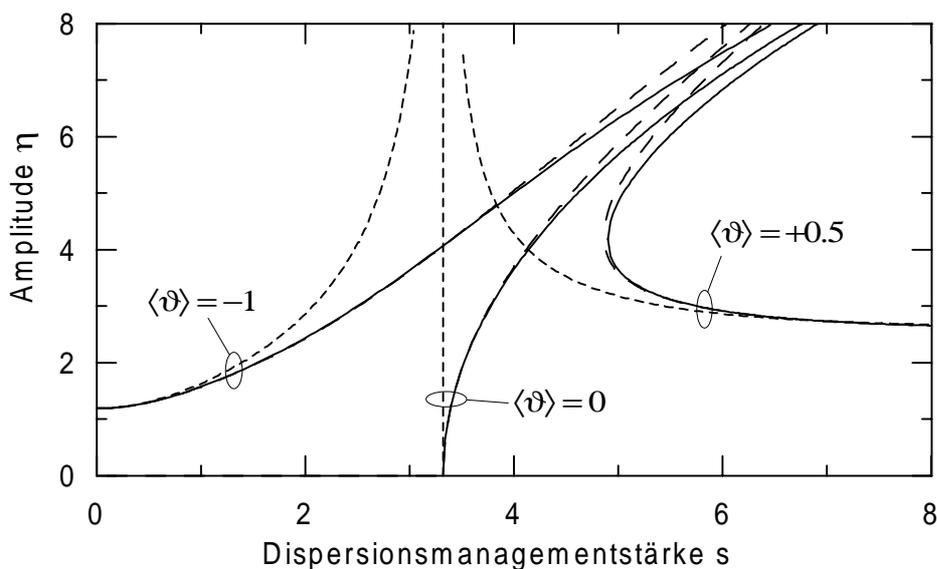


Abbildung 4.5: Stationäre Lösung des Gleichungssystems (4.15) exakt (—), nach Gleichung (4.22) (-----) und unter Benutzung von t in erster Ordnung (— — —), siehe Text.

explizite Angabe verzichtet werden.

Eine physikalisch anschauliche Interpretation der Ergebnisse ist auf der Basis der Gleichungen (4.15b) und (4.15c) möglich. Die totale Phasenänderung des Impulses (4.14) (ohne den in der Zeit konstanten Anteil) muß für die stroboskopisch stationäre Lösung im Mittel verschwinden, d.h.

$$\left\langle \left(\frac{\nu}{p} \right)' \right\rangle = -\langle \vartheta t^2 + g k_2 \eta^2 p \rangle = 0. \quad (4.23)$$

Der nichtlineare Anteil dieser Phasenverschiebung ist immer positiv, so daß für den dispersiven Anteil die Bedingung

$$\langle \vartheta t^2 \rangle = \langle \vartheta_{\text{eff}} \rangle < 0 \quad (4.24)$$

gelten muß. An die Stelle der gewöhnlichen Gruppengeschwindigkeitsdispersion, die ja bei konstanten Materialparametern für die Entstehung eines Solitons anomal zu sein hat, tritt hier eine effektive Dispersion, deren Mittelwert auch dann negativ sein kann, wenn die Dispersion selbst im Mittel Null oder sogar positiv ist. Betrachtet man die Fouriertransformation des Ansatzes (4.14) für den Gauß-Impuls, so kann $t = \sqrt{p^2 + \nu^2}$ als spektrale Breite identifiziert werden.

Der Einfluß von Störungen

In einem letzten Abschnitt soll noch die Rolle der Dispersion 3. Ordnung und des Raman-Effektes näher untersucht werden. Die Basis bildet das Differentialgleichungssystem (3.25), jetzt aber mit variablen Koeffizienten $\vartheta(\zeta)$ und $g(\zeta)$. Als Anfangsbedingung soll die stroboskopisch stationäre Lösung des Systems ohne Störungen gewählt werden.

Betrachtet man zunächst den Raman-Effekt, so sieht man, daß sich diese Störung nur auf die Frequenz auswirkt. Da auch hier wieder hauptsächlich das stroboskopische Verhalten interessiert, soll die Ausbreitungsstrecke ein Vielfaches der Einheitszelllänge sein. Die Evolutionsgleichung für die Frequenz nimmt damit die Gestalt

$$\kappa' = -\frac{\sigma_3}{\sqrt{2}} \eta^2 \langle p^3 \rangle \approx -\frac{\sigma_3}{\sqrt{2}} \frac{\eta^2}{\sqrt{1+s^2}} \quad (4.25)$$

an. Die Frequenz verschiebt sich also (stroboskopisch) linear mit der Ausbreitungslänge. Der Anstieg (4.25) dieser Verschiebung nimmt dabei mit der Stärke s des Dispersionsmanagements für kleine s zunächst etwa quadratisch, dann näherungsweise linear zu. Der Grund dafür ist die Abhängigkeit der Leistung η^2 von s , die stärker als die des

Nenners ist. Die vergrößerte Frequenzverschiebung wird also hauptsächlich durch die erhöhte Energie des *dispersion-managed* Solitons bedingt. Damit konnte die Aussage aus [86], daß die Frequenzverschiebung aufgrund des Raman-Effektes durch Dispersionsmanagement unterdrückt werden würde, nicht bestätigt werden. Anders ist das natürlich für verschwindende oder normale mittlere Dispersion, denn dort sind geringere Energien möglich.

Die Dispersion 3. Ordnung wirkt isoliert im Rahmen des Modells (3.25) nur auf die Position des Impulses gemäß

$$T'_0 = \frac{3}{2}\beta_1 \langle p^2 + \nu^2 \rangle = \frac{3}{2}\beta_1 \langle t^2 \rangle, \quad (4.26)$$

wobei das Verhalten innerhalb der Einheitszelle wieder von untergeordneter Bedeutung ist. Es ergibt sich also eine lineare Positionsverschiebung, die relativ unabhängig von der Stärke des Dispersionsmanagements ist [87], da der Mittelwert von t^2 nach Gleichung (4.20) immer etwa p_0^2 ist.

Beide Ergebnisse, (4.25) und (4.26), wurden durch BPM-Simulationen bestätigt.

4.1.2 Gemitteltes Solitonenkonzept

Die mathematische Grundlage für diese Theorie bildet die exponentielle Lie Transformation, erweitert auf einen unendlich-dimensionalen Vektorraum [4]. Die Koordinaten dieses Raumes seien die Differentiale $(u, u_\tau, u_{\tau\tau}, u_{\tau\tau\tau}, \dots, u^*, u^*_\tau, u^*_{\tau\tau}, u^*_{\tau\tau\tau}, \dots)$. Ein Vektor \vec{F} dieses Raumes besteht dann aus den Komponenten $(F, F_\tau, F_{\tau\tau}, F_{\tau\tau\tau}, \dots, F^*, F^*_\tau, F^*_{\tau\tau}, F^*_{\tau\tau\tau}, \dots)$. Der Gradient ∇ ist analog der üblichen Festlegung gemäß

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u_\tau}, \frac{\partial}{\partial u_{\tau\tau}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^*}, \frac{\partial}{\partial u^*_\tau}, \frac{\partial}{\partial u^*_{\tau\tau}}, \dots \right)^T \quad (4.27)$$

definiert.

Die zu betrachtende modifizierte nichtlineare Schrödingergleichung (4.5) nimmt nun in diesem Raum die Gestalt

$$\frac{du}{d\zeta} = X[u, u^*, \zeta] = X_0[u, u^*] + X_1[u, u^*, \zeta] \quad (4.28)$$

mit

$$\begin{aligned} X_0[u, u^*] &= -\langle \vartheta \rangle X_D[u, u^*] + \langle g \rangle X_A[u, u^*] \\ X_1[u, u^*, \zeta] &= -d(\zeta) X_D[u, u^*] + \tilde{g}(\zeta) X_A[u, u^*] \\ X_D[u, u^*] &= \frac{i}{2} u_{\tau\tau} \\ X_A[u, u^*] &= i|u|^2 u \end{aligned} \quad (4.29)$$

an. Die partielle Ableitung $\partial u/\partial \zeta$ ist dabei äquivalent zur totalen Ableitung $du/d\zeta$, die hier gemäß

$$\frac{d}{d\zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{d\vec{u}}{d\zeta} \nabla \quad (4.30)$$

definiert ist, da die Zeit τ ja nicht explizit als Koordinate auftritt.

Die Variable u in dieser Gleichung soll nun in eine neue Variable v derart transformiert werden, daß die Gleichung für v die Gestalt der nichtlinearen Schrödingergleichung mit konstanten Koeffizienten plus Störtermen der Ordnungen $O(\zeta_a^n)$ annimmt. Die Transformation, die dies bewerkstelligt, ist die Lie Transformation

$$u = e^{\vec{\phi} \nabla} v = v + \phi + \frac{1}{2} \vec{\phi} \nabla \phi + \dots \quad (4.31)$$

mit der generierenden Funktion $\vec{\phi}[v, v^*, \zeta]$, die entsprechend zu bestimmen ist.

Setzt man nun u der Form (4.31) in Gleichung (4.28) ein, so ergibt sich die Operatorgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} e^{\vec{\phi} \nabla} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \zeta} \nabla e^{\vec{\phi} \nabla} = \left(e^{\vec{\phi} \nabla} \vec{X} \right) \nabla \quad (4.32)$$

für $\vec{\phi}[v, v^*, \zeta]$ und $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \zeta}$ [4]. Unter Benutzung der Formeln

$$e^B A e^{-B} = A + [B, A] + \frac{1}{2!} [B, [B, A]] + \frac{1}{3!} [B, [B, [B, A]]] + \dots \quad (4.33)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} e^A \right) e^{-A} = A_x + \frac{1}{2!} [A, A_x] + \frac{1}{3!} [A, [A, A_x]] + \dots, \quad (4.34)$$

die leicht durch ausmultiplizieren bestätigt werden können, erhält man aus Gleichung (4.32) das Resultat

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{1}{2!} \left\{ \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right\} + \frac{1}{3!} \left\{ \phi, \left\{ \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right\} \right\} + \dots + \frac{\partial v}{\partial \zeta} = X + \{ \phi, X \} + \frac{1}{2!} \{ \phi, \{ \phi, X \} \} + \dots, \quad (4.35)$$

wobei $\{A, B\}$ die Lie-Klammer, die gemäß $\{A, B\} := \vec{A} \nabla B - \vec{B} \nabla A$ definiert ist, darstellt.

Aus dieser Gleichung werden nun ϕ und $\frac{\partial v}{\partial \zeta}$ im Sinne einer Störungstheorie sukzessive unter Benutzung der Reihenentwicklungen

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n \quad (4.36a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Y_n \quad (4.36b)$$

$$\zeta = \varepsilon z \quad (4.36c)$$

ermittelt. Der Größenordnungsparameter ε ist dabei proportional zur Länge der Einheitszelle ζ_a , die ja viel kleiner als eins sein soll. Bis zur zweiten Ordnung in ε ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_1}{\partial z} &= X_1 \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial z} &= \{\phi_1, X_0\} + \frac{1}{2}\{\phi_1, X_1\} - Y_1 \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial z} &= \{\phi_2, X_0\} + \frac{1}{2}\{\phi_2, X_1\} + \frac{1}{12}\{\phi_1, \{\phi_1, X_1\}\} + \frac{1}{2}\{\phi_1, Y_1\} - Y_2.\end{aligned}\quad (4.37)$$

Im vorliegenden Fall bedeutet das

$$\phi_1 = -DX_D + GX_A + \phi_{10}, \quad (4.38)$$

wobei die Funktionen D und G , die sich gemäß

$$\frac{dD}{dz} = d \quad , \quad \frac{dG}{dz} = \tilde{g} \quad (4.39)$$

berechnen, im Mittel verschwinden sollen, so daß $\phi_{10} = \langle\phi_1\rangle$ gilt. Die Funktionen ϕ_{10} selbst sowie Y_1 werden aus der Bedingung, daß die Störung in nächster Ordnung nicht anwachsen darf, bestimmt, d.h. aus der Forderung $\langle\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\rangle = 0$. Damit ergibt sich für ϕ_{10} der Ausdruck

$$\phi_{10} = -\frac{1}{2\langle\vartheta\rangle}\langle dG - \tilde{g}D\rangle X_A := \alpha_{10} X_A, \quad (4.40)$$

und Y_1 kann Null gewählt werden. Die Ordnung ε^1 liefert dann

$$\phi_2 = \alpha_2\{X_D, X_A\} + \phi_{20}, \quad (4.41)$$

wobei die im Mittel wieder verschwindende Funktion α_2 der Gleichung

$$\frac{d\alpha_2}{dz} = (G + \alpha_{10})\left(\langle\vartheta\rangle + \frac{d}{2}\right) - D\left(\langle g\rangle + \frac{\tilde{g}}{2}\right) \quad (4.42)$$

genügt. Die Integrationskonstante ϕ_{20} folgt wiederum aus der Nicht-Säkularitätsbedingung für ϕ_3 und nimmt die Gestalt

$$\phi_{20} = -\frac{1}{\langle\vartheta\rangle}\left(\frac{1}{2}\langle d\alpha_2\rangle + \frac{1}{12}\langle D(\tilde{g}D - dG)\rangle\right)\{X_D, X_A\} \quad (4.43)$$

an, und die Größe Y_2 muß diesmal gemäß

$$Y_2 = \beta_{20}\{X_A, \{X_A, X_D\}\} \quad (4.44)$$

gewählt werden, wobei

$$\beta_{20} = \frac{1}{2}\langle(G + D)^2\rangle - \frac{1}{2}\langle dG^2 - \tilde{g}D^2\rangle - \frac{1}{8}\langle dG - \tilde{g}D\rangle^2 \quad (4.45)$$

ist.

Kernlösung

Aus Formel (4.36b) erhält man nach der Berechnung der Lie-Klammern in (4.44) eine gestörte nichtlineare Schrödingergleichung der Form

$$iv_\zeta + \frac{1}{2}v_{\tau\tau} + |v|^2v = -\varepsilon^2\beta_{20} [v^2v_\tau^{*2} + v^{*2}v_\tau^2 + 2|v|^2(vv_{\tau\tau}^* + v^*v_{\tau\tau} + 3|v_\tau|^2)]v + O(\varepsilon^3) \quad (4.46)$$

für die transformierte Variable v , wobei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $\langle \vartheta \rangle = -1$ und $\langle g \rangle = 1$ gesetzt wurde. Da diese Gleichung nur noch konstante Koeffizienten hat, heißt v das *guiding-centre* Soliton. Die Lösung dieser Gleichung soll wieder als Reihenentwicklung sukzessive mit Hilfe des Ansatzes

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \quad (4.47)$$

erfolgen. In der Ordnung ε^0 ergibt sich die ungestörte nichtlineare Schrödingergleichung für v_0 mit der Einsolitenlösung (2.53). Hier sollen aber nur ruhende Impulse betrachtet werden, so daß die Lösung einfach die Gestalt

$$v_0 = \eta \operatorname{sech}(\eta\tau) e^{i\eta^2 \frac{\zeta}{2}} \quad (4.48)$$

annimmt. Aus der ersten Ordnung in ε folgt, daß v_1 zu Null gewählt werden kann. Für die Lösung in der Ordnung ε^2 (und analog auch in allen höheren Ordnungen) führt immer ein Ansatz der Form

$$v_n = \sum_{l=1}^{N_n} a_l^{(n)} \operatorname{sech}^{2l-1}(\eta\tau) e^{i\eta^2 \frac{\zeta}{2}} \quad (4.49)$$

zum Erfolg [88]. Hier ergibt sich $N_2 = 3$ mit den Koeffizienten $a_1^{(2)} = \frac{8}{3}\beta_{20}\eta^5$ und $a_2^{(2)} = a_3^{(2)} = -\frac{a_1^{(2)}}{2}$. Die Kernlösung, oder das *guiding-centre* Soliton, kann dann bis zur Ordnung ε^2 als

$$v = \left[1 + \frac{4}{3}\beta_{20}\eta^4 (2 - \operatorname{sech}^2(\eta\tau) - \operatorname{sech}^4(\eta\tau)) \right] \eta \operatorname{sech}(\eta\tau) e^{i\eta^2 \frac{\zeta}{2}} \quad (4.50)$$

angegeben werden [89].

Vollständige Lösung

Die Lösung des ursprünglichen Problems (4.5) läßt sich mittels der Reihenentwicklung (4.36a) als

$$u = v + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2 \left(\phi_2 + \frac{1}{2}\vec{\phi}_1 \nabla \phi_1 \right) + O(\varepsilon^3) \quad (4.51)$$

ausdrücken. Setzt man hier nun die Formeln (4.38) und (4.41) ein, so ergibt sich als Lösung bis zur Ordnung ε^2

$$u = e^{\mu+i\nu} v \quad (4.52)$$

mit v gemäß (4.50) und

$$\begin{aligned} \mu &= \eta^4 \left[k - f + \frac{D}{2}(D + G + 2\alpha_{10}) + \frac{1}{2}\langle D(Dg + G) \rangle \right] \times \\ &\quad \times (4 - 5 \operatorname{sech}^2(\eta\tau)) \operatorname{sech}^2(\eta\tau) \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\nu = \eta^2 \left[-\frac{D}{2} + (G + D + \alpha_{10}) \operatorname{sech}^2(\eta\tau) \right], \quad (4.54)$$

wobei die mittelwertsfreien Funktionen k und f als

$$\frac{dk}{dz} = \frac{1}{2}(Gd - \tilde{g}D) \quad (4.55)$$

$$\frac{df}{dz} = D + G + \alpha_{10} \quad (4.56)$$

$$\langle k \rangle = \langle f \rangle = 0$$

definiert sind.

Das *guiding-centre* Soliton v selbst besitzt bereits eine leicht veränderte Form verglichen mit dem gewöhnlichen Soliton. Mit dem Faktor e^μ kommt nun noch eine periodische Formänderung während der Ausbreitung hinzu. Die Größe ν , die ebenfalls zellenperiodisch ist, beschreibt die Generierung eines chirps. Hier sei bemerkt, daß der Ausdruck $G + D + \alpha_{10}$ identisch mit der Funktion F aus [13] ist, die dort als Mittelwert der akkumulierten Abweichung der Materialparameter von ihrem Mittelwert definiert ist. Die Nullstellen von F sind also die chirp-freien Punkte innerhalb einer Einheitszelle. Da das zu übertragende Signal im allgemeinen auch chirp-frei ist, wird also eine Einspeisung an diesen Punkten zu einer Optimierung der Übertragung beitragen. An allen anderen Punkten wird dagegen der Impuls Strahlung erzeugen, um die richtige Form der stroboskopisch stationären Lösung und auch den entsprechenden chirp zu erlangen [13, 89], was natürlich zu einer Beeinträchtigung der Übertragungsqualität oder sogar zu Fehlern führen kann.

Im weiteren soll als Beispiel der Fall reinen Dispersionsmanagements, d.h. $\tilde{g} = 0$, näher untersucht werden. Zur Beschreibung der periodischen Verstärkung ist die Lie-Transformationstechnik sehr gut geeignet [59]. Die Reihenentwicklungen (4.36a) und (4.36b) konvergieren sehr schnell, da ε nur proportional zu ζ_a ist. Wenn die Materialparameter aber, wie beim Dispersionsmanagement, periodisch ihr Vorzeichen ändern,

trifft diese Aussage nicht mehr uneingeschränkt zu. Der Parameter β_{20} in (4.50) berechnet sich mit $\tilde{g} = 0$ zu

$$\beta_{20} = \frac{s^2}{6}, \quad (4.57)$$

wobei $s = |d_1 \zeta_1|/2$ wieder die Stärke des Dispersionsmanagements sein soll. Es gilt also hier $\varepsilon \sim s$. Die oben beschriebene Theorie wird also nur für $s \ll 1$, d.h. für schwaches Dispersionsmanagement anwendbar sein.

Abbildung 4.6 zeigt die stationäre Lösung (4.52) für $s = 0.25$ mit den Faserlängen $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1$ am chirp-freien Punkt. Es ist deutlich eine Veränderung der Impulsform verglichen mit der sech-Form des gewöhnlichen Solitons zu erkennen. Die Flanken werden steiler und die Spitzenleistung nimmt zu. Der Beginn der Transformation vom gewöhnlichen Soliton hin zum *dispersion-managed* Soliton wird also exakt beschrieben. Aber der Wert von $s = 0.25$ stellt so etwas wie die Grenze der Anwendbarkeit dar. Für stärkeres Management wird das Ergebnis deutlich schlechter. Die Lösung deltet sich im Zentrum des Impulses ein, was natürlich falsch ist.

In Abbildung 4.7 sind die Impulsformen der stroboskopisch stationären Lösung an drei ausgewählten Stellen innerhalb einer Einheitszelle miteinander verglichen. Die mit dem Dispersionsmanagement auftretenden Breitenschwankungen bleiben offensichtlich für schwaches Dispersionsmanagement auf das Impulszentrum beschränkt. Ein selbstähnlicher Variationsansatz wie (4.14) würde diese Situation folglich nur ungenügend beschreiben. Wollte man damit ganz und gar die Impulswechselwirkung für schwaches

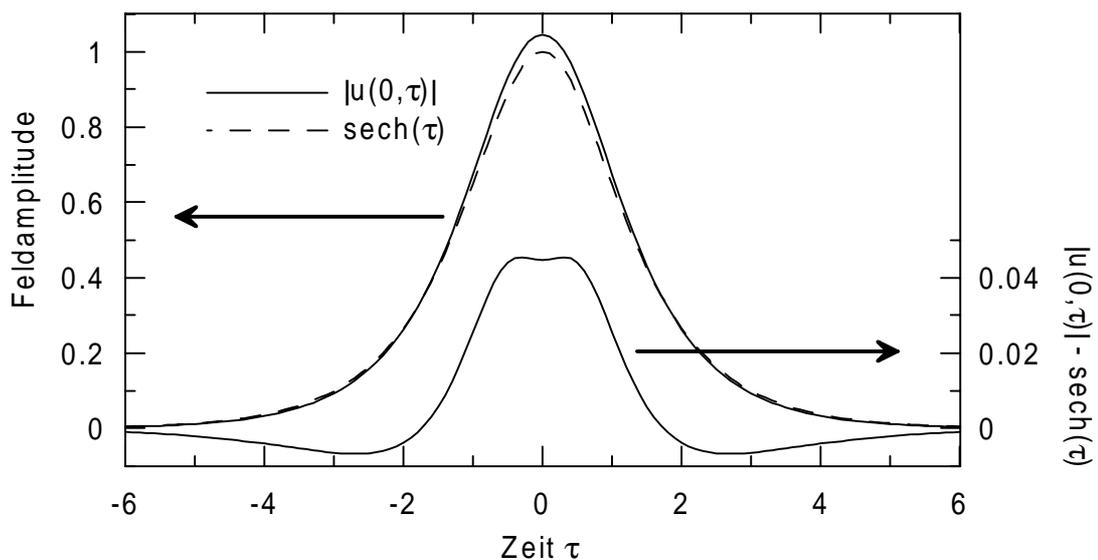


Abbildung 4.6: Vergleich der kompletten Lösung (4.52) mit dem gewöhnlichen Soliton für $s = 0.25$ für verlustfreie Ausbreitung

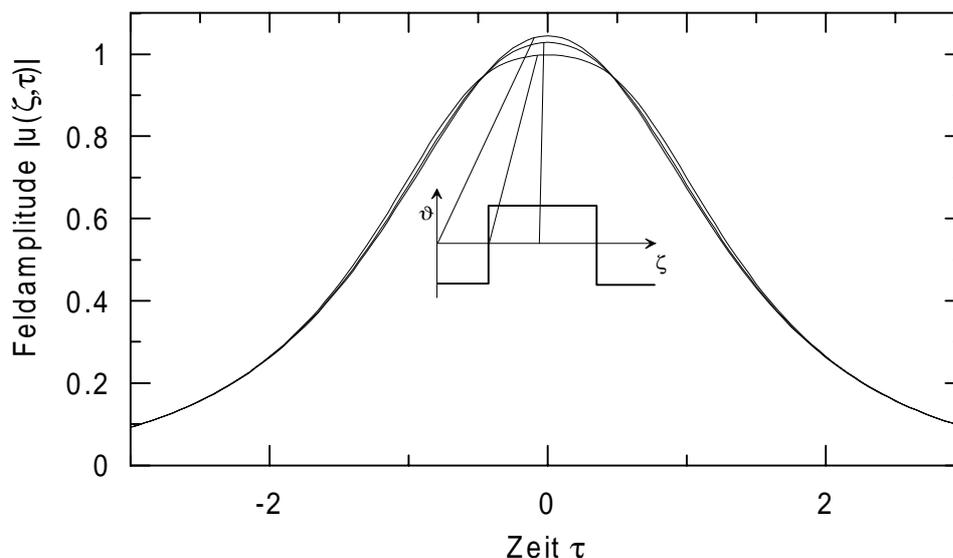


Abbildung 4.7: Verhalten der stroboskopisch stationären Lösung aus Abbildung 4.6 innerhalb einer Einheitszelle

Management in einem Kanal beschreiben, so würde man schlichtweg falsche Ergebnisse erhalten [23].

Daß es sich bei der Lösung aus Abbildung 4.6 tatsächlich um die stroboskopisch stationäre Lösung handelt, ist in den Abbildungen 4.8 und 4.9 zu sehen. Bei der Verwendung eines gewöhnlichen Solitons als Anfangsbedingung sind hingegen starke Amplituden- und Breitenschwankungen, wie in Abbildung 4.9, zu erkennen, die eine Umwandlung in die stroboskopisch stationäre Lösung (4.52) anzeigen.

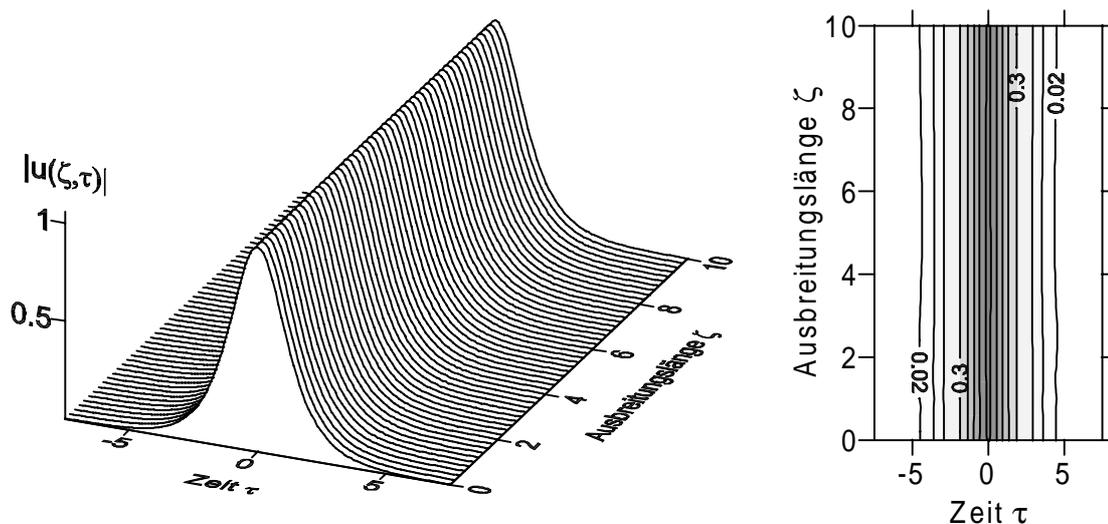


Abbildung 4.8: BPM-Numerik der Gleichung (4.5) mit dem Anfangsfeld aus Abbildung 4.6.

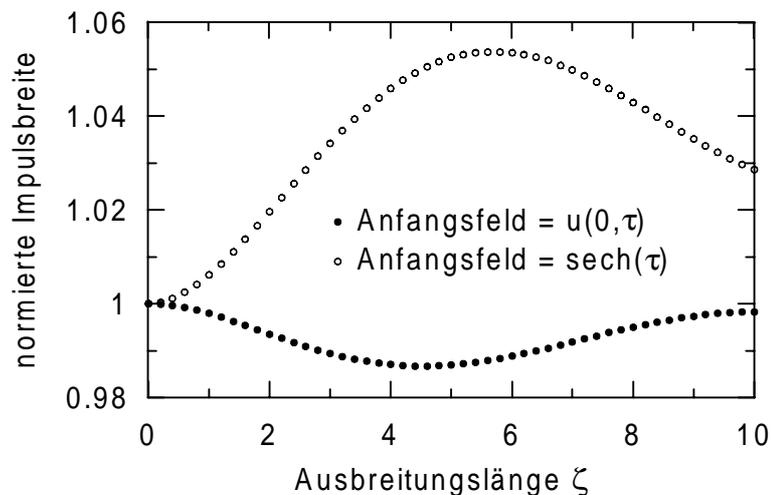


Abbildung 4.9: Stroboskopische Entwicklung der Impulsbreite der Lösung aus Abbildung 4.6 im Vergleich mit der des gewöhnlichen Solitons.

4.1.3 Quasi-soliton

Ziel ist es auch hier, eine stationäre lokalisierte Lösung in Übertragungssystemen mit Dispersionsmanagement zu finden. Aber im Gegensatz zur bisherigen Vorgehensweise ist die Gruppengeschwindigkeitsdispersion der anomalen Faser nicht konstant, sondern bekommt einen bestimmten, von der jeweiligen stationären Lösung abhängigen, funktionalen Verlauf. Das ist in gewisser Weise analog zur Idee in [90], wonach auch in verlustbehafteten Systemen ein gewöhnliches Soliton sich ungestört ausbreiten kann, wenn die Dispersion denselben funktionalen Verlauf wie die Impulsleistung hat. Der Unterschied hier ist der, daß auch Schwankungen der Impulsbreite und damit verbunden auch des chirps zugelassen sind, die den benötigten Funktionsverlauf der Dispersion natürlich beeinflussen.

Das gesuchte Quasi-Soliton hat die Form (4.14), wobei aber die Phase explizit quadratisch angenommen wird. Als Resultat bekommt man dann eine Differentialgleichung für die Funktion f sowie eine Formel für den Dispersionsverlauf in der anomalen Faser. Das Ganze ist ausführlich in [75] beschrieben und soll hier nicht näher erleutert werden.

Bemerkenswert ist jedoch die Tatsache, daß die Wechselwirkung benachbarter Quasi-Solitonen aufgrund der verringerten Leistung und der periodischen Impulskomprimierung deutlich reduziert ist [27, 75].

4.2 Mittelungsverfahren im Fourierraum

Wie schon im vorigen Kapitel gezeigt, unterliegen DM-Solitonen mehr oder weniger starken Breiten- und Chirpschwankungen aufgrund der periodisch wechselnden Gruppengeschwindigkeitsdispersion. Diese, durch einen linearen Effekt hervorgerufenen, schnellen Fluktuationen sollen abgespalten werden. Im Fourierraum schlägt sich die Wirkung der Dispersion in einer quadratischen Phase nieder, womit eine solche Separation sehr einfach möglich wird.

Durch Fouriertransformation gemäß (2.3) geht Gleichung (4.5) über in die Gleichung

$$i\hat{u}_\zeta + \frac{\vartheta}{2}\omega^2\hat{u} + \frac{g}{(2\pi)^2} \iint \hat{u}(\omega + \Omega_1)\hat{u}(\omega + \Omega_2)\hat{u}^*(\omega + \Omega_1 + \Omega_2) d\Omega_1 d\Omega_2 = 0 \quad (4.58)$$

für das Spektrum $\hat{u}(\zeta, \omega)$. Analog Formel (4.13) soll die Dispersion wieder in ihren Mittelwert und ihren fluktuierenden Anteil zerlegt werden. Betrachtet man nur diesen fluktuierenden Anteil und läßt den Term mit der mittleren Dispersion sowie den nichtlinearen Term einfach weg, so kann man die Lösung einfach als $\hat{u}(\zeta, \omega) = \hat{u}_0(\omega) \exp[i\frac{\omega^2}{2}D(\zeta)]$ angeben [91]. $D(\zeta)$ ist die akkumulierte Dispersion und berechnet sich gemäß

$$D(\zeta) = \int_0^\zeta d(z) dz. \quad (4.59)$$

Auf die Gleichung (4.58) soll deshalb der Ansatz

$$\hat{u}(\zeta, \omega) = \hat{q}(\zeta, \omega) e^{i\frac{\omega^2}{2}D(\zeta)} \quad (4.60)$$

angewandt werden. Der schnell fluktuierende Anteil hebt sich wie erwartet heraus und übrig bleibt die nichtlineare Differentialgleichung

$$i\hat{q}_\zeta + \frac{\langle \vartheta \rangle}{2}\omega^2\hat{q} + \iint \hat{q}(\omega + \Omega_1)\hat{q}(\omega + \Omega_2)\hat{q}^*(\omega + \Omega_1 + \Omega_2) h(\Omega_1\Omega_2, \zeta) d\Omega_1 d\Omega_2 = 0 \quad (4.61)$$

für die langsam veränderliche Größe $\hat{q}(\zeta, \omega)$ mit dem Integralkern

$$h(x, \zeta) := \frac{g(\zeta)}{(2\pi)^2} e^{-ixD(\zeta)}. \quad (4.62)$$

Es sei angemerkt, daß zur Ableitung dieser Gleichung bisher noch keine Näherung gemacht wurde.

Der Vorteil von (4.61) besteht darin, daß die schnellen dispersionsbedingten Phasenänderungen, analog zu den Amplitudenänderungen (4.4) durch periodische Verstärkung, nun nicht mehr in der Feldamplitude selbst, sondern in dem Faktor h des

nichtlinearen Terms zu finden sind. Gleichung (4.61) kann jetzt problemlos mit Hilfe der Lie-Transformation gemittelt werden. Durch einen Ansatz analog zu (4.31) erhält man als Lösung bis zur ersten Ordnung

$$\hat{q} = \hat{v} + i \iint A_1(\zeta, \Omega_1 \Omega_2) \hat{v}(\omega + \Omega_1) \hat{v}(\omega + \Omega_2) \hat{v}^*(\omega + \Omega_1 + \Omega_2) d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (4.63)$$

wobei $\hat{v}(\zeta, \omega)$ der gemittelten Gleichung

$$i\hat{v}_\zeta + \frac{\langle \vartheta \rangle}{2} \omega^2 \hat{v} + \iint \hat{v}(\omega + \Omega_1) \hat{v}(\omega + \Omega_2) \hat{v}^*(\omega + \Omega_1 + \Omega_2) \langle h \rangle(\Omega_1 \Omega_2) d\Omega_1 d\Omega_2 = 0 \quad (4.64)$$

genügt. Für den hier zu betrachtenden Fall, daß die Materialparameter einen funktionalen Verlauf wie in Abbildung 4.2 aufweisen, läßt sich der Mittelwert von h gemäß

$$\langle h \rangle(x) = \frac{a_0^2}{(2\pi)^2 \zeta_a} e^{ixd_1 \zeta_0} \left[\frac{1 - e^{-(2\Gamma_1 + ixd_1)\zeta_1}}{2\Gamma_1 + ixd_1} - e^{-2\langle \Gamma \rangle \zeta_a} \frac{1 - e^{(2\Gamma_2 + ixd_2)\zeta_2}}{2\Gamma_2 + ixd_2} \right] \quad (4.65)$$

explizit berechnen. Die Funktion $A_1(\zeta, x)$ folgt genau wie in Formel (4.39) einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dA_1}{d\zeta} = h - \langle h \rangle \quad (4.66)$$

mit der Forderung, daß $\langle A_1 \rangle = 0$ erfüllt sein muß. Das Resultat ist dann

$$A_1(\zeta, x) = \langle h \rangle(x) \left(\frac{\zeta_a}{2} - \zeta \right) + H(\zeta, x) - \langle H \rangle(x) \quad (4.67)$$

mit $H(\zeta, x) = \int_0^\zeta h(z, x) dz$ [60].

Zur Ermittlung der stationären Lösung $f(\omega)$ verwendet man den Ansatz

$$\hat{v}(\zeta, \omega) = f(\omega) e^{i\lambda \zeta}, \quad (4.68)$$

woraus für $f(\omega)$ die Integralgleichung

$$\left(-\lambda + \frac{\langle \vartheta \rangle}{2} \omega^2 \right) f(\omega) + \iint f(\omega + \Omega_1) f(\omega + \Omega_2) f^*(\omega + \Omega_1 + \Omega_2) \langle h \rangle(\Omega_1 \Omega_2) d\Omega_1 d\Omega_2 = 0 \quad (4.69)$$

folgt [92]. Da $\langle h \rangle$ im allgemeinen eine komplexe Funktion mit einem nichtverschwindenden Imaginärteil ist, wird die Lösung dieser Gleichung immer einen chirp haben, es sei denn, die Verluste sind identisch Null [60]. In Abbildung 4.10 ist ein Beispiel einer solchen stationären Lösung zu sehen. Der Eigenwert λ wurde dabei so gewählt, daß die Impulsbreite der des gewöhnlichen Solitons in diesem System mit konstanter Gruppengeschwindigkeitsdispersion entspricht. Der Einspeisepunkt soll sich immer am

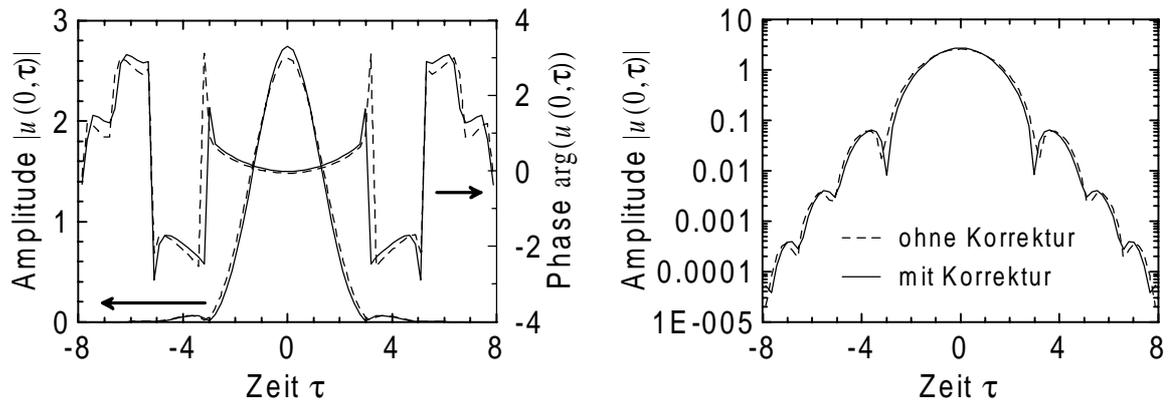


Abbildung 4.10: Stationäre Lösung, berechnet nach Formeln (4.69) und (4.63), für die Parameter $\vartheta_1 = -41$, $\zeta_1 = 0.2$, $\vartheta_2 = 159$, $\zeta_2 = 0.05$ (d.h. $s = 4$), $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 6$, $\zeta_0 = 0.05$ und $\lambda = 2$.

Ort der geringsten Impulsbreite innerhalb der Einheitszelle befinden, da dort der chirp minimal ist.

Zum Vergleich ist in Abbildung 4.10 auch die korrigierte stationäre Lösung, d.h. die Fourier-Rücktransformierte von \hat{q} nach Gleichung (4.63) dargestellt. Der Unterschied ist wie erwartet sehr gering, so daß häufig die nullte Ordnung in der Entwicklung (4.63) ausreichend ist.

Zur Überprüfung der Richtigkeit obiger Theorie ist in Abbildung 4.11 die Ausbreitung der stationären Lösung mittels der BPM-Numerik veranschaulicht.

Für den in der Literatur meist nur behandelten Spezialfall verlustfreier Systeme mit $\Gamma = 0$ vereinfacht sich Formel (4.65) zu

$$\langle h \rangle(x) = \frac{\text{sinc}(x s)}{(2\pi)^2} e^{ixd_1(\zeta_0 - \frac{\zeta_1}{2})}, \quad (4.70)$$

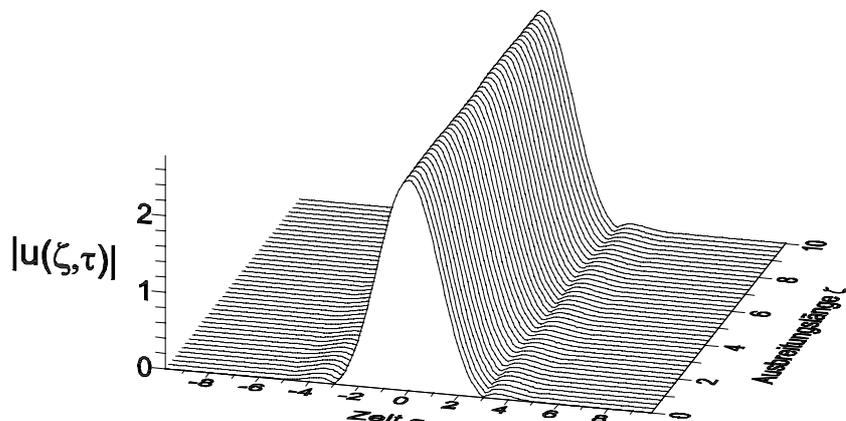


Abbildung 4.11: BPM-Numerik der Impulsausbreitung für die Anfangsbedingung aus Abbildung 4.10

wobei s wieder die Managementstärke darstellt. Wählt man für den Einspeisepunkt $\zeta_0 = \zeta_1/2$, so fällt der Exponentialfaktor weg und man erhält ein rein reelles Ergebnis [79, 80, 92]. Die Korrektur der Anfangsbedingung $A_1(0, x)$ kann in diesem Fall sehr einfach gemäß

$$iA_1(0, x) = \frac{1}{(2\pi)^2 2xs} [\zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1) \text{sinc}(xs) - \zeta_2 \cos(xs)] \quad (4.71)$$

angegeben werden [60].

In Abbildung 4.12 ist nun ein Beispiel aus dem Bereich normaler mittlerer Dispersion zu sehen. Während für die niedrigenergetische Lösung eine Entwicklung bis zur nullten Ordnung ausreichend ist, muß für die hochenergetische Lösung mindestens die erste Ordnung mit berücksichtigt werden. Abbildung 4.13 zeigt deutlich, daß \hat{v} , berechnet mit der Integralgleichung (4.69), nicht die stationäre Lösung darstellt. Erst unter Einbeziehung der ersten Ordnung mit $A_1(0, x)$ gemäß (4.71) wird das Resultat besser.

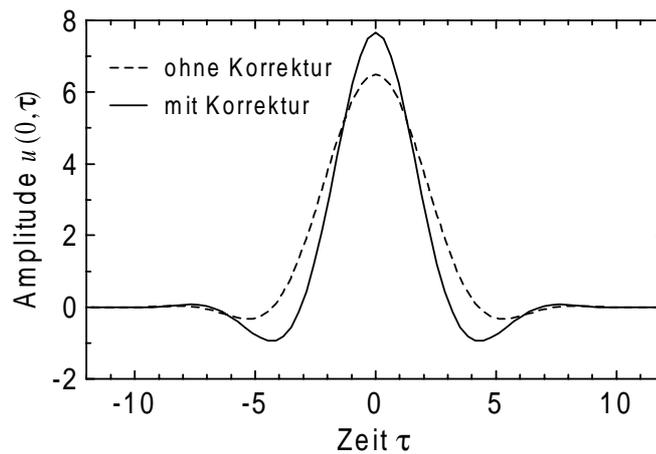


Abbildung 4.12: Stationäre Lösung im verlustfreien Fall mit den Parametern $s = 10$ und $\langle \vartheta \rangle = +0.5$

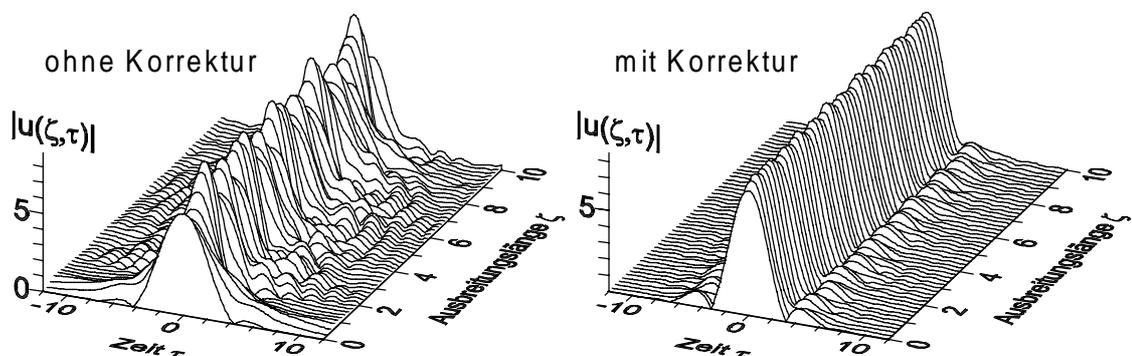


Abbildung 4.13: Vergleich der Ausbreitung der stationären Lösungen aus Abbildung 4.12.

Kapitel 5

Impuls-Wechselwirkung unter dem Einfluß von Dispersionsmanagement in einem Kanal

Die Wechselwirkung zeitlich aufeinanderfolgender Impulse ist eine Folge der Fasernichtlinearität. Sie ist umso stärker, je kürzer der Impulsabstand zueinander ist. Deshalb soll in diesem Kapitel nur die Wechselwirkung zweier unmittelbar benachbarter Impulse untersucht werden.

Für verlustfreie Systeme mit konstanter Dispersion, die durch die nichtlineare Schrödingergleichung (2.52) beschrieben werden können, wurde dieses Problem in einer Reihe von Arbeiten bereits umfassend behandelt [93–96]. Allen gemein ist die Anfangsbedingung der Form

$$u(0, \tau) = \eta_1 \operatorname{sech} \left[\eta_1 \left(\tau - \frac{T}{2} \right) \right] e^{i\Phi} + \eta_2 \operatorname{sech} \left[\eta_2 \left(\tau + \frac{T}{2} \right) \right], \quad (5.1)$$

die sowohl unterschiedliche Impulsamplituden als auch eine Phasendifferenz zuläßt.

In [93] und [95] bediente man sich der Ergebnisse der inversen Streutheorie und verglich die exakte 2-Soliton-Lösung mit (5.1). Mit den so erhaltenen Eigenwerten konnte dann der Kollisionsabstand, d.h. die Ausbreitungslänge bis zu einem Maximum in der Amplitude oder die halbe Solitonperiode der 2-Soliton-Lösung, für $\Phi = 0$ und $\eta_1 = \eta_2$ gemäß

$$\zeta_c = \frac{\pi}{2} \frac{\sinh T \cosh(T/2)}{T + \sinh T} \quad (5.2)$$

angegeben werden. Der allgemeine Fall mit $\Phi \neq 0$ und $\eta_1 \neq \eta_2$ ist auf diese Art und Weise in [93] ausführlich beschrieben.

Eine zweite, sehr leistungsfähige Technik auch in Bezug auf zusätzliche Störungen, stellt die Quasiteilchenmethode [94, 96] dar. Auf ihr basieren alle weiteren Ergebnisse dieses Kapitels. Die Hauptannahme besteht darin, daß die Feldverteilung während der gesamten Ausbreitung als lineare Superposition zweier Einzelimpulse

$$u(\zeta, \tau) = u_1(\zeta, \tau) + u_2(\zeta, \tau) \quad (5.3)$$

aufgefaßt werden kann. Die Wechselwirkung soll sich nur auf die Impulsparameter wie Amplitude, Phase, Frequenz und Lage auswirken. Dabei stellt ein Impuls die Störung für den jeweils anderen Impuls dar, dessen Ausbreitung dann mittels adiabatischer Störungstheorie [97] oder Variationsrechnung [94] analysiert wird. Das Hauptproblem dabei stellt die Separation der nichtlinearen Schrödingergleichung für $u(\zeta, \tau)$ in zwei Gleichungen für die $u_j(\zeta, \tau)$ dar. In [96] wurde die Aufspaltung auf der Basis des Überlappungsgrades gemäß

$$|u|^2 u = \left(|u_1|^2 + u_1 u_2^* + 2u_1^* u_2\right) u_1 + \left(|u_2|^2 + u_2 u_1^* + 2u_2^* u_1\right) u_2 \quad (5.4)$$

vorgenommen, so daß sich die beiden Gleichungen

$$iu_{j\zeta} + \frac{1}{2}u_{j\tau\tau} + |u_j|^2 u_j = -(u_j u_{3-j}^* + 2u_j^* u_{3-j})u_j = i\epsilon R_{j,3-j} \quad (5.5)$$

für $j = 1, 2$ ergeben. Daraus konnte dann für den Kollisionsabstand der Ausdruck $\zeta_c = (\pi/4) \exp[T/2]$ abgeleitet werden, der mit (5.2) für nicht zu kleine Anfangsseparationen T identisch ist. Analoge Ergebnisse für $\Phi \neq 0$ und $\eta_1 \neq \eta_2$ sind ebenfalls in [96] zu finden.

Im weiteren soll nun der Einfluß des Dispersionsmanagements auf diese Wechselwirkung anhand der Gleichung

$$iu_{j\zeta} - \frac{\vartheta(\zeta)}{2}u_{j\tau\tau} + g(\zeta)|u_j|^2 u_j = iR_{j,3-j}, \quad (5.6)$$

die aus (4.5) mit dem Ansatz (5.3) entsteht, untersucht werden. Dabei soll die Variationsmethode aus Kapitel 4 Anwendung finden, denn sie ist sowohl für die Beschreibung des Dispersionsmanagements als auch für die der Wechselwirkung sehr gut geeignet. Das Problem liegt nur in der Wahl der geeigneten Ansatzfunktion sowie in der richtigen Separation, aus der dann $R_{j,3-j}$ folgt.

Für schwaches Dispersionsmanagement sollte die Aufspaltung gemäß (5.4) anwendbar bleiben. Die Impulse unterliegen nur geringen Breitenschwankungen, so daß der Überlappungsgrad als Kriterium sinnvoll bleibt. Allerdings muß hier besonderes Augenmerk auf die zeitliche Asymptotik der Ansatzfunktion gerichtet werden. Im Falle

starken Managements hingegen werden sich die Impulse wegen der starken periodischen Breitenschwankungen während der Ausbreitung so stark überlappen, daß die Impulszentren die größere Rolle bei der Wechselwirkung spielen. Da diese durch die Gaußsche Ansatzfunktion sehr gut beschrieben werden, wird also auch die Wechselwirkung damit ausreichend gut analysiert werden können. Hier ist aber eine Aufspaltung analog (5.4) falsch, da wegen des generierten chirps jetzt die phasenangepaßten Terme die größere Rolle spielen.

5.1 Schwaches Dispersionsmanagement

Hier ist also, wie oben gesagt, $R_{j,3-j}$ gemäß

$$R_{j,3-j} = ig(u_j u_{3-j}^* + 2u_j^* u_{3-j})u_j, \quad j = 1, 2 \quad (5.7)$$

zu wählen. Mit einer sech-förmigen Ansatzfunktion ergibt sich damit zumindest für $s = 0$ das richtige Ergebnis. Nimmt jedoch s zu, so wird der Kollisionsabstand falsch berechnet. Entgegen einer Verringerung der Wechselwirkung, d.h. einer Zunahme des Kollisionsabstandes [13, 25, 26], liefert die Variationsrechnung abnehmende Kollisionsabstände. Die Gaußsche Ansatzfunktion ist jedoch noch weniger geeignet, da mit ihr der Kollisionsabstand viel zu groß vorhergesagt wird [23]. Abbildung 5.1 stellt die Variationslösung nach (3.21) für beide Ansatzfunktionen der BPM-Simulation gegenüber. Zum Vergleich ist auch das Verhalten bei $s = 0$ mit dargestellt.

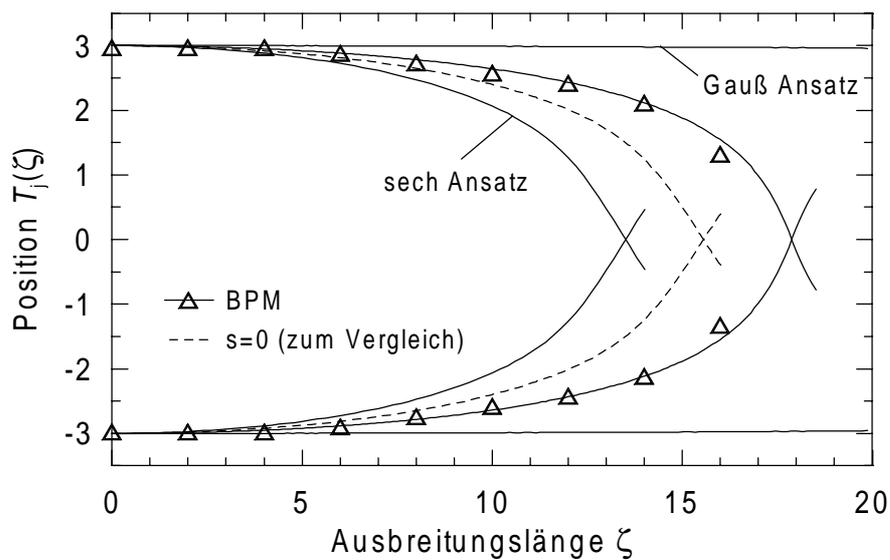


Abbildung 5.1: Vergleich von Variationsrechnung und BPM-Numerik für Gauß- und sech-förmige Ansatzfunktion bei einer Managementstärke von $s = 0.55$.

Der Grund für das Versagen des sech-förmigen Ansatzes liegt in seiner festen funktionalen Form begründet. Wie im Abschnitt 4.1.2 gezeigt, werden die Flanken der stationären Lösung mit zunehmender Managementstärke steiler. Die Breitenschwankungen bleiben auf das Impulszentrum beschränkt. Beide Eigenschaften sind aber mit einer konstanten Gestalt des Ansatzes nicht realisierbar. Der Gaußsche Ansatz versagt aufgrund seiner falschen zeitlichen Asymptotik. Die ist eher exponentiell als Gaußförmig [92]. Also muß dieser Ansatz zwangsläufig viel zu große Kollisionsabstände liefern.

Deshalb soll nun ein alternativer Ansatz der Gestalt

$$u_j(\zeta, \tau) = A_j(\zeta) f(\zeta, x_j) \exp \left[i\Phi_j(\zeta) - i\kappa_j(\zeta)x_j + ib_j(\zeta)f^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right] \quad (5.8)$$

mit der explizit ζ -abhängigen Impulsform

$$\begin{aligned} f(\zeta, x_j) &= \exp \left[-\sqrt{a_j(\zeta) + x_j^2} \right] \\ x_j &= q(\tau - T_j(\zeta)) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Anwendung finden [23]. Der Parameter $a_j(\zeta)$ kontrolliert die Impulsform. Mit größer werdendem a_j wird der Impuls mehr und mehr Gaußförmig. Die Breite wird über die Konstante q reguliert. Man beachte, daß q kein Variationsparameter ist. Die Breitenschwankungen innerhalb einer Einheitszelle werden ebenfalls durch $a_j(\zeta)$ vermittelt.

Setzt man nun diesen Ansatz in Formel (3.21) ein, so ergibt sich das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$a'_j(\zeta) = \vartheta q^2 b_j Q_1(a_j) \quad (5.10a)$$

$$b'_j(\zeta) = \frac{1}{2} \left[-\vartheta q^2 + \vartheta q^2 b_j^2 Q_2(a_j) + g E_j Q_3(a_j) \right] \quad (5.10b)$$

$$T'_j(\zeta) = \vartheta q \kappa_j \quad (5.10c)$$

$$\begin{aligned} \kappa'_j(\zeta) &= -2qg \frac{A_j^3 A_{3-j}}{E_j} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_j)^3 f(x_{3-j}) \left[\frac{3x_j \cos \Delta\phi}{\sqrt{a_j + x_j^2}} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right) \sin \Delta\phi \right] d\tau \end{aligned} \quad (5.10d)$$

für die Impulsparameter, wobei zusätzlich die Näherung gemacht wurde, daß nur die Frequenzen κ_j , die ja für isolierte Impulse konstant bleiben, durch die Wechselwirkung beeinflusst werden. Die anderen Parameter unterliegen zwar auch der Wechselwirkung,

aber der Effekt ist viel kleiner als die Wirkung des Dispersionsmanagements. Die Energie $E_j = A_j^2 I_0(a_j) = \text{const}$ ist dann eine Erhaltungsgröße, aus der bei Kenntnis von a_j sofort A_j berechnet werden kann. Der zeitlich konstante Anteil der Phase Φ_j soll nicht näher betrachtet werden, da er für beide Impulse gleich sein soll und somit keinen Einfluß auf die Wechselwirkungsdynamik hat. $\Delta\phi$ stellt die Phasendifferenz

$$\Delta\phi = \kappa_1 x_1 - \kappa_2 x_2 + b_2 f(x_2)^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - b_1 f(x_1)^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \quad (5.11)$$

dar und die Koeffizienten $Q_n(a)$ sind gemäß

$$Q_1(a) = \frac{I_0 I_1}{I_0 I_3' - I_3 I_0'}, \quad Q_2(a) = \frac{I_0' I_1 - I_0 I_1'}{I_0 I_3' - I_3 I_0'}, \quad Q_3(a) = \frac{2I_0' I_2 - I_0 I_2'}{I_0 (I_0 I_3' - I_3 I_0')} \quad (5.12)$$

mit den Integralen

$$\begin{aligned} I_0(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 2\sqrt{a} K_1(2\sqrt{a}), & I_1(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{-2} \left(f \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ I_2(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^4(x) dx = 2\sqrt{a} K_1(4\sqrt{a}), & I_3(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

definiert.

Bei $s = 0$ stellt ja das gewöhnliche Soliton (2.53) die stationäre Lösung dar. Da dieser Grenzfall in obiger Theorie enthalten sein muß, soll die Impulsbreite des Ansatzes (5.8) so groß wie die des Solitons, d.h. $\tau_{\text{FWHM}} = 1.763$, gewählt werden. Das bedeutet, daß für einen beliebigen Anfangswert $a_{1,2}(0) = a_0$ der Parameter q gemäß

$$q^2 = \frac{\ln 2}{1.763^2} (\ln 2 + 4\sqrt{a_0}) \quad (5.14)$$

definiert werden muß.

Die Lösung des Gleichungssystems (5.10) hat numerisch zu erfolgen. Im Gegensatz zu (4.15) ist hier aber die stationäre Lösung des Problems ohne Wechselwirkung nicht eindeutig bestimmt. Das ist eben die Folge des zusätzlichen konstanten Parameters q , der ja in Verbindung mit $a_j(\zeta)$ die Impulsform kontrolliert. Die Variationsrechnung allein liefert natürlich für jedes beliebige q , oder unter Benutzung von (5.14) für jeden Anfangswert a_0 , die für die stationäre Lösung benötigte Energie E und damit $A(0) = A_0$. Aber nur eine dieser Lösungen ist die richtige. Um nun diese zu finden, soll sich der Wechselwirkung bedient werden [23]. Dazu wird das volle Gleichungssystem (5.10) gelöst und der so ermittelte Stoßabstand mit dem aus der BPM-Simulation der

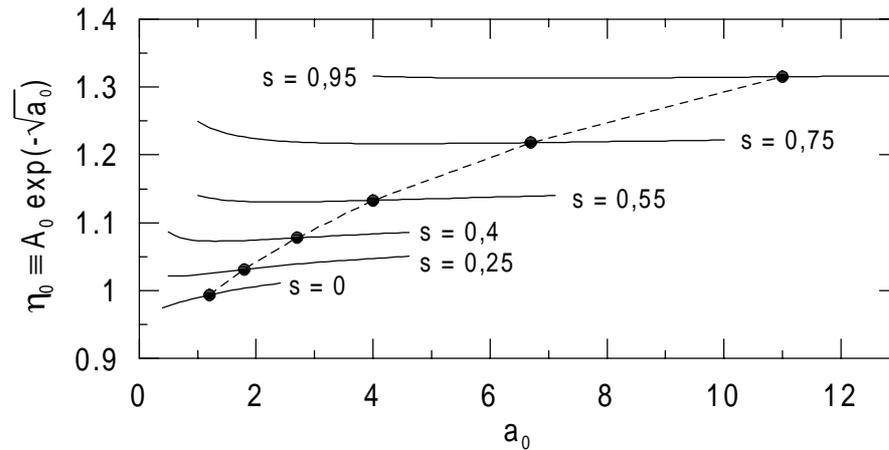


Abbildung 5.2: Optimale Anfangswerte für a_0 und Amplitude η_0 in Abhängigkeit von der Managementstärke s . durchgezogene Linien: Variationsrechnung, Punkte: BPM-Simulation

Gleichung (4.5) erhaltenen verglichen. Die Verluste sollen dabei unberücksichtigt bleiben. In Abbildung 5.2 sind diese Resultate veranschaulicht. Die Punkte symbolisieren den jeweils optimalen Wert für a_0 , mit dem die Wechselwirkung richtig beschrieben wird. Aus diesen und weiteren Rechnungen konnte dann eine empirische Formel für die Abhängigkeit des optimalen Anfangswertes a_0 von der Managementstärke s gemäß

$$a_0(s) \approx 1.2 + 9.6 s^2 \tag{5.15}$$

bestätigt werden [23]. Es sei angemerkt, daß in [23] die ursprüngliche Definition der Managementstärke (siehe Abschnitt 4.1.1) verwendet wurde, die mit s über $S = 1.287 s$ zusammenhängt.

Wie gut beschreibt nun aber der Ansatz (5.8) die tatsächliche stationäre Lösung?

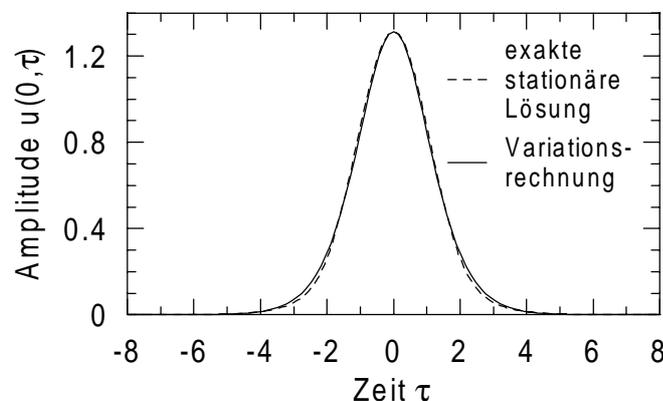


Abbildung 5.3: Vergleich des Ansatzes (5.8) mit der exakten stationären Lösung für $s = 0.95$.

Abbildung 5.3 zeigt einen Vergleich mit der exakten Lösung für $s = 0.95$. Die Übereinstimmung ist, wenn auch nicht vollkommen, so doch sehr gut. Für $s = 0$ ist der Ansatz mit der sech-Funktion des gewöhnlichen Solitons fast identisch. Aber für Werte von $s > 1.2$ werden die Ergebnisse zunehmend schlechter. Die Anwendung des Ansatzes (5.8) ist also auf schwaches bis moderates Dispersionsmanagement beschränkt.

Mit der Kenntnis der Formel (5.15) kann man nun für jede beliebige Systemkonfiguration in diesem Bereich sehr schnell den Einfluß der Wechselwirkung studieren. Abbildung 5.4 zeigt als Beispiel die Abhängigkeit des Stoßabstandes von der Dispersionsmanagementstärke. Es ist deutlich eine Reduzierung der Wechselwirkung mit zunehmendem s zu sehen, womit die Resultate in [25] bestätigt werden konnten.

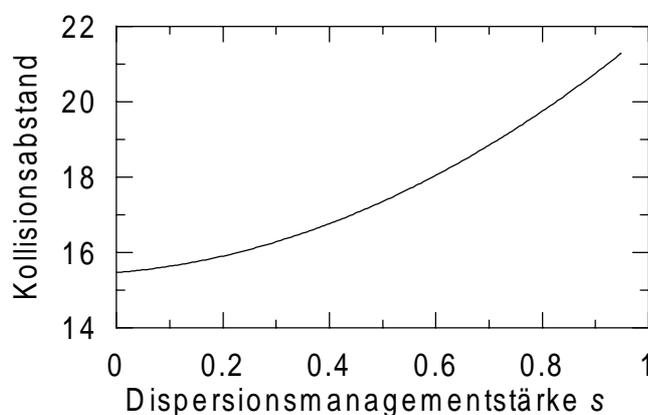


Abbildung 5.4: Abhängigkeit der Wechselwirkung von der Dispersionsmanagementstärke s .

5.2 Starkes Dispersionsmanagement

Dieses Regime ist gekennzeichnet durch eine starke Zunahme der Impulsbreite sowie durch die Generation eines chirps während der Ausbreitung innerhalb einer Einheitszelle. Dadurch variiert natürlich auch der Impulsüberlapp, der jeweils an den Verbindungspunkten der Fasersegmente ein Maximum erreicht. Gleichzeitig ist dort aber auch der chirp am größten, so daß Terme mit einer Phasendifferenz an Einfluß verlieren. Deshalb soll hier eine Aufspaltung gemäß

$$|u|^2 u \approx \left(|u_1|^2 + 2|u_2|^2 \right) u_1 + \left(|u_2|^2 + 2|u_1|^2 \right) u_2 \quad (5.16)$$

vorgenommen werden [25, 27, 29]. Die zwei phasenunangepaßten Terme ($u_1^2 u_2^*$ und $u_2^2 u_1^*$) leisten aufgrund der hohen lokalen Dispersion nur einen sehr geringen Beitrag und sollen

ganz weggelassen werden. Die Störung $R_{j,3-j}$ nimmt dann die Gestalt

$$R_{j,3-j} = i2g|u_{3-j}|^2 u_j, \quad j = 1, 2 \quad (5.17)$$

an. Damit erhält man nun das gleiche gekoppelte System nichtlinearer Schrödingergleichungen, das auch dem nächsten Kapitel zugrunde liegt, wo es um die Wechselwirkung in verschiedenen Kanälen geht.

Die Wahl der Ansatzfunktion gestaltet sich hier nicht so schwierig. Da die Impulszentren aufgrund der Impulsverbreiterung nun den größten Anteil an der Wechselwirkung haben, kann die recht einfach zu behandelnde Gaußfunktion benutzt werden [27, 29]. Sie möge die Gestalt

$$u_j(\zeta, \tau) = \eta_j(\zeta) \sqrt{p_j(\zeta)} e^{-\left(1-i\frac{\nu_j(\zeta)}{p_j(\zeta)}\right)\frac{t^2}{2} - i\kappa_j(\zeta)[\tau - T_j(\zeta)] + i\phi_j(\zeta)}, \quad j = 1, 2 \quad (5.18)$$

mit $t = p_j(\zeta)[\tau - T_j(\zeta)]$ haben. Dabei besitzen beide Impulse zunächst eigene Amplituden η_j , inverse Breiten p_j , Frequenzen κ_j , Positionen T_j , chirp-Parameter ν_j und eigene zeitunabhängige Phasen ϕ_j . Einsetzen von Ansatz (5.18) in die allgemeine Formel (3.21) liefert dann das gekoppelte Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\eta_j'(\zeta) = 0 \quad (5.19a)$$

$$p_j'(\zeta) = \vartheta p_j^2 \nu_j \quad (5.19b)$$

$$\begin{aligned} \nu_j'(\zeta) = & -p_j^2 \left(\vartheta p_j + \frac{g}{\sqrt{2}} \eta_j^2 \right) + 4gp_j^2 \frac{p_{3-j}^3 \eta_{3-j}^2}{(p_j^2 + p_{3-j}^2)^{\frac{3}{2}}} \times \\ & \times \left(2 \frac{p_j^2 p_{3-j}^2}{p_j^2 + p_{3-j}^2} (T_j - T_{3-j})^2 - 1 \right) \exp \left[-\frac{p_j^2 p_{3-j}^2}{p_j^2 + p_{3-j}^2} (T_j - T_{3-j})^2 \right] \end{aligned} \quad (5.19c)$$

$$\kappa_j'(\zeta) = 4gp_j^3 \frac{p_{3-j}^3 \eta_{3-j}^2}{(p_j^2 + p_{3-j}^2)^{\frac{3}{2}}} (T_j - T_{3-j}) \exp \left[-\frac{p_j^2 p_{3-j}^2}{p_j^2 + p_{3-j}^2} (T_j - T_{3-j})^2 \right] \quad (5.19d)$$

$$T_j'(\zeta) = \vartheta \kappa_j \quad (5.19e)$$

für die Impulsparameter, daß im allgemeinen numerisch gelöst werden muß. Abbildung 5.5 zeigt einen Vergleich dieser Theorie mit der vollen numerischen Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung für zwei Impulse gleicher Energie und Breite. Die Übereinstimmung ist qualitativ gut, wenn auch die absoluten Werte des Stoßabstandes für zu starkes Dispersionsmanagement schlechter werden. Das liegt daran, daß die Impulsform während der Wechselwirkung dann nicht mehr konstant bleibt.

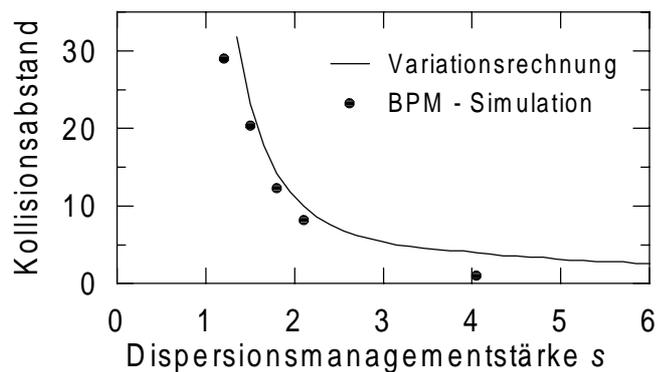


Abbildung 5.5: Abhängigkeit der Wechselwirkung von der Dispersionsmanagementstärke s für eine Anfangsimpulsseparation von $\Delta T = 6$.

Aus den beiden Kurvenverläufen der Abbildungen 5.4 und 5.5 ist deutlich zu erkennen, daß ein Maximum des Stoßabstandes, d.h. ein Wechselwirkungsminimum, in Abhängigkeit von der Dispersionsmanagementstärke existieren muß. Eine analytische Beschreibung dieser kritischen Managementstärke ist allerdings bisher noch nicht gelungen. Ebenso gibt es Hinweise, daß die Wechselwirkung bei extrem starkem Management wieder schwächer wird [36, 51]. Die Numerik gestaltet sich jedoch hier ziemlich kompliziert, so daß der Autor an dieser Stelle keine verlässlichen Ergebnisse vorlegen kann.

Kapitel 6

Impuls-Wechselwirkung unter dem Einfluß von Dispersionsmanagement in verschiedenen Kanälen

Solitonen bewegen sich in verschiedenen Kanälen, d.h. mit verschiedenen Frequenzen, unterschiedlich schnell. Damit sind Wechselwirkungen in Form von Stößen zwischen ihnen unausweichlich. Während eines solchen Stoßes kommt es zu Frequenzverschiebungen der beteiligten Impulse. Dabei müssen folgende Situationen unterschieden werden.

Ein vollständiger Stoß findet statt, wenn ein Impuls einen anderen während der Ausbreitung überholt. Vor und nach dem Stoß sollen beide Impulse vollständig voneinander getrennt sein. In idealen Solitonensystemen kommt es nur während des eigentlichen Stoßvorganges zu einer Frequenzverschiebung, die nach dem Stoß wieder komplett verschwindet [98]. Übrig bleibt allerdings eine kleine Positionsverschiebung. Unter Einbeziehung von Verlusten und diskreter Verstärkung kann es jedoch auch zu permanenten Frequenzverschiebungen kommen [98].

Eine andere Situation liegt vor, wenn sich die Impulse aus verschiedenen Kanälen bereits zu Beginn der Ausbreitung überlagern. Während eines solchen unvollständigen Stoßes kommt es zu permanenten Frequenzverschiebungen, die natürlich aufgrund der nun geänderten Geschwindigkeit zu einer kontinuierlichen Positionsverschiebung der beteiligten Impulse führen [99]. Bei zu geringem Kanalabstand trennen sich die Impulse dann gar nicht mehr, sondern bilden eine Mehrsolitonlösung, deren Eigenwerte rein imaginär sind [99, 100].

Im folgenden sollen diese beiden Stoßszenarien unter Einbeziehung variierender Di-

spersion mit Hilfe der Variationsrechnung näher untersucht werden.

Den Ausgangspunkt bildet auch hier wieder die modifizierte nichtlineare Schrödingergleichung (4.2) mit variabler Dispersion und periodischer Verstärkung. Die Anfangsfeldverteilung möge analog der im Kapitel 5 aus einer Summe von N Einzelimpulsen, jetzt aber mit unterschiedlichen Frequenzen, d.h. $\tilde{u}_m \sim \exp(-i\kappa_m\tau)$, gemäß

$$\tilde{u} = \sum_{m=1}^N \tilde{u}_m \quad (6.1)$$

bestehen. Diese Vorgehensweise ist zulässig, solange die gesamte spektrale Breite von \tilde{u} klein gegenüber der Mittenfrequenz ω_0 ist. Diese Bedingung ist aber durch den Einsatz der Erbium-dotierten Faserverstärker, der in der Praxis natürlich angestrebt ist, gut erfüllt. Deren Verstärkerbandbreite von etwa 10^{12} Hz (10 nm [37,38]) ist immer noch drei Größenordnungen kleiner als die Mittenfrequenz von ungefähr 10^{15} Hz. Bei einem typischen Kanalabstand von etwa 0.4 nm sind so bis zu 25 Kanäle möglich.

Hat man es hingegen mit großen Kanalabständen zu tun, so ist das Studium gekoppelter nichtlinearer Schrödingergleichungen mit unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten, Dispersionen und Nichtlinearitäten [58] unumgänglich.

Hier soll aber im weiteren angenommen werden, daß die Materialparameter in allen Kanälen gleich sind. Die Wechselwirkung der Kanäle untereinander wird durch den nichtlinearen Term gemäß

$$|\tilde{u}|^2 \tilde{u} = \sum_{n=1}^N \tilde{u}_n \left(|\tilde{u}_n|^2 + 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N |\tilde{u}_m|^2 \right) + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^N \tilde{u}_n \tilde{u}_m^* \tilde{u}_l \quad (6.2)$$

vermittelt. Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite beschreiben Selbst- und Kreuzphasenmodulation, während die dritte Summe für die Vier-Wellen-Mischung verantwortlich ist. Da für eine effiziente Erzeugung neuer Frequenzkomponenten wegen der hohen lokalen Gruppengeschwindigkeitsdispersion Phasenanpassung erforderlich ist, können diese Vier-Wellen-Mischungs-Produkte in guter Näherung vernachlässigt werden [98]. Die resultierende Gleichung läßt sich dann analog zu (5.17) in N gekoppelte Gleichungen für die Felder \tilde{u}_n zerlegen. Spaltet man nun noch die schnelle Amplitude $a(\zeta)$ aufgrund der Verluste und der periodischen Verstärkung wie in Gleichung (4.5) ab, so erhält man das System

$$i \frac{\partial u_n}{\partial \zeta} - \frac{1}{2} \vartheta(\zeta) + g(\zeta) \left(|u_n|^2 + 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N |u_m|^2 \right) u_n = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (6.3)$$

bestehend aus N nichtlinearen Schrödingergleichungen für die langsam veränderlichen Amplituden $u_n(\zeta, \tau)$.

Dieses Differentialgleichungssystem soll im folgenden wieder mit Hilfe der Variationsrechnung analysiert werden. Als Ansatz möge die Gaußsche Funktion

$$u_j(\zeta, \tau) = \eta_j(\zeta) \sqrt{p_j(\zeta)} e^{-\left(1 - i \frac{\nu_j(\zeta)}{p_j(\zeta)}\right) \frac{t^2}{2} - i \kappa_j(\zeta) [\tau - T_j(\zeta)] + i \phi_j(\zeta)} \quad (6.4)$$

mit $t = p_j(\zeta) [\tau - T_j(\zeta)]$ für den j -ten Impuls dienen, die auch schon im vorigen Kapitel Anwendung fand. Die Parameter sind dabei genauso wie dort definiert. Einsetzen von Ansatz (6.4) in die allgemeine Formel (3.21) liefert das gekoppelte Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\eta_j'(\zeta) = 0 \quad (6.5a)$$

$$p_j'(\zeta) = \vartheta p_j^2 \nu_j \quad (6.5b)$$

$$\begin{aligned} \nu_j'(\zeta) = & -p_j^2 \left(\vartheta p_j + \frac{g}{\sqrt{2}} \eta_j^2 \right) + 4g p_j^2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{p_n^3 \eta_n^2}{(p_j^2 + p_n^2)^{\frac{3}{2}}} \times \\ & \times \left(2 \frac{p_j^2 p_n^2}{p_j^2 + p_n^2} (T_j - T_n)^2 - 1 \right) \exp \left[-\frac{p_j^2 p_n^2}{p_j^2 + p_n^2} (T_j - T_n)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.5c)$$

$$\kappa_j'(\zeta) = 4g p_j^3 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{p_n^3 \eta_n^2}{(p_j^2 + p_n^2)^{\frac{3}{2}}} (T_j - T_n) \exp \left[-\frac{p_j^2 p_n^2}{p_j^2 + p_n^2} (T_j - T_n)^2 \right] \quad (6.5d)$$

$$T_j'(\zeta) = \vartheta \kappa_j \quad (6.5e)$$

für die Impulsparameter [24], daß eine Verallgemeinerung des Gleichungssystems (5.19) für mehrere Impulse darstellt. Für zwei Kanäle wurde ein solches Differentialgleichungssystem auch in [41] abgeleitet. Dort wurden dann jedoch nur vollständige Stöße näher untersucht.

Eine Besonderheit in Systemen mit Dispersionsmanagement ist bereits an Gleichung (6.5e) zu erkennen. Da $\vartheta(\zeta)$ eine stückweise konstante Funktion ist, wird $T_j(\zeta)$ in erster Näherung einen zickzack-förmigen Verlauf annehmen (siehe Abbildung 6.3). Das bedeutet aber, daß sich die Impulse während eines Stoßes mehrmals durchdringen. Weiter unten wird sich zeigen, daß die Symmetrie dieses mehrfachen Durchdringens eine entscheidende Rolle bei der Generierung der Frequenzverschiebung spielt.

Abbildung 6.1 zeigt als Beispiel die numerische Lösung der modifizierten nichtlinearen Schrödingergleichung (4.2) für ein Übertragungssystem bestehend aus 3 Kanälen, in

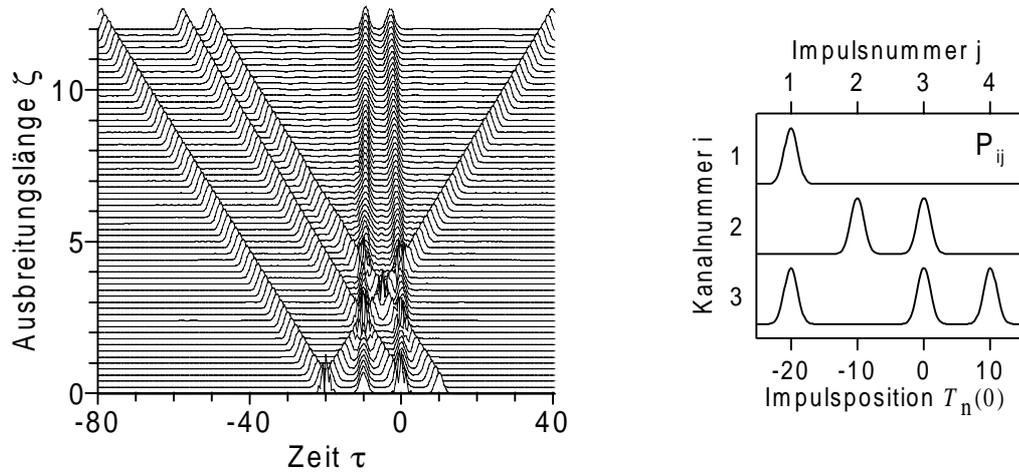


Abbildung 6.1: BPM-Simulation eines Systems bestehend aus 3 Kanälen mit den Parametern: $s = 1.5$ ($S' \approx 2.2$, vergleiche Definition von s auf Seite 40), $\Gamma = 6.3$, $\zeta_a = 0.2$, $p(0) = 1$, $\eta = 1.884$ (stroboskopische Darstellung).

denen jeweils 4 Bit übertragen werden sollen. Die Eingangsfeldverteilung ist im rechten Bild dieser Abbildung verdeutlicht. Das Bezugssystem möge sich mit der Gruppengeschwindigkeit des 2. Kanales bewegen. Eine detaillierte Auswertung dieser Rechnung sowie ein Vergleich mit der Lösung des Differentialgleichungssystems (6.5) ist in Abbildung 6.2 zu sehen. Es zeigt sich deutlich, daß die Variationsrechnung für das Problem der Wechselwirkung von Impulsen in unterschiedlichen Kanälen sehr gute Ergebnisse liefert. Die Theorie bricht dann zusammen, wenn aufgrund eines zu geringen Kanalabstandes sich zu Beginn überlappende Impulse bei der Ausbreitung nicht mehr trennen (siehe Abschnitt 6.1). Ein solches Regime ist aber für die Informationsübertragung

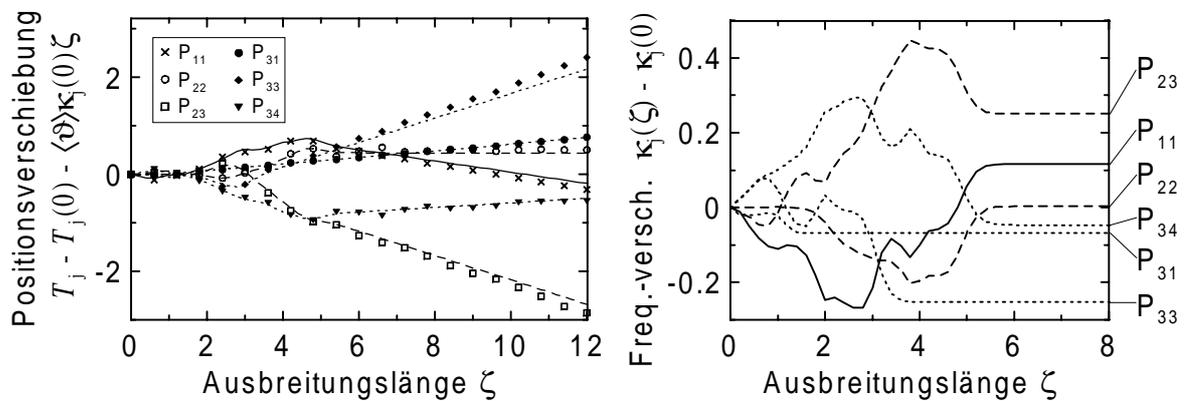


Abbildung 6.2: Vergleich der BPM-Simulation aus Abbildung 6.1 (Symbole) mit der Variationsrechnung (6.5) (Linien: durchgezogen - Kanal 1, gestrichelt - Kanal 2, gepunktet - Kanal 3). P_{ij} bezeichnet den Impuls j ($j = 1, \dots, 4$) im Kanal i ($i = 1, \dots, 3$).

nicht relevant. Die Frequenzverschiebung (rechtes Bild der Abbildung 6.2) ist für die einzelnen Impulse sehr unterschiedlich. Der größte Effekt tritt bei den Impulsen P_{23} und P_{33} auf, da sich diese Impulse in direkt benachbarten Kanälen befinden und sich zu Beginn der Ausbreitung komplett überlagern. Die geringste Frequenzverschiebung erfahren die Impulse P_{22} und P_{34} , da diese nur vollständigen Stößen ausgesetzt sind. In verlustfreien Solitonensystemen mit konstanter Dispersion würde deren Frequenzverschiebung sogar ganz verschwinden.

6.1 Unvollständiger Stoß

Ein unvollständiger Stoß bezeichnet die Wechselwirkung sich zu Beginn der Ausbreitung überlappender Impulse. Für den Fall konstanter Dispersion wurde die Frequenzverschiebung zweier wechselwirkender Solitonen in verschiedenen Kanälen als Funktion der Anfangsüberlagerung zuerst in [99] mit Hilfe der inversen Streutransformation [67] berechnet. Es zeigte sich, daß für einen Kanalabstand von $\Delta\kappa \leq 3.1$ bei einer vollständigen Anfangsüberlagerung die Eigenwerte denselben Realteil hatten, d.h., daß sich solche Impulse während der Ausbreitung nicht trennen werden und somit für die Signalübertragung unbrauchbar sind. Erst ab einem Kanalabstand von $\Delta\kappa \geq 5$ behalten die Solitonen ihre ursprünglichen Parameter mit einem Fehler von $\leq 20\%$ bei.

Diese Resultate konnten durch numerische Berechnung der Streudaten in [101] bestätigt und auf die Wechselwirkung sich überlappender Solitonen in N Kanälen erweitert werden. Danach steigt der minimale Kanalabstand für eine fehlerfreie Informationsübertragung mit der Anzahl der Kanäle an.

In Systemen mit Dispersionsmanagement kommt nun die Managementstärke s als neuer Parameter ins Spiel. Ihr Einfluß auf die Frequenzverschiebung sich überlappender Impulse verschiedener Frequenz soll im weiteren untersucht werden. Dabei mögen sich die Impulse zu Beginn vollständig überlagern, da in diesem Fall die größten Effekte zu erwarten sind. Die Bezeichnung „unvollständiger Stoß“ soll sich natürlich auf das stroboskopische Bild beziehen. Lokal betrachtet besteht ein solcher unvollständiger Stoß nämlich auch aus vielen vollständigen Stößen, wie in Abbildung 6.3 zu sehen ist, über deren Effekt in geeigneter Weise zu mitteln ist. Um dabei zu einem analytischen Ergebnis zu gelangen, sollen die Dämpfung sowie die periodische Verstärkung im weiteren weggelassen werden.

Der Lösung des Differentialgleichungssystems (6.5) nähert man sich nun sukzessive. In nullter Ordnung breitet sich jeder Impuls unabhängig von allen anderen nur un-

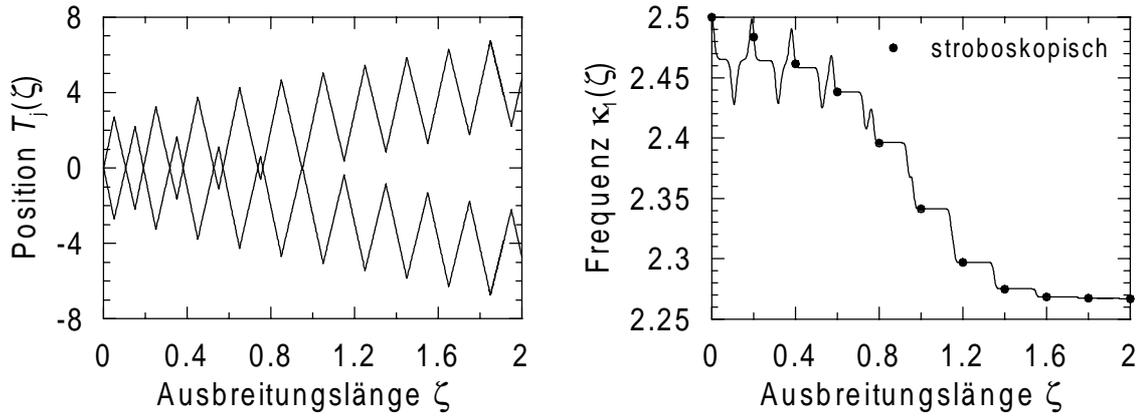


Abbildung 6.3: Position und Frequenz in einem System mit 2 Kanälen, $s = 1$ und $\delta\kappa = 5$.

ter dem Einfluß des Dispersionsmanagements aus. Als Anfangsbedingung wählt man dann natürlich die stroboskopisch stationäre Lösung dieses ungestörten Problems. Nach (4.19) hat sie in einfachster Näherung die Gestalt

$$p_j(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 + D^2}} \quad (6.6a)$$

$$\nu_j(\zeta) = -\frac{D}{\sqrt{1 + D^2}} \quad (6.6b)$$

$$\kappa_j(\zeta) = \kappa_{j0} \quad (6.6c)$$

$$T_j(\zeta) = \kappa_{j0}(D + \langle\vartheta\rangle\zeta), \quad (6.6d)$$

wobei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $p_j(0) = 1$ und $T_j(0) = 0$ gewählt wurde. Alle Impulse sollen also, bis auf die Frequenz, gleiche Parameter haben. In erster Ordnung ergeben sich dann Modifikationen dieser Ausdrücke aufgrund der Kreuzphasenmodulation. Im Mittelpunkt des Interesses liegt natürlich die Frequenzverschiebung $\Delta\kappa_j = \kappa_j(\infty) - \kappa_{j0}$.

Wenn man die Lösung nullter Ordnung (6.6) in die rechten Seiten der Gleichungen (6.5) einsetzt, so wird man bei deren anschließender Integration auf Integrale der Gestalt

$$I_n(\zeta) = \int_0^\zeta (z + h(z))^n F(z) e^{-(z+h(z))^2 f^2(z)} dz \quad (6.7)$$

geführt, wobei die auftretenden Funktionen $h(z)$, $F(z)$ und $f(z)$ streng periodisch sind. Ihre Periode ist der Verstärkerabstand ζ_a . Beträgt die Ausbreitungsstrecke ein Vielfaches des Verstärkerabstandes oder der Managementperiode, so geht dieses Integral über

in

$$I_n((M+1)\zeta_a) = \sum_{m=0}^M \int_{m\zeta_a}^{(m+1)\zeta_a} (z+h(z))^n F(z) e^{-(z+h(z))^2 f^2(z)} dz. \quad (6.8)$$

Für den Grenzwert $\zeta \rightarrow \infty$ kann man es mit Hilfe der Trapezformel

$$\sum_{m=0}^M I(m) \approx \int_0^{M+1} I(m) dm - \frac{I(M+1) - I(0)}{2} \quad (6.9)$$

auf die Gestalt

$$I_n \approx \left\langle \int_0^\infty (x+z+h(z))^n F(z) e^{-(x+z+h(z))^2 f^2(z)} dx \right\rangle + \frac{\zeta_a}{2} \left\langle (z+h(z))^n F(z) e^{-(z+h(z))^2 f^2(z)} \right\rangle \quad (6.10)$$

bringen, wobei die Spitzklammern wieder Mittelwertbildung über eine Einheitszelle bedeuten sollen.

Zur Berechnung der Frequenzverschiebung wird nur I_1 benötigt. Das übriggebliebene Integral in (6.10) läßt sich mit $n = 1$ einfach lösen und gibt dieser Formel die endgültige Gestalt

$$I_1 \approx \frac{1}{2} \left\langle F(z) [f^{-2}(z) + \zeta_a(z+h(z))] e^{-(z+h(z))^2 f^2(z)} \right\rangle. \quad (6.11)$$

Für die Ausführung der Mittelwertbildung sei auf den Anhang verwiesen. Als Resultat folgt daraus für die Frequenzverschiebung des Impulses j der Näherungsausdruck

$$\Delta \kappa_j \approx \frac{g\eta^2(s)}{s} \left(\frac{\zeta_1 \operatorname{sgn}(d_1)}{\sqrt{8} \delta \kappa} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{1 - \exp\left[-\frac{\zeta_a^2}{2} \delta \kappa^2 \langle \vartheta \rangle^2 (j-n)^2\right]}{j-n} + \frac{\sqrt{\pi}}{\langle \vartheta \rangle \delta \kappa^2} \left(1 + \frac{\zeta_1 \operatorname{sgn}(d_1) \operatorname{sgn}(\langle \vartheta \rangle)}{2\zeta_a} \right) \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{\operatorname{sgn}(j-n)}{(j-n)^2} \right), \quad (6.12)$$

wobei $\delta \kappa$ der Frequenzabstand benachbarter Kanäle sein soll [24].

Der Einfluß des Dispersionsmanagements spiegelt sich nur in dem Faktor η^2/s wieder und ist völlig unabhängig von der Kanalkonfiguration. Benutzt man für η^2 die Formel (4.22), so findet man ein Minimum der Funktion η^2/s genau bei $s = 1$, d.h. im Bereich nicht zu starken (moderaten) Dispersionsmanagements. Die Abbildungen

6.4 und 6.6 bestätigen dieses Resultat exzellent und zeigen gleichzeitig die Leistungsfähigkeit der Formel (6.12). Für $s \rightarrow 0$ versagt sie zwar, aber dieser Spezialfall läßt sich sehr einfach anhand der ursprünglichen Gleichungen (6.5) lösen. Für zwei Kanäle ergibt sich die bekannte Lösung

$$\Delta\kappa = \frac{\sqrt{2}g\eta^2}{\langle\vartheta\rangle\delta\kappa} \quad (6.13)$$

[98]. Ebenso versagt die Formel (6.12) auch für eine mittlere Dispersion von Null. Dort kommt es nicht zu einer endlichen Frequenzverschiebung, da die (stroboskopische) Wechselwirkungslänge in nullter Ordnung unendlich ist. Dieser Spezialfall soll in einem eigenen Abschnitt behandelt werden.

Aus Abbildung 6.4 wird deutlich, daß die Randkanäle die größte Frequenzverschiebung erfahren. Betrachtet man z.B. den ersten Kanal, $j = 1$, so geht die zweite Summe in (6.12) für große N gegen die Konstante $\pi^2/6$, während die erste Summe durch $C + \ln(N - 1)$ approximiert werden kann, $C = 0.5772$ ist die Eulersche Konstante. Die Frequenzverschiebung der Randkanäle hängt also logarithmisch von der Anzahl der Kanäle ab. Der rechte Graph in Abbildung 6.4 verdeutlicht dieses Verhalten und zeigt auch einen Vergleich mit dem vollen Variationsmodell. Dabei müssen bei der Konfiguration der Übertragungsstrecke die beiden Möglichkeiten der Faseranordnung unterschieden werden. Befindet sich der Einspeisepunkt des Signals in der Faser mit

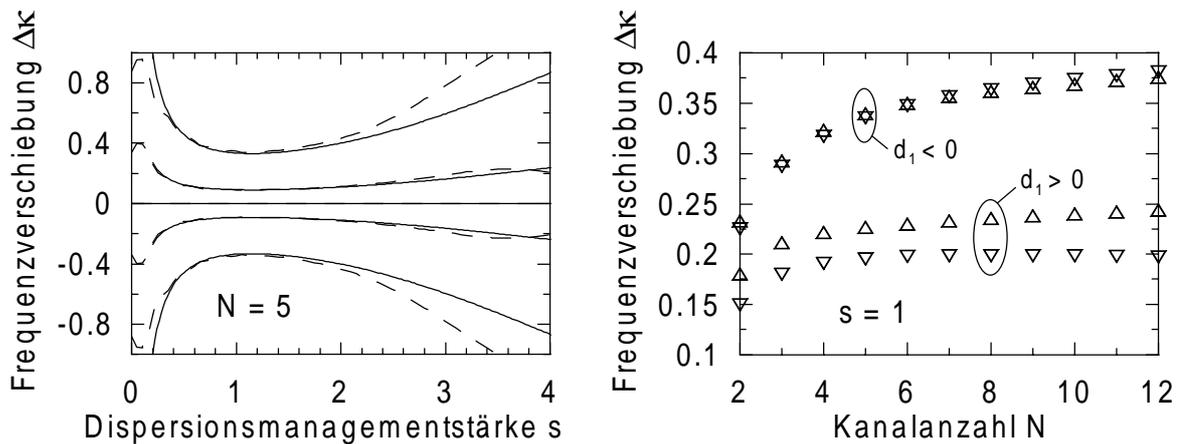


Abbildung 6.4: Frequenzverschiebung in Abhängigkeit von der Dispersionsmanagementstärke s in einem System bestehend aus $N = 5$ Kanälen (linkes Bild) sowie in Abhängigkeit von der Anzahl der Kanäle N in einem System mit $s = 1$ (rechtes Bild). Der Kanalabstand ist in beiden Fällen $\delta\kappa = 5$. Durchgezogene Linie und Dreiecke mit der Spitze nach unten: Gleichung (6.12); gestrichelte Linie und Dreiecke mit der Spitze nach oben: numerische Lösung des Systems (6.5).

normaler Dispersion, so ist die Frequenzverschiebung nur etwa halb so groß, als wenn er sich in der anomalen Faser befindet. Dieser Effekt ist ganz deutlich an Formel (6.12) abzulesen. Der zweite Term ist für $\text{sgn}(d_1) \text{sgn}(\langle \vartheta \rangle) < 0$ minimal und aufgrund des dadurch unterschiedlichen Vorzeichens beider Terme ist für eine große Anzahl Kanäle sogar mit einer Verringerung der maximalen Frequenzverschiebung zu rechnen.

Besonders deutlich tritt dieses Verhalten im Falle normaler mittlerer Dispersion zu Tage. Abbildung 6.5 zeigt, daß die Frequenzverschiebung infolge unvollständiger Stöße mit zunehmender Kanalanzahl zunächst ansteigt, dann aber wieder merklich abnimmt. Hier muß nun der Einspeisepunkt innerhalb der Faser mit anomaler Gruppengeschwindigkeitsdispersion liegen.

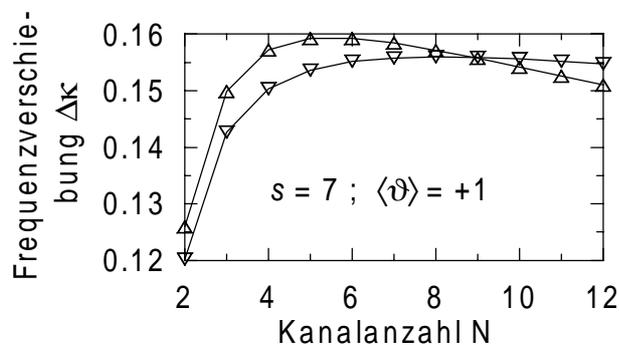


Abbildung 6.5: Frequenzverschiebung $\Delta\kappa$ für einen Randkanal in Abhängigkeit von der Anzahl N der Kanäle. Dreiecke mit der Spitze nach oben: numerischer Lösung des Gleichungssystems (6.5); Dreiecke mit der Spitze nach unten: Gleichung (6.12).

Eine weitere Besonderheit dieses Regimes normaler mittlerer Dispersion stellt auch die Abhängigkeit der Frequenzverschiebung von der Managementstärke dar. Es gibt ja,

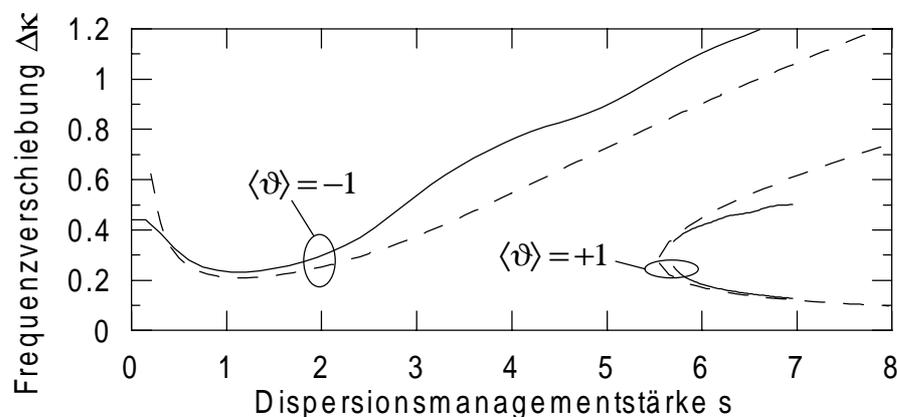


Abbildung 6.6: Frequenzverschiebung nach numerischer Lösung des Gleichungssystems (6.5) (—) und nach Gleichung (6.12) (---).

wie in Kapitel 4 gezeigt, erst ab einer bestimmten Managementstärke stationäre Lösungen, und zwar eine mit großer und eine mit kleiner Energie. Für die niedrigenergetische stationäre Lösung nimmt nun, da ihre Amplitude mit wachsender Managementstärke abnimmt, auch die Frequenzverschiebung ab. In Abbildung 6.6 ist diese Eigenschaft unzweifelhaft erkennbar.

6.2 Vollständiger Stoß

Bei einem vollständigen Stoß durchdringen sich die beteiligten Impulse während der Ausbreitung. Zu Beginn sind sie, wie auch am Ende der Ausbreitung, vollständig getrennt. In Systemen mit konstanter Dispersion wurde der Effekt eines vollständigen Stoßes zweier Solitonen ausführlich z.B. in [98] untersucht. Gewöhnliche Solitonen erfahren dabei lediglich eine kleine Positionsverschiebung aufeinander zu. Die Frequenz beider Solitonen ändert sich zwar während des Stoßvorganges, erreicht aber am Ende des Stoßes wieder exakt den Ausgangswert. In [98] wurde auch der Einfluß periodischer Verstärkung auf die Stoßdynamik analysiert. Aufgrund der gestörten Symmetrie des Stoßes kann es hier zu Frequenzverschiebungen kommen. Ist aber der Verstärkerabstand kleiner als die halbe Kollisionslänge, so mittelt sich der Effekt der periodischen Verstärkung vollständig heraus, so daß sich das System genauso wie im verlustfreien Fall verhält. Die Kollisionslänge ist als der Abstand zwischen den Punkten, an denen sich die wechselwirkenden Impulse bei ihrer halben Energie überlagern, definiert [98].

Auch unter dem Einfluß des Dispersionsmanagements spielt die Symmetrie des Stoßvorganges eine bedeutende Rolle. Wegen des periodisch wechselnden Vorzeichens der Gruppengeschwindigkeitsdispersion bewegen sich die Impulse zickzack-förmig bezüglich einer Referenzgruppengeschwindigkeit (vergl. Abbildung 6.3 und 6.7). Ein stroboskopisch vollständiger Stoß besteht also wieder aus vielen lokalen vollständigen, aber auch unvollständigen Stößen. Letztere finden an den Verbindungspunkten der Faserstücken statt und sind für resultierende Frequenzverschiebungen verantwortlich. Findet der zentrale Stoß genau in der Mitte eines Faserstückes statt, so addieren sich die Frequenzverschiebungen der einzelnen unvollständigen Stöße exakt zu Null [42]. Dieses Szenario soll als symmetrischer Stoß bezeichnet werden. Die größte Frequenzverschiebung tritt auf, wenn der zentrale Stoß genau auf ein Ende eines Faserstückes fällt. Ein solcher Stoß besitzt die größtmögliche Asymmetrie. Abbildung 6.7 dient zur Verdeutlichung dieser Stoßszenarien. Gleichzeitig erkennt man auch, daß die Kollisionslänge

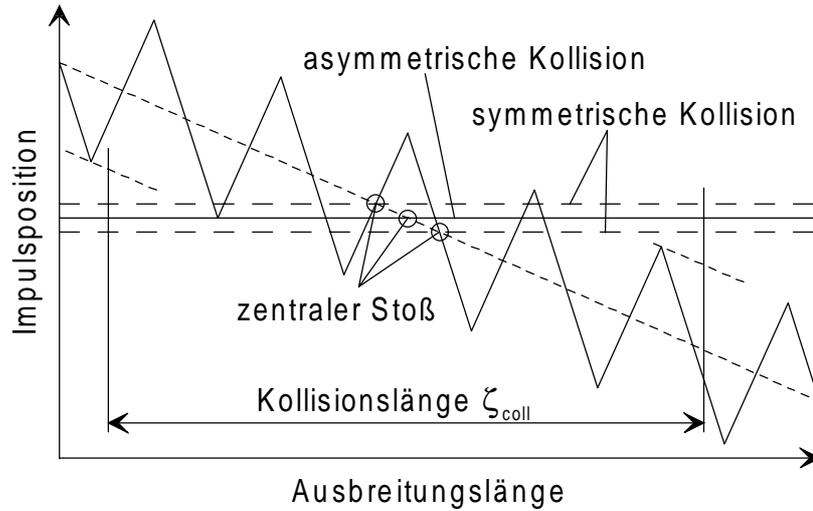


Abbildung 6.7: Szenarien eines vollständigen Stoßes zweier Impulse. Zickzack-Linie: Impuls 1, horizontale Linien: drei mögliche Anfangspositionen von Impuls 2. Das Bezugssystem bewegt sich mit Impuls 2.

bedeutend größer geworden ist. Während sie in Systemen konstanter Dispersion mit

$$\zeta_{\text{coll}} = \frac{2\tau_{\text{FWHM}}}{|\langle \vartheta \rangle \delta \kappa|} \quad (6.14)$$

angegeben werden kann [98], erhöht sie sich in Systemen mit Dispersionsmanagement auf etwa

$$\zeta_{\text{coll}} = \frac{2\tau_{\text{FWHM}}^{\text{min}}}{|\langle \vartheta \rangle \delta \kappa|} + \frac{2s}{|\langle \vartheta \rangle|} \quad (6.15)$$

[48]. Der zusätzliche Term kommt daher, daß der minimale Impulsabstand um $s \delta \kappa$ kleiner ist, als der mittlere Impulsabstand (siehe Abbildung 6.7). Für den Gaußschen Ansatz (6.4) ist die minimale Impulsbreite $\tau_{\text{FWHM}}^{\text{min}} = 2\sqrt{\ln 2} = 1.665$.

6.2.1 Einfluß auf die Frequenz

Abbildung 6.8 zeigt die Abhängigkeit der Frequenzverschiebung von der Dispersionsmanagementstärke. Für schwaches Management, $s < 1$, ist ein deutlicher Unterschied zwischen symmetrischem und asymmetrischem Stoß zu erkennen. Der oszillierende Kurvenverlauf wurde auch in [41] gefunden. Betrachtet man jedoch größere s , so verschwindet der Unterschied zwischen symmetrischem und asymmetrischem Stoß vollständig. Für starkes Management findet man dann wieder ein oszillatorisches Verhalten. Für bestimmte Werte von s verschwindet die Frequenzverschiebung. Der Grund dafür ist auch hier in der Symmetrie des Stoßes zu finden, jedoch bezieht sie sich jetzt nicht nur

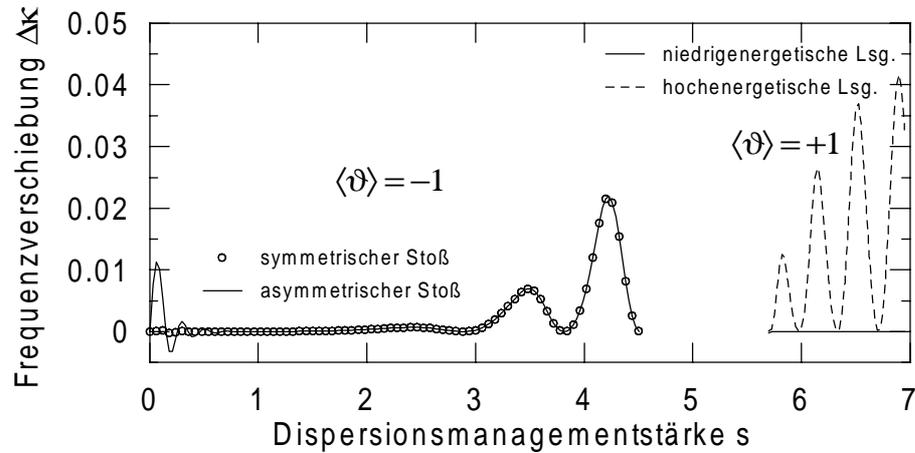


Abbildung 6.8: Frequenzverschiebung $\Delta\kappa$ für einen vollständigen Stoß zweier Impulse mit einem Frequenzabstand von $\delta\kappa = 10$.

auf die Impulsposition, sondern auf alle beteiligten Impulsparameter. In Abbildung 6.9 ist ein Vergleich zwischen einem Minimum und einem Maximum der Frequenzverschiebung aus Abbildung 6.8 zu sehen. Man erkennt deutlich, daß für das Maximum ($s = 3.48$) der chirp ν am Ende des Stoßes nicht bei Null anlangt. Dies wirkt sich dann auch auf die Impulsbreite p und schließlich auf die Frequenz κ aus.

Eine Sonderrolle spielt die stationäre Lösung mit der kleineren Energie im Falle normaler mittlerer Gruppengeschwindigkeitsdispersion. Wie aus Abbildung 6.8 deutlich hervorgeht, ist für solche Impulse die Frequenzverschiebung verschwindend klein.

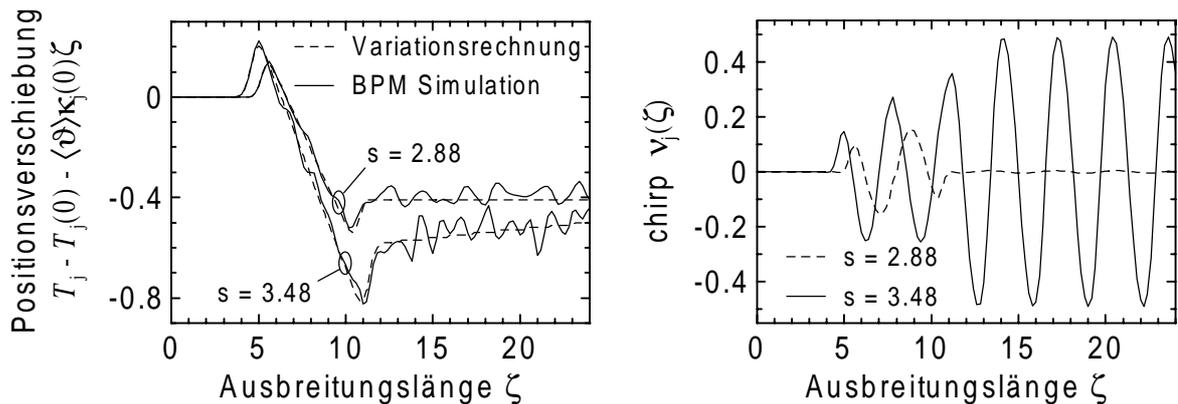


Abbildung 6.9: Einfluß der Wechselwirkung zwischen 2 Kanälen auf die Impulsposition T und den chirp ν für zwei extremale Werte von s für einen Kanalabstand von $\delta\kappa = 10$.

6.2.2 Einfluß auf die Impulslage

Die Positionsverschiebung ist im Gegensatz zur Frequenzverschiebung analytisch zugänglich. Der zentrale Stoß möge dabei bei $\zeta = 0$ liegen und die Ausbreitung soll von $\zeta = -L$ bis $\zeta = +L$ gehen. Dies bedeutet jedoch keine große Einschränkung der Allgemeinheit, da der Einfluß der Position des zentralen Stoßes innerhalb einer Zelle nur für schwaches Management spürbar ist. Partielle Integration der Gleichung (6.5e) führt dann auf

$$\Delta T_j = T_j(L) - T_j(-L) - 2\langle \vartheta \rangle L \kappa_j(-L) = \langle \vartheta \rangle L \Delta \kappa_j - \int_{-L}^L (D(\zeta) + \langle \vartheta \rangle \zeta) \kappa_j'(\zeta) d\zeta, \quad (6.16)$$

wobei $\kappa_j'(\zeta)$ gemäß Gleichung (6.5d) einzusetzen ist. Der erste Term auf der rechten Seite ist für eine kontinuierliche Positionsverschiebung aufgrund einer etwaigen Frequenzverschiebung verantwortlich (vergleiche Kurve für $s = 3.48$ in Abbildung 6.9). Der zweite Term stellt den eigentlichen Sprung in der Position dar. Seine Berechnung soll auf die gleiche Art und Weise wie beim unvollständigen Stoß erfolgen. Analog zu dort wird man hier auch auf ein Integral der Form (6.10) geführt, wobei nun aber I_2 , das sich gemäß

$$I_2 = \frac{1}{2} \left\langle (z+h)F[f^{-2} + z_a(z+h)]e^{-(z+h)^2 f^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} F f^{-3} [\operatorname{sgn}(f) - \operatorname{erf}((z+h)f)] \right\rangle \quad (6.17)$$

berechnen läßt, benötigt wird. Zur Ausführung der Mittelwertbildung für die einzelnen Terme sei wiederum auf den Anhang verwiesen. Es zeigt sich dabei, daß der Term $\sim \operatorname{sgn}(f)$ wesentlich größer als alle anderen Terme ist, so daß man als Resultat in sehr guter Näherung den einfachen Ausdruck

$$\Delta T_j(L) \approx \langle \vartheta \rangle L \Delta \kappa_j - \frac{2\sqrt{\pi} g \eta^2(s)}{|\langle \vartheta \rangle| \delta \kappa^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{\operatorname{sgn}(j-n)}{(j-n)^2} \quad (6.18)$$

erhält. Der Einfluß des Dispersionsmanagements wird also hauptsächlich durch die Energieerhöhung der stroboskopisch stationären Lösung des ungestörten Problems vermittelt. Das heißt, daß die Positionsverschiebung für kleine Werte von s etwa quadratisch mit s anwächst. Für normale mittlere Dispersion wird sie hingegen für die niedrigenergetische Lösung mit zunehmendem s abnehmen. In Abbildung 6.10 ist der funktionale Verlauf der Positionsverschiebung in Abhängigkeit von s für im Mittel nicht verschwindende Dispersion dargestellt. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung

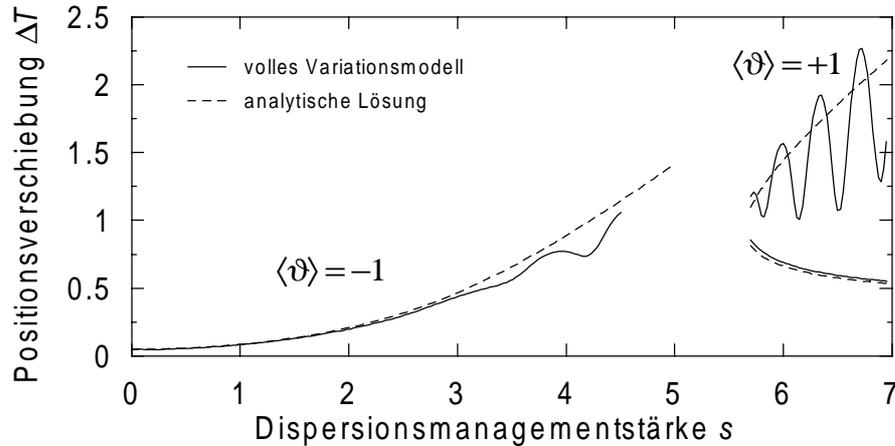


Abbildung 6.10: Positionsverschiebung in Abhängigkeit von s für anomale und normale mittlere Dispersion und einen Kanalabstand von $\delta\kappa = 10$ als Folge eines vollständigen Stoßes.

der Formel (6.18) mit der vollständigen Lösung des Gleichungssystems (6.5) zu erkennen. Das oszillatorische Verhalten in bestimmten Bereichen ist auf die zusätzliche Frequenzverschiebung (Abbildung 6.8) aufgrund des Stoßes zurückzuführen. Für $s = 0$ wird natürlich die bekannte Lösung [98] reproduziert.

6.3 Mittlere Dispersion gleich Null

Die Formeln (6.12) und (6.18) versagen offensichtlich, wenn $\langle \vartheta \rangle$ gegen Null geht. Der Grund dafür ist die ins Unendliche wachsende Wechselwirkungslänge (6.15), durch die bereits Formel (6.10) falsch wird. Dennoch lassen sich einige interessante Aussagen treffen, wenn man das lokale Stoßverhalten analysiert. Dazu soll natürlich wieder das Gleichungssystem (6.5) dienen. Abbildung 6.11 bestätigt die Anwendbarkeit dieses Gleichungssystems durch einen Vergleich mit der BPM-Simulation. Charakteristisch ist für dieses Beispiel die zu Beginn der Ausbreitung lineare Positionsverschiebung, obwohl die Frequenz zunächst konstant bleibt. Sie ist auf wiederholte Positionsverschiebungen durch Stöße innerhalb einer Zelle zurückzuführen. Diese lokalen Stöße sollen im weiteren untersucht werden. Dabei muß zwischen Stößen, die innerhalb und solchen, die am Rande eines Fasersegmentes stattfinden, unterschieden werden. Letztere sind für die Frequenzverschiebung verantwortlich, die dann zum Kollaps in Abbildung 6.11 führt. Zu Beginn der Ausbreitung treten nur Stöße innerhalb der Fasersegmente auf, die kleine Positionsverschiebungen bewirken. Dadurch bewegen sich aber die folgenden Stoßzentren zu den Rändern der Fasersegmente hin bis es dann eben zu diesen

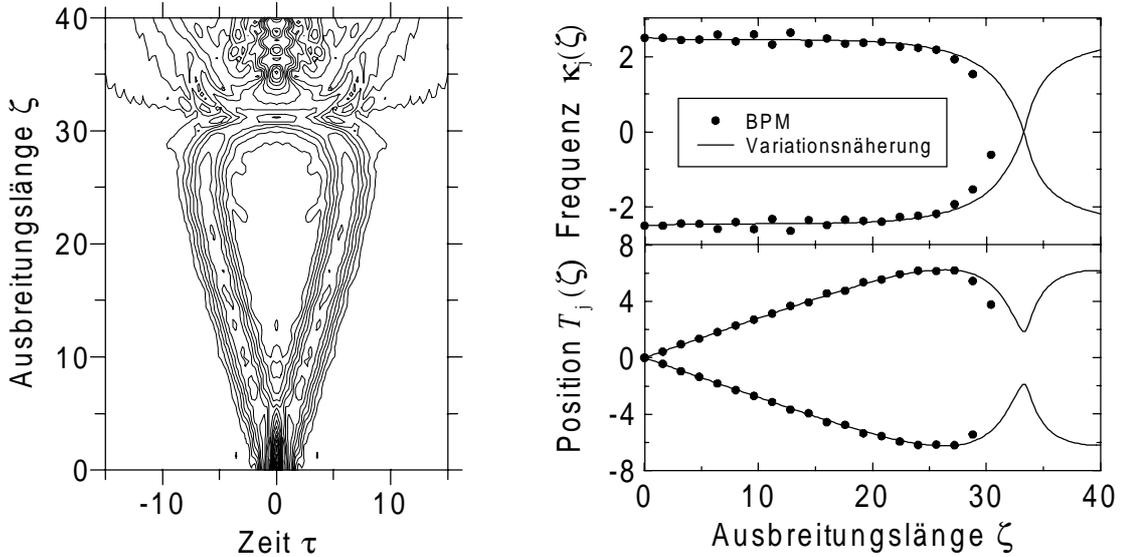


Abbildung 6.11: Vergleich der Variationsmethode (6.5) mit der direkten Lösung von (4.2) mittels BPM für zwei sich zu Beginn der Ausbreitung vollständig überlappende Impulse. Der Kanalabstand ist $\delta\kappa = 5$ und die Managementstärke ist $s = 4$.

Frequenzverschiebungen kommt.

Bei anfänglich getrennten Impulsen kommt es sofort zu Stößen in der Nähe der Ränder der Fasersegmente, es sei denn, die Impulse sind soweit zeitlich getrennt, daß gar keine Wechselwirkung stattfindet. Dies ist dann der Fall, wenn etwa $\Delta T_0 > 2s\delta\kappa$ ist.

Es treten also im allgemeinen immer Stöße an allen möglichen Stellen innerhalb einer Einheitszelle während der Ausbreitung auf [47]. Sie unterscheiden sich zum einen in der Impulsbreite, die ja innerhalb einer Zelle sehr stark schwankt, und zum anderen in einem eventuellen Wechsel des Vorzeichens der Gruppengeschwindigkeitsdispersion während des Stoßes.

6.3.1 Stoß in der Mitte eines Fasersegmentes

Zur Berechnung der Frequenzverschiebung bei einem unvollständigen Stoß sowie der Positonsverschiebung bei unvollständigem und vollständigem Stoß löst man wieder das Gleichungssystem (6.5) sukzessive. Nach Einsetzen der Lösung nullter Ordnung (6.6) mit $\langle \vartheta \rangle = 0$ ergibt sich für einen unvollständigen Stoß

$$\Delta\kappa_j = \frac{\sqrt{2}g\eta^2}{\vartheta\delta\kappa} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{1}{j-n} \left(1 + \frac{1}{\delta\kappa^2(j-n)^2} \right) \quad (6.19a)$$

$$\Delta T_j = \vartheta \Delta \kappa_j \zeta - \frac{\sqrt{\pi} g \eta^2}{|\vartheta| \delta \kappa^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{\operatorname{sgn} j - n}{(j - n)^2} \left(1 + \frac{3}{\delta \kappa^2 (j - n)^2} \right), \quad (6.19b)$$

wobei bei der näherungsweise Lösung der Integrale lediglich die extreme Kürze der Wechselwirkungslänge aufgrund der großen lokalen Gruppengeschwindigkeitsdispersion ϑ ausgenutzt wurde. Die Positionsverschiebung ΔT_j ist genauso wie in Gleichung (6.16) definiert. Es sei angemerkt, daß der zusätzliche Term $\sim \delta \kappa^{-2}$ in den beiden Formeln allein wegen der ζ -Abhängigkeit der inversen Impulsbreite $p(\zeta)$ auftaucht. Für einen vollständigen Stoß folgt in analoger Weise

$$\Delta \kappa_j = 0 \quad (6.20a)$$

$$\Delta T_j = -\frac{2\sqrt{\pi} g \eta^2}{\vartheta \delta \kappa^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{\operatorname{sgn} j - n}{(j - n)^2} \left(1 + \frac{3}{\delta \kappa^2 (j - n)^2} \right). \quad (6.20b)$$

Im Beispiel aus Abbildung 6.11 finden zumindest zu Beginn der Ausbreitung innerhalb einer Einheitszelle jeweils zwei unvollständige Stöße und ein vollständiger Stoß statt. Die Frequenzverschiebungen an den Rändern der Einheitszelle heben sich auf, aber übrig bleibt zweimal die Positionsverschiebung eines vollständigen Stoßes. Mit Hilfe der Gleichungen (6.19) und (6.20) ergibt sich für dieses Beispiel eine resultierende Positionsverschiebung von $\Delta T \approx 0.053$ pro Einheitszelle, was einem stroboskopischen Anstieg von etwa $\Delta T' \approx 0.27$ entspricht. Der Vergleich mit dem wahren Wert von $\Delta T' \approx 0.28$ aus Abbildung 6.11 zeigt die Genauigkeit dieser Theorie.

6.3.2 Stoß am Rand eines Fasersegmentes

Ein solcher Stoß kann innerhalb einer Einheitszelle nur genau einmal auftreten, nämlich entweder bei $\zeta = \zeta_1/2$ oder bei $\zeta = \zeta_1/2 + \zeta_2$. Er ist auch immer vollständig, aber die Frequenzverschiebung hebt sich während des Stoßvorganges aufgrund des Vorzeichenwechsels der Gruppengeschwindigkeitsdispersion nicht auf (siehe Abbildung 6.12).

Zur Berechnung der Frequenz- und Positionsverschiebung soll genauso wie im vorigen Abschnitt vorgegangen werden. Dazu ist die inverse Breite p am Faserende erforderlich. Aufgrund der Symmetrie ist nun $p(\zeta_1/2 + \zeta_2) = p(\zeta_1/2)$, so daß generell nur $p(\zeta_1/2)$ gebraucht wird. Da Formel (6.6a) hier aber zu ungenau ist, soll gemäß (4.19) der Ausdruck

$$p \approx \frac{t}{\sqrt{1 + t^4 D^2}} \quad (6.21)$$

benutzt werden. Wegen der extrem kurzen Wechselwirkungslänge kann dabei $t(\zeta)$ als konstant betrachtet werden. Aus der sukzessiven Lösung der Gleichungen (4.21) erhält man für $t(\zeta_1/2)$ den Ausdruck

$$t\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) = 1 - \frac{\eta^2 \zeta_1}{2\sqrt{2} s} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right), \quad (6.22)$$

der im weiteren in (6.21) benutzt werden soll.

Damit können die auftretenden Integrale wieder unter Berücksichtigung der sehr

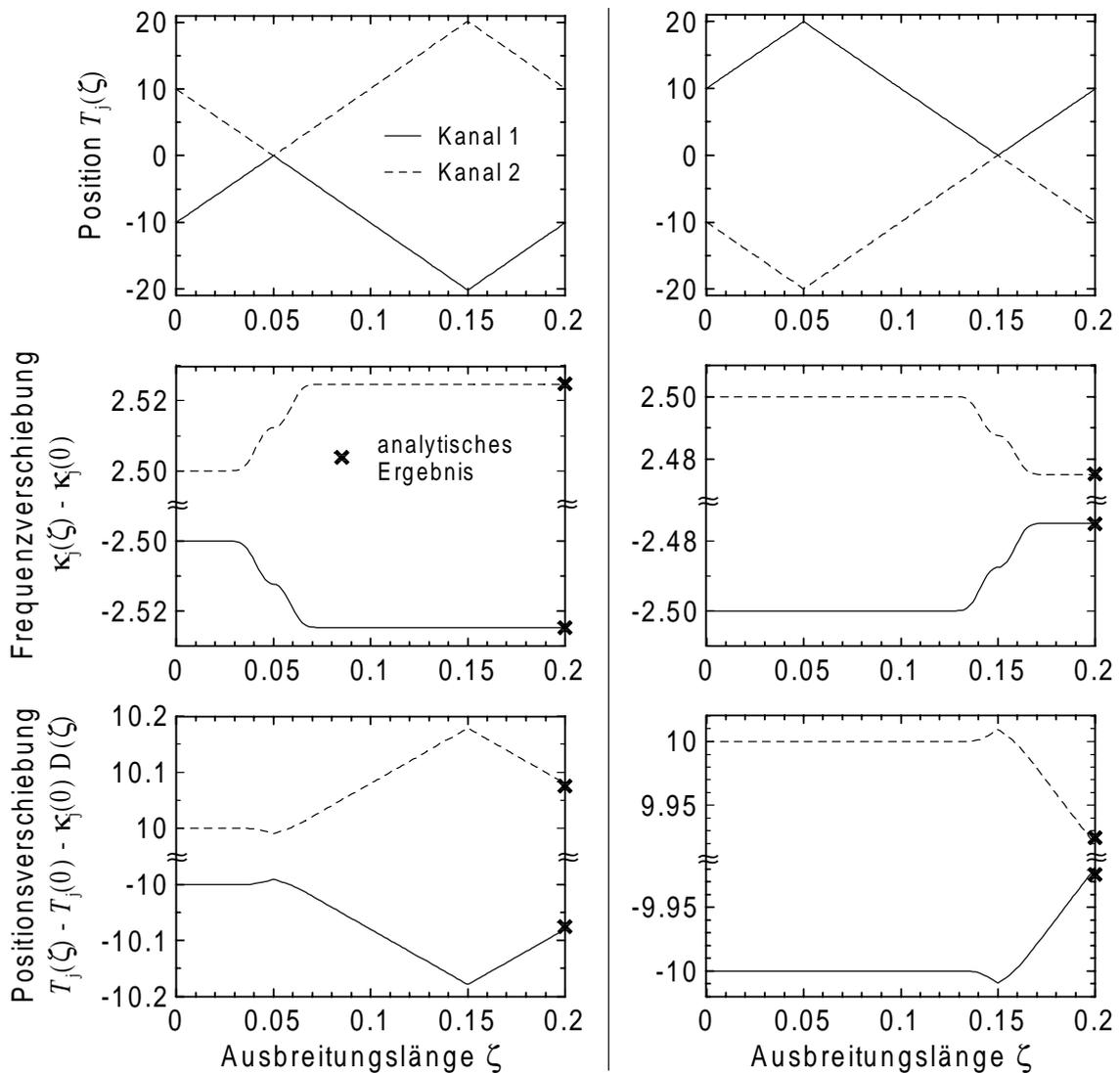


Abbildung 6.12: Stoßdynamik innerhalb einer Einheitszelle mit Stoßzentrum bei $\zeta = \zeta_1/2$ (linke Spalte) und $\zeta = \zeta_1/2 + \zeta_2$ (rechte Spalte) gemäß Variationsmethode (6.5) mit $\delta\kappa = 5$ und $s = 4$. Die nach Gleichungen (6.23) berechneten Frequenz- und Positionsverschiebungen sind durch Kreuze gekennzeichnet.

kurzen Wechselwirkungslänge gelöst werden. Als resultierende Frequenz- und Positionsverschiebung ergeben sich am Zellenende die Ausdrücke

$$\Delta\kappa_j(\zeta_a) = \pm \frac{\sqrt{2}g\eta^2\zeta_1}{s\delta\kappa} p\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{1}{j-n} \quad (6.23a)$$

$$\Delta T_j(\zeta_a) = \pm \Delta\kappa_j s - \frac{\sqrt{\pi}g\eta^2\zeta_1}{s\delta\kappa^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{\text{sgn } j-n}{(j-n)^2}, \quad (6.23b)$$

wobei das obere Vorzeichen für Stöße bei $\zeta = \zeta_1/2$ und das untere für solche bei $\zeta = \zeta_1/2 + \zeta_2$ zu verwenden ist. Abbildung 6.12 zeigt das Verhalten der Impulsparameter in diesen Fällen und verdeutlicht auch die Genauigkeit der Formeln (6.23).

Übertragen auf das stroboskopische Verhalten folgt wieder für den Beginn der Ausbreitung ein linearer Anstieg von Impulslage und Frequenz, was in Abbildung 6.13 deutlich zu sehen ist. Wenn der Impuls im Kanal niedrigerer Frequenz zeitlich vor dem Impuls mit höherer Frequenz eingespeist wird, so bewegen sich die Impulse zunächst auseinander. Gleichzeitig nimmt aber der Frequenzabstand beider Impulse zu, so daß die Wechselwirkung nicht abnimmt. Ab einem bestimmten Punkt bewegen sich dann beide Impulse sogar aufeinander zu, bis sie sich durchdringen [47]. Der Frequenzabstand hat sich bis dahin mehr als verdoppelt, so daß eine Anwendung in der Praxis nur durch zusätzliche Kontrollelemente, wie z.B. Filter [47], möglich wird.

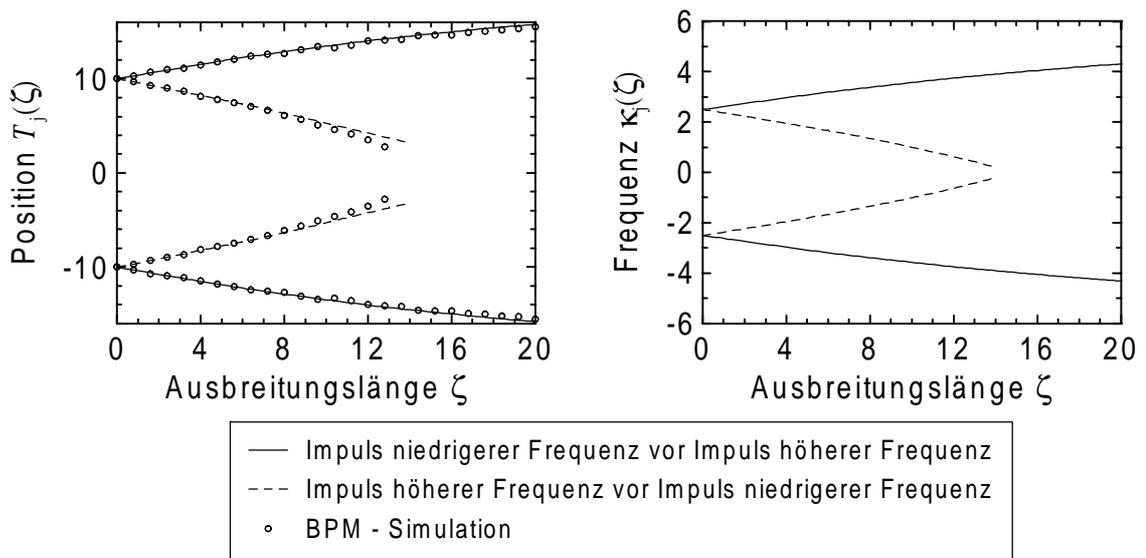


Abbildung 6.13: Stroboskopische Entwicklung von Impulslage und Frequenz für das Beispiel aus Abbildung 6.12.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Dispersionsmanagement ist eine Schlüsseltechnologie zur Erhöhung der Kapazität optischer Informationsübertragungssysteme. Der Grund dafür ist die Existenz der äußerst interessanten *dispersion-managed* Solitonen in diesen Systemen. Ihrer Beschreibung und vor allem ihrer Wechselwirkungen untereinander ist die vorliegende Arbeit gewidmet.

Mit Hilfe des Dispersionsmanagements läßt sich sowohl die Resonanzstrahlung als Folge der periodischen Verstärkung wie auch der Gordon-Haus timing jitter merklich reduzieren. Zudem ergibt sich ein verbessertes Signal-Rausch-Verhältnis wegen der Energieerhöhung der *dispersion-managed* Solitonen sowie eine nur geringe Effizienz der Vier-Wellenmischung aufgrund der hohen lokalen Dispersion in den Fasersegmenten. Es konnte gezeigt werden, daß auch unter dem Einfluß von Dispersionsmanagement die Frequenzverschiebung aufgrund des Ramaneffektes proportional zur Impulsenergie ist und deshalb mit zunehmender Managementstärke steigt, während die Wirkung der Dispersion 3. Ordnung relativ unabhängig vom Dispersionsmanagement bleibt.

Die bevorzugte Methode zur Beschreibung all dieser Effekte ist die Variationsrechnung. Sie wurde sehr allgemein vorgestellt und der Autor gelang zu dem Resultat, daß bei Differentialgleichungen vom Evolutionstyp die Kenntnis der Lagrangefunktion zur Ableitung der Entwicklungsgleichungen der freien Parameter nicht erforderlich ist. Das kritische Moment ist die Wahl der Ansatzfunktion. Hier muß immer ein Kompromiß zwischen der Allgemeinheit der Ergebnisse und ihrer Anschaulichkeit bzw. sogar analytischen Lösbarkeit gefunden werden, ohne daß die Diskrepanz zur exakten, meist nur numerisch ermittelbaren Lösung zu groß wird.

Die genaue Form des *dispersion-managed* Solitons wurde mit Hilfe eines Mittelungsverfahrens im Fourierraum gewonnen. Die Wirkung der Gruppengeschwindigkeitsdi-

spersion, die sich ja im Fourierraum immer als quadratische Phase äußert, kann exakt abgespalten werden, so daß die übrigen Impulsschwankungen, die aus dem lokalen Nichtgleichgewicht von Dispersion und Nichtlinearität folgen, klein sind. Sie können dann mit Hilfe der Lie-Transformation erfolgreich analysiert werden. So konnte das Resultat erzielt werden, daß die *dispersion-managed* Solitonen unter dem zusätzlichen Einfluß von Verlusten und periodischer Verstärkung grundsätzlich einen nichttrivialen chirp aufweisen.

Ein großer Teil der Arbeit beschäftigte sich mit der Wechselwirkung der *dispersion-managed* Solitonen. Dabei kam neben der direkten numerischen Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung ausschließlich die Variationsmethode zum Einsatz. Es gelang erstmals die Beschreibung der Wechselwirkung im selben Kanal für den Bereich schwachen bis moderaten Dispersionsmanagements. Möglich wurde dies durch eine alternative Ansatzfunktion, die ihre Gestalt zwischen Gauß- und sech-Förmigkeit variieren kann. Aufgrund dieser Komplexität hat sie jedoch den Nachteil, daß keine analytischen Ergebnisse gewonnen werden können. Die Wechselwirkungsstärke nimmt mit der Managementstärke ab, erreicht im Bereich moderaten Dispersionsmanagements ein Minimum und nimmt dann bei starkem Dispersionsmanagement enorm zu. Die Beschreibung dieser minimalen Wechselwirkungsstärke ist noch offen. Der Bereich starken Dispersionsmanagements läßt sich dagegen sehr gut mit Hilfe der konventionellen Gauß-Funktion beschreiben.

Ebenso wurde auch die Wechselwirkung in Vielkanalsystemen untersucht. Sie tritt hier in Form von Stößen auf, da sich die Impulse aufgrund der Gruppengeschwindigkeitsdispersion bei verschiedenen Frequenzen unterschiedlich schnell bewegen. Es wurde dabei zwischen vollständigen und unvollständigen Stößen unterschieden. Erstere treten während der Ausbreitung auf, wenn sich die Impulse komplett überholen, während letztere nur am Anfang und am Ende der Übertragungsstrecke infolge von sich überlappenden Impulsen passieren können. Zur Beschreibung erwies sich die Gauß-Funktion als generell geeignet, so daß häufig sogar analytische Formeln für die Frequenz- und Positionsverschiebungen in Abhängigkeit von Kanalabstand und Dispersionsmanagementstärke angegeben werden konnten. So konnte die Frequenzverschiebung bei unvollständigen Stößen als minimal im Bereich moderaten Dispersionsmanagements identifiziert werden. Bei vollständigen Stößen ist die Frequenzverschiebung im Gegensatz zu reinen Solitonensystemen nur unter gewissen Umständen Null, wobei sie aber im moderaten Dispersionsmanagement generell verschwindet. Die Positionsverschiebung dagegen nimmt etwa quadratisch mit der Managementstärke zu.

Im Fall, daß die mittlere Dispersion verschwindet, ist die Wechselwirkung sehr stark. Das ist eine Folge der zickzack-förmigen Bewegung der Impulse, die eine unendliche Anzahl lokaler Stöße nach sich zieht. Dieses Regime ist somit für Frequenzmultiplexverfahren wenig geeignet.

Eine Alternative stellt aber der Fall normaler mittlerer Dispersion dar, wenn man die niedrigenergetische Lösung als Informationsträger benutzt. Die Frequenzverschiebung bei unvollständigen Stößen verschwindet und die Positionsverschiebung infolge vollständiger Stöße nimmt mit der Dispersionsmanagementstärke ab. Jedoch ist hier die Wechselwirkung zwischen Impulsen im selben Kanal groß.

Es wurde auch der Einfluß der Anzahl der Kanäle auf die Wechselwirkung untersucht. Dabei sind natürlich die Randkanäle am meisten betroffen. Für sie ergab sich bei anomaler mittlerer Dispersion eine etwa logarithmische Zunahme der Frequenzverschiebung infolge unvollständiger Stöße mit der Anzahl der Kanäle. Überraschenderweise kann aber die Frequenzverschiebung bei normaler mittlerer Dispersion ab einer bestimmten Kanalanzahl auch wieder abnehmen.

Alles in allem kann man aus dem Wechselwirkungsverhalten den Schluß ziehen, daß Systemkonfigurationen mit moderatem Dispersionsmanagement zur Erhöhung der Übertragungskapazität am geeignetsten erscheinen. Die Entwicklung neuer Technologien, wie z.B. die der „kurzperiodischen Faser“, machen zudem die Benutzung kurzer Impulse möglich, ohne daß die Managementstärke den moderaten Bereich verläßt, womit höchstbitratige optische Kommunikationssysteme jenseits der TBit/s-Grenze möglich werden.

Anhang A

Berechnung der Integrale für die Wechselwirkung in mehreren Kanälen

Im folgenden soll die Ausführung der Mittelwertbildung nach Gleichung 6.11 erläutert werden. Bis auf Vorfaktoren müssen dabei Integrale der Form

$$\int_0^{\zeta_a} p(\zeta)^n (\langle \vartheta \rangle \zeta + D(\zeta))^m e^{-\frac{p^2}{2} \delta \kappa^2 (\langle \vartheta \rangle \zeta + D)^2} d\zeta \quad (\text{A.1})$$

gelöst werden, wobei die inverse Impulsbreite p in einfachster Form gemäß $p \approx (1 + D^2)^{-\frac{1}{2}}$ benutzt werden soll. Die Definition von $D(\zeta)$ findet sich in Kapitel 4.

Da $d(\zeta)$ eine Stufenfunktion ist, zerlegt man das Integral (A.1) in einzelne Teilintegrale über Bereiche mit jeweils konstantem d . Substitution von $D(\zeta) = x$ gibt diesen Teilintegralen dann die Gestalt

$$\frac{1}{d} \int_{D(z_1)}^{D(z_2)} \frac{(x+c)^m}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-a^2 \frac{(x+c)^2}{1+x^2}} dx \quad (\text{A.2})$$

mit $a^2 = \frac{\delta \kappa^2}{2} \left(\frac{d + \langle \vartheta \rangle}{d} \right)^2$ und

$$c = \begin{cases} 0 & , 0 \leq z_1, z_2 \leq \frac{\zeta_1}{2} \\ \frac{d_2 \zeta_a \langle \vartheta \rangle}{2(d_2 + \langle \vartheta \rangle)} & , \frac{\zeta_1}{2} \leq z_1, z_2 \leq \frac{\zeta_1}{2} + \zeta_2 \\ \frac{d_1 \zeta_a \langle \vartheta \rangle}{d_1 + \langle \vartheta \rangle} & , \frac{\zeta_1}{2} + \zeta_2 \leq z_1, z_2 \leq \zeta_a \end{cases} . \quad (\text{A.3})$$

Da nun aber die Exponentialfunktion nur für kleine Argumente einen nichtverschwindenden Beitrag liefert, kann man x^2 in den Nennern in guter Näherung durch c^2 erset-

zen. Das resultierende Integral ist dann exakt lösbar und führt wieder auf die Exponentialfunktion oder auf die Fehlerfunktion, je nachdem, ob m ungerade oder gerade ist.

Für $n = 1$ und $m = 0$ beispielsweise ergibt sich die Lösung

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2ad} [\operatorname{erf}(a(D(z_2) + d)) - \operatorname{erf}(a(D(z_1) + d))], \quad (\text{A.4})$$

aus der dann nach Einsetzen der entsprechenden Grenzen der zweite Term in (6.12) folgt.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Hasegawa and F. D. Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 23:142, 1973.
- [2] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and J. P. Gordon. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, 45:1095, 1980.
- [3] M. Nakazawa, Y. Kimura, and K. Suzuki. Soliton amplification and transmission with Er/sup3+/- doped fibre repeater pumped by GaInAsP diode. *Electron. Lett.*, 25:199, 1989.
- [4] A. Hasegawa and Y. Kodama. Guiding-Center Soliton. *Phys. Rev. Lett.*, 66:161, 1991.
- [5] K. J. Blow and N. J. Doran. Average soliton dynamics and the operation of soliton systems with lumped amplifiers. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 3:369, 1991.
- [6] M. Wald, I. M. Uzunov, F. Lederer, and S. Wabnitz. Optimization of Periodically Dispersion Compensated Breathing Soliton Transmissions. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 9:1670, 1997.
- [7] S. M. J. Kelly. Characteristic sideband instability of periodically amplified average soliton. *Electron. Lett.*, 28:806, 1992.
- [8] N. J. Smith, K. J. Blow, and I. Andonovic. Sideband Generation Through Perturbations to the Average Soliton Model. *J. Lightwave Technol.*, 10:1329, 1992.

- [9] F. M. Knox, W. Forysiak, and N. J. Doran. 10-Gbt/s soliton communication systems over standard fibre at $1,55\ \mu\text{m}$ and the use of dispersion compensation. *J. Lightwave Technol.*, 13:1955, 1995.
- [10] M. Suzuki, I. Morita, N. Edagawa, S. Yamamoto, H. Taga, and S. Akiba. Reduction of Gordon-Haus timing jitter by periodic dispersion compensation in soliton transmission. *Electron. Lett.*, 31:2027, 1995.
- [11] M. Nakazawa and H. Kubota. Optical soliton communication in a positively and negatively dispersion-allocated optical fiber transmission line. *Electron. Lett.*, 31:216, 1995.
- [12] J. P. Gordon and H. A. Haus. Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission. *Opt. Lett.*, 11:665, 1986.
- [13] M. Wald, I. M. Uzunov, F. Lederer, and S. Wabnitz. Optimization of soliton transmissions in dispersion-managed fiber links. *Opt. Commun.*, 145:48, 1998.
- [14] T. Georges and B. Charbonnier. Reduction of the dispersive waves in periodically amplified links with initially chirped solitons. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 9:127, 1997.
- [15] N. J. Smith, N. J. Doran, F. M. Knox, and W. Forysiak. Energy-scaling characteristics of solitons in strongly dispersion-managed fibers. *Opt. Lett.*, 21:1981, 1996.
- [16] I. R. Gabitov, E. G. Shapiro, and S. K. Turitsyn. Optical pulse dynamics in fiber links with dispersion compensation. *Opt. Commun.*, 134:317, 1997.
- [17] Y. Kodama, S. Kumar, and A. Maruta. Chirped nonlinear pulse propagation in a dispersion-compensated system. *Opt. Lett.*, 22:1689, 1997.
- [18] S. K. Turitsyn. Breathing self-similar dynamics and oscillatory tails of the chirped dispersion-managed soliton. *Phys. Rev. E*, 58:1256, 1998.
- [19] S. K. Turitsyn and E. G. Shapiro. Dispersion-managed solitons in optical amplifier transmission systems with zero average dispersion. *Opt. Lett.*, 23:682, 1998.
- [20] J. N. Kutz and S. G. Evangelides. Dispersion-managed breathers with average normal dispersion. *Opt. Lett.*, 23:685, 1998.

- [21] Y. Chen and H. A. Haus. Dispersion-managed solitons in the net positive dispersion regime. *J. Opt. Soc. Am. B*, 16:24, 1999.
- [22] V. S. Grigoryan and C. R. Menyuk. Dispersion-managed solitons at normal average dispersion. *Opt. Lett.*, 23:609, 1998.
- [23] M. Wald, B. A. Malomed, and F. Lederer. Interaction of moderately dispersion-managed solitons. *Opt. Commun.*, 172:31, 1999.
- [24] M. Wald, B. A. Malomed, and F. Lederer. Interactions of dispersion-managed solitons in wavelength-division-multiplexed optical transmission lines. *Opt. Lett.*, 26:965, 2001.
- [25] T. Yu, E. A. Golovchenko, A. N. Pilipetskii, and C. R. Menyuk. Dispersion-managed soliton interactions in optical fibers. *Opt. Lett.*, 22:793, 1997.
- [26] B. A. Malomed. Suppression of soliton jitter and interactions by means of dispersion management. *Opt. Commun.*, 147:157, 1998.
- [27] S. Kumar, M. Wald, F. Lederer, and A. Hasegawa. Soliton interaction in strongly dispersion-managed optical fibers. *Opt. Lett.*, 23:1019, 1998.
- [28] T. Inoue, H. Sugahara, A. Maruta, and Y. Kodama. Interactions between dispersion managed solitons in optical time-division multiplexed system. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 12:299, 2000.
- [29] M. Matsumoto. Analysis of interaction between stretched pulses propagating in dispersion-managed fibers. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 10:373, 1998.
- [30] T. Georges. Soliton interaction in dispersion-managed links. *J. Opt. Soc. Am. B*, 15:1553, 1998.
- [31] M. Romagnoli, L. Socci, M. Midrio, P. Franco, and T. Georges. Long-range soliton interactions in dispersion-managed links. *Opt. Lett.*, 23:1182, 1998.
- [32] M. Matsumoto. Analysis of filter control of dispersion-managed soliton transmission. *J. Opt. Soc. Am. B*, 15:2831, 1998.
- [33] M. Matsumoto, H. Kurokawa, Y. Kodama, and A. Hasegawa. Effects of filters on pulse-to-pulse interaction between dispersion-managed solitons. *Opt. Commun.*, 155:28, 1998.

- [34] E. Pincemin, F. Neddham, and O. Leclerc. Efficient reduction of interactions in dispersion-managed links through in-line filtering and synchronous intensity modulation. *Opt. Lett.*, 25:287, 2000.
- [35] P. V. Mamyshev and N. A. Mamysheva. Pulse-overlapped dispersion-managed data transmission and intrachannel four-wave mixing. *Opt. Lett.*, 24:1454, 1999.
- [36] G. Berto, F. Neddham, and S. Wabnitz. Role of adjacent-pulse overlap in the interaction between dispersion-managed solitons. *Opt. Lett.*, 25:144, 2000.
- [37] F. Favre, D. Le Guen, M. L. Moulinard, M. Henry, and T. Georges. 320 Gbit/s soliton WDM transmission over 1300 km with 100 km dispersion-compensated spans of standard fibre. *Electron. Lett.*, 33:2135, 1997.
- [38] K. Suzuki, H. Kubota, A. Sahara, and M. Nakazawa. 640 Gbit/s (40 Gbit/s \times 16 channel) dispersion-managed DWDM soliton transmission over 1000 km with spectral efficiency of 0.4 bit/Hz. *Electron. Lett.*, 36:443, 2000.
- [39] E. Pincemin, O. Leclerc, and E. Desurvire. Feasibility of 1-Tbit/s (25 x 40 Gbit/s) transoceanic optically regenerated systems. *Opt. Lett.*, 24:720, 1999.
- [40] L. F. Mollenauer, P. V. Mamyshev, J. Gripp, M. J. Neubelt, N. Mamysheva, L. Grüner-Nielsen, and T. Veng. Demonstration of massive wavelength-division multiplexing over transoceanic distances by use of dispersion-managed solitons. *Opt. Lett.*, 25:704, 2000.
- [41] T. Hirooka and A. Hasegawa. Chirped soliton interaction in strongly dispersion-managed wavelength-division-multiplexing systems. *Opt. Lett.*, 23:768, 1998.
- [42] J. F. L. Devaney, W. Forysiak, A. M. Niculae, and N. J. Doran. Soliton collisions in dispersion-managed wavelength-division-multiplexed systems. *Opt. Lett.*, 22:1695, 1997.
- [43] D. J. Kaup, B. A. Malomed, and J. Yang. Interchannel pulse collision in a wavelength-division-multiplexed system with strong dispersion management. *Opt. Lett.*, 23:1600, 1998.
- [44] D. J. Kaup, B. A. Malomed, and J. Yang. Collision-induced pulse timing jitter in a wavelength-division-multiplexing system with strong dispersion management. *J. Opt. Soc. Am. B*, 16:1628, 1999.

- [45] A. M. Niculae, W. Forysiak, A. J. Gloag, J. H. B. Nijhof, and N. J. Doran. Soliton collisions with wavelength-division multiplexed systems with strong dispersion management. *Opt. Lett.*, 23:1354, 1998.
- [46] H. Sugahara and A. Maruta. Collision-induced timing-jitter analysis in a wavelength-division-multiplexed optical soliton-transmission system with dispersion management. *J. Opt. Soc. Am. B*, 18:419, 2001.
- [47] Y. Chen and H. A. Haus. Collisions in dispersion-managed soliton propagation. *Opt. Lett.*, 24:217, 1999.
- [48] P. V. Mamyshev and L. F. Mollenauer. Soliton collisions in wavelength-division-multiplexed dispersion-managed systems. *Opt. Lett.*, 24:448, 1999.
- [49] B. Malomed, G. D. Peng, and P. L. Chu. Soliton wavelength-division multiplexing system with channel-isolating notch filters. *Opt. Lett.*, 24:1100, 1999.
- [50] M. J. Ablowitz, G. Biondini, S. Chakravarty, and R. L. Horne. On timing jitter in wavelength-division multiplexed soliton systems. *Opt. Commun.*, 150:305, 1998.
- [51] T. Yu, W. M. Reimer, V. S. Grigoryan, and C. R. Menyuk. A Mean Field Approach for Simulating Wavelength-Division Multiplexed Systems. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 12:443, 2000.
- [52] V. S. Grigoryan and A. Richter. Efficient approach for modeling collision-induced timing jitter in wdm return-to-zero dispersion-managed systems. *J. Lightwave Technol.*, 18:1148, 2000.
- [53] A. H. Liang, H. Toda, and A. Hasegawa. High-speed soliton transmission in dense periodic fibers. *Opt. Lett.*, 24:799, 1999.
- [54] A. H. Liang, H. Toda, and A. Hasegawa. Dense periodic fibers with ultralow four-wave mixing over a broad wavelength range. *Opt. Lett.*, 24:1094, 1999.
- [55] S. K. Turitsyn, M. P. Fedoruk, and A. Gornakova. Reduced-power optical solitons in fiber lines with short-scale dispersion management. *Opt. Lett.*, 24:869, 1999.
- [56] Alan C. Newell and Jerome V. Moloney. *Nonlinear Optics*. Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1992.

- [57] Y. Kodama and A. Hasegawa. Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-23:510, 1987.
- [58] Akira Hasegawa and Yiji Kodama. *Solitons in Optical Communications*. Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [59] A. Hasegawa and Y. Kodama. Guiding-center soliton in optical fibers. *Opt. Lett.*, 15:1443, 1990.
- [60] Matthias Wald and Falk Lederer. Dispersion-managed solitons in transmission lines with loss and gain. In *Conference on Lasers and Electro-Optics*, OSA Technical Digest, page 338, Washington DC, 2000. Optical Society of America.
- [61] Max Schubert and Bernd Wilhelmi. *Nonlinear Optics and Quantum Electronics*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [62] M. J. Li and D. A. Nolan. Fiber spin-profile designs for producing fibers with low polarization mode dispersion. *Opt. Lett.*, 23:1659, 1998.
- [63] Wolfgang Karthe and Rudolf Müller. *Integrierte Optik*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1991.
- [64] Govind P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, San Diego, 1995.
- [65] K. J. Blow and D. Wood. Theoretical Description of Transient Stimulated Raman Scattering in Optical Fibers. *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-25:2665, 1989.
- [66] P. V. Mamyshev and S. V. Chernikov. Ultrashort-pulse propagation in optical fibers. *Opt. Lett.*, 15:1076, 1990.
- [67] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. The Inverse Scattering Transform - Fourier Analysis for Nonlinear Problems. *Stud. Appl. Math.*, 53:249, 1974.
- [68] R. Meinel, G. Neugebauer, and H. Steudel. *Solitonen*. Akademie Verlag, Berlin, 1991.
- [69] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Nauka, Moskau, und Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 24. edition, 1989.

- [70] Eugen Fick. *Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie*. AULA-Verlag GmbH, Wiesbaden, 6. edition, 1988.
- [71] D. Anderson. Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers. *Phys. Rev. A*, 27:3135, 1983.
- [72] K. J. Blow, N. J. Doran, and D. Wood. Suppression of the soliton self-frequency shift by bandwidth-limited amplification. *J. Opt. Soc. Am. B*, 5:1301, 1988.
- [73] Y. Kodama, S. Wabnitz, M. Romagnoli, and M. Midrio. Role of third-order dispersion on soliton instabilities and interactions in optical fibers. *Opt. Lett.*, 19:165, 1994.
- [74] A. Hasegawa and Y. Kodama. Guiding-center soliton in fibers with periodically varying dispersion. *Opt. Lett.*, 16:1385, 1991.
- [75] S. Kumar and A. Hasegawa. Quasi-soliton propagation in dispersion-managed optical fibers. *Opt. Lett.*, 22:372, 1997.
- [76] P. A. Bélanger and N. Bélanger. Rms characteristics of pulses in nonlinear dispersive lossy fibers. *Opt. Commun.*, 117:56, 1995.
- [77] A. I. Maïmistov. Evolution of solitary waves which are approximately solitons of a nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Rev. E*, 48:727, 1993.
- [78] S. K. Turitsyn, V. K. Mezentsev, and E. G. Shapiro. Dispersion-managed Solitons and Optimization of the Dispersion Management. *Opt. Fiber Technol.*, 4:384, 1998.
- [79] S. K. Turitsyn, A. B. Aceves, C. K. R. T. Jones, V. Zharnitsky, and V. K. Mezentsev. Hamiltonian averaging in soliton-bearing systems with a periodically varying dispersion. *Phys. Rev. E*, 59:3843, 1999.
- [80] S. K. Turitsyn, T. Schäfer, K. H. Spatschek, and V. K. Mezentsev. Path-averaged chirped optical soliton in dispersion-managed fiber communication lines. *Opt. Commun.*, 163:122, 1999.
- [81] H. A. Haus and Y. Chen. Dispersion-managed solitons as nonlinear Bloch waves. *J. Opt. Soc. Am. B*, 16:889, 1999.

- [82] P. Tchofo Dinda, K. Nakkeeran, and A. B. Moubissi. Optimized Hermite-gaussian ansatz functions for dispersion-managed solitons. *Opt. Commun.*, 187:427, 2001.
- [83] S. K. Turitsyn, I. Gabitov, E. W. Laedke, V. K. Mezentsev, S. L. Musher, E. G. Shapiro, T. Schäfer, and K. H. Spatschek. Variational approach to optical pulse propagation in dispersion compensated transmission systems. *Opt. Commun.*, 151:117, 1998.
- [84] T. I. Lakoba, J. Yang, D. J. Kaup, and B. A. Malomed. Conditions for stationary pulse propagation in the strong dispersion management regime. *Opt. Commun.*, 149:366, 1998.
- [85] A. Berntson, N. J. Doran, W. Forysiak, and J. H. B. Nijhof. Power dependence of dispersion-managed solitons for anomalous, zero, and normal path-average dispersion. *Opt. Lett.*, 23:900, 1998.
- [86] T. I. Lakoba and D. J. Kaup. Influence of the Raman effect on dispersion-managed solitons and their interchannel collisions. *Opt. Lett.*, 24:808, 1999.
- [87] T. I. Lakoba and G. P. Agrawal. Effects of third-order dispersion on dispersion-managed solitons. *J. Opt. Soc. Am. B*, 16:1332, 1999.
- [88] J. P. Gordon. Dispersive perturbations of solitons of the nonlinear Schrödinger equation. *J. Opt. Soc. Am. B*, 9:91, 1992.
- [89] Y. Kodama and A. Maruta. Optimal design of dispersion management for a soliton - wavelength-division-multiplexed system. *Opt. Lett.*, 22:1692, 1997.
- [90] W. Forysiak, F. M. Knox, and N. J. Doran. Average soliton propagation in periodically amplified systems with stepwise dispersion-profiled fiber. *Opt. Lett.*, 19:174, 1994.
- [91] Saleh and Teich. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1991.
- [92] M. J. Ablowitz and G. Biondini. Multiscale pulse dynamics in communication systems with strong dispersion management. *Opt. Lett.*, 23:1668, 1998.
- [93] C. Desem and P. L. Chu. Soliton-Soliton Interaction. In J. R. Taylor, editor, *Optical Solitons - Theory and Experiment*, chapter 5. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

- [94] D. Anderson and M. Lisak. Bandwidth limits due to mutual pulse interaction in optical soliton communication systems. *Opt. Lett.*, 11:174, 1986.
- [95] Y. Kodama and K. Nozaki. Soliton interaction in optical fibers. *Opt. Lett.*, 12:1038, 1987.
- [96] V. I. Karpman and V. V. Solov'ev. A perturbational approach to the two-soliton systems. *Physica*, 3D:487, 1981.
- [97] V. I. Karpman and E. M. Maslov. Perturbation theory for solitons. *Sov. Phys. JETP*, 46:281, 1977.
- [98] L. F. Mollenauer, S. G. Evangelides, and J. P. Gordon. Wavelength Division Multiplexing with Solitons in Ultra-Long Distance Transmission Using Lumped Amplifiers. *J. Lightwave Technol.*, 9:362, 1991.
- [99] Y. Kodama and A. Hasegawa. Effects of initial overlap on the propagation of optical solitons at different wavelengths. *Opt. Lett.*, 16:208, 1991.
- [100] N. C. Panoiu, I. V. Mel'nikov, D. Mihalache, C. Etrich, and F. Lederer. Soliton generation in optical fibers for a dual-frequency input. *Phys. Rev. E*, 60:4868, 1999.
- [101] C. Etrich, N. C. Panoiu, D. Mihalache, and F. Lederer. Limits for interchannel frequency separation in a soliton wavelength-division multiplexing system. *Phys. Rev. E*, 63:16609, 2000.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Photonik am Institut für Festkörpertheorie und theoretische Optik für das Zustandekommen dieser Arbeit herzlich danken.

Zuerst sei hier Prof. Dr. F. Lederer genannt, der mir die Arbeit ermöglichte, und der vor allem in zahlreichen Diskussionen immer wieder mein Augenmerk auf wesentliche Fragestellungen der nichtlinearen Optik lenkte.

Besonders danken möchte ich Dr. I. M. Uzunov, Dr. S. Darmanyan und Prof. Dr. B. A. Malomed. Ihre Hinweise und Ratschläge gaben mir wiederholt Orientierung auf dem großen Gebiet der optischen Solitonen.

Bedanken möchte ich mich auch bei Dr. M. Göllés, Dr. C. Etrich, Dr. L. Leine und R. Iliev für die vielen Hinweise und Anregungen in unzähligen fachlichen Diskussionen.

Außerordentlicher Dank gilt nicht zuletzt auch meiner Frau Sigrun. Ohne ihre Geduld, ihr Verständnis und ihre Hilfe wäre das Entstehen dieser Arbeit nur schwer vorstellbar.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Weitere Personen waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder andere Personen) in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwertige Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die geltende Promotionsordnung der Physikalisch-Astronomischen Fakultät ist mir bekannt.

Ich versichere ehrenwörtlich, daß ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Jena, den 14. Oktober 2001